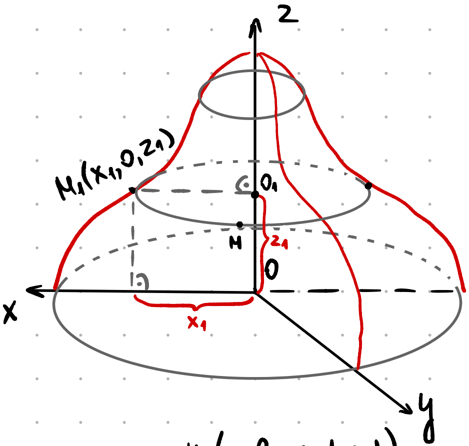
05.05.23

Ротационни повърхнини

Нека $K: Oxyz$ е ортонормирана

Нека $c: \left| \begin{array}{l} F(x,z)=0 \\ y=0 \end{array} \right.$ е крива в равн. Oxz



Нека т. $M_1(x_1,0,y_1) \in c$

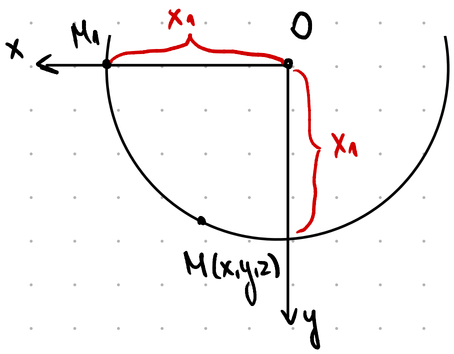
$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} F(x_1,z_1)=0 \\ y=0 \end{array} \right.$

т. $M(x,y,z)$ точка от окр. $k(y, O_1, r=|x_1|)$

в равнина $\alpha: \begin{cases} \ni M_1 \\ \perp Oz \end{cases}$

т. $O_1 = \alpha \cap Oz$ рад. $r=|x_1|$ $z=z_1$ $x,y:$

$|x_1| = \sqrt{x^2+y^2}$



$\left| \begin{array}{l} F(x_1,z_1)=0 \\ y=0 \end{array} \right.$

$z_1=z$

$x_1 = \pm\sqrt{x^2+y^2}$

$S: F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$

$x \to \pm\sqrt{x^2+y^2}$

$z \to z$

При ротация около Oz

Пример: Да се намери аналитично задаване на ротационна повърхнина S получена от завъртане на $c \left| \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} \\ y=0 \end{array} \right.$

А) Около Oz

Б) Около Ox

Решение:

А) $c: \left| \begin{array}{l} F(x,z)=0 \\ y=0 \end{array} \right.$ $\quad \frac{(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

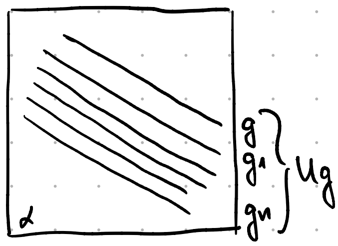
при рот. ок. Oz $\left[\begin{array}{l} x \to \pm\sqrt{x^2+y^2} \\ z \to z \end{array} \right.$ $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Б) $\left| \begin{array}{l} F(x,z)=0 \\ y=0 \end{array} \right.$ $\quad S: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

$x \to x$

$z \to \pm\sqrt{y^2+z^2}$

Безкрайни елементи и хомогенни координати в равнината



def. Нека g е права в равнината. Множеството $U_g = \{g_i : \parallel g$ и пр. $g\}$ се нарича безкрайна точка на g

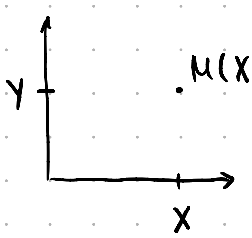
Правите m и g са успоредни когато $U_g \equiv U_m$

def. Множеството от всички безкрайни точки в равнината е безкрайната права на равнината - озн. ω

Хомогенни координати в равнината

Нека $K\, O\vec{e}_1, \vec{e}_2$ е афинна координатна система в равнината

• хомогенни координати на крайни точки

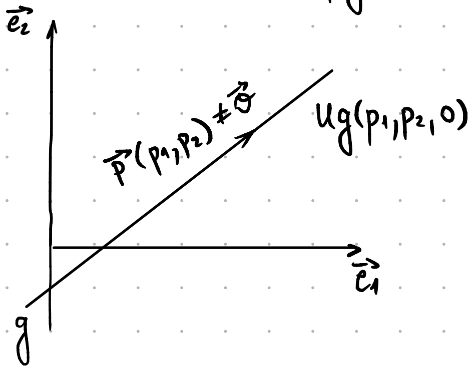


$M(X,Y)$ - нехомогенни координати

$M(x,y,t)$ - хомогенни координати $\quad X = \frac{x}{t} \quad Y = \frac{y}{t}$

пример: т. $M(3,5) \equiv$ т. $M(3,5,1) \equiv$ т. $M(21,35,7) \equiv$ т. $M(3.\rho, 5.\rho, \rho)$, $\rho \neq 0$

