24.03.23

лектор Юлиян Цанков mail - ucankov@fmi.uni-sofia.bg

Изпит: I част - Задачи - 4 задачи | 2 часа | задължително ≥ 3.00

II част - Тест - 40 въпроса | 15 избираеми | 25 кратки задачи/дефиниции

DCD твърдение 1. права в равнина,

от темите: 2. права и равнина в пространството

Контролни Възможно освобождаване при 3 успешно положени (≥ 3.00)

и среден успех ≥ 5.00 | 2 - 3 часа

Домашни от Асистенти

Конспект I. Вектори

II. Уравнения на права и равнина

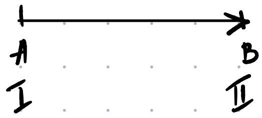
III. Криви и повърхнини от $2^{ра}$ степен

IV. Геометрични трансформации

Хомогенни координати

Вектори. Операции с вектори

Отсечка 

Насочена отсечка  $\overrightarrow{AB}$

Сравняване на отсечки. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, ако:

1) $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ 2) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ 3. $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$

Следствие: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

Свойства на равенствата на насочени отсечки

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ рефлексивност
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ симетричност
3. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$ транзитивност
4. $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

Дефиниция: Нека $\overrightarrow{AB}$ е насочена отсечка и множеството $\vec{a} = \{\overrightarrow{A_iB_i} = \overrightarrow{AB},\ i = \{1, 2, \dots n\}\}$ се нарича вектор с представител $\overrightarrow{AB}$

Дефиниция: $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} = \dots = \overrightarrow{A_nB_n} = \dots$

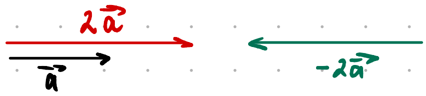
Точките не са вектори

$\overrightarrow{PQ} = \vec{0} \iff P \equiv Q$ и $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Твърдение: Нека $\vec{a}$ е вектор и P е произволна точка. $\Rightarrow \exists!\, т. Q : \overrightarrow{PQ} = \vec{a}$

Афинни операции

- Умножение на вектор с число

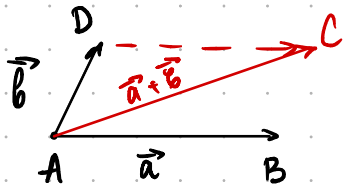


Нека $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{a}$ - вектор. Ако $\lambda = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$, то $\lambda . \vec{a} = \vec{0}$

$|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$ $\qquad \lambda\vec{a} \begin{cases} \uparrow\uparrow \vec{a}, & \lambda > 0 \\ \uparrow\downarrow \vec{a}, & \lambda < 0 \end{cases}$

- Сума на вектори

~ правило на успоредника



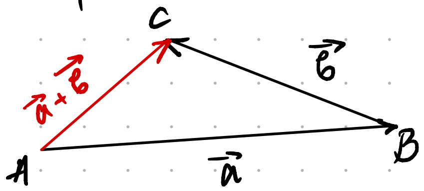
Нека A е произв. т.

Нека $\exists!\, B : \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\exists!\, D : \overrightarrow{AD} = \vec{b}$

т. C: $ABCD$ е успоредник

по деф: $\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

~ правило на триъгълника



Нека A е произв. т.

Нека $\exists!\, т. B : \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\exists!\, т. C : \overrightarrow{AC} = \vec{b}$

$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Свойства на афинните операции:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
3. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$
4. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
5. $1 . \vec{a} = \vec{a}$
6. $\lambda . (\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
7. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
8. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

От ЛА знаем, че ако V е мн-ство, в което събирането на два елемента и умножението на елемент с реално число и 8-те им свойства са в сила, то V е линейно пространство

Линейна зависимост и независимост на вектори

Деф. Линейна комбинация на вектори $\vec{a_1} \dots \vec{a_n}$ се нарича векторът $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$ където $\lambda_1, \dots, \lambda_n = \mathbb{R}$

Деф: Линейна зависимост $\vec{a_1} \dots \vec{a_n}$ са лин. зависими ако $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : (\lambda_1 \dots \lambda_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$. Тогава $\lambda_1 \vec{a_1} + \dots + \lambda_n \vec{a_n} = \vec{0}$

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ са лин. зав. $\Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \exists \lambda : \vec{a} = \lambda \vec{b}, \vec{b} \neq \vec{0}$ колинеарност

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са лин. зав. $\Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \parallel$ равнина α $\quad$ $\vec{a}$ е лин. зав $\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Деф. Линейна независимост - $\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}$ са лин. независими, ако $\lambda_1 \vec{a_1} + \dots + \lambda_n \vec{a_n} = \vec{0}$ само за $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ са лин. незав. $\Leftrightarrow \vec{a} \nparallel \vec{b}$ $\quad$ $\vec{a}$ е лин. незав. $\Leftrightarrow \vec{a} \neq \vec{0}$

! всеки 4 вектора са линейно зависими

Афинна координатна система в пространството

Теорема: Афинна координатна система в пространството се задава:

$K : O \, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ като $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ са ЛНЗ

$\forall \vec{a}$ е в сила следното: $\vec{a} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$ $\quad$ $\vec{a}(x, y, z)$ - координати

Нека $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ $\quad$ Тогава $\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$

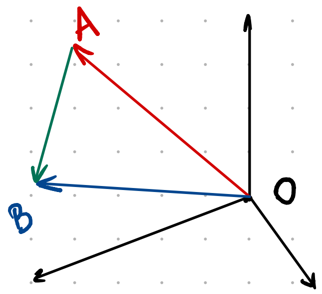
$\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$

$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{array} \right.$$

Нека A и B са точки в пространството

$\vec{OA} = x_A \vec{e_1} + y_A \vec{e_2} + z_A \vec{e_3}$ $\quad \vec{OA} = (x_A, y_A, z_A) \Rightarrow A(x_A, y_A, z_A)$ аналог. за B



$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ $\quad$ Док: $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$

$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$ $\quad \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

Операции с вектори

- скаларно произведение

~Деф: Скаларното произведение на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е

числото $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| . |\vec{b}| . \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})_e$ $\quad$ e означава по-малкия ъгъл

~Свойства: 1. $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ комутативност

2. $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

3. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$

4. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \geq 0$ и $|\vec{a}|^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{\theta}$

5. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$

примерна задача:

Ако $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$; $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$ $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$, то $|\vec{p}| = ?$

$|\vec{p}| = \sqrt{\vec{p}^2} = \sqrt{(\vec{a} + 2\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 4\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2} = \sqrt{1^2 + 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle(a,b) + 4.3^2} = \ldots$

Векторно произведение

Деф: Векторно произведение на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е вектор $\vec{a} \times \vec{b}$

1. $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b}$

2. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

3. $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle \in S^+$

положителна ориентация (дясна ръка)