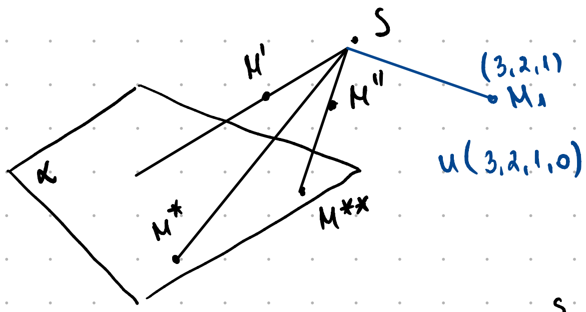
Централно проектиране в $\mathbb{E}_3^*$



def. Централно проектиране е линейна трансформация на $\mathbb{E}_3^*$:

Дадена т. S и равн. α: $S \notin \alpha$

$$\psi_\alpha^S : \mathbb{E}_3^* \setminus \{S\} \longrightarrow \alpha$$

$\forall$т. $M' \neq S$ $\quad \psi(M') = M^* = M'S \cap \alpha$

пример: ДСН аналитично задаване на центр. проектиране ψ_α^S с център $S(1,0,2,1)$, $\alpha: x-2y+z+t=0$ (проекционна равнина)

реш: нека $M'(x',y',z',t')$ $\qquad M'S \cap \alpha = M^*$

$M'S$: $M = \lambda M' + \mu S$

$x = \lambda x' + \mu$

$y = \lambda y'$

$z = \lambda z' + 2\mu$

$t = \lambda t' + \mu$

$\lambda x' + \mu - 2\lambda y' + \lambda z' + 2\mu + \lambda t' + \mu = 0$

$\lambda(x'-2y'+z'+t') + 4\mu = 0$

Нека $\lambda = -4$, $\mu = x'-2y'+z'+t'$

$x = -4x' + x' - 2y' + z' + t' = -3x' - 2y' + z' + t'$

$y = -4y' = -4y'$

$z = -4z' + 2x' - 4y' + 2z' + 2t' = +2x' - 4y' - 2z' + 2t'$

$t = -4t' + x' - 2y' + z' + t' = +x' - 2y' + z' - 3t'$

$$C = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$ аналитично задаване

Да се намери аналитично задаване на централното проектиране ψ_α^S с $S(x_0, y_0, z_0, t_0)$ в/у равнина $\alpha: ax+by+cz+dt=0$

Нека $M'(x',y',z',t')$ права $M'S$: $M = \lambda M' + \mu S$

$$M'S: \begin{cases} x = \lambda x' + \mu x_0 \\ y = \lambda y' + \mu y_0 \\ z = \lambda z' + \mu z_0 \\ t = \lambda t' + \mu t_0 \end{cases}$$

$a(\lambda x' + \mu x_0) + b(\lambda y' + \mu y_0) + c.(\lambda z' + \mu z_0) + d(\lambda t' + \mu t_0) = 0$

$\lambda(ax' + by' + cz' + dt') + \mu(ax_0 + by_0 + cz_0 + dt_0) = 0$

$\lambda = -(ax_0 + by_0 + cz_0 + dt_0)$

$\mu = (ax' + by' + cz' + dt')$

$$M'S: \begin{cases} x = -(\cancel{ax_0}+by_0+cz_0+dt_0).x' + (\cancel{ax'}+by'+cz'+dt').x_0 = -(by_0+cz_0+dt_0).x' + bx_0y' + cx_0z' + dx_0t' \\ y = -(ax_0+\cancel{by_0}+cz_0+dt_0).y' + (ax'+\cancel{by'}+cz'+dt').y_0 = ay_0x' - (ax_0+cz_0+dt_0).y' + cy_0z' + dy_0t' \\ z = -(ax_0+by_0+\cancel{cz_0}+dt_0).z' + (ax'+by'+\cancel{cz'}+dt').z_0 = az_0x' + bz_0y' - (ax_0+by_0+dt_0).z' + dz_0t' \\ t = -(ax_0+by_0+cz_0+\cancel{dt_0}).t' + (ax'+by'+cz'+\cancel{dt'}).t_0 = at_0x' + bt_0y' + ct_0z' - (ax_0+by_0+cz_0).t' \end{cases}$$

