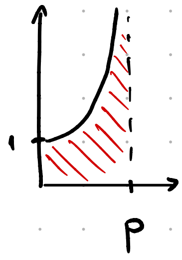
23.03.23

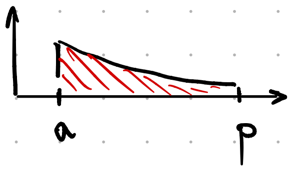
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$



незаконно защото не е деф за $x=1$

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \arcsin x(1-\varepsilon)$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \arcsin x(1-\varepsilon)$$



$p \to \infty$

Несобствени интеграли

Деф: Нека $f: [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ е интегруема във всеки интервал от вида $[a,p]$, където $p \geq a$. Ако съществува границата $\lim\limits_{p\to+\infty} \int_a^p f(t)dt$

Тогава казваме, че $\int_a^p f(t)dt$ е сходящ и пишем

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{p\to+\infty} \int_a^p f(t)dt \quad - \text{ I род}$$

Аналогично: $\int_{-\infty}^a f(t)dt = \lim\limits_{p\to-\infty} \int_{-\infty}^a f(t)dt$

Ако тази граница не съществува, интегралът е разходящ.

Деф: Нека $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ е интегруема във всеки интервал от вида $[a,p]$, за $p \in [a,b)$. Ако съществува границата $\lim\limits_{\substack{p\to b\\ p<b}} \int_a^p f(t)dt$, интегралът $\int_a^b f(t)dt$ се нарича сходящ и

$$\int_a^b f(t)dt := \lim_{\substack{p\to b\\ p<b}} \int_a^p f(t)dt \quad - \text{ II род с особеност в } b$$

Аналогично: $\int_a^b f(t)dt := \lim_{\substack{p \to a \\ p > a}} \int_p^b f(t)dt$ — II род с особеност в a

Елементарни свойства

- Линейност: $\int_a^{+\infty} f(t)dt$, $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ сходящи $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} (f(t)+g(t))dt = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt + \int_a^{+\infty} g(t)dt$$

$\lambda \in \mathbb{R}$: $\int_a^{+\infty} (\lambda f(t))dt = \lambda . \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$

- Смяна на променливите

(възможно е минаване от собствен в несобствен интеграл и обратно)

- $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ сходящ $\Leftrightarrow$ $\int_c^{+\infty} f(t)dt$ сходящ $\quad c > a$

$$\int_a^p f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^p f(t)dt \qquad p > c$$

- Повече от една особености

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt} + \underbrace{\int_a^{+\infty} f(t)\,dt}$$

главна стойност: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{p \to +\infty} \int_{-p}^{p} f(t)dt$

сходящ, ако и двата отделно са сходящи

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\ln t} = \int_0^{1/2} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1/2}^{1} \frac{dt}{\ln t} + \int_1^2 \frac{dt}{\ln t} + \int_2^{+\infty} \frac{dt}{\ln t}$$

Несобствени интеграли с неотрицателна подинтегрална функция

$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad \int_a^b f(x)dx \quad , \; f \geq 0$

$$\left. \begin{aligned} F(p) &= \int_a^p f(x)\,dx \\ f \geq 0 \; &\text{в } [a,+\infty) \end{aligned} \right\} \Rightarrow F \text{ растяща в } [a,+\infty)$$

$$F(p_2) - F(p_1) = \int_a^{p_2} f(x)dx - \int_a^{p_1} f(x)dx = \int_{p_1}^{p_2} f(x)dx \geq 0$$

$p_1 < p_2$

$p_1 < p_2$

$f \geq 0$

Лема: $F: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$. Тогава $\lim\limits_{p\to+\infty} F(p)$ същ. тстк F е ограничена отгоре растяща в $[a,+\infty)$

Док: $(\Rightarrow)$ $l = \lim\limits_{p\to+\infty} F(p) \Rightarrow \exists\, p_0 \geq a\ \forall p \geq p_0 : F(p) \in (l-1, l+1)$

$\Rightarrow F(p) < l+1 \quad \forall p \in [a,+\infty) \qquad a \leq p \leq p_0 \to F(p) \leq F(p_0) < l+1$

$p \geq p_0 \to F(p) < l+1$

$(\Leftarrow)$ $l \in \mathbb{R} = \sup\{F(p) : p \geq a\}$

$\varepsilon > 0 \qquad \underbrace{l+\varepsilon > l > l-\varepsilon}$ $\hookrightarrow$ същ $p_0 \geq a$, $F(p_0) > l - \varepsilon$

Нека $p \geq p_0$ е произволно:

$l+\varepsilon > l \geq F(p) \underset{\substack{\uparrow \\ F \text{ растяща}}}{\geq} F(p_0) > l-\varepsilon \quad \Big| \quad F(p) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \quad \forall p \geq p_0$

Принцип за сравнение I род

Нека $f, g : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ са интегруеми в $[a,p]$ $\forall p \geq a$. При това съществува $c \geq a$ такова че $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq c$

Тогава

а) Ако $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ е сходящ, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ е сходящ

б) Ако $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ е разходящ, то $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ е разходящ

