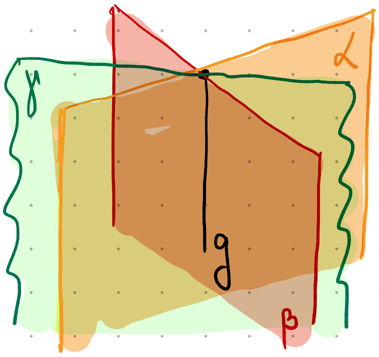
07.04.23

Уравнения на равнина и права в пространството

Сноп равнини

Нека $K: Oxyz$ ($K: O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$)

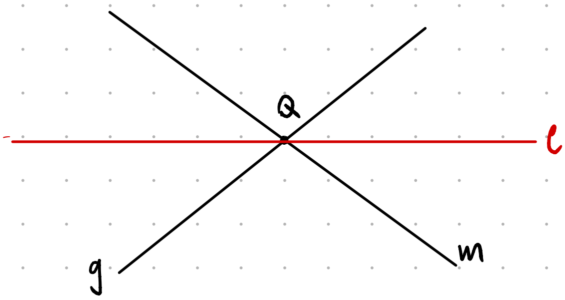
$$g: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \to \alpha \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_1 = 0 \to \beta \end{cases}$$



Равнина γ: $g \in \gamma$

Сноп равнини: $\gamma: \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$

$(\lambda, \mu) \neq 0$

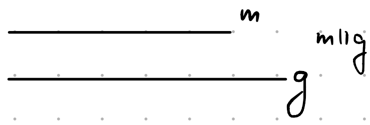


Сноп прави в равнината:

Нека $K: O\vec{e}_1\vec{e}_2$

$$\left.\begin{array}{l} m: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ g: A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{array}\right\} l = \lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

$(\lambda, \mu) \neq 0$



Въпроси за изпит:

① $K: O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, дадени са равнина $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ и права $g: \begin{cases} x = x_0 + sA \\ y = y_0 + sB \\ z = z_0 + sC \end{cases}$,

$g \parallel \vec{g}(A, B, C)$ $\quad \vec{n}_\alpha(A, B, C)$. Какво е взаимното положение на α и g?

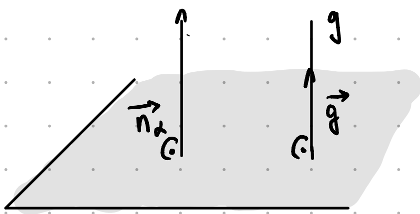
А) $g \subset \alpha$ $\quad$ В) $g \perp \alpha$

Б) $g \parallel \alpha$ $\quad$ Г) $g \cap \alpha = 1$т., $g \not\perp \alpha$

$\vec{n}_\alpha \parallel \vec{g}$

$\vec{n}_\alpha \perp \alpha$

$\Rightarrow \vec{g} \perp \alpha \Rightarrow g \perp \alpha$



② $K: O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ $\quad \alpha: 3x + \lambda y + \mu z + 2 = 0$

$\beta: 2x - y + 4z - 1 = 0$

$\lambda = ?, \mu = ?$, така че $\alpha \parallel \beta$

I начин

$\alpha: 3x + \lambda y + \mu z + 2 = 0$

$\beta: 3x - \frac{3}{2}y + 6z - \frac{3}{2} = 0$

$\lambda = -\frac{3}{2} \quad \mu = 6$

II начин

$$\frac{A_\alpha}{A_\beta} = \frac{B_\alpha}{B_\beta} = \frac{C_\alpha}{C_\beta} \neq \frac{D_\alpha}{D_\beta}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{\lambda}{-1} = \frac{\mu}{4} \neq \frac{2}{-1}$$

③ $k: O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ $\quad \alpha: x-2y-z-1=0 \Rightarrow \ell(x,y,z)=\ell(M)$ $\quad$ т. $P(0,1,3)$, т. $Q(4,0,-1)$

Какво е положението на P и Q спрямо α?

Реш.: $\ell(P).\ell(Q) \neq 0 \iff$ P и Q са в разл. полупространства

$\ell(P) = -6 \quad \ell(Q) = 4$

$\ell(P).\ell(Q) = -24 \Rightarrow$ P и Q са в разл. полупространства

④ Да се намери уравнението на отсечката AB, където $A(2,1,3)$, $B(3,0,7)$

$$\left.\begin{aligned} x &= 2+s(3-2) \\ y &= 1+s(0-1) \quad s\in[0,1] \\ z &= 3+s(7-3) \end{aligned}\right] \text{ уравнение на отсечката } AB$$

⑤ В пространството спрямо $k: O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ е дадено уравнението $2x+y-2=0$. Какво се задава с това уравнение?

