B_L

$Q_L = \{\omega^{-1}(L) \mid \omega \in \Sigma^*\}$ Ако L е регулярен $\Rightarrow |Q_L| < \infty \Rightarrow B_L$ е КДА и $\mathcal{L}(B_L) = L$

автоматните езици са регулярни

Пример:

$A_1 = \langle \Sigma, Q_1, \delta_1, q'_{start}, F_1 \rangle$ $A_2 = \langle \Sigma, Q_2, \delta_2, q''_{start}, F_2 \rangle$

$f: Q_1 \to Q_2$ задава изоморфизъм м/у A_1 и A_2 като:

f е биекция и: 1) $f(q'_{start}) = q''_{start}$

2) $q \in F_1 \Leftrightarrow f(q) \in F_2$

алтернативна дефиниция

3) $f(\delta_1(q,a)) = \delta_2(f(q),a)$ // $\delta_1(q,a) = p \Leftrightarrow \delta_2(f(q),a) = f(p)$

усложнява доказателствата

Твърдение $f(\delta_1^*(q,\alpha)) = \delta_2^*(f(q),\alpha)$ $\forall\alpha$

Доказателство: Индукция по $|\alpha|$:

- $\alpha = \varepsilon$: $f(\underbrace{\delta_1^*(q,\varepsilon)}_{q}) = f(q) = \delta_2^*(f(q),\varepsilon)$

- $\alpha = \beta a$ $f(\delta_1^*(q,\beta a)) = f(\delta_1(\underbrace{\delta_1^*(q,\beta)}_{p},a)) = f(\delta_1(p,a)) \overset{3)}{=} \delta_2(f(p),a) = \delta_2(f(\delta_1^*(q,\beta),a)) \overset{\text{ИП}}{=}$

$= \delta_2(\delta_2^*(f(q),\beta),a) = \delta_2^*(f(q),\beta a)$

Твърдение: Нека $f: \mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2$ ($\mathcal{A}_1$ е изоморфен на $\mathcal{A}_2$). Тогава $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$

Доказателство: $\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \Leftrightarrow \delta_1^*(q'_{start},\omega) \in F_1 \overset{2)}{\Leftrightarrow} f(\delta_1^*(q'_{start}),\omega) \in F_1 \overset{\text{ТВ}}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \delta_2^*(f(q'_{start}),\omega) \in F_2 \overset{1)}{\Leftrightarrow} \delta_2^*(q''_{start},\omega) \in F_2$

- $L = \mathcal{L}(B_L)$

- $\mathcal{L}(q) \overset{def}{=} \{\omega \in \Sigma^* \mid \delta_A^*(q,\omega) \in F_A\}$

Твърдение $\mathcal{L}_{B_L}(M) = \mathcal{M}$ за $\mathcal{M} \in Q_L$ ($\mathcal{M} = \alpha^{-1}(L)$) за някое α

Доказателство: $\omega \in \mathcal{L}_{B_L}(M) \Leftrightarrow \delta_1^*(\mathcal{M},\omega) \in F_L \Leftrightarrow \omega^{-1}(\mathcal{M}) \in F_L \Leftrightarrow \varepsilon \in \omega^{-1}(\mathcal{M}) \Leftrightarrow \omega \in \mathcal{M}$

Твърдение $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L$, $\mathcal{A}$ = ДКА. Тогава $|Q_L| \leq |Q_A|$. Защо?

Приемаме, че всяко състояние в автомата $\mathcal{A}$ е достижимо от началното.

(т.е $\mathcal{A}$ е свързан автомат)

Помощно озн. Тогава $\forall q \in Q_A \; \exists \alpha: \delta^*_{\mathcal{A}}(q_{start}, \alpha) = q$. Означаваме $q = q_\alpha$.

Твърдение $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(q_\alpha) = \alpha^{-1}(L)$

Доказателство: $\omega \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(q_\alpha) \Leftrightarrow \delta^*_{\mathcal{A}}(q_\alpha, \omega) \in F_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \delta^*_{\mathcal{A}}(\delta^*_{\mathcal{A}}(q_{start}, \alpha), \omega) \in F_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \delta^*_{\mathcal{A}}(q_{start}, \alpha\omega) \in F_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \alpha\omega \in L(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \alpha\omega \in L \Leftrightarrow \omega \in \alpha^{-1}(L)$

Разглеждаме $f: Q_A \to Q_L$ като $f(q) = f_A(q)$

Понеже $\mathcal{A}$ е свързан ДКА, то $q = q_\alpha$ за някое α.

$f(q_\alpha) = f_{\mathcal{A}}(q_\alpha) = \alpha^{-1}(L) \in Q_L$, $\alpha^{-1}(L) \in Q_L$

Разглеждаме q_α : $\underbrace{f(q_\alpha) = \alpha^{-1}(L)}_{f \text{ е сюрекция}}$ Тогава $\underline{|Q_L| \leq |Q_A|}$

Твърдение: Нека $\mathcal{A}$ е минимален ДКА за L. Тогава $A \cong B_L$

Помощно твърдение: За множествата A и B, ако $|A| = |B|$ и $f: A \to B$ е сюрекция, то f всъщност е биекция.