• хомогенни координати на безкрайни точки



Нека g е права и $g \parallel \vec{p}(p_1,p_2) \neq \vec{0}$

def. $U_g(p_1,p_2,0)$ - безкрайната точка на g

Нека $M(p_1,p_2,p_3)$

$M(p_1.s, p_2.s, p_3.s)$

1) ако $p_3 \neq 0$, то M е крайна точка с нехом. коорд. $\left(\frac{p_1}{p_3}, \frac{p_2}{p_3}\right)$

2) ако $p_3 = 0$, то $M(p_1,p_2,0)$ е безкр. точка и

$M(p_1,p_2,0) \in g \iff \vec{q}(p_1,p_2) \parallel g$

$(0,0,0)$ не са хомогенни координати в равнината

Уравнения на права в хомогенни координати

$g: aX + bY + c = 0 \Rightarrow a\frac{x}{t} + b\frac{y}{t} + c = 0 \qquad g: ax + by + ct = 0 \qquad g[a,b,c]$ коорд. на права

може $t = 0$

пример: $g: 3x + 2y - 4t = 0 \qquad \Rightarrow U(x,y,t)$

нека $t = 0 \Rightarrow 3x + 2y = 0 \quad y = -\frac{3}{2}x \qquad U_g(x, -\frac{3}{2}x, 0)$

нека $x = 2$

$U_g(2,-3,0)$

$\vec{g}(-2,3) \parallel g$

$g[a,b,c]$ $g[3,2,-4] \equiv g[-6,-4,8]$

безкр. права $\omega: t=0$ $\omega[0,0,1]$

Нека $M_1(x_1,y_1,t_1)$ Нека т. $M(x,y,t) \in M_1M_2$

$M_2(x_2,y_2,t_2)$

$M_1 \neq M_2$ (не са пропорц.)

1) $M_1M_2: \begin{vmatrix} x & y & t \\ x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \end{vmatrix} = 0$

общо уравнение

2) $\forall$ т. $M \in M_1M_2 \Rightarrow \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

т. $M = \lambda . M_1 + \mu M_2$

$\begin{vmatrix} x = \lambda x_1 + \mu x_2 \\ y = \lambda y_1 + \mu x_2 \\ t = \lambda t_1 + \mu t_2 \end{vmatrix}$

параметрично уравнение на права в хом. коорд.

Пример $M_1(3,-2,4)$

$M_2(0,5,0)$

$M_1M_2: \begin{vmatrix} x & y & t \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$20x + 0y - 15t = 0$

$4x - 3t = 0$

$M_1M_2: \begin{cases} x = 3\lambda \rightarrow \lambda = \frac{x}{3} \\ y = -2\lambda + 5\mu \\ t = 4\lambda \quad t = \frac{4x}{3} \end{cases}$

$4x - 3t = 0$

Док: Нека правата M_1M_2

$\begin{vmatrix} ax + by + ct = 0 \\ ax_1 + by_1 + ct_1 = 0 \\ ax_2 + by_2 + ct_2 = 0 \end{vmatrix} \iff \begin{vmatrix} x & y & t \\ x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \end{vmatrix} = 0$

система с неизвестни a, b, c

търсим ненулево решение

Линейни трансформации в равнината

$\mathbb{E}_2$ - евклидова равнина $\mathbb{E}_2^* = \mathbb{E}_2 \cup \omega$ (безкр. права) def. Нека C е 3×3 матрица с $\det(C)\neq 0$.

Линейна трансформация φ в $\mathbb{E}_2^*$ е изображение

$\varphi: \mathbb{E}_2^* \longrightarrow \mathbb{E}_2^*$ $\qquad \varphi:$ т. $M(x, y, t) \longrightarrow M^*(x^*, y^*, t^*)$

$$C\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ t^* \end{pmatrix}, \ \rho\neq 0$$

$\varphi:$ права $g[a\ b\ c] \longrightarrow g^*[a^*\ b^*\ c^*]$

$$(a\ b\ c)\cdot C^{-1} = \rho\,(a^*\ b^*\ c^*)$$

Пример: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ т. $M(3,1,2)$ $\qquad$ $C.M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$M(3,1,2) \longrightarrow \varphi(M) = M^*(5,1,6)$$

Тв: Нека M_i, $i=1,\dots,4$ са 4 точки в общо положение и

M_i^* $i=1,\dots,4$ са 4 точки в общо положение

$\Rightarrow \exists!$ лин. трансформация $\varphi: M_i \longrightarrow M_i^*$