Граматики

def. Граматика наричаме $G = \langle \Sigma, V, S, R \rangle$ където: (в общия случай)

Σ - крайна азбука (ако има само една променлива S в граматиката, подразбираме нея за начална)

V - крайно мн-во от променливи, $V \cap \Sigma = \emptyset$

беленжим с главни латински букви

$S \in V$ - начална променлива

R - крайно мн-во правила $R \subseteq (V \times \Sigma)^* \times (V \times \Sigma)^*$

$\langle \alpha, \beta \rangle \in R$ съкращаваме $\alpha \to \beta$

пример:

1 $S \to aXS$	5 $X \to SX$
2 $SS \to Xaa$	6 $X \to abS$
3 $SS \to SaS$	7 $aS \to Sa$
4 $X \to XS$	8 $S \to a$

def: Извод на дума β от дума α:

$\alpha \vdash \beta$ (β може да се получи от α с едно преобразуване)

$\alpha \vdash^* \beta$ (β може да се получи от α с няколко преобразувания)

т.е. $\alpha = \beta$ или има редица $\alpha \vdash \alpha_1 \vdash \alpha_2 \vdash \dots \vdash \alpha_n = \beta$

пример:

$$S \vdash^{①} aXS \vdash^{④} aXSS \vdash^{③} aXSaS \vdash^{⑦} aXSSa \vdash^{⑥} aabSSSa \vdash^{3\times ⑧} aabaaaa$$

def. $\mathcal{L}(G) = \{ \alpha \in \Sigma^* \mid S \vdash^* \alpha \}$ език на граматика

def. • Казваме, че граматиката G е безконтекстна, ако $R_G \subseteq V \times (\Sigma \cup V)^*$

• Казваме, че L е безконтекстен (контекстно-свободен), ако има безкон. гр. G: $\mathcal{L}(G) = L$

• Казваме, че граматиката G е регулярна, ако $R \subseteq V \times (\{\varepsilon\} \cup \Sigma . V)$

пример: ① $S \to aSb$, $S \to \varepsilon$ $\qquad S \vdash \varepsilon$, $aSb \vdash ab$, $a^2Sb^2 \vdash a^2b^2$, $\ldots$, $a^nSb^n \vdash a^nb^n$ $\qquad \mathcal{L}(G) = \{a^nb^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

екв. на

$S \to aSb \mid \varepsilon$

$$X \to \alpha X \beta \;\Rightarrow\; \alpha^n X \beta^n$$

② Σ^* е безконтекстен

| c_1 | c_2 | c_3 | … | c_n |

$\gamma \in \Sigma^*$

$S \to \sigma_1 S \mid \sigma_2 S \mid \ldots \mid \sigma_n S \mid \varepsilon$

$\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$

③ Σ^+

$S \to aS \mid bS \mid a \mid b$

④ $\emptyset$

$S \to aS \mid bS$

⑤ $L = \{\alpha\}$

$S \to \alpha$

⑥ $L = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$

$S \to \alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \ldots \mid \alpha_n$

Ако позволим безкраен брой правила,
има граматика за всеки език: $L \vdash (S \to \alpha)_{\alpha \in L}$ $\qquad$ невалидно

⑦ $L = \{\alpha . \alpha^{rev} \mid \alpha \in \Sigma^*\}$ $\qquad \alpha^{rev}$ – α записана наобратно

X

| $c_1\ c_2\ c_3 \ldots c_n$ | $c_n \ldots c_3\ c_2\ c_1$ |

$S \to aSa \mid bSb \mid \varepsilon$

$S \vdash aSa \vdash abSba \vdash abba$

⑧ $L = \{a^n b^m a^m b^n \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ $\qquad S \to aSb \mid X$

X, S

$X \to bXa \mid \varepsilon$

⑨ $L = \{a^n b^k c^{n+k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$

| a^n | b^k | c^{n+k} |

$a^n b^k c^k c^n$ $\qquad$ X, S

$S \to aSc \mid X$
$X \to bXc \mid \varepsilon$

не е същото като

$S \to aSc \mid \boxed{aXc}$ форсира поне 1 ср.
$X \to bXc \mid \varepsilon$

⑩ $L = \{a^n b^k \mid n > k\}$ $\qquad n > k \iff$ има $t \in \mathbb{N}$: $n = k + t + 1$

| $a \ldots a$ | $b \ldots b$ |
n, k

$n \geq k \iff$ има $t \in \mathbb{N}$: $n = k + t$

$L = \{a^{k+t+1} b^k \mid k, t \in \mathbb{N}\}$

| $a \ldots$ | $\ldots a$ | $b \ldots b$ |
k, t+1, k

$S \to aSb \mid aX$
$X \to aX \mid \varepsilon$

| $S \to aSb \mid X$
$X \to aX \mid a$

$\underbrace{a\ldots}_{t+1}\underbrace{\ldots a}_{k}\underbrace{b\ldots b}_{k}$

$S \to aS \mid aX$ | $S \to aSb \mid aS \mid a$

$X \to aXb \mid \varepsilon$

$L = \{a\}^+ . \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

(11) $L = \{a^n b^k \mid n \geq 2k\} = \{a^n b^k \mid$ има t: $n = 2k+t\} = \{a^{2k+t} b^k\}$

$\underbrace{a\ldots a}_{2k}\underbrace{a\ldots a}_{t}\underbrace{b\ldots b}_{k}$

$S \to aaSb \mid X$

$X \to aX \mid \varepsilon$

$L = \{a^n b^k \mid 2n \geq k\} = \{a^n b^k \mid 2n = k+t\} = \{a^n b^k \mid 2n = k+t$ и (k,t четни или k,t нечет.)$\} =$

$= \underbrace{\{a^n b^k \mid 2n = k+t \text{ и } k,t \text{ нечетни}\}}_{L_1} \cup \underbrace{\{a^n b^k \mid 2n = k+t \text{ и } k,t \text{ четни}\}}_{L_2}$

$L_2 = \{a^n b^k \mid 2n = k+t$ и $k = 2k_1, t = 2t_1\} =$

$= \{a^n b^k \mid 2n = 2k_1 + 2t_1 \quad n = k_1 + t_1\} =$

$= \{a^{k_1+t_1} b^{2k_1} \mid k_1, t_1 \in \mathbb{N}\}$

$S_2 \to aS_2 \mid X$

$X \to aXbb \mid \varepsilon$

$L_1 = \{a^n b^k \mid 2n = k+t$ и $k = 2k_1 + 1, t = 2t_1 + 1\} =$

$= \{a^n b^k \mid 2n = 2k_1 + 1 + 2t_1 + 1, \quad n = k_1 + t_1 + 1 =$

$= \{a^{k_1+t_1+1} b^{2k_1+1} \mid k_1, t_1 \in \mathbb{N}\}$

$S_1 \to aYb$

$Y \to aY \mid Z$

$Z \to aZbb \mid \varepsilon$

Обединение на граматики за L_1 и L_2

$S \to S_1 \mid S_2 \qquad S_1 \to aYb \qquad S_2 \to aS_2 \mid X$

$Y \to aY \mid Z \qquad X \to aXbb \mid \varepsilon$

$Z \to aZbb \mid \varepsilon$