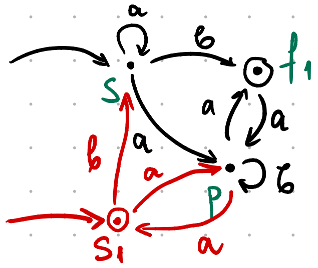
17.05.23

# Регулярни граматики

def. Граматика $G$ е регулярна, ако $R \subseteq V \times (\{\varepsilon\} \cup \Sigma . V)$




$S \to aS \mid aP \mid bF_1$

$F_1 \to aP \mid \varepsilon$

$P \to aF_1 \mid bP \mid aS_1$

$S_1 \to bS \mid aP \mid \varepsilon$

! Проблем - две начални състояния

- Решение: нова променлива $S_\square \to S \mid S_1$, но създава нерегулярност

(не е от вида Пром - празна дума | буква.пром

$\Rightarrow$ $S_\square \to aS \mid aP \mid bF_1 \mid bS \mid aP \mid \varepsilon$

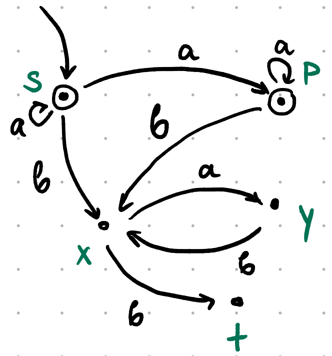
---

$S \to bX \mid aS \mid \varepsilon \mid aP$

$P \to aP \mid bX \mid \varepsilon$

$X \to aY \mid bT$

$Y \to bX$




Твърдение: $L$ е регулярен $\Leftrightarrow$ има регулярна граматика $G$ с $\mathcal{L}(G) = L$

абстрактна формулировка на задача: (полза на регулярни граматики)

Нека $L$ е регулярен. Нека $L'$ се получава от $L$ по някакъв начин

Да се покаже, че $L'$ е безконтекстен

→ т.е винаги когато $L$ е регулярен, $L'$ е безконтекстен

① Нека $L$ е регулярен, да се покаже, че $L' = \{\alpha \# a^n \mid \alpha \in \{a,b\}^*, n \in \mathbb{N}, \alpha \in L\}$ е безконтекстен

↳ $\Sigma = \{a, b, \#\}$

Вярно ли е, че винаги когато $L$ е регулярен, то $L'$ е регулярен?

$L' = L.\{\#\}.\{a\}^*$

$L'' = \{\alpha \# a^n \mid n \in \mathbb{N}, \alpha \in L, |\alpha| = n\}$

- ако $L'$ е краен $\rightsquigarrow$ $L''$ е краен

В общия случай не е вярно, че ако $L$ е регулярен, то и $L''$ е регулярен.

док: Нека $L = \{b\}^*$ $\quad L'' = \{\alpha \# a^n \mid \alpha \in L$ и $|\alpha| = n\} =$

$= \{b^n \# a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ нерегулярен

**$L''$ е винаги безконтекстен**

Нека $L$ е регулярен, тогава има $\underbrace{\text{регулярна граматика}}_{\text{правила от вида } X \to cY \text{ или } Z \to \varepsilon}$ $G$, $\mathcal{L}(G) = L$

Нека $aba \in L$

$S \to$

$S \to aX_1 \longmapsto S \to aX_1a$ $\quad$ $aX_1$

$X_1 \to bX_2 \longmapsto X_1 \to bX_2a$ $\quad$ $abX_2$

$X_2 \to aX_3 \longmapsto X_2 \to aX_3a$ $\quad$ $abaX_3$

$X_3 \to \varepsilon \longmapsto X_3 \to \#$ $\quad$ $aba$

$S \to aX_1a \to abX_2aa \to abaX_3aaa \to aba\#aaa$

строим безконтекстна граматика $G''$ за $L''$:

$V'' = V \qquad S'' = S$

$R''$: модифицираме правилата в $R$:

