Фактор група: Група, съставена от съседните класове на G по H.

- $|G/H| = [G:H]$ Лагранж: $|G| = |H| \cdot |G/H|$

- факторгрупата на циклична група е циклична

пример: S_n/A_n (всички четни пермутации)

$\longrightarrow$ допълни от идфа с задачи от сборника

29.04.24

зад 1 Нека G е подгрупа на S_n, в която се съдържа нечетна пермутация. ДСД, че има нормална подгрупа с индекс 2

$H = A_n \cap G = \{$ групата от всички четни пермутации в $G\}$

Нека $(a\,b)$ е нечетната пермутация в G

$(a\,b)H = \{$всички нечетни пермутации в $G\}$ $(a\,b)H \cup H = G \Rightarrow [G:H] = 2$

зад 2 Нека G е група, $A, B \leq G$. $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$

а) ДСД, че, ако $B \trianglelefteq G$, то $AB \leq G$

Док: 1) $AB \subseteq G$ - ясно по построение на AB

2) Нека $a_1b_1 \in AB$ и $a_2b_2 \in AB$. Трябва да док., че $\underset{a'b'}{\underset{\parallel}{a_1b_1a_2b_2}} \in AB$

$b_1a_2 \in Ba_2 \Rightarrow b_1a_2 \in a_2B \Rightarrow b_1a_2 = a_2 \cdot b_1'$

$\Rightarrow a_1b_1a_2b_2 = \underbrace{a_1a_2}_{\in A}\underbrace{b_1'b_2}_{\in B} \in AB$

3) $\forall ab \in AB \ \exists (ab)^{-1} \in AB$ т.че $ab(ab)^{-1} = e$

$(a_1b_1)^{-1} = b_1^{-1}a_1^{-1} \in Ba_1^{-1} \Rightarrow b_1^{-1}a_1^{-1} \in a_1^{-1}B \Rightarrow b_1^{-1}a_1^{-1} = \underset{\in A}{a_1^{-1}}\underset{\in B}{b'} \in AB$

$\Rightarrow AB \leq G$

б) ДСД, че ако $A \trianglelefteq G$, $B \trianglelefteq G$, то $AB \trianglelefteq G$

Трябва да докажем, че $\forall ab \in AB$ $g^{-1}abg \in AB$

Но $A, B \trianglelefteq G \Rightarrow \forall a \in A$ $gag^{-1} \in A$ и $\forall b \in B$ $gbg^{-1} \in B$

Тогава за $\forall ab$ имаме $\underbrace{gag^{-1}}_{\in A}\underbrace{gbg^{-1}}_{\in B} = gabg^{-1} \in AB \Rightarrow AB \trianglelefteq G$

Теорема за ХММ

Нека $\varphi: G \to G'$ – ХММ на групите G и G'

$\ker\varphi := \{a \in G \mid \varphi(a) = e_{G'}\} \leq G$

$\operatorname{im}\varphi := \{b \in G' \mid \exists a_0 \in G : \varphi(a_0) = b\} \leq G'$

Нека $H \trianglelefteq G$ $\quad \pi: G \to G/H$

естествен хомоморфизъм

Т за ХММ: $\varphi: G \to G'$ е ХММ

Тогава $\ker\varphi \trianglelefteq G \quad G/\underbrace{\ker\varphi}_{H} \cong \operatorname{Im}\varphi$

Следствие: Ако $\varphi: G \to G'$ е ХММ и $H \trianglelefteq G$

$\Rightarrow G/H \cong \operatorname{Im}\varphi$

зад. 3 а) DCD, че $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

1) Конструираме изобр. φ т.че $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ и док. че φ е ХММ

Нека $a \in \mathbb{R}$. $\varphi(a) = \cos 2\pi a + i \sin 2\pi a$

$\varphi(a+b) \stackrel{?}{=} \varphi(a) + \varphi(b)$

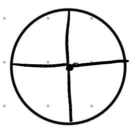
$\cos 2\pi(a+b) + i\sin 2\pi(a+b) = (\cos 2\pi a + i \sin 2\pi a)(\cos 2\pi b + i\sin 2\pi b) = \cos 2\pi(a+b) + i\sin 2\pi(a+b)$

$\Rightarrow \varphi$ е ХММ

2) Показваме, че $\ker\varphi \in \mathbb{Z}$

$\ker\varphi = \{a \in \mathbb{R} \mid \varphi(a) = \cos 2\pi a + i \sin 2\pi a = 1\}$

$\cos 2\pi a = 1 \Rightarrow a \in \mathbb{Z}$
$\sin 2\pi a = 0$



$2\mathbb{Z}+1$

$\forall a \in \mathbb{Z}$ е изпълнено, че $\sin 2\pi a = 0 \Rightarrow \ker\varphi = \mathbb{Z}$

3) Директно прилагаме Th за ХММ

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{U}$

б) $(\mathbb{C}^*, \cdot)/\mathbb{U} \cong (\mathbb{R}^+, \cdot)$

1) $\varphi: \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^+$

$\varphi(z) = |z| \in \mathbb{R}^+$

$\varphi(z_1 \cdot z_2) \stackrel{?}{=} \varphi(z_1) \cdot \varphi(z_2)$

$\parallel$

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Rightarrow \varphi$ е ХММ

$\mathbb{R}^+ \overset{?}{\equiv} \operatorname{Im} \varphi$ Нека $a \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow$ съществува ел. z от $\mathbb{C}^*$ т. че $\varphi(z) = |z| = a$

$\Rightarrow \mathbb{R}^+ \equiv \operatorname{Im} \varphi$

2) $\ker \varphi \overset{?}{\equiv} \mathbb{U}$

$\ker \varphi := \{ a \in \mathbb{C}^* \mid \varphi(a) = |a| = 1 \} \Rightarrow \ker \varphi = \{ z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1 \} = \mathbb{U}$

3) $\mathbb{C}^* / \mathbb{U} \cong \mathbb{R}^+$