05.04.23

Регулярен израз ⟶		Регулярен език
$\emptyset$		$\emptyset$
ε		$\{\varepsilon\}$
σ за $\sigma \in \Sigma$		$\{\sigma\}$
ако r_1		L_1
r_2		L_2
тогава $r_1 + r_2$	обединение	$L_1 \cup L_2$
$r_1 . r_2$	конкатенация	$L_1 . L_2$
r_1^*		L_1^*

$\boxed{L \text{ е автоматен} \iff L \text{ е регулярен}}$

! липсват сечение и допълнение!

понякога неудобни за рег. изрази

• $L = \{\alpha \in \Sigma^* \mid |\alpha| \equiv 1 \mod 2\}$

$\alpha \in L$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{2n+1 \text{ букви}}$

• 1 буква - $(a+b)$

• 2 букви - $(a+b)(a+b)$

• 2n букви - $[(a+b)(a+b)]^*$

• $L = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha$ започва и завършва с еднаква буква$\}$

$|a| \quad |a|$

$|a| \quad |b|$

$a.(a+b)^*.a + b.(a+b)^*.b + a + b$

• $L = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha$ не съдържа $ba\}$

$|--- |ba| \quad |$ $\alpha \in L$

$|\;\; \cancel{ba} \;\;|$ $\alpha \in L$

$(a+b)^*.ba.(a+b)^*$

$a^* b^*$

• $L = \{\alpha \in \Sigma^* \mid |\alpha|_a \equiv 0 \mod 2\}$

$\underbrace{|ab\,a|bb\,a\,bbb\,a|a\,a|}_{2n\ a}$ $\alpha \in L$

Разделяме на блокчета $b^*ab^*ab^*$, които съдържат точно 2 a

$b^*ab^*ab^* + b^*$

може да не съдържа a

алтернативен начин: $(b^*ab^*a).b^*$

• $L = \{\alpha \in \Sigma^* \mid |\alpha|_a \equiv 0 \mod 2$ и $|\alpha|_b \equiv 1 \mod 2\}$

ДСД, че L е регулярен

$L = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \underbrace{|\alpha|_a \equiv 0 \mod 2\}}_{\text{рег. израз } r_1} \cap \{\underbrace{\alpha \in \Sigma^* \mid |\alpha|_b \equiv 1 \mod 2}_{\text{рег. израз } r_2}\}$

① Да се докаже, че ако L е регулярен,

то и езикът $ins(L) = \{\alpha a \beta \mid \alpha\beta \in L\}$ също е регулярен

Доказателство: индукция по построението на L, че $ins(L)$ е регулярен

База: • $ins(\emptyset) = \emptyset$ – регулярен език

• $ins(\{\varepsilon\}) = \varepsilon.a.\varepsilon = a$ – регулярен език

• $ins(\{\sigma\}) \begin{cases} = \varepsilon.a.\sigma \Rightarrow \{a\sigma, \sigma a\} \text{ - регулярен език} \\ = \sigma.a.\varepsilon \end{cases}$

ИП: нека знаем, че твърдението е в сила за L_1 и L_2 (т.е $ins(L_1)$ и $ins(L_2)$ рег.)

ИС: Предполагаме, че $ins(L_1 \cup L_2)$, $ins(L_1.L_2)$, $ins(L^*)$ са регулярни

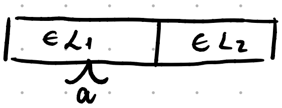
• $ins(L_1 \cup L_2) = \{\alpha a \beta \mid \alpha\beta \in L_1 \cup L_2\} = \{\alpha a\beta \mid \alpha\beta \in L_1$ или $\alpha\beta \in L_2\} =$

$= \{\alpha a \beta \mid \alpha\beta \in L_1\} \cup \{\alpha a \beta \in L_2\} = ins(L_1) \cup ins(L_2)$

По ИП езиците $ins(L_1)$ и $ins(L_2)$ са регулярни и понеже $\cup$

запазва регулярността, то $ins(L_1) \cup ins(L_2) = ins(L_1 \cup L_2)$ е регулярен

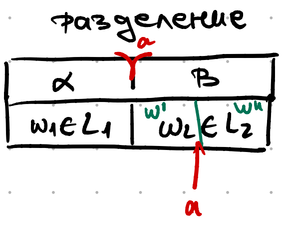
• $ins(L_1.L_2) = ins(L_1).L_2 + L_1.ins(L_2)$