- добавяме в $X''$ правилото $X \to cYa$
- за всяко правило от вида $X \to \varepsilon$ в $R$, добавяме в $R''$ правилото $X \to \#$

② $L' = \{\alpha \# \alpha^{rev} \mid \alpha \in L\}$ . Да се докаже, че винаги когато $L$ е регулярен, $L'$ е безконтекстен.
$L \subseteq \{a,b\}^*$

? $L'$ винаги е регулярен ✗ при $L = \{a\}^*$ $\quad L' = \{\alpha \# \alpha^{rev} \mid \alpha \in L\} = \{a^n \# a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\alpha \in L$ мислим за $aab \in L$ искаме

$$\begin{array}{llll}
S & & & S \\
\downarrow & \text{пр. } S \to aX_1 & \mapsto S \to X_1 a & \downarrow \\
aX_1 & & & aX_1a \\
\downarrow & \text{пр. } X_1 \to aX_2 & \mapsto X_1 \to X_2 a & \downarrow \\
aaX_2 & & & aaX_2aa \\
\downarrow & \text{пр. } X_2 \to bX_3 & \mapsto X_2 \to X_3 b & \downarrow \\
aabX_3 & & & aabX_3baa \\
\downarrow & \text{пр. } X_3 \to \varepsilon & \mapsto X_3 \to \# & \downarrow \\
aab & & & aab\#baa
\end{array}$$

$L$ е регулярен тогава има регулярна граматика $G$, $\mathcal{L}(G) = L$

строим $G'$ за $L'$: $G = \langle \Sigma, V, S, R \rangle$

$V' = V$

$S' = S$

$R'$: $\forall$ правило $X \to cY$ в $R$, добавяме в $R'$ правилото $X \to cYc$

$\forall$ правило $X \to \varepsilon$ в $R$, добавяме в $R'$ правилото $X \to \#$

③ $L = \{\alpha \# \beta^{rev} \mid \alpha \in L_1, \beta \in L_2, |\alpha| = |\beta|\}$. Да се докаже, че ако $L_1$ и $L_2$ са регулярни, то $L$ е безконтекстен

? винаги $L$ е регулярен X

$L_1 = L_2 = \{a\}^*$ – регулярни

$L = \{a^n \# a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ – не е регулярен

В общия случай $L$ е безконтекстен:

$\underset{\in L_1}{\alpha = aaba}$ $\underset{\in L_2}{\beta = abab}$ $\beta^{rev} = baba$

$aaba\#baba$

гр. $G_1$ за $L_1$ гр. $G_2$ за $L_2$

$$\begin{array}{ccc}
S_1 & S_2 & \langle S_1, S_2 \rangle \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
aX_1 & aY_1 & a\langle X_1, Y_1 \rangle a \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
aaX_2 & abY_2 & aa\langle X_2, Y_2 \rangle ba \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
aabX_3 & abaY_3 & aab\langle X_3, Y_3 \rangle aba \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
aabaX_4 & ababY_4 & aaba\langle X_4, Y_4 \rangle baba \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
aaba & abab & aaba\#baba
\end{array}$$

Нека $G_1$ и $G_2$ са регулярни граматики и $\mathcal{L}(G_1) = L_1$ и $\mathcal{L}(G_2) = L_2$.

Нека $G_1 = \langle \Sigma, V_1, S_1, R_1 \rangle$ $G_2 = \langle \Sigma, V_2, S_2, R_2 \rangle$

Строим $G$ за $L$: $V = V_1 \times V_2$, $S = \langle S_1, S_2 \rangle$

$R$: $\forall$ правило $X_1 \to c_1 X_2$ от $R_1$ и $\forall$ правило $Y_1 \to c_2 Y_2$ от $R_2$ добавяме правилото $\langle X_1, Y_1 \rangle \to c_1 \langle X_2, Y_2 \rangle c_2$ в $R$

$\forall$ правило $X_1 \to \varepsilon$ от $R_1$ и $\forall$ правило $Y_1 \to \varepsilon$ от $R_2$ добавяме правилото $\langle X_1, Y_1 \rangle \to \#$ в $R$

③' $L' = \{\alpha \# \beta^{rev} \mid \alpha \in L_1, \beta \in L_2, |\alpha| = 2|\beta|\}$. Да се докаже, че ако $L_1$ и $L_2$ са регулярни, то $L'$ е безконтекстен

Нека $G_1$ и $G_2$ са регулярни граматики и $\mathcal{L}(G_1) = L_1$ и $\mathcal{L}(G_2) = L_2$.

