12.04.23

① Да се докаже, че ако $L$ е регулярен,

то и езикът $sub(L) = \{\alpha \mid$ има дума $\beta \in L$, такава че $\alpha$ е поддума на $\beta\}$

също е регулярен

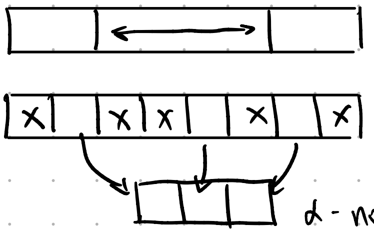
$\beta = a_1 a_2 \ldots a_n$

$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}$

където $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$

подниз $s$

поддума



$\beta$

$\alpha$ - поддума на $\beta$

Док: индукция по построението на $L$, че $sub(L)$ е регулярен

База: $\cdot L = \emptyset \rightsquigarrow sub(L) = \emptyset$

$\cdot L = \varepsilon \rightsquigarrow sub(L) = \{\varepsilon\}$

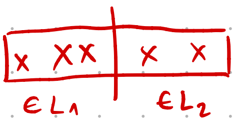
$\cdot L = \{\sigma\}$ за $\sigma \in \Sigma \rightsquigarrow sub(L) = \{\sigma, \varepsilon\}$

| крайни => регулярни

ИП: Нека знаем, че езиците $sub(L_1)$ и $sub(L_1)$ са регулярни

ИС: $\cdot\ sub(L_1 \cup L_2) = sub(L_1) \cup sub(L_2)$ аргументация за упр.

$\cdot\ sub(L_1 . L_2) = sub(L_1) . sub(L_2)$ аргументация за упр.




$\gamma \in L_1 . L_2$

$\cdot\ sub(L_1^*) = (sub(L_1))^*$

$sub(L^0) = \{\varepsilon\}$

$L_1^* = L_1^0 \cup L_1^1 \cup \ldots = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$

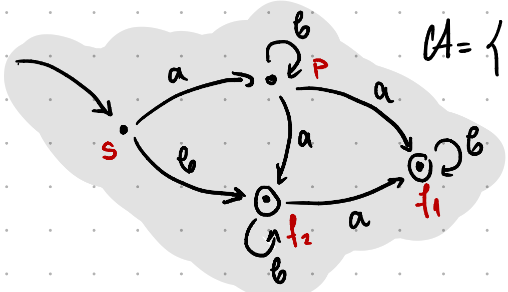
$sub(L) = sub(L)$

$sub(L^2) = sub(L . L) = sub L . sub L$

$sub(L^3) = sub(L . L . L) = sub L . sub L . sub L$

$sub(L^n) = (sub(L))^n$

$\mathcal{A}=\{\Sigma,Q,s,\delta,F\}$



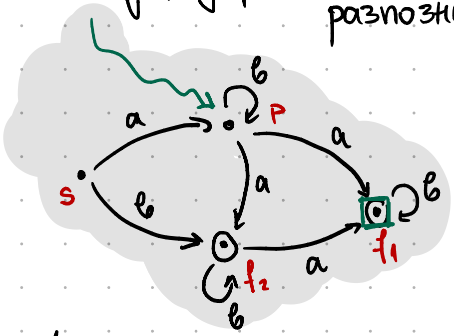

Нека $q_1,q_2\in Q$ $\quad q_1=p \quad q_2=f_1$

$L(q_1,q_2)=\{\alpha\in\Sigma^*\mid \delta^*(q_1,\alpha)=q_2\}$

$L(q,X)=\{\alpha\in\Sigma^*\mid\delta^*(q,\alpha)\in X\}$

$X\subseteq Q \quad =\bigcup_{q'\in X} L(q,q')$

Модифицираме автомата да разпознава $L(q_1,q_2)$




$\mathcal{A}_{q_1,q_2}=\langle\Sigma,Q,q_1,\delta,\{q_2\}\rangle$

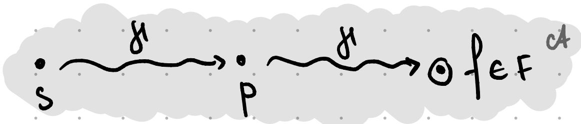
Тогава $\mathcal{L}(\mathcal{A}_{q_1q_2})=L_{q_1q_2}$

$\mu\in\mathcal{L}(\mathcal{A}_{q_1q_2}) \iff \delta^*(q_1,\mu)\in F \iff \delta^*(q_1,\mu)=q_2 \iff$

