# Симетрични групи

22.03.24

**зад. 1** ДСД, че $S_n$ $(n \geq 2)$ се поражда от

А) транспозициите $(1\,2)(1\,3)\ldots(1\,n)$ — $S_n$ - всички пермутации (разбърквания) от 1 до n

$(i\,j) = (1\,j)(1\,i)(1\,j) = (1\,i)(1\,j)(1\,i)$

$$\begin{array}{ll} 1) & \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n \\ j & 2 & \ldots & i & \ldots & 1 & \ldots & n \end{pmatrix} \\ 2) & \;\; j \;\; 2 \ldots 1 \ldots i \ldots n \\ 3) & \;\; 1 \;\; 2 \ldots j \ldots i \ldots n \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 1) & \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n \\ i & 2 & \ldots & 1 & \ldots & j & \ldots & n \end{pmatrix} \\ 2) & \;\; i \;\; 2 \ldots j \ldots 1 \ldots n \\ 3) & \;\; 1 \;\; 2 \ldots j \ldots i \ldots n \end{array}$$

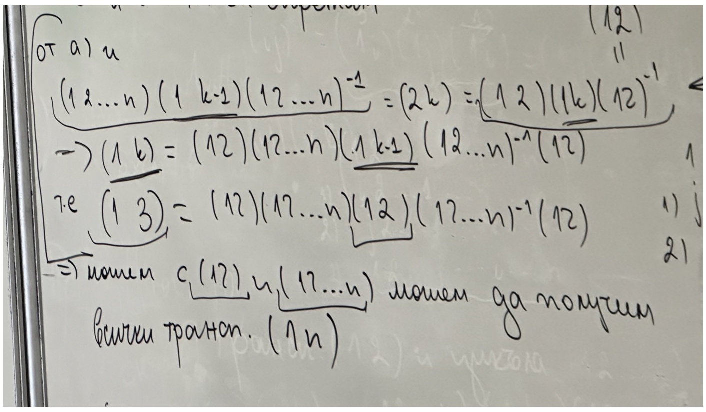
Б) трансп. $(1\,2)$ и цикъла $(1\,2\,\ldots\,n)$

$$(1\,k) = (1\,2\ldots n)(1\;\,k-1)\underbrace{(1\,2\ldots n)^{-1}}_{(2\,1\ldots n)}$$

1) $(1\,2\,\ldots\,n)(1\,2)(1\,2\ldots n)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \\ 1 & 3 & 2 & 4 & \ldots & n \end{pmatrix} = (2\,3) \in \langle (1\,2), (1\ldots n) \rangle$

$(1\,2\ldots n)(2\,3)(1\,2\ldots n)^{-1} = (3\,4) \Rightarrow (k\;(k+1)) \in \langle (1\,2), (1\ldots n) \rangle$

$(1\,2)(1\,2\ldots n)(1\,2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 3 & 1 & 4 & \ldots & n & 2 \end{pmatrix}$ $\quad ((k-1)\,k)\,(k\,(k+1))$




**2 зад:** кои от следните пермутации са спрегнати?

А) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Б) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Спрегнати цикли: $\exists \rho \in S_n \;\; \rho\sigma\rho^{-1} = \tau$

Два цикъла са спрегнати, ако имат еднакъв цикличен строеж

А) $\sigma = (1\,2\,5)(3\,4)(6)$ $\quad \tau = (1\,6)(2\,5\,4)(3)$ $\quad$ спрегнати ✓

Б) $\sigma = (1\,3)(2\,4)(5)(6)$ $\quad \tau = (1\,4\,5)(2\,6)(3)$ $\quad$ не спрегнати ✗

3 зад: $S_4$. $H = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma(4) = 4\}$ (4 ост на мястото си)

А) ДСД, че $H \leq S_4$

Ясно е, че $H \subset S_4$. Остава да докажем, че $H$ е затворено относно умн. на цикли и че

$\forall \sigma \in H \ \exists \sigma^{-1}$

Нека $\sigma_1, \sigma_2 \in H$ $\quad \sigma_1 \sigma_2(4) = \sigma_1(\sigma_2(4)) = \sigma_1(4) = 4 \Rightarrow \sigma_1, \sigma_2 \in H$

$\sigma_1 \sigma_1^{-1} = id = (1)(2)(3)(4)$

$\sigma_1 \in H \Rightarrow \exists \sigma_1^{-1}$ т.че е изп., но $\sigma_1^{-1}(4) = 4 \Rightarrow \sigma_1^{-1} \in H \Rightarrow \forall \sigma \in H \ \exists \sigma^{-1} \in H$

