def. Нека G е граматика (най-много безконтекстна) 31.05.23

Дърво на извод за G дефинираме по следния начин:

(корен на $\mathbb{T}$ (root), височина на $\mathbb{T}$ (h), дума, записана в листата (word))

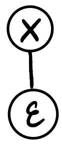
- нека $\xi \in V \cup \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

  редица $a_1,\dots,a_n$ ще бележим $[a_1,\dots,a_n]$
  когато $n=0$, празна редица

  Тогава $\mathbb{T} = \langle \xi, [\,] \rangle$ визуално ξ

  $root(\mathbb{T}) = \xi \quad h(\mathbb{T}) = 0 \quad word(\mathbb{T}) = \xi$

- нека $X \in V$ и $X \to \varepsilon \in R$ визуално

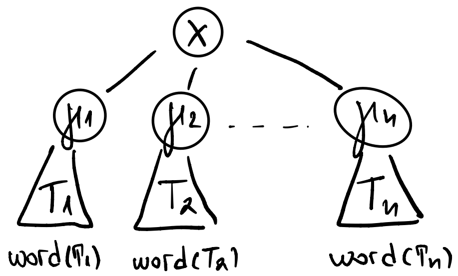
  тогава $\mathbb{T} = \langle X, [\varepsilon, [\,]] \rangle$ е дърво

  $root(\mathbb{T}) = X \quad h(\mathbb{T}) = 1 \quad word(\mathbb{T}) = \varepsilon$

- нека $X \in V$, $X \to \mu_1,\dots,\mu_n \in R$ и $\mu_1,\dots,\mu_n \in \Sigma \cup V$

  нека $\mathbb{T}_1,\dots,\mathbb{T}_n$ са вече построени дървета и

  $root(\mathbb{T}_1) = \mu_1, \dots, root(\mathbb{T}_n) = \mu_n$ визуално

  отляво надясно конкат.

  $\mathbb{T} = \langle X, [\mathbb{T}_1,\dots,\mathbb{T}_n] \rangle$ е дърво

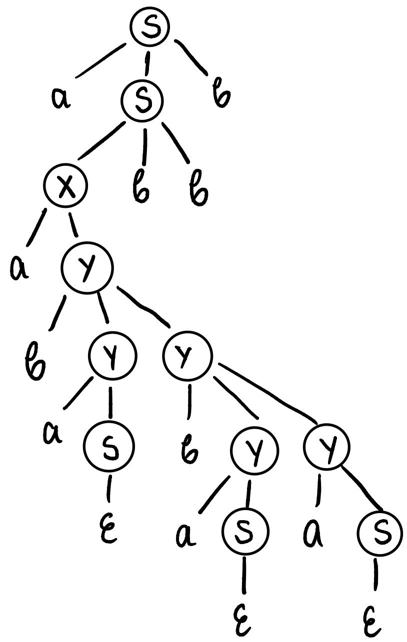
  $h(\mathbb{T}) = 1 + \max\limits_{1 \le i \le n} h(\mathbb{T}_i)$

  $word(\mathbb{T}) = word(\mathbb{T}_1) \circ word(\mathbb{T}_2) \circ \dots \circ word(\mathbb{T}_n)$

G: $S \to aSb \mid Xbb \mid \varepsilon$

$X \to aY \mid bXb$

$Y \to aS \mid bYY$



$S \to aSb \to aXbbb \to aaYbbb \to$

$\to aabYYbbb \to aabaSYbbb \to$

$\to aaba\varepsilon Ybbb \to aababYYbbb \to$

$\to aababaSYbbb \to aababaSaSbbb \to$

$\to aababa\varepsilon a\varepsilon bbb \to aababaabbb \to a^2\{ba\}^2 a\{b\}^3$

$word(\mathbb{T}) = aaba\varepsilon ba\varepsilon a\varepsilon bbb$

def. Нека G е най-много безконтекстна

Нека X е променлива

- $\mathcal{L}(X) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid$ има дърво на извод $\mathbb{T}$ за гр. G с $root(\mathbb{T}) = X$, $word(\mathbb{T}) = \alpha\}$
- $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(S)$, където S е нач. пром. на G
- $\mathcal{L}_{\leq n}(X) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid$ има дърво $\mathbb{T}$ с $root(\mathbb{T}) = X$, $word(\mathbb{T}) = \alpha$, $h(\mathbb{T}) \leq n\}$

Постановка: даден е език L, построили сме граматика G, искаме да докажем, че $L = \mathcal{L}(G)$.

схема на док. ① за всяка променлива X определяме език L_X, за който ще докажем, че за всички променливи X, $\mathcal{L}(X) = L_X$.

примери: i) $L_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\quad G_1: S \to aSb \mid \varepsilon \quad L_S = L_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

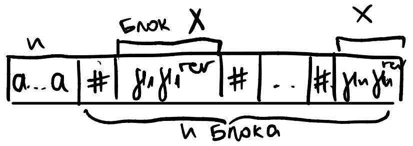
ii) $L_2 = \{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

$G_2: \quad S \to aSc \mid X \qquad L_S = L_2 = \{a^n b^m c^{m+n} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

$\qquad X \to bXc \mid \varepsilon \qquad L_X = \{b^m c^m \mid m \in \mathbb{N}\}$

iii) $L_3 = \{a^n \# \alpha_1 \# \alpha_2 \# \ldots \# \alpha_n \mid n \in \mathbb{N}$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L\}$

където $L = \{y y^{rev} \mid y \in \Sigma^*\}$



$G_3: \quad S \to aS\#X \mid \varepsilon \qquad L_S = L_3$

$\qquad X \to aXa \mid bXb \mid \varepsilon \qquad L_X = L = \{y y^{rev} \mid y \in \Sigma^*\}$