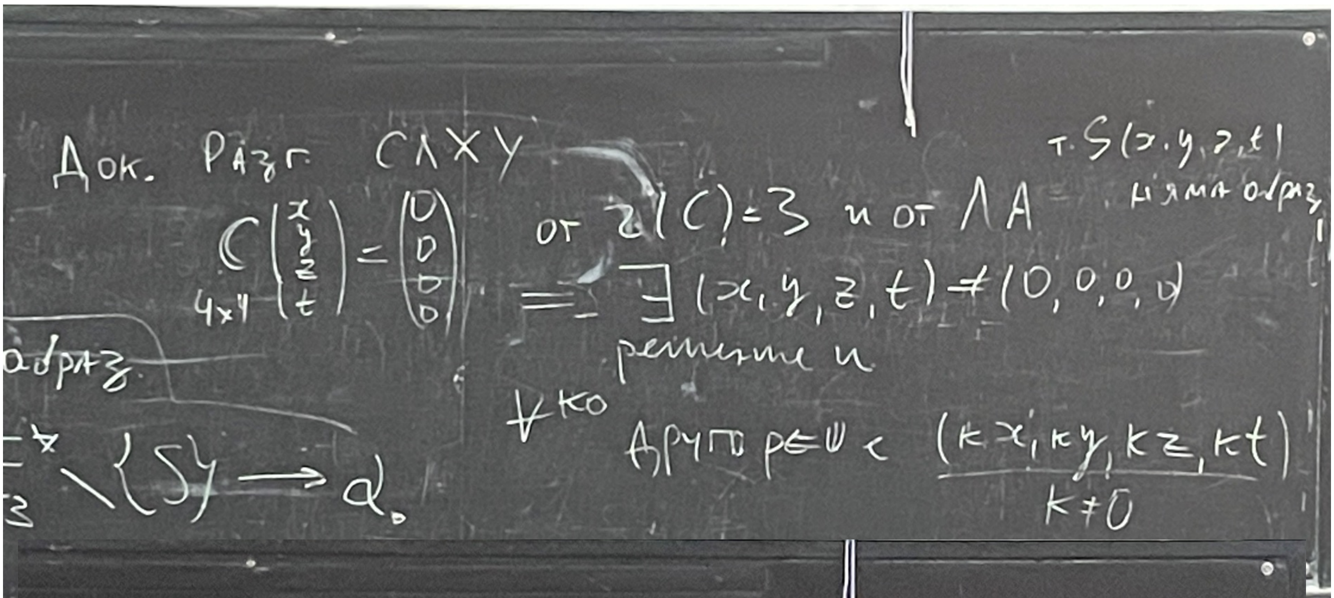
$$C = \begin{pmatrix} -(by_0+cz_0+dt_0) & bx_0 & cx_0 & tx_0 \\ ay_0 & -(ax_0+cz_0+dt_0) & cy_0 & ty_0 \\ az_0 & bz_0 & -(ax_0+by_0+dt_0) & tz_0 \\ at_0 & bt_0 & ct_0 & -(ax_0+by_0+cz_0) \end{pmatrix}$$