$L = L_1.L_2$

Доказателство: 1) $ins(L_1.L_2) \subseteq ins(L_1).L_2 \cup L_1.ins(L_2)$

Нека $\gamma \in ins(L_1.L_2)$

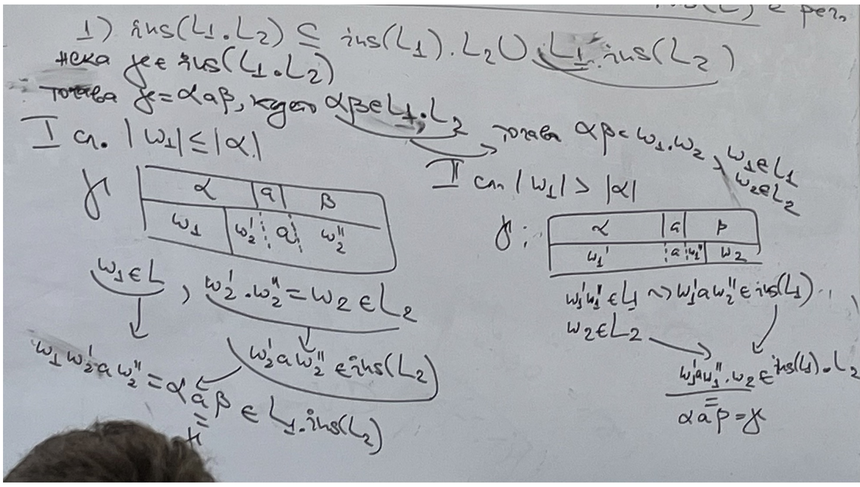


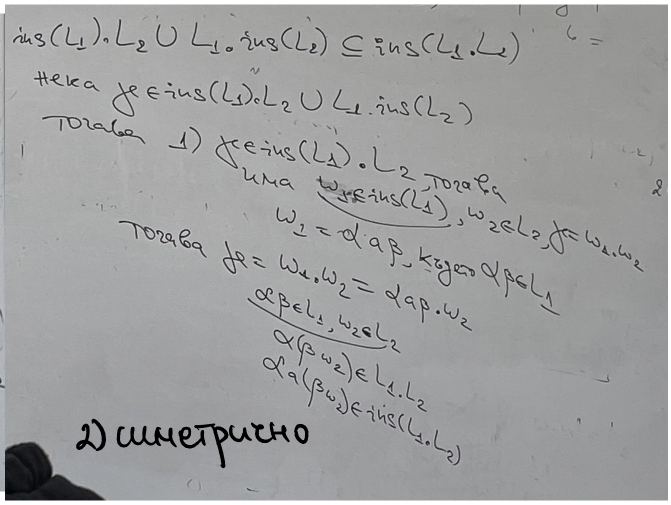
Тогава $\gamma = \alpha a \beta$, където $\alpha.\beta = L_1.L_2$

Тогава $\alpha.\beta = w_1.w_2$, където $w_1 \in L_1$ и $w_2 \in L_2$

I случай $|w_1| \leq |\alpha|$

$\alpha = w_1.w_2'$ $\beta = w_2''$





3) $ins(L^*)$

$$\underbrace{|\in L|\in L|\in L| - }_{L^*}\underbrace{|\overset{a}{\in L}|}_{ins(L)}\underbrace{|\in L|}_{L^*}$$

$ins(L^*) = L^*.ins(L).L^*$

док: 1) нека $\gamma \in ins(L^*)$

тогава $\gamma = \alpha a \beta$, където $\alpha\beta \in L^*$ $\quad \alpha\beta = \gamma_1.\gamma_2 \ldots \gamma_n$ където $\gamma_i \in L$

нека $\alpha = \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_{i+1}'$

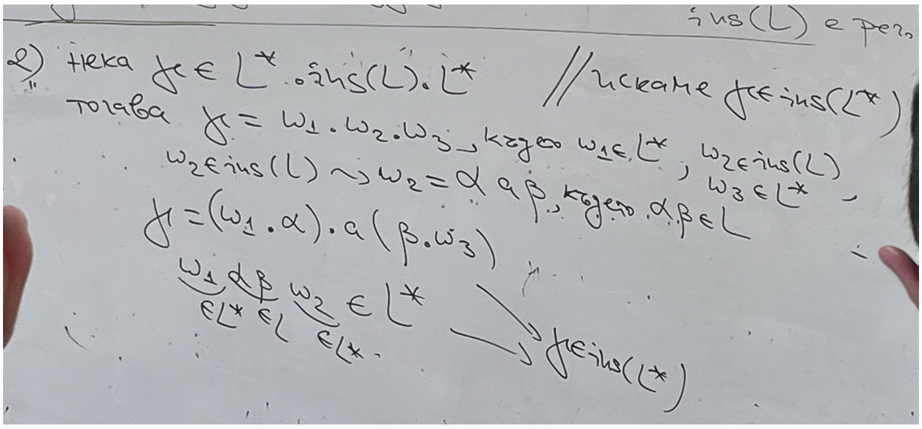
$\beta = \gamma_{i+1}'' \ldots \gamma_n$

$$\gamma = \alpha a \beta = \underbrace{(\gamma_1 \ldots \gamma_i)}_{\in L^*}\underbrace{\gamma_{i+1}' \, a \, \gamma_{i+1}''}_{\in ins(L)}\underbrace{(\gamma_{i+2} \ldots \gamma_n)}_{\in L^*}$$

