30.03.23

# Редове. Числови редове

def: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\quad s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, ...., $s_n = a_1 + a_2 \dots + a_n$

$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ - редица от парциални суми на реда

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, ако е сходяща редицата от парциалните му суми $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$

Ако е сходящ, неговата сума се нарича $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

редица $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

ред $a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) \dots$

Изучаването на редовете наподобява това на редиците

Пример: 1) $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ $\quad x \in \mathbb{R}$ $\quad$ сходящо при $|x|<1$

$x \neq 1 \quad 1 + x + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-x}$

$x = 1 \quad 1 + 1 + \dots + 1$

редица от парц. суми: $1, 2, 3, \dots, n, \dots$

2) $b_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} e$ $\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

3) Хармоничен ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}}$$

$$s_{2^k} \geq 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{k} \qquad \frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k} \geq \frac{2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2}$$

НУ сходимост $\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходящ $\Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s$ не е достатъчно!

$S_{n-1} = a_1, a_2 + \dots + a_{n-1} \longrightarrow s$

Свойства линейност

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a, \sum_{n=1}^{\infty} b = b_1 \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = a b, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_1 = a_1$

$(a\, b_1) + (a_2 b_2) + \dots + (a_n b_n) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} a + b$

Свойство: Сходимост при редовете се запазва при прибавянето или задраскването на краен брой думи.

Твърдение $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е ходящ тстк. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbb{N}$:

$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$

$\Updownarrow$

$\forall \{\varepsilon > 0\}\ n \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbb{N}: |a_m + a_{m-2} - \dots + a_n|$

Редове с неотрицателен общ член

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0$

Принцип за сравнение

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ Некасему $n_0 \in \mathbb{N}$ такова, че $n \geq n_0$ е в сила

$0 \leq a_n \leq b_n$

Тогава а) Ако $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сх, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сх.

б) Ако $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е разх, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разх.

БОО $n_0 = 1$

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$\sigma_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$

$s_n \leq \sigma b_n$

$\langle \sigma_n \rangle$ сх $\Rightarrow \{\sigma_n\}$ огр. отгоре $\Rightarrow$ | $\{S_n\}$ огр. отгоре
$\Rightarrow$ | $\{S_n\}$ растяща $\Rightarrow \{S_n\}$ сх

Следствие

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b_n > 0 \qquad \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} l \in (0, +\infty)$$

Тогава двата реда са едновременно сходящи или разходящи

$\sum a_n \sim \sum b_n \qquad (\frac{l}{2}, 2l)$ околност на $l$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < 2l$$

$$0 < \frac{l}{2} b_n \leq a_n \leq 2l b_n$$

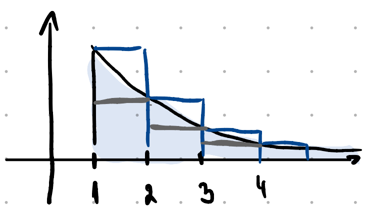
Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{n^2+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Интегрален критерий на Коши-Маклорен

$f: [1, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$
намаляваща $\Rightarrow$ интегруема

Твърдим, че $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ е сходящ



$n \in \mathbb{N}$, $x \in [n, n+1]$

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$$

$$f(n) = \int_n^{n+1} f(n)\,dx \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx = f(n+1)$$

Сумираме за $n = 1, 2, 3, \dots, N$:

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \geq \sum_{n=1}^{N} \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx \geq \sum_{n=1}^{N} f(n+1)$$

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \geq \int_{1}^{N+1} f(x)\,dx \geq \sum_{m=1}^{N+1} f(m) - f(1) \quad m = n+1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N+1} f(n) \leq f(1) + \int_{1}^{N+1} f(x)\,dx \leq f(1) + \int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx \Rightarrow \sum_{n=1}^{N+1} f(n)$$ огр. отгоре растяща $\Rightarrow$ сходящ

$$\Leftarrow \int_{1}^{N+1} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{N} f(n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

