Безкрайни елементи и хомогенни координати в пространството 12.05.23 геом

Точките, правите и равнините ще нар. крайни $- \mathbb{E}_3$

def. Нека a е ~~равнина~~ права в пространството

множеството $U_a = \{a_i : a_i \parallel a$ и $a\}$ се нарича безкрайна точка на a

$g \parallel a \iff U_a = U_g$

def: Нека α е равнина. Множеството $u_\alpha = \{\alpha_i : \alpha_i \parallel \alpha$ и $\alpha\}$ се нарича безкрайна права на α. $\alpha \parallel \gamma \iff u_\alpha = u_\gamma$

Нека $\alpha \nparallel \beta \iff u_\alpha \not\equiv u_\beta$ Нека правата $a = \alpha \cap \beta \Rightarrow U_a = u_\alpha \cap u_\beta$

две безкрайни прави винаги се пресичат

Множеството от всички безкрайни точки и множеството от всички безкрайни прави образува безкрайната равнина на пространството Ω

$\mathbb{E}_3^* = \mathbb{E}_3 \cup \Omega$

Хомогенни координати в пространството

Нека $K\,O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ е афинна координатна система

крайните точки $M(X, Y, Z)$ - нехомогенни координати

$M(x, y, z, t)$ - хомогенни координати

$X = \frac{x}{t}$ $Y = \frac{y}{t}$ $Z = \frac{z}{t}$

пример $\left[\begin{array}{l} M(2,3,4,1) \\ M(2t, 3t, 4t, t) \end{array}\right.$

Хомогенни координати на безкрайните точки

Нека g е права (крайна) и $\vec{p}(p_1, p_2, p_3) \parallel g$

$\nparallel g$

по дефиниция безкрайната точка U_g на g има коорд. $(p_1, p_2, p_3, 0)$

$Q(q_1, q_2, q_3, q_4) \Rightarrow \begin{cases} 1) \text{ ако } q_4 \neq 0 \text{ е крайна и } Q\left(\frac{q_1}{q_4}, \frac{q_2}{q_4}, \frac{q_3}{q_4}\right) \text{ нехомогенни коорд.} \\ 2) \text{ ако } q_4 = 0 \Rightarrow Q(q_1, q_2, q_3, 0) \text{ е безкрайна точка и } \\ \quad Q \in g \iff \vec{q}(q_1, q_2, q_3) \parallel g \end{cases}$

Равнина и права в хомогенни координати в пространството

Нека $K\,O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ е афинна

Общо уравнение на ~~права~~ равнина в нехом. коорд. е:

$\alpha: aX + bY + cZ + d = 0, \quad X = \frac{x}{t}, Y = \frac{y}{t}, Z = \frac{z}{t}, \quad t \neq 0$

α. $ax+by+cz+dt=0$ уравнение на равнина в хомог. коорд.

$\alpha[a,b,c,d]$

Уравнение на права в хомогенни координати

$$g: \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1t=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2t=0 \end{cases}$$

Уравнение на безкрайната равнина Ω е:

$\Omega: t=0$ $\quad 0x+0y+0z+1.t=0 \quad \Omega[0,0,0,1]$

Пример да се намери уравнение на безкрайната права u_α на равнината α: $3x-y+5z+3t=0$

$$u_\alpha=\Omega\cap\alpha \quad \begin{cases} 3x-y+5z+3t=0 \\ t=0 \end{cases} \text{ уравн. на } u_\alpha$$

Уравнение на равнина през 3т.

Нека $A_1(x_1,y_1,z_1,t_1)$ неколинеарни точки

$A_2(x_2,y_2,z_2,t_2)$

$A_3(x_3,y_3,z_3,t_3)$

$$\alpha\ni A_1A_2A_3: \quad \alpha: \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \end{vmatrix}=0$$

Параметрично уравнение на α в хомогенни координати

$\forall$т. $M(x,y,z,t)\in\alpha$ опр. от $A_1A_2A_3$

$\exists\ \lambda,\mu,\nu: M=\lambda A_1+\mu A_2+\nu A_3$

$$\alpha: \begin{cases} x=\lambda x_1+\mu x_2+\nu x_3 \\ y=\lambda y_1+\mu y_2+\nu y_3 \\ z=\lambda z_1+\mu z_2+\nu z_3 \\ t=\lambda t_1+\mu t_2+\nu t_3 \end{cases}$$

пример: $A_1(0,1,1,0), A_2(1,2,0,0), A_3(1,0,0,1) \in\alpha$

$$\alpha \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Параметрично уравнение на права в хомогенни координати

Нека т. $A_i(x_i, y_i, z_i, t_i) \in g$ за $i=1,2 \Rightarrow \forall$ т. $M(x,y,z,t) \in g \Rightarrow \exists\ \lambda, \mu$

$(\lambda,\mu) \neq (0,0): M = \lambda A_1 + \mu A_2$

$$g = A_1A_2: \left| \begin{array}{l} x = \lambda x_1 + \mu x_2 \\ y = \lambda y_1 + \mu y_2 \\ z = \lambda z_1 + \mu z_2 \\ t = \lambda t_1 + \mu t_2 \end{array} \right.$$

Доказателство на формулите за уравнение на равнина през 3т. с дет. в параметричен вид

Нека равнината α: $A_i(x_i,y_i,z_i,t_i) \in \alpha \quad i=1,2,3$

$$\alpha: \left| \begin{array}{l} ax+by+cz+dt=0 \\ ax_1+by_1+cz_1+dt_1=0 \\ ax_2+by_2+cz_2+dt_2=0 \\ ax_3+by_3+cz_3+dt_3=0 \end{array} \right.$$

← хомогенна система линейни уравнения с неизвестни $(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)$

от АА: $\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \end{vmatrix} = 0$

Линейни трансформации в $\mathbb{E}_3^* = \mathbb{E}_3 \cup \Omega$

Деф: Нека C е 4×4 матрица с $\det C \neq 0$

C задава лин. трансф. $\varphi: \mathbb{E}_3^* \to \mathbb{E}_3^*$:

φ: т. $M(x,y,z,t) \to M^*(x^*,y^*,z^*,t^*)$: $\quad \varphi: C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \\ t^* \end{pmatrix}, s \neq 0$

при $\det C \neq 0$ φ: равнината $\alpha[a,b,c,d] \to \alpha^*[a^*,b^*,c^*,d^*]$

$\varphi: (a\ b\ c\ d)\, C^{-1} = \sigma (a^*\ b^*\ c^*\ d^*)$

Твърдение $\forall$ равнина α и $\forall$т. $M \in \alpha \Rightarrow \varphi(M) \in \varphi(\alpha)$ при $\det C \neq 0$

Док: Нека $C\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{M} = \rho \underbrace{\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \\ t^* \end{pmatrix}}_{\varphi(M)}$, $\underbrace{(a\ b\ c\ d)}_{\alpha}\, C^{-1} = \sigma(a^*\ b^*\ c^*\ d^*)$

$\|$

$$(a\ b\ c\ d)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (a\ b\ c\ d)\, E \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

$$\rho\sigma(a^*\ b^*\ c^*\ d^*)\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \\ t^* \end{pmatrix} = 0$$