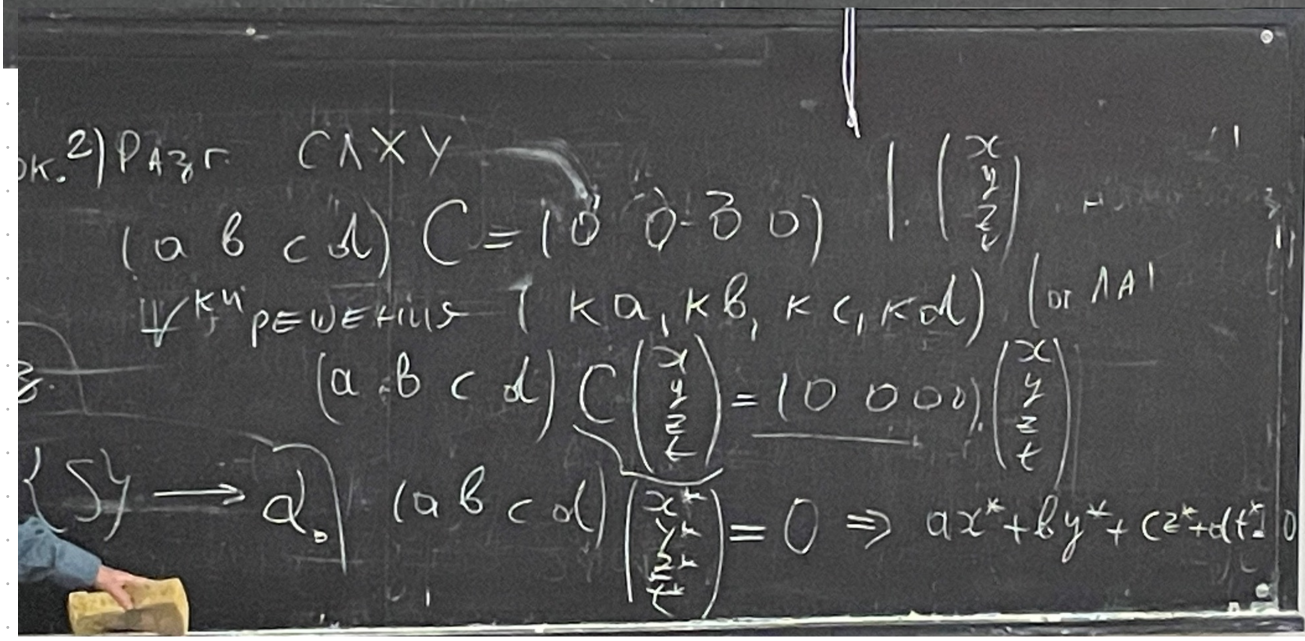
Тв. Нека C е матрица на централно проектиране $\Rightarrow rk(C)=3$

Тв. Нека C е 4×4 и $rk(C)=3 \Rightarrow$

1) $\exists!$ т. S, която няма образ

2) $\exists!$ равн. α: $\forall M \in E_3^* \setminus \{S\} \to \alpha$





пример (Тест)

Нека

$$C=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 1 & 1\\ 0 & -4 & 0 & 0\\ 2 & -4 & -2 & 2\\ 1 & -2 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

е матрица на ц. пр.

Да се намери прец. цен. S и прец. рав.

Реш. Нека $S(x,y,z,t)$

$\Rightarrow CS=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad C\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

прец. рав $\alpha: [a,b,c,d]$ т.е. $ax+by+cz+dt=0$

$(a\ b\ c\ d)\,C=(0\ 0\ 0\ 0)$

$$(a\ b\ c\ d)\begin{pmatrix}-3 & -2 & 1 & 1\\ 0 & -4 & 0 & 0\\ 2 & -4 & -2 & 2\\ 1 & -2 & 1 & -3\end{pmatrix}=$$

$-3a \quad +2c+d=0$

$-2a-4b-4c-2d=0$

$a \quad -2c+d=0$

$a \quad +2c-3d=0$

$(42)\ (43)$

$8c-8d=0 \Rightarrow \boxed{c=d}$

$-4b \quad -8d=0$

$-4c+4d=0$

$b \quad +2d=0 \quad \boxed{b=-2d}$

$a+2d-3d=0$

$a=d$

пример (Тест)

Нека

$$C=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 1 & 1\\ 0 & -4 & 0 & 0\\ 2 & -4 & -2 & 2\\ 1 & -2 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

$\alpha: x-2y+z+t=0$

$(d,-2d,d,d) \quad d=1$

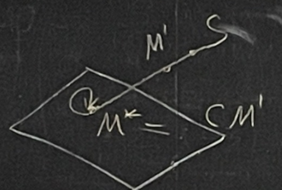
$-3a \quad +2c+d=$

$-2a-4b-4c-2d=$

$a \quad -2c+d=$

$a \quad +2c-3d=$

Тв C е матрица на ц. пр. $\Leftrightarrow C^2=C$



$M^*=CM^*=C(CM')=C^2M'$

$d=0 \Rightarrow \boxed{c=d}$

$d=0$

$CM'=C^2M'$

$\parallel$

M^*