Б) ДСД, че $H \cong S_3$ $\quad \varphi: H \to S_3$

$\underline{1\ 2\ 3} \mid 4$ Нека $\sigma \in H \Rightarrow \sigma = \rho(4)$, като $\rho$ е цикъл само с елементи от 1 до 3 $\Rightarrow \rho \in S_3$

$\forall \sigma \in H \quad \varphi(\sigma) = \rho \in S_3$

1) доказваме, че $\varphi$ е хомоморфизъм

Нека $\sigma_1, \sigma_2 \in H$ $\quad \varphi(\sigma_1 \cdot \sigma_2) \overset{?}{=} \varphi(\overset{\rho_1(4)}{\sigma_1}) \cdot \varphi(\overset{\rho_2(4)}{\sigma_2}) = \rho_1 \cdot \rho_2$

$\varphi(\rho_1 \rho_2(4))$

$\quad = \rho_1 \rho_2$

2) Доказваме, че $\varphi$ е биекция

Нека $\sigma_1 \neq \sigma_2$, $\sigma_i \in H$, $\sigma_1 = \rho_1(4)$, $\sigma_2 = \rho_2(4)$

$\Rightarrow \rho_1 \neq \rho_2 \Rightarrow \varphi(\sigma_1) = \rho_1 \neq \rho_2 = \varphi(\sigma_2) \Rightarrow \varphi$ е инекция

$\Rightarrow$ <u>биекция</u>

Нека $\rho \in S_3 \Rightarrow \rho(4) \in H$ като $\varphi(\rho)^{-1} = \rho(4) \Rightarrow \varphi$ е сюрекция

В) ДСД че $S_4 = H \cup (12)(34)H \cup (13)(24)H \cup (14)(23)H$

Th Лагранж: $|S_4| = |H| \cdot [S_4 : H]$

$4! = 6 \cdot [S_4 : H]$

$\Rightarrow [S_4 : H] = 4$

$H = \langle (12), (13) \rangle = \langle (12), (123) \rangle$

$(14) \notin H \Rightarrow (14)H$ е съседен клас на $S_4$ по $H$

Аналог: $(24) \notin H$

$(2\,4) \overset{?}{\in} (1\,4)H$

Нормална група и фактор-група

$G$ - група, $H \leq G$

Казваме, че $H$ е нормална подгрупа на $G$, ако $\forall g \in G$ $gH = Hg$ и записваме $H \trianglelefteq G$

Всяка подгрупа на абелева група е нормална

$gH = Hg \mid g^{-1}$ $\quad gHg^{-1} = H \quad \forall g \in G$ => $H$ е нормална подгрупа, ако съдържа всеки свой спрегнат елемент

4 зад. ДСД, че $SL_n(F) \trianglelefteq GL_n(F)$
$\det A = 1 \quad \det A \neq 0$

Нека $A \in SL_n(F)$ и $G \in GL_n(F)$

$G^{-1}AG \overset{?}{\in} SL_n(F)$ $\qquad \det(G^{-1}AG) = \det(G^{-1}).\det(A).\det(G) = \frac{1}{\cancel{\det(G)}}.\det(A).\cancel{\det(G)} = \det(A)$

$\Rightarrow G^{-1}AG \in SL_n(F)$

$\Rightarrow SL_n(F) \trianglelefteq GL_n(F)$

5 зад: ДСД че ако $[G:H] = 2$, то $H \trianglelefteq G$

$Hg,\ g \notin H \Rightarrow Hg \cup H = G$

$\Rightarrow Hg = G \setminus H$

$gH,\ g \in H \Rightarrow gH \cup H = G$

$\Rightarrow gH = G \setminus H$

$gH = G \setminus H = Hg \quad \forall g \notin H$

6 зад. Намерете нормалните групи на $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$

$gH = Hg \ \forall g \in G$

Виждаме, че групата $\{-1, 1\}$ е абелева => тя е нормална подгрупа на $Q_8$

Нека $\ell$ е един от елементите на $Q_8 \setminus \{-1, 1\}$

$q\ell q^{-1} \in \langle \ell \rangle \Rightarrow \exists q_0 \in Q_8$ т.че $q_0 \ell q_0^{-1} = \ell \Rightarrow q_0 \ell = \ell q_0 \Rightarrow \ell$ и $q_0$ комутират,

което е възм. само за $\pm 1$

$\Rightarrow Q_8$ има единствена нормална подгрупа $\{-1, 1\} \trianglelefteq Q_8$