Автомата на Бжозовски е минимален

Разгл: $f: Q_A \longrightarrow Q_{\mathcal{B}_L}$

$f(q) = \mathcal{L}_A(q)$

$\mathcal{A}$ - произволен автомат, всяко състояние е достижимо

$\mathcal{B}_L$ - автомат на Бжозовски

Ако два автомата са изоморфни, те разпознават един език. (Обратното не е в сила)

- Задача - L регулярен ли е?
  - Подход 1: Лема за покачването
  - Подход 2: Автомат на Бжозовски (ако е безкраен - нерегулярност [дост. е да намерим безкрайно мн-во състояния])

[Лемата не е пълен критерий - има случаи, в които нерегулярен език покрива изискванията]

Пример: L - нерегулярен език над $\Sigma = \{a, b\}$

M - $\{c\}^+ . L \cup \{a,b\}^*$ - нерегулярен

$M \cap \{c\}.\{a,b\}^* = c.L$ Док.

$$\boxed{\underbrace{\{a\}^*}_{\text{нерег}} . \underbrace{\{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}}_{\text{нерег}} = \underbrace{a^*}_{\text{рег.}}}$$

Нерег езици не са затв. относно операции

Ако L е регулярен

$\Updownarrow$

$\alpha^{-1}(L)$ е регулярен.

$L_1 = \{c a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ нерег. $\longleftarrow$ $c^{-1}(L_1) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ нерег

L е регулярен $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ $P_{reg}(L)$ е изпълнено

$P_{reg}(L)$: $\exists p \geq 1$

$\forall \alpha \in L \quad |\alpha| \geq p$

$\exists x, y, z : \alpha = x.y.z, \ |y| \geq 1, \ |xy| \leq p$

$(\forall i) \ [x y^i z \in L]$

Пример ($\not\Longleftarrow$) $P_{reg}(M)$ изпълнено

Нека $p \geq 1$, тогава $x = \varepsilon$ $y = c$ $z =$ ост. от думата

Нека $i = 0$, тогава $x y^0 z = \varepsilon \{a,b\}^* = \{a, b\}^*$

но $\{a,b\}^* \in M \Rightarrow M$ е регулярен (противоречие)

Нека L е регулярен $\qquad$ L е безкраен $\Longleftrightarrow \exists \alpha \in L : |Q| \leq |\alpha| \leq 2|Q|$

Граматики

$G = \langle \Sigma, V, S, R \rangle \quad \Sigma \cap V = \emptyset \qquad R \subseteq (V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^*$

V - множество от променливи

$\alpha \longrightarrow \beta$ - смяна под влияние на правило $(\alpha, \beta) \in R$

$S \in V$ - начална променлива

R - множество от правила

Пример: Генерираме граматика за $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Правила: $\boxed{\begin{array}{l} S \to aSb \\ S \to \varepsilon \end{array}}$ R

(1) S
(2) aSb
(3) $aaSbb$
(4) $aa\varepsilon bb$
$\overline{\quad aabb \quad}$

Граматики с $R \subseteq V \times (V \cup \Sigma)^*$ – безконтекстни

Пример: Дефинираме релация $\alpha \overset{l}{\Longrightarrow} \beta \iff (\exists l)[\alpha \overset{l}{\Longrightarrow} \beta]$

и генерираме граматика за нея

1) $\alpha \overset{0}{\Longrightarrow} \alpha$

3) $\dfrac{\alpha \overset{1}{\Longrightarrow} \beta \qquad \beta \overset{l}{\Longrightarrow} \gamma}{\alpha \underset{l+1}{\Longrightarrow} \gamma}$

2) $\dfrac{(A, \mu) \in R \qquad \lambda, \rho \in (V \cup \Sigma)^*}{\lambda A \rho \overset{1}{\Longrightarrow} \lambda \mu \rho}$

def. Език на граматика $L(G) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha\}$

пример. $L = \{a^n b^k c^{n+k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$