$\iff \mu\in L(q_1,q_2)$

① Нека $L$ е регулярен, тогава $L_{1/2}=\{\alpha\in\Sigma^*\mid \alpha.\alpha\in L\}$ също е регулярен

$\mu\in L_{1/2} \rightsquigarrow \mu.\mu\in L$, $\mathcal{A}$ - автомат за $L$ $\quad \mathcal{A}=\langle\Sigma,Q,s,\delta,F\rangle$


$\mu\in L_{1/2} \iff$ има сост. $p\in Q$, такова че

$\delta^*(s,\mu)=p$ и $\delta^*(p,\mu)\in F$

$\iff$ има сост. $p\in Q$:

$\mu\in L(s,p)$ и $\mu\in L(p,F)$

$\iff \boxed{\mu\in\bigcup_{p\in Q} L(s,p)\cap L(p,F)}$

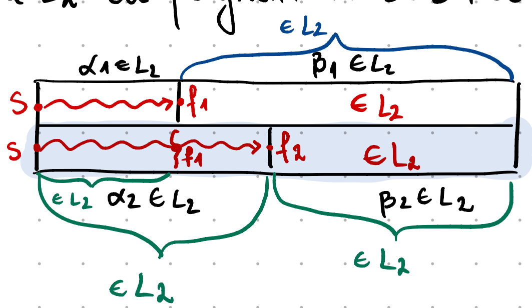
запазва регулярността

Нека $L$ е регулярен, тогава $L_{1/3}=\{\alpha\in\Sigma^*\mid\alpha.\alpha.\alpha\in L\}$ също е регулярен

③ Нека $L_1$ и $L_2$ са регулярни. ДСД, че $L=\{\mu\in L_1\mid \mu=\alpha_1\beta_1,\ \mu=\alpha_2\beta_2,$

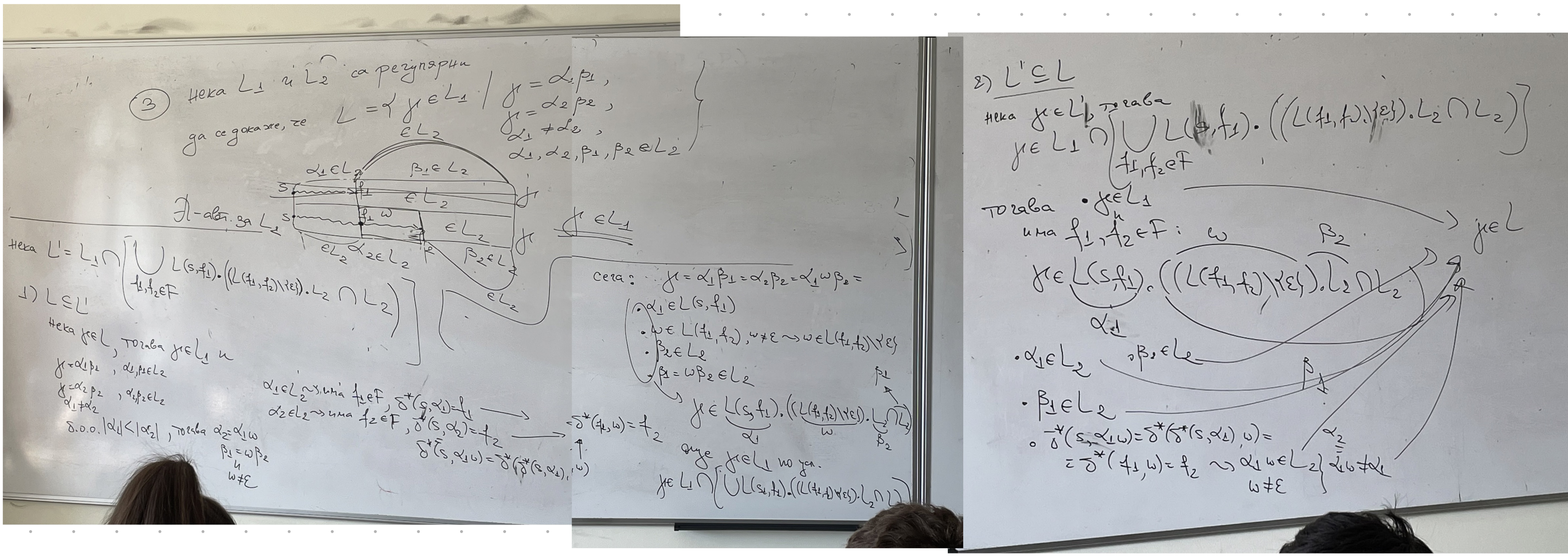
$\alpha_1\neq\alpha_2,\quad \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in L_2\}$