а) равнина Oxy $\quad$ г) права $\parallel Oz$

б) права в Oxy $\quad$ д) равнина $\parallel Oz$

в) равнина $\ni Oz$

Координатни оси и уравненията им

$Oxy: z=0 \qquad Ox = Oxy \cap Oxz \left| \begin{aligned} z&=0 \\ y&=0 \end{aligned}\right.$

$Oxz: y=0$

$Oyz: x=0$

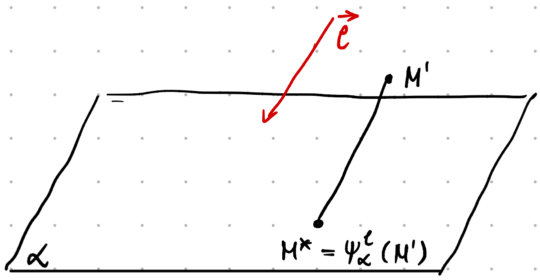
$Ox \begin{cases} x=s \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \quad Oy \begin{cases} x=0 \\ y=s \\ z=0 \end{cases} \quad Oz \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=s \end{cases}$

Успоредно проектиране в пространството

I случай: $k: O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ - афинни. Нека $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$ $\quad \vec{\ell}(a,b,c) \neq \vec{o}$, $\vec{\ell} \nparallel \alpha$

За всяка точка M' съпоставяме $M^* = \varphi_\alpha^\ell(M')$ такава, че

$M^* \in \alpha$ и $\overrightarrow{M'M^*} \parallel \vec{\ell}$ $\quad \forall M' \to M^* = \varphi_\alpha^\ell(M'): M^* \in \alpha$ и $\overrightarrow{MM^*} \parallel \vec{\ell}$



$M'(x', y', z')$ права $g: \begin{cases} \ni M'(x',y',z') \\ \parallel \vec{\ell}(a,b,c) \end{cases} \Rightarrow g: \begin{cases} x = x'+sa \\ y = y'+sb \\ z = z'+sc \end{cases}$

$g \cap \alpha = M^*$ $\quad \alpha: Ax+By+Cz+D=0$

$$A(x'+sa)+B(y'+sb)+C(z'+sc)+D=0 \qquad s=-\frac{Ax'+By'+Cz'}{Aa+Bb+Cc}$$

$$Ax'+By'+Cz'+D+s(Aa+Bb+Cc)=0$$

За да получим координатите на M^* заместваме s в уравнението на g

$$x^*=x'-\frac{Aax'+Bay'+Cay'+Da}{Aa+Bb+Cc}=\frac{(Bb+Cc)x'+Bay'-Caz'-Da}{Aa+Bb+Cc}$$

$$y^*=y'-\frac{Abx'+Bby'+Cby'+Db}{Aa+Bb+Cc}=-\frac{Abx'+(Aa+Cc)y'-Cbz'-Db}{Aa+Bb+Cc}$$

$$z^*=z'-\frac{Acx'+Bcy'+Ccz'+Dc}{Aa+Bb+Cc}=-\frac{Abx'-Bcy'-(Aa+Bb)z'-Db}{Aa+Bb+Cc}$$

$$\varphi_\alpha^l:\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}=\frac{1}{Aa+Bb+Cc}\begin{pmatrix}Bb+Cc & -Ba & -Ca\\ -Ab & Aa+Cc & -Cb\\ -Ac & -Bc & Aa+Bb\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}-\frac{D}{Aa+Bb+Cc}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}Bb+Cc & -Ba & -Ca & -Da\\ -Ab & Aa+Cc & -Cb & -Db\\ -Ac & -Bc & Aa+Bb & -Dc\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\1\end{pmatrix}$$

n-мерно афинно пространство. Афинни подпространства

Афинна координатна система в n-мерното афинно пространство се задава с $k: O\vec{e}_1\vec{e}_2\dots\vec{e}_n$

$\vec{v}(a^1, a^2, \dots, a^n)$, $\vec{u}_i(a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^n)$ $\quad i=1,2,\dots$

Хиперравнина

$\alpha = A^1x^1+A^2x^2+\dots+A^nx^n+C=0$

права $g \begin{cases} \ni \text{т. } M_0(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \\ \parallel \vec{p}(p^1, p^2, \dots, p^n) \end{cases}$ $\qquad g: \begin{cases} x^1 = x_0^1 + sp^1 \\ x^2 = x_0^2 + sp^2 \\ \dots \\ x^n = x_0^n + sp^n \end{cases}$

равнина $\alpha: \begin{cases} \ni M_0(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \\ \parallel \vec{u}_i(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^n) \\ i=1,2,\dots,n-1 \end{cases}$ $\qquad \begin{aligned} x^1 &= x_0^1 + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i^1 \\ &\dots \\ x^n &= x_0^n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i^n \end{aligned}$

Афинно подпространство $V^{(k)}: \begin{cases} x^1 = x_0^1 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^1 \\ \vdots \\ x^n = x_0^n + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^n \end{cases}$ $\qquad \dim V^{(k)} = k < n$

Пример: 2-мерна равнина в 4-мерно афинно подпространство

$\alpha: \begin{vmatrix} A_1^1x^1+A_1^2x^2+A_1^3x^3+A_1^4x^4+C_1=0 \\ A_2^1x^1+A_2^2x^2+A_2^3x^3+A_2^4x^4+C_2=0 \end{vmatrix}$ $\qquad \beta: \begin{vmatrix} B_1^1x^1+B_1^2x^2+B_1^3x^3+B_1^4x^4+D_1=0 \\ B_2^1x^1+B_2^2x^2+B_2^3x^3+B_2^4x^4+D_2=0 \end{vmatrix}$