$\Rightarrow \left\{ \int_{1}^{N+1} f(x)\,dx \right\}_N$ огр. отгоре

$G(p) = \int_{1}^{p} f(x)\,dx$ растяща

$\lim_{p \to +\infty} G(p)$ същ

$\Rightarrow \int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}$ $\begin{cases} \text{сходящ за } \lambda > 1 \\ \text{разходящ за } \lambda \leq 1 \end{cases}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}(\ln n)^{\mu}}$ $\begin{cases} \text{сходящ за } \lambda > 1 \text{ или } \lambda = 1, \mu > 1 \\ \text{разходящ за } \lambda < 1 \text{ или } \lambda = 1, \mu \leq 1 \end{cases}$

Критерий на Даламбер

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$

(a) Ако съществува $\mu \in (0,1)$ такова, че $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \mu$ от някъде нататък,

то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ

Ако $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ от някъде нататък, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ

Доказателство:

$\mu < 1$ ; $n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$ : $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \mu$

$0 < \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \leq \mu, \quad 0 < \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \leq \mu, \quad \ldots$ к на брой пъти $, \quad 0 < \frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0+k-1}} \leq \mu$

$$0 < \frac{\cancel{a_{n_0+1}}}{a_{n_0}} \cdot \frac{\cancel{a_{n_0+2}}}{\cancel{a_{n_0+1}}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n_0+k}}{\cancel{a_{n_0+k-1}}} \leq \mu^k$$

$$0 < \frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0}} \leq \mu^k$$

$0 < a_{n_0+k} \leq \mu^k \cdot a_{n_0}$

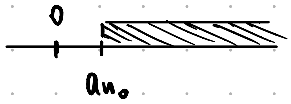
$0 \leq a_n \leq \mu^{n-n_0} \cdot a_{n_0} \quad \forall n \geq n_0 \qquad n = n_0 + k$

$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^n$ сходящ $\Rightarrow \mu \in (0,1)$

$\frac{a_{n_0}}{\mu^{n_0}}$ const $\Rightarrow \sum a_n$ сходящ спрямо принцип за сравнение

(Б) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \forall n \geq n_0$

$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \geq n_0$




$\Rightarrow a_n \geq a_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$

$a_n \in [a_{n_0}, +\infty) \quad \forall n \geq 0$

$a_{n_0} > 0 \Rightarrow a_n \underset{n \to \infty}{\not\to} 0$

Следствие: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n > 0 \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

Ако $l < 1$, то редът е сходящ

Ако $l > 1$, то редът е разходящ

$\boxed{l<1} \quad l < \mu < 1$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \mu \to$ (а)

$\boxed{l>1} \quad (1, +\infty)$ околност на $l$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \forall n \geq n_0 \to$ (Б) пример $\sum n^k \cdot q^n$ $\qquad \dfrac{(n+1)^k \cdot q^{n+1}}{n^k \cdot q^n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^k \cdot q \xrightarrow[n\to\infty]{} q \in (0,1)$

$k \in \mathbb{N}$

$q \in (0,1)$ $\qquad \Rightarrow$ сходящ

$x>0 \qquad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} \qquad \dfrac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \dfrac{x}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ сходящ

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n} \cdot e^n \qquad \dfrac{\frac{(n+1)!\, e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n! \cdot e^n}{n^n}} = \dfrac{\cancel{(n+1)}\, e}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cancel{(n+1)}} = \dfrac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ разходящ

Критерий на Коши $\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0$

(а) Ако съществува $\mu \in (0,1)$ такова, че $\sqrt[n]{a_n} \leq \mu$ от някъде нататък,

то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ

(Б) Ако $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ за безброй много стойности на $n \in \mathbb{N}$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ

(а) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} \leq \mu \quad \Rightarrow \quad 0 \leq a_n \leq \mu^n \ \forall n \geq n_0$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^n$ сходящ ($\mu \in (0,1)$), принцип за сравнение $\Big| \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходящ

Б) $n_1 < n_2 < \dots < n_n < \dots$

$\sqrt[n]{a_{n_k}} \geq 1, \ \forall k \in \mathbb{N}$

$a_{n_k} \geq 1, \forall k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad a_{n_k} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad a_n \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ разходящ

Следствие:

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l, \ a_n \geq 0$

- $l<1$ — сходимост на $\sum a_n$
- $l>1$ — разходимост на $\sum a_n$

Док самостоятелно

пример $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$ $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e}$ разходящ

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$ $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2} = \frac{1+\frac{1}{1+n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} ?$ сходящ

Ако $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = e$, то $\lim \sqrt[n]{a_n} = e$.