Автомат за $L_1$

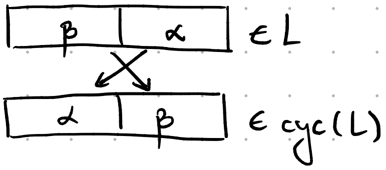



$\mu\in L_1$

$$L_1 \cap \left(L(s,f_1).\left[\left(\underbrace{L(f_1,f_2)}_{(L(f_1,f_2)\setminus\{\varepsilon\})}.L_2\right)\cap L_2\right]\right) = L_1 \cap \left(L(s,f_1).\left[\left((L(f_1,f_2)\setminus\{\varepsilon\}).L_2\right)\cap L_2\right]\right)$$



$Cyc(L) = \{\alpha.\beta \mid \beta.\alpha \in L\}$



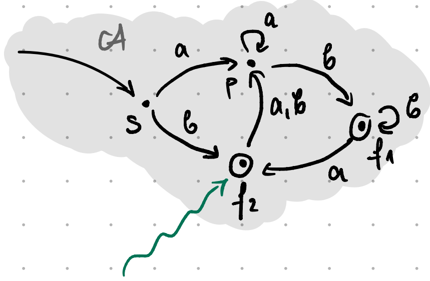
докажете, че $cyc(L)$ е рег.

④ Нека $L$ е рег. език и $\mathcal{A}$ е автомат за $L$ $\quad \mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, s, \delta, F\rangle$

$\Sigma$ - крайно

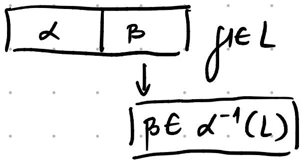
$\Sigma^*$ - изброимо

$P(\Sigma^*)$ - неизброимо



Нека $\alpha \in \Sigma^*$ фиксирана дума

$\alpha^{-1}(L) = \{\beta \in \Sigma^* \mid \alpha.\beta \in L\}$



примери

$L = \{a^*\}.\{b\}^* = \{a^n b^k \mid n,k \in \mathbb{N}\}$ $\quad a^{-1}(L) = \{a^{n-1}b^k \mid n \geq 1,\ k \in \mathbb{N}\} =$ $\quad t = n-1$

$L = \{a^*\}.\{b\}^* = \{a^t b^k \mid t,k \in \mathbb{N}\}$

① ако $\alpha$ е фикс. дума и $L$ е регулярен, то $\alpha^{-1}(L)$ е регулярен

// $\alpha = aba$ $\qquad (aba)^{-1}(L) = \{\beta \mid aba\beta \in L\}$

$\beta \in (aba)^{-1}(L) \iff aba\beta \in L \iff \delta^*(s, aba\beta) \in F \iff \delta^*(\delta^*(s,aba),\beta) \in F$

$aba.(\beta_1 = bba)$ е разпозната $\qquad \Rightarrow \mathcal{A}_\alpha \langle \Sigma, Q, \delta^*(s,\alpha), \delta, F\rangle$

$aba.(\beta_2 = aa)$ не е разпозната $\qquad \mathcal{L}(\mathcal{A}_\alpha) = \alpha^{-1}(L)$

Ако $L$ е регулярен, то мн-во от езици $C_L = \{\alpha^{-1}(L) \mid \alpha \in \Sigma^*\}$ - крайно

ако $\mathcal{A}$ е автомат за $L$ с $n$ състояния, тогава $C_L$ има най-много $n$ елем.

**Критерий за регулярност: $L$ регулярен $\iff$ $C_L$ е крайно**

пример: $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

ще покажем, че $C_L$ е безкрайно, тогава ще следва, че $L$ не е регулярен

Разглеждаме думите от вида $a^n$ за $n \in \mathbb{N}$

Нека $n_1 \neq n_2$ $\quad a^{n_1} . b^{n_1} \in L \rightsquigarrow b^{n_1} \in (a^{n_1})^{-1}(L)$

Тогава $\quad a^{n_2} . b^{n_1} \notin L \rightsquigarrow b^{n_1} \notin (a^{n_2})^{-1}(L)$

тогава $(a^{n_1})^{-1}(L) \neq (a^{n_2})^{-1}(L)$

тогава езиците $\{\underbrace{(a^{n_1})^{-1}(L) \mid n \in \mathbb{N}}_{\text{безкрайно}}\} \subseteq C_L$ също е безкрайно

са два по два различни

$$\underbrace{n \longmapsto (a^n)^{-1}(L)}_{\text{инекция } f:\, \mathbb{N} \to C_L}$$