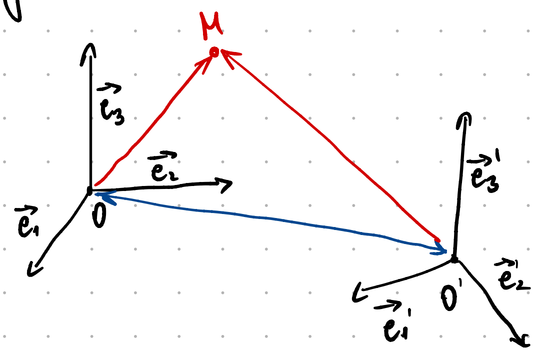
Формули за смяна на афинна координатна система в пространството



Нека $K: O\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ и $K': O'\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'$

$O'(a,b,c)\ K$ $\quad$ $O(0,0,0)\ K$

$\vec{e}_1'(t_{11},t_{21},t_{31})\ K$ $\quad$ $\vec{e}_1(1,0,0)\ K = 1e_1+0e_2+0e_3$ $\quad$ $M(x,y,z)\ K$

$\vec{e}_2'(t_{12},t_{22},t_{32})\ K$ $\quad$ $\vec{e}_2(0,1,0)\ K$ $\quad$ $M(x',y',z')\ K'$

$\vec{e}_3'(t_{13},t_{23},t_{33})\ K$ $\quad$ $e_3(0,0,1)\ K$

$$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$$

$$xe_1+ye_2+ze_3 = \underbrace{ae_1+be_2+ce_3}_{\vec{OO'}} + \underbrace{x'e_1'+y'e_2'+z'e_3'}_{\vec{O'M}}$$

$$xe_1+ye_2+ze_3 = ae_1+be_2+ce_3+x'(t_{11}e_1+t_{21}e_2+t_{31}e_3)+y'(t_{12}e_1+t_{22}e_2+t_{32}e_3)+z'(t_{13}e_1+t_{23}e_2+t_{33}e_3)$$

$$\boxed{\begin{array}{l|l} e_1: & x = a+t_{11}x'+t_{12}y'+t_{13}z' \\ e_2: & y = b+t_{21}x'+t_{22}y'+t_{23}z' \\ e_3: & z = c+t_{31}x'+t_{32}y'+t_{33}z' \end{array}}$$

формули за смяна

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{array}}_{T} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

матрица на прехода

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}$$

Деф. K и K' се наричат еднакво ориентирани ако $\det T > 0$

K и K' се наричат противоположно ориентирани ако $\det T < 0$

Следствие: от e_1,e_2,e_3 и e_1',e_2',e_3' са ЛНЗ, то $\det T \neq 0$.

Деф. Ориентация в пространството се задава чрез избор на една координатна система K. Всяка координатна система K', която се получава от K с T (матрица на прехода) с $\det T > 0$ се нарича положително ориентирана (S^+). Аналог. за $\det T < 0$ е отрицателно ориентирана (S^-)

Примерна задача $K: Oe_1, e_2, e_3$ и $K': Oe_1', e_2', e_3'$ $O'(5,0,0)$

$e_1' = e_2 + e_3$, $e_2' = e_3$ $e_3' = e_1$

1) т. $M(\overset{x'}{1}, \overset{y'}{0}, \overset{z'}{3})$ K' ? K 2) $\vec{a}(0,3,1)$ K' ? K 3) еднакво ориентирани?

Реш:

1) M: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} e_1' & e_2' & e_3' \end{matrix} \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0 \Rightarrow$ да

2) $\vec{a}$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} e_1' & e_2' & e_3' \end{matrix} \end{array} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

K Oe_1, e_2, e_3 и Еднаква ориентация?

А) $K': O'e_2, e_1, e_3$ Б) $K': O'e_1, e_3, e_2$ В) $K': O'e_3 e_2 e_1$

$\det T \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0$

противоположни

Скаларно, векторно и смесено произведение на вектори

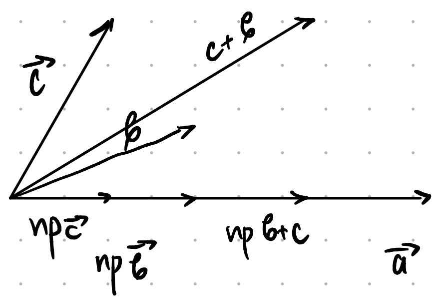
1. Скаларно произведение $\vec{a}\vec{b} = |a||b|.\cos\measuredangle(a,b)$

Свойства 1) $a.b = b.a$ 2) $(\lambda a)b = \lambda(a.b)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

3) $a.(b+c) = ab + ac$ 4) $a^2 \geq 0$ и $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ 5) $a \perp b \Leftrightarrow a.b = 0$

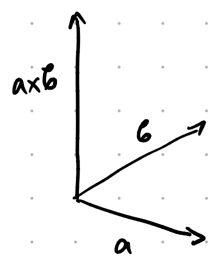
задача $|a|\, \text{пр}_{\vec{a}}(b+c) = |a|\text{пр}_{\vec{a}}\, b + |a|\text{пр}_{\vec{a}}\, c$