БОО $c = a$

$F(p) = \int_a^p f(x)dx, \quad G(p) := \int_a^p g(x)dx, \quad F(p) \leq G(p) \quad \forall p \geq a$

F, G растящи в $[a,+\infty)$

$\left.\begin{matrix} G \text{ ограничена} \\ F \leq G \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} F \text{ ограничена} \\ \text{растяща} \end{matrix}\right\} \underset{\substack{\text{същ.} \\ \text{(Лема)}}}{\lim\limits_{p\to+\infty}} F(p) = \int_a^{+\infty} f(x)dx$

Следствие: $f \geq 0,\ g > 0$ в $[a, +\infty)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$ в $[a, +\infty)$ $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \sim \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$

едновременно сходящи/разходящи

$$\exists\, c \geq a\ \forall x \geq c: \quad \frac{l}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < 2l$$

$$0 < \frac{l}{2} g(x) < f(x) < 2 \cdot l \cdot g(x)$$

Скала I род

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda \neq 1: \lim_{p \to +\infty} \int_1^p \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{p \to +\infty} \frac{x^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\Bigg|_1^p = \lim_{p \to +\infty} \left(\frac{1}{1-\lambda} p^{1-\lambda} - \frac{1}{1-\lambda} \right) \begin{cases} +\infty, & \text{ако } 1-p > 0 \\ 0 - \dfrac{1}{1-\lambda}, & \text{ако } 1-p < 0 \end{cases}$$

$$\lambda = 1: \lim_{p \to +\infty} \int_1^p \frac{dx}{x} = \lim_{p \to +\infty} \ln x \Big|_1^p = \lim_{p \to +\infty} \ln p$$

Принцип за сравнение II род

Нека $f, g: [a, b) \to \mathbb{R}$ са интегруеми в $[a, p]$ $\forall p \in [a, b)$. При това съществува $c \in [a, b)$ такова че $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [c, b)$

Тогава

а) Ако $\int_a^b g(x)\,dx$ е сходящ, то $\int_a^b f(x)\,dx$ е сходящ

б) Ако $\int_a^b f(x)\,dx$ е разходящ, то $\int_a^b g(x)\,dx$ е разходящ

Скала II род

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda} = \begin{cases} \text{сходящ, ако } \lambda < 1 \\ \text{разходящ, ако } \lambda > 1 \end{cases}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \neq 1 \quad \lim_{\substack{p \to 0 \\ p > 0}} \int_p^1 \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{\substack{p \to 0 \\ p > 0}} \frac{x^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\Bigg|_p^1 = \lim_{\substack{p \to 0 \\ p > 0}} \left(\frac{1}{1-\lambda} - \frac{1}{1-\lambda} p^{1-\lambda} \right) = \begin{cases} +\infty, & \text{ако } 1-\lambda < 0 \\ \dfrac{1}{1-\lambda}, & \text{ако } 1-\lambda > 0 \end{cases}$$

$\lambda = 1: \lim\limits_{\substack{p\to 0\\ p>0}} \int_p^1 \frac{dx}{x^\lambda} = \lim\limits_{\substack{p\to 0\\ p>0}} (-\ln p)\Big|_p^1 = +\infty$

$\int_1^2 \frac{dx}{\ln x} = \int_0^1 \frac{dy}{\ln(1+y)} \sim \int_0^1 \frac{dy}{y}$ разходяща $\qquad \frac{\ln(1+y)}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1$

$x = 1+y$

$\int_0^1 \frac{-\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \frac{\frac{-\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \frac{-\ln(\sin x)}{x^{1/2-\lambda}} \qquad y = \ln(\sin x)$

$\sin x = e^y \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$

НДУ Коши за сходимост на $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

$f: [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

f интегруема в $[a, p]$ $\forall p \geq a$ $\qquad F(p) = \int_a^p f(x)dx$

$\lim\limits_{p\to+\infty} F(p)$ схожд. $\iff \forall \varepsilon>0\ \exists p_0 \geq 0\ \forall p' > p_0\ \forall p'' > p_0 : |F(p'') - F(p')| < \varepsilon$

$\left(\left| \int_{p'}^{p''} f(x)dx \right| < \varepsilon \right)$

Тогава

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сход. $\iff \forall \varepsilon>0\ \exists p_0 \geq a\ \forall p' \geq p_0\ \forall p'' \geq p' : \left| \int_{p'}^{p''} f(x)dx \right| < \varepsilon$ $\quad$ I род

$\int_a^b f(x)dx$ сход. $\iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall p' > b-\delta\ \forall p'' \geq p' : \left| \int_{p'}^{p''} f(x)dx \right| < \varepsilon$

Твърдение Ако $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ е сходящ, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ е сходящ

$\varepsilon > 0$

$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сх. $\iff \exists p_0 \geq a\ \forall p' \geq p_0\ \forall p'' > p' : \int_{p'}^{p''} |f(x)|dx < \varepsilon$

Тогава за $p' \geq p_0$ и $p'' > p'$ произв. имаме

$\left| \int_{p}^{p''} f(x)dx \right| \leq \int_{p}^{p''} |f(x)|dx < \varepsilon$

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ е абсолютно сходящ, ако $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ е сходящ

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ е условно сходящ, ако е сходящ и $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ е разходящ