Доказателство: Щом $|Q_{\mathcal{A}}| = |Q_L|$, то $f: Q_{\mathcal{A}} \to Q_L$ като $f(q) = f_{\mathcal{A}}(q)$ е биекция

Проверка свойствата на изоморфизъм:

1) $f(q_{start}) = \mathcal{L}_A(q_{start}) = L$ - начало в B_L

2) $q \in F_A \Leftrightarrow \delta^*_A(q_\alpha, \varepsilon) \in F_A \Leftrightarrow \varepsilon \in \mathcal{L}_A(q_\alpha) \Leftrightarrow f(q_\alpha) \in F_L$ $\quad (F_L = \{M \in Q_L \mid \varepsilon \in M\})$

3) $\underbrace{f(\delta_A(q, a))}_{\mathcal{L}_A(\delta_A(q,a))} \stackrel{?}{=} \underbrace{\delta_L(f(q), a)}_{\delta_L(L_A(q), a) = a^{-1}(L_A(q))}$

$\omega \in \mathcal{L}_A(\delta_A(q,a)) \Leftrightarrow \delta^*_A(\delta(q,a), \omega) \in F_A \Leftrightarrow \delta^*_A(q, a\omega) \in F_\omega \Leftrightarrow a\omega \in L_A(q) \Leftrightarrow \omega \in a^{-1}(L_A(q))$

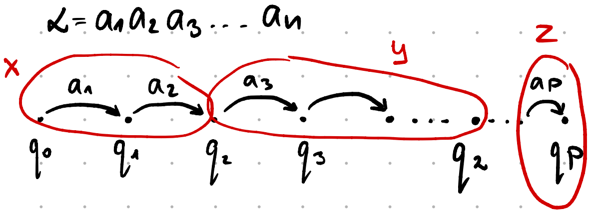
Заключение: Всички минимални автомати са изоморфни

Лема за покачването. Нека L е регулярен език

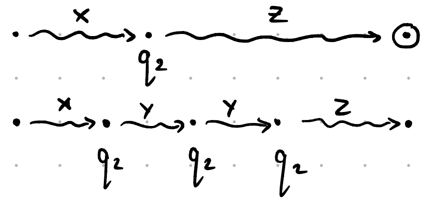
$$P_{reg}(L)\begin{cases}\exists p\geq 1\\ \forall \alpha\in L,\ |\alpha|\geq p\\ \exists xyz:\ \alpha=xyz,\ |y|\geq 1,\ |xy|\leq p\\ \forall i\in \mathbb{N}\quad xy^iz\in L\end{cases}$$

$L=\mathcal{L}(\mathcal{A})$ $p=|Q|$ $\alpha\in\mathcal{L}(\mathcal{A})$ и $|\alpha|\geq p$:

$\alpha=a_1a_2a_3\dots a_n$



има повторение на състояния



$xz\in L(\mathcal{A})$

$xyyz\in L(\mathcal{A})$

$y^0=\varepsilon$ $\quad xy^0z=xz$

$(\forall L\text{-безкр.})[L \text{ е регулярен} \Rightarrow P_{reg}(L)]$

$[\neg P_{reg}(L) \Rightarrow L \text{ не е регулярен}]$

$\neg P_{reg}(L)$:

$$\neg(\exists p\geq 1)(\forall\alpha\in L)[|\alpha|\geq p \Rightarrow (\exists xyz)[\alpha=xyz\wedge |y|\geq 1\wedge |xy|\leq p\wedge(\forall i)[xy^iz\in L]]]=$$

$$=(\forall p\geq 1)(\exists\alpha\in L)[|\alpha|\geq p\wedge(\forall xyz)[\neg(\alpha=xyz\wedge|y|\geq 1\wedge|xy|\leq p)\vee(\exists i)[xy^iz\notin L]]]=$$

$$=(\forall p\geq 1)(\exists\alpha\in L)[|\alpha|\geq p\wedge(\forall xyz)[\alpha=xyz\wedge|y|\geq 1\wedge|xy|\leq p\Rightarrow(\exists i)[xy^iz\notin L]]]$$

$\neg P_{reg}(L)$: (Лема в контрапозиция)

$\forall p\geq 1$ - произволно p

$\exists\alpha\in L$: $|\alpha|\geq p$ - избираме α (α зависи от p)

$\forall xyz$ - произволни със свойства

$\alpha=xyz\wedge|y|\geq 1\wedge|xy|\leq p$

$\exists i$ - избираме i (може да зависи от x,y,z)

$xy^iz\notin L$.

Пример: $L=\{a^nb^n\mid n\in\mathbb{N}\}$ не е регулярен

$(\forall)$ произволно $p\geq 1$

$(\exists)$ Избираме $\alpha\in L$ ($|\alpha|\geq p$)

Нека $\alpha=a^pb^p$

$(\forall)$ Произв. разбиване $\alpha=xyz$, $|xy|\leq p$, $|y|\geq 1$

$(\exists)$ Избираме i

Нека $i=0$. Тогава $xy^0z\notin L$ | $xy^2z=a^{p+k}\cdot b^p\notin L$

$\alpha=\overbrace{\underbrace{a\dots a}_{p}}^{xy}\overbrace{\underbrace{b\dots b}_{p}}^{z}$

Нека $y=a^k$, $k\geq 1$

$xy^0z=a^{p-k}\cdot b^p\notin L$,

Друго доказателство:

Def. $L_k=\{a^nb^{n+k}\mid n\in\mathbb{N}\}$

$L=L_0$ $\quad a^{-1}(L)=L_1$

$a^{-1}(L_1)=L_2$

$\dots$

$a^{-1}(L_k)=L_{k+1}$

Пример:

$L=\{\alpha\in\{a,b\}^*\mid \alpha \text{ съдържа равен брой } a \text{ и } b\}$

Ако L е регулярен, то

$L'=L\cap\{a\}^*\{b\}^*$ също би бил регулярен, но

$L'=\{a^nb^n\mid n\in\mathbb{N}\}$ не е регулярен.

$\Rightarrow L$ не е регулярен.