започваме отпред и отзад едновременно

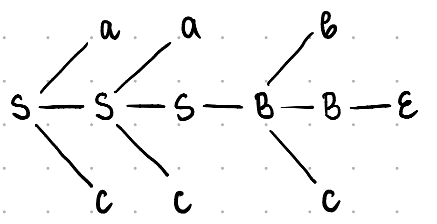
$S \to aSc$ $\quad a^n S c^n$
$S \to S$ $\quad \downarrow$
$S \to bSc$ $\quad a^n b^k c^k c^n$, но $b^k a^n c^n b^k$ е възм. (1)

За да избегнем (1) ще добавим променлива B

$S \to aSc$
$S \to B$
$B \to bBc$
$B \to \varepsilon$

Така имаме $S \overset{n}{\Longrightarrow} a^n S c^n$
$a^n S c^n \overset{1}{\Longrightarrow} a^n B c^n$
$B \overset{k}{\Longrightarrow} b^k B c^k$
$\dfrac{b^k B c^k \overset{1}{\Longrightarrow} b^k c^k}{S \overset{n+k+2}{\Longrightarrow} a^n b^k c^k c^n}$

Нека $\alpha = a^2 b c^3$ строим дърво

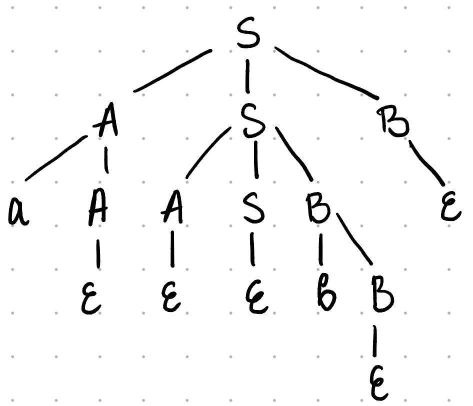


пример 2

$S \to ASB \qquad B \to bB$

$A \to aA \qquad B \to \varepsilon$

$A \to \varepsilon \qquad S \to \varepsilon$



Релация на дърво

1) $\dfrac{X \in V \cup \Sigma}{X \overset{0}{\Delta} X}$ — дърво с корен X и листа X

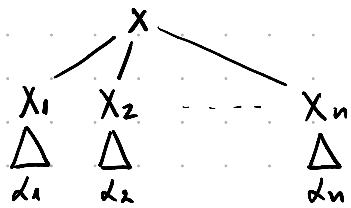
2) $\dfrac{X \to X_1 \dots X_n \quad X_1 \overset{l_1}{\Delta} \alpha_1, \dots, X_n \overset{l_n}{\Delta} \alpha_n}{X \overset{l}{\Delta} \alpha_1, \dots, \alpha_n}$

Ако от корен X има поддърветa с корени $X_1, \dots, X_n$ и листа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ всяко с височина $l_1, \dots, l_n$ получаваме дърво с корен X и листа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ с височина l

$l = 1 + \max\{l_1, \dots l_n\}$

def. Език на граматика (с дърво)

$L(G) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\Delta} \alpha\}$



пример

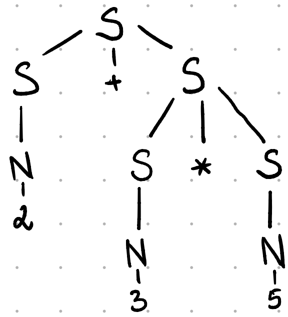
$S \to S+S \qquad N \to 1$

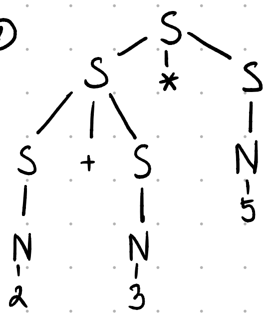
$S \to S*S \qquad N \to 2$

$S \to (S) \qquad \vdots$

$S \to N \qquad N \to 9$

Нека $\alpha = 2+3*5$

① 

② 

Граматика за аритметични операции

Граматиката трябва да е дефинирана така, че да същ. само едно дърво на извод за всяка дума