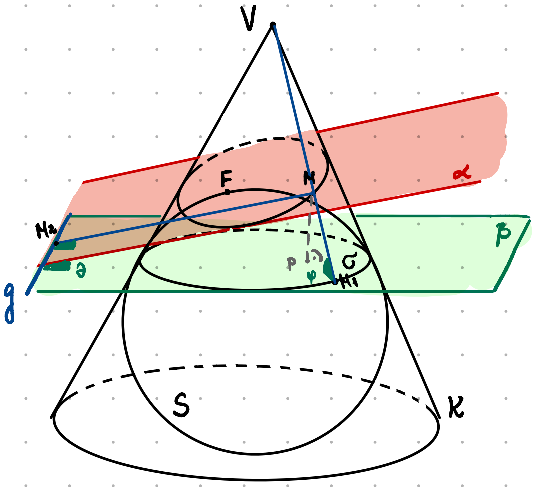


Конични сечения

Прав кръгов конус

Нека $\mathcal{K}$ е конус

α - равнина

$\alpha \cap \mathcal{K} = c$ - конично сечение

Нека S е сфера, допираща се до α и до конуса

$S \cap \alpha =$ т. F - фокус на c

$S \cap \mathcal{K} = \sigma$ - окръжност

Нека β е равнината: $\sigma \subset \beta$

$\alpha \cap \beta = g$ - директриса на коничното сечение

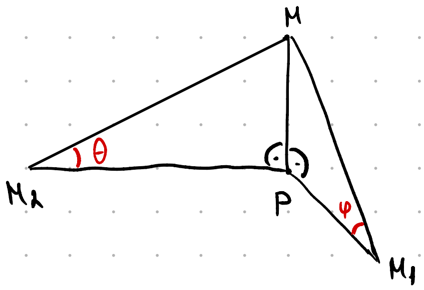
Нека т. $M \in c$ е произволна

Нека V е връх на конуса

$VM \cap \sigma = M_1$

т. M_2: $M_2 \in g$ и $MM_2 \perp g$

т. P: $P \in \beta$ и $MP \perp \beta$



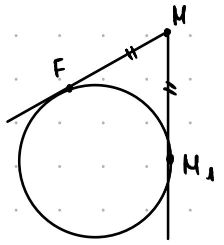
от $\triangle M_2PM$

$$\frac{|MP|}{|MM_2|} = \sin\theta$$

от $\triangle M_1PM$

$$\frac{|MP|}{|MM_1|} = \sin\varphi$$

$$\frac{\frac{|MP|}{|MM_2|}}{\frac{|MP|}{|MM_1|}} = \frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = \frac{|MM_1|}{|MM_2|}$$



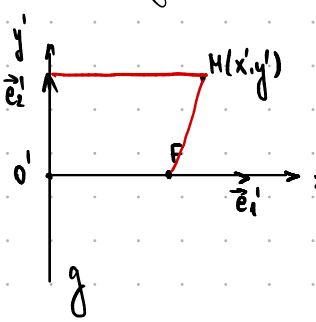
$$\Rightarrow \frac{|MF|}{|MM_2|} = \frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = e \text{ - const}$$

$\dfrac{|MF|}{d(M,g)} = e$ - ексцентрицитет на сечение

Конични сечения

def. Нека са дадени т. F и права g, като $F \notin g$. Конично сечение се нарича множеството c от точки M, за които е в сила $\dfrac{|MF|}{d(M,g)} = e$

Разглеждаме $K'\ O'x'y'$ ($K'\ O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$)



$O' \in g$ и $O'F \parallel g$

$$\vec{e}_1{}' = \frac{\overrightarrow{O'F}}{|\overrightarrow{O'F}|}$$

$\vec{e}_2{}'$: $\vec{e}_1{}' \perp \vec{e}_2{}'$

Нека т. $F(p,0)$, $p \neq 0$

$M(x',y')$, $|MF| = \sqrt{(p-x')^2 + (0-y')^2}$

$d(M,g) = |x'|$

Нека т. $F(p,0)$, $p \neq 0$

$M(x', y')$

$$|MF| = \sqrt{(p-x')^2 + (-y')^2}$$

$$d(M, g) = |x'|$$

$$\frac{|MF|}{d(M,g)} = \frac{\sqrt{(p-x')^2 + y'^2}}{|x'|} = e$$

$$p^2 - 2px' + x'^2 + y'^2 = e^2 x'^2$$

$$(1-e^2)x'^2 + y'^2 - 2px' + p^2 = 0$$

Сменяме координатната система $KO'x'y'$ с $KOxy$:

$$x' = x + \lambda$$
$$y' = y$$

$$(1-e^2)(x+\lambda)^2 + y^2 - 2p(x+\lambda) + p^2$$

$$+(1-e^2)\lambda^2$$

$$(1-e^2)x^2 + 2(1-e^2)\lambda x + y^2 - 2px - 2p\lambda + p^2 = 0$$

$$(1-e^2)x^2 + 2((1-e^2)\lambda - p)x + y^2 + (1-e^2)\lambda^2 - 2p\lambda + p^2 = 0$$

1 случай

$e = 1 \Rightarrow -2px + y^2 + p^2 - 2p\lambda = 0$

$\lambda: -2p\lambda + p^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{p}{2}$

$\Rightarrow c: y^2 = 2px$ – канонично уравнение на парабола

$F(\frac{p}{2}, 0)$ $KOxy$, $g: x = \frac{p}{2}$

$F(p,0)$ $K'O'x'y'$

$$\begin{cases} x' = x + \frac{p}{2} \\