def. Асимптотично положителни ф-ии 23.02.24

Функцията $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ е асимптотично положителна ако $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0$ е изпълнено $f(n) > 0$

Видове функции спрямо асимптотиката g - асимпт. пол. ф-я

- $h = O(g) := \{ f \mid \exists c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0$ е изп. $0 \leq f(n) \leq c.g(n) \}$ $\quad h \preceq g$
- $h = o(g) := \{ f \mid \forall c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0$ е изп. $0 \leq f(n) \leq c.g(n) \}$ $\quad h \prec g$
- $h = \Omega(g) := \{ f \mid \exists c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0$ е изп. $0 \leq c.g(n) \leq f(n) \}$ $\quad h \succeq g$
- $h = \omega(g) := \{ f \mid \forall c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0$ е изп. $0 \leq c.g(n) \leq f(n) \}$ $\quad h \succ g$
- $h = \Theta(g) := \{ f \mid \exists c_1 > 0\ \exists c_2 > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0$ е изп. $0 \leq c_1.g(n) \leq f(n) \leq c_2.g(n) \}$ $\quad h \asymp g$

свойства:

1) транзитивност f, g, h $\quad f \odot g$ и $g \odot h$, то $f \odot h$ $\quad \odot \in \{\prec, \succ, \preceq, \succeq, \asymp\}$
2) рефлексивност $f \odot f$, $\odot \in \{\asymp, \succeq, \preceq\}$
3) Ако $f \preceq g$ и $g \preceq f$, то $f \asymp g$
4) симетричност $f \asymp g \leftrightarrow g \asymp f$
5) $f \preceq g \leftrightarrow g \succeq f$ транспонирана симетрия
6) $f + g \asymp \max\{f, g\}$
7) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, то $f \prec g$ $\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0: -\varepsilon \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq \varepsilon \quad | .g(n) \quad -\varepsilon.g(n) \leq 0 \leq f(n) \leq \varepsilon.g(n)$
8) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$, $c > 0$ $\quad f \asymp g$ $\quad (c-\varepsilon) \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq (c+\varepsilon) \quad | .g(n) \quad 0 \leq (c-\varepsilon).g(n) \leq f(n) \leq (c+\varepsilon)g(n)$
9) f, g - асимпт. пол., $a > 1$. Тогава ако $f \prec g$, то $a^{f(n)} \prec g^{f(n)}$

   ако $\log_a f(n) \prec \log_a g(n)$, то $f(n) \prec g(n)$

   за строгите сравн.

10) $\forall a > 0\ \forall t > 0\ \forall \varepsilon > 0$ е изп. $\log_a^t(n) \prec n^\varepsilon$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^\varepsilon}{\log_a^t(n)} \overset{b \leftarrow \frac{\varepsilon}{t}}{=\!=} \lim_{n \to \infty} \frac{(n^b)^t}{\log_a^t n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^b}{\log_a n} \right)^t = \lim_{n \to \infty} \frac{n^b}{\log_a n}$$

Обща наредба: $\Theta(1)$, $\lg$, n, $n\lg n$, n^2, a^n, $n!$, n^n

$$\overset{Л.}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{b.b^{n-1}}{\frac{1}{n.\ln a}} = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\ln a.b}_{const}.n^b = \infty$$

Ако $f \asymp g$, то $\exists \lim \frac{f(n)}{g(n)} = c, c > 0$?

$f(n) = (2 + \sin(n)).n^2$ $\quad \lim\limits_{n \to \infty} \frac{(2+\sin(n)).n^2}{n^2} = \lim\limits_{n \to \infty} 2 + \sin(n)$

$g(n) = n^2$

задача 1: $P(x) = a_0 x^k + a_1 . x^{k-1} + \dots + a_k \qquad a_0 > 0$

$$P(n) \asymp n^k \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + \dots + a_k}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^k}(a_0 + \overbrace{\frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \dots + \frac{a_k}{n^k}}^{\to 0})}{\cancel{n^k}} = a_0 > 0$$

$\Rightarrow P(n) \asymp n^k$

задача 2: $\binom{n}{k} \asymp n^k$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!\, n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^k}.1.\overbrace{(1-\frac{1}{n}).(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{k}{n}+\frac{1}{n})}^{\to 1}}{\cancel{n^k}.k!} = \frac{1}{k!}$$

задача 3: $(n+1)^n \asymp n^n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 0$$

задача 4: Нека $f(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ е четно} \\ n^2, & \text{иначе} \end{cases} \qquad g(n) = n$ несравними

1) Допускаме, че $f \preceq g$. Тогава $\exists c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq f(n) \leq c.g(n)$

Ако n не е четно $\quad 0 \leq n^2 \leq c.n$ ↯

2) Допускаме, че $g \preceq f$. Тогава $\exists c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq g(n) \leq c.f(n)$ $\Rightarrow$ несравними

Ако n е четно $\quad 0 \leq n \leq c$ ↯

задача 5: Вярно ли е, че ако $f \preceq g$, то е изпълнено $f \prec g$ или $f \asymp g$ не

Нека $f(n) = \begin{cases} n, & \text{ако } n \text{ е четно} \\ \frac{1}{n}, & \text{ако } n \text{ е нечетно} \end{cases} \qquad g(n) = n$ Няма момент, в който f е константно асимптотично по-малка или равна на g.

Апроксимация на Sterling: $n! = \sqrt{2\pi n}.\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

задача 6: Да се докаже, че $\lg(n!) \asymp n.\lg n$

От Апрокс. на Sterling $\lg(n!) \approx \lg\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) = \underbrace{\lg\sqrt{2\pi n}}_{\Theta(\lg n)} + \underbrace{n \lg n}_{\Theta(n \lg n)} - \underbrace{n \lg e}_{\Theta(n)}$

Следствие от Апрокс. на Sterling $\lg(n!) \asymp n.\lg n$