$a.b = |a||b|\cos\sphericalangle(a,b) =$
$= |a|\,\text{пр}_{\vec{a}}\, b$



$a^2 = a.a = |a||a|\cos\sphericalangle(a,a)$

дeф | векторно произведение
1) $a\times b \perp a, b$
2) $|a\times b| = |a||b|\sin\sphericalangle(a,b)$
3) $\{a, b, a\times b\} \in S^+$



свойства

1) $a\times b = -b\times a$ 2) $(\lambda a)\times b = \lambda(a\times b)$ 3) $a\times(b+c) = a\times b + a\times c$

4) $S_\Delta = \frac{1}{2}|a\times b|$

Пример $a^2.b^2 - (ab)^2 = (a\times b)^2$

Док: $a^2.b^2 - (ab)^2 = a^2.b^2 - \big(|a||b|\cos\sphericalangle(a,b)\big)^2 =$

$= a^2 b^2 - (|a||b| - |a||b|\sin\sphericalangle(a,b)) =$

Смесено произведение

Деф $(abc) = (a\times b).$ $(ab).c$ | $ab \times c$
$= |a||b|\cos\sphericalangle(a,b)\times c$

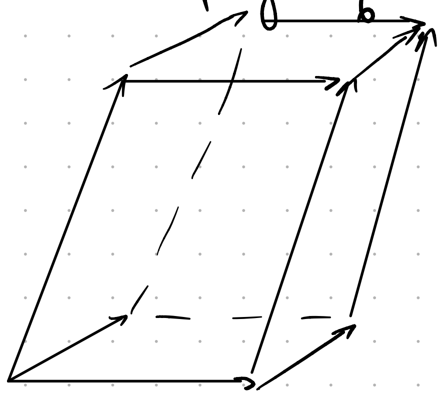
Свойства

1) $V_{\text{тетраедър}} = \frac{1}{6}(abc)$ 2) $(abc) > 0$, ако $a, b, c \in S^+$

< 0, ако $a, b, c \in S^-$

$= 0$, ако a, b, c лин. зависими

Док. $V_{\text{тетраедър}} = \frac{1}{6}(abc)$ $V_{\text{паралелепипед}} = (abc)$



$$(abc) = (a\times b).c = |a\times b||c| =$$
$$= \underbrace{|a\times b|}_{B}\underbrace{|c|\cos\measuredangle(a\times b, c)}_{h} =$$
$$= B.h$$

$$(a\times b)c = a(b\times c) \qquad (\lambda a)\times b = \lambda(a\times b)$$

Произведения в координатен вид

Нека $K: Oe_1e_2e_3$ е аф. коорд. система

$a(x_1, y_1, z_1)$

$b(x_2, y_2, z_2)$

I скаларно

$$a.b = (x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3)(x_2e_1 + y_2e_2 + z_2e_3) =$$
$$= x_1x_2e_1^2 + x_1y_2\underset{0}{e_1e_2} + x_1z_2\underset{0}{e_1e_3} +$$
$$y_1x_2\underset{0}{e_1e_2} + y_1y_2e_2^2 + y_1z_2\underset{0}{e_2e_3} +$$
$$+ z_1x_2\underset{0}{e_1e_3} + z_1y_2\underset{0}{e_2e_3} + z_1z_2e_3^2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$K\ Oe_1, e_2, e_3$ ортонормирана $e_1 \perp e_2,\ e_1 \perp e_3,\ e_2 \perp e_3$ $|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1$

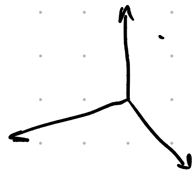
$$|a| = \sqrt{a^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

II. Векторно $a\times b = (x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3)\times(x_2e_1 + y_2e_2 + z_2e_3) =$

$$= x_1x_2\underset{0}{e_1\times e_1} + x_1y_2e_1\times e_2 + x_1z_2e_1\times e_3$$
$$y_1x_2e_2\times e_1 + y_1y_2\underset{0}{e_2\times e_2} + y_1z_2e_2\times e_3 +$$
$$z_1x_2e_3\times e_1 + z_1y_2e_3\times e_2 + z_1z_2\underset{0}{e_3\times e_3} =$$

$$= (x_1y_2 - y_1x_2)e_1\times e_2 + (x_1z_1 - z_1x_2)e_1\times e_3 + (y_1z_2 - z_1y_2)e_2\times e_3$$

К: $O e_1, e_2, e_3$ ортонормирана и S^+



$e_3 = e_1 \times e_2$

$e_1 = e_2 \times e_3$

$e_2 = e_3 \times e_1$

$(x_1 y_2 - y_1 x_2)\, e_1 \times e_2 + (x_1 z_2 - z_1 x_2)\, e_1 \times e_3$

$+ (y_1 z_2 - z_1 y_2)\, e_2 \times e_3$

$a \times b \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$

$c(x_3, y_3, z_3)$

$abc = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$