Пример (Двата критерия не работят едновременно (понякога)

Коши: Даламбер ✓

- $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2}+\dots$ $\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ отгоре ✗, $\frac{1/2}{1/2} = 1$

- $p>0,\ q>0$ $p+pq+p^2q+p^2q^2$ $n=2k \to a_n = p^k q^k$

$n=2k+1 \to a_n = p^{k+1}\cdot q^k$

Коши: ✓

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[2k]{p^k q^k} = p^{1/2} q^{1/2} = \sqrt{pq} \\ \sqrt[2k]{p^k q^k} = p^{\frac{k+1}{2k+1}} q^{\frac{k}{2k+1}} \xrightarrow[k\to\infty]{} p^{1/2} q^{1/2} = \sqrt{pq} \end{cases}$$

$\sqrt[n]{a_n} \to \sqrt{pq}$

$\sqrt{pq} < 1$ сходимост

$\sqrt{pq} > 1$ разходимост

$\sqrt{pq} = 1$ разходимост

Даламбер:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to q, p, q, p, \dots$ ✗

Даламбер дава по-добри резултати при дълги произведения (например факториели)

! $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ Даламбер $\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ отгоре

Коши $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n^{2/n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ отгоре

? не дава точен резултат

Допълнение към критерий на Даламбер - крит. на Раабе-Дюамел

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n>0 \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1+n.\alpha_n} \qquad \alpha_n = \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \qquad \{n\alpha_n\}$

(а) Ако съществува $\mu>1$ такова, че $n\alpha_n \geq \mu$ от някъде нататък, то $\sum a_n$ е сходящ

б) Ако $n\alpha_n \leq 1$ от някъде нататък, то $\sum a_n$ е разходящ

$$n a_n - (n+1)a_{n+1} = a_{n+1}\, n.\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) + n.a_{n+1} - (n+1)\,a_{n+1} =$$

$$= a_{n+1}.\, n\alpha_n - a_{n+1} = a_{n+1}\,(n\alpha_n - 1)$$

а) $n.\alpha_n \geq \mu \quad \forall n \geq n_0$

$\mu > 1$

$$n a_n - (n+1)a_{n+1} = a_{n+1}(n\alpha_n - 1) \geq (\mu-1)\,a_{n+1}$$

$$+\begin{cases} n_0 a_{n_0} - (n_0+1)\,a_{n_0+1} \geq (\mu-1)\,a_{n_0+1} \\ (n_0+1)\,a_{n_0+1} - (n_0+2)\,a_{n_0+2} \geq (\mu-1)\,a_{n_0+2} \\ \cdots \\ (n_0+k)\,a_{n_0+k} - (n_0+k+1)\,a_{n_0+k+1} \geq (\mu-1)\,a_{n_0+k+1} \end{cases}$$

$$n_0 a_{n_0} \geq n_0 a_{n_0} - (n_0+k+1)\,a_{n_0+k+1} \geq (\mu-1)\sum_{i=1}^{k+1} a_{n_0+i}$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^{k+1} a_{n_0+i} \leq \frac{n_0 a_{n_0}}{\mu-1} \qquad \mu-1>0$$

$$\sum_{i=1}^{n_0+k+1} a_i \leq \frac{n_0 a_{n_0}}{\mu-1} + \sum_{j=1}^{n_0} a_j \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \text{ са ограничени отгоре}$$

$a_i \geq 0 \Rightarrow$ редът е сходящ

(б) $n\alpha_n \leq 1 \quad \forall n \geq n_0$

$$n a_n - (n+1)a_{n+1} = a_{n+1}(n\alpha_n - 1) \leq 0$$

$n a_n \leq (n+1) a_{n+1} \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow n a_n \geq n_0 a_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow a_n \geq \underbrace{n_0 a_{n_0}}_{>0} \cdot \frac{1}{n} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$ разходящ