② за всяка променлива X доказваме, че $\mathcal{L}(X) \subseteq L_X$ чрез индукция по построението на дърво с $root(\mathbb{T}) = X$

③ за всяка променлива X доказваме, че $L_X \subseteq \mathcal{L}(X)$ чрез индукция по $|\alpha|$ за $\alpha \in L_X$

примери: за стъпка ② i) да докажем, че $\mathcal{L}(S) \subseteq L_S \rightsquigarrow$ за $\alpha \in \Sigma^*$ ако $\alpha \in \mathcal{L}(S)$, то $\alpha \in L_S$

при наличие на 2) и 3) имаме $\mathcal{L}(S) \subseteq L_S$ и $L_S \subseteq \mathcal{L}(S)$

и $\mathcal{L}(S) = L_S$. понеже избрахме $L_S = L$, то $\mathcal{L}(S) = L_S = L = \mathcal{L}(G)$

с инд. по постр. на дърво T с $root(T) = X$ за G_1. док. че ако $word(T) \in \Sigma^*$, то $word(T) \in L_X$

<u>в случая:</u> с индукция по $h(T)$: ако $root(T) = X$, то $word(T) \in L_X$

<u>индукция:</u> • $h(T) = 0$, $root(T) = S$

S $word(T) = S \notin \Sigma^*$, тогава $\nexists T$ с $h(T) = 0$ и $root(T) = S$ и $word(T) \in \Sigma^*$ е вярно $word(T) \in L_S$

тривиална база!

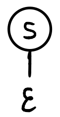
индуктивно предположение • Нека знаем, че ако T е дърво за G, $h(T) \leq n$ и $word(T) \in \Sigma^*$, то ако $root(T) = S$, то $word(T) \in L_S$

индуктивна стъпка • Нека T е дърво на извод и $word(T) \in \Sigma^*$ и $h(T) = n+1$

как изгл. T? първото ниво се определя от някое правило

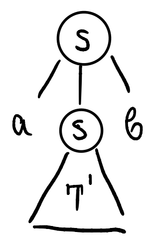
понеже $|V| = 1$, директно $root(T) = S$

I случай: Iво ниво се определя от правило $S \rightarrow \varepsilon$



Тогава $word(T) = \varepsilon$, дир. проверка показва, че $\varepsilon = a^0 b^0 \in L_X$

II случай: Iво ниво се определя от правило $S \rightarrow aXa$



$word(T') \in \Sigma^*$

Тогава има дърво T' такова че $root(T') = S$ и $h(T') \leq h(T) - 1 = n$ и $word(T') \in \Sigma^*$ и

$word(T) = a . word(T') . b$

понеже $word(T') \in \Sigma^*$ и $root(T') = S$ и $h(T') \leq n$,

ИП важи за T', т.е. $word(T') \in L_S = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Тогава има $k \in \mathbb{N}$: $word(T') = a^k b^k$

тогава $word(T) = a . word(T') . b = a . a^k b^k . b = a^{k+1} b^{k+1} \in L_S$

iii) искаме да док. че $\mathcal{L}(S) \subseteq L_S$ и $\mathcal{L}(X) \subseteq L_X$

с индукция по $h(T)$ където T е дърво на извод за G_3 и $word(T) \in \Sigma^*$, док. се:

едновременно
1. ако $root(T) = S$, то $word(T) = L_S$
2. ако $root(T) = X$, то $word(T) = L_X$

индукция по $h(T)$:

<u>База</u>: $h(T)=0$ понеже няма дървета T с $h(T)=0$ и $word(T) \in \Sigma^*$ и $root(T) \in V$, то $\forall$ дърво T с $h(T)=0$ и $word(T) \in \Sigma^*$ е вярно, че:

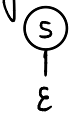
- ако $root(T) = S$, то $word(T) \in L_S$
- ако $root(T) = X$, то $word(T) \in L_X$

индуктивно предположение: Нека знаем $\forall$ дърво на извод T с $h(T) \leq n$ и $word(T) \in \Sigma^*$ е вярно, че:
- ако $root(T) = S$, то $word(T) \in L_S$
- ако $root(T) = X$, то $word(T) \in L_X$

индуктивна стъпка: Нека T е дърво, $word(T) \in \Sigma^*$ и $h(T) = n+1$ ще док., че (1) и (2) са изпълнени за T.

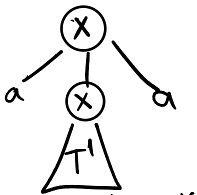
разгл. (2): Нека $root(T) = X$

I случай: Iво ниво се определя от правило $X \to \varepsilon$



Тогава $word(T) = \varepsilon$, дир. проверка показва, че $\varepsilon = \varepsilon\varepsilon^{rev} \in L_X$

II случай: Iво ниво се определя от правило $S \to aXa$



$word(T') \in \Sigma^*$

Тогава има дърво T' такова че $root(T') = X$ и $h(T') \leq n$ и $word(T') \in \Sigma^*$

Тогава по ИП и по 2), $word(T') \in L_X$

Тогава има $\mu \in \Sigma^*$, $word(T') = \mu . \mu^{rev}$,

$word(T) = a.word(T').a = a.\mu.\mu^{rev}.a = (a\mu).(a\mu)^{rev} \in L_X$

III сл. аналогично на сл.2

разгл. 1):

I случай: Iво ниво се определя от правило $S \to \varepsilon$

Тогава $word(T) = \varepsilon$, дир. проверка показва, че $\varepsilon \in L_S$

II случай: Iво ниво се определя от правило $S \to aS\#X$

Тогава има дърво T' такова че $root(T') = S$ и