Нека $G_1 = \langle \Sigma, V_1, S_1, R_1 \rangle$ $G_2 = \langle \Sigma, V_2, S_2, R_2 \rangle$

Строим $G'$ за $L'$: $V' = V_1 \times V_2$, $S' = \langle S_1, S_2 \rangle$

$R'$: $\forall$ правило $X_1 \to c_1 X_2$ от $R_1$ и $\forall$ правило $Y_1 \to c_2 Y_2$ и $Y_2 \to c_3 Y_3$ от $R_2$ добавяме правилото $\langle X_1, Y_1 \rangle \to c_1 \langle X_2, Y_3 \rangle c_3 c_2$ в $R'$

$\forall$ правило $X_1 \to \varepsilon$ от $R_1$ и $\forall$ правило $Y_1 \to \varepsilon$ от $R_2$ добавяме правилото $\langle X_1, Y_1 \rangle \to \#$ в $R'$

④ $L = \{\alpha \# \beta \mid \alpha \in L_1, \beta \in L_2, |\alpha| = |\beta|\} =$

$= \{\alpha \# \mu^{rev} \mid \alpha \in L_1, \mu^{rev} = \beta, \beta \in L_2, |\alpha| = |\beta|\} =$ $(\beta \in L_2 \Leftrightarrow \beta^{rev} \in L_2^{rev})$

$= \{\alpha \# \mu^{rev} \mid \alpha \in L_1, \mu^{rev} \in L_2, |\alpha| = |\mu|\} =$

$= \{\alpha \# \mu^{rev} \mid \alpha \in L_1, \mu \in L_2^{rev}, |\alpha| = |\mu|\} =$

сега $L_2$ е регулярен, тогава $L_2^{rev}$ също е регулярен

тогава по зад. 3 $L$ е безконтекстен

def. Дърво на извод съгласно $G$:

за упр: Дърво е нар. дв. от връх и списък от дървета

<u>индуктивно</u>: нека $\xi \in V \cup \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, тогава $\xi$ е дърво

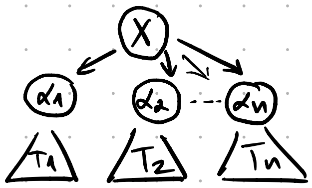
описваме като $T_\xi = \langle \xi, \varepsilon \rangle$

ⓐ $\longmapsto T_a = \langle a, \varepsilon \rangle$ $\quad root(T_\xi) = \xi$, $height(T_\xi) = 0$, $word(T_\xi) = \xi$

• нека $X$ е променлива в $G$

Тогава нека $X \to \alpha_1 \dots \alpha_n \in R$ $\quad \alpha_1 \dots \alpha_n \in V \cup \Sigma$ и

$T_1 \dots T_n$ са вече построени дървета с корени съотв. $root(T_{\alpha_i}) = \alpha_i$




тогава $T = \langle X, \langle T_1, \dots, T_n \rangle \rangle$

$root(T) = X \quad height(T) = 1 + \max_{1 \le i \le n} height(T_i)$

$word(T) = word(T_1) . word(T_2) \dots word(T_n)$

пример:

нека $G$: $S \to aSB \mid \varepsilon \mid Xb$ $\qquad S \to Xb \to aXaab \to aSbaab \to aaSbbaab \to$

$X \to aXaa \mid Sb$ $\qquad aabbaab$

$word(T) = ?$