$\gamma_{i+1}'.\gamma_{i+1}'' = \gamma_{i+1} \in L$

$\Rightarrow \gamma_{i+1}'.a.\gamma_{i+1}'' \in ins(L)$

$\gamma \in L^*.ins(L).L^*$



② Нека L е регулярен език

$L^{rev} = \{\alpha^{rev} \mid \alpha \in L\}$

$\alpha^{rev} = \alpha$ записана наобратно

Док: Индукция по постр. на L

База: $\bullet\ L = \emptyset \quad L^{rev} = \emptyset$ ✓

$\bullet\ L = \{\varepsilon\} \quad L^{rev} = \{\varepsilon\}$ ✓

$\bullet\ L = \{\sigma\} \quad L^{rev} = \{\sigma\}$ ✓

ИП: Нека знаем, че езиците L_1^{rev} и L_2^{rev} са регулярни

ИС: 1) $L = L_1 \cup L_2$

$$L_{rev} = \{\alpha^{rev} \mid \alpha \in L\} = \{\alpha^{rev} \mid \alpha \in L_1 \cup L_2\} = \{\alpha^{rev} \mid \alpha \in L_1\} \cup \{\alpha^{rev} \mid \alpha \in L_2\} = L_1^{rev} \cup L_2^{rev}$$

2) $L = L_1.L_2 = L_2^{rev}.L_1^{rev}$

$(L_1.L_2)^{rev}$ $\quad \overbrace{a_1 a_2 \ldots a_n}^{\in L_1}\,\overbrace{b_1 b_2 \ldots b_k}^{\in L_2}$ $\quad \gamma \in L_1.L_2$

$\Rightarrow \underbrace{b_k b_{k-1} \ldots b_1}_{\in L_2^{rev}}\,\underbrace{a_n a_{n-1} \ldots a_1}_{\in L_1^{rev}} \in (L_1.L_2)^{rev}$

• Нека $\gamma \in (L_1.L_2)^{rev}$

тогава има $w \in L_1.L_2$ такава, че $\gamma = w^{rev}$ $\qquad w = \alpha.\beta\ (\alpha \in L_1, \beta \in L_2)$

$(\alpha.\beta)^{rev} = \beta^{rev}.\alpha^{rev} \in L_2^{rev}.L_1^{rev}$

$= w^{rev}$

$= \gamma$ $\qquad \beta \in L_2 \to \beta^{rev} \in L_2^{rev}$

$\alpha \in L_1 \to \alpha^{rev} \in L_1^{rev}$

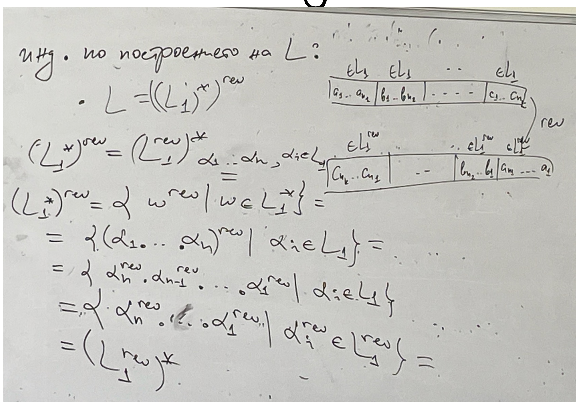
• Нека $\gamma \in L_2^{rev}.L_1^{rev}$

тогава $\gamma = \alpha.\beta$, където $\alpha \in L_2^{rev}$, $\beta \in L_1^{rev}$

тогава $\alpha^{rev} \in L_2$, $\beta^{rev} \in L_1$

тогава $\gamma = \alpha.\beta = (\underbrace{\beta^{rev}}_{\in L_1}.\underbrace{\alpha^{rev}}_{\in L_2})^{rev}$ $\qquad \beta^{rev}.\alpha^{rev} \in L \Rightarrow \gamma \in L^{rev}$

• $L = ((L_1)^*)^{rev}$ $\quad \overbrace{a_1\, a_n}^{\in L_1}\,\overbrace{b_1\, b_n}^{\in L_1} \ldots \overbrace{c_1\, c_n}^{\in L_1}$ $\xrightarrow{rev}$ $\underbrace{c_n\, c_1}_{\in L_1^{rev}} \ldots \underbrace{b_n\, b_1}_{\in L_1^{rev}}\,\underbrace{a_n\, a_1}_{\in L_1^{rev}}$



③ Нека L е регулярен. Тогава $Pref(L) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid (\exists \beta \in \Sigma^*)(\alpha\beta \in L)\}$ също е рег.

$\gamma \in L$ $\qquad \in Pref(L)$

$Pref(\emptyset) = \emptyset$

$Pref(\{\varepsilon\}) = \{\varepsilon\}$

$Pref(\{\sigma\}) = \{\varepsilon, \sigma\}$

$Pref(L_1 \cup L_2) = Pref(L_1) \cup Pref(L_2)$

$Pref(L_1.L_2) = Pref(L_1) \cup L_1.Pref(L_2)$ $\qquad \boxed{\in L_1}\boxed{\in L_2} \in L_1.L_2$

$Pref(L^*) = L^*.Pref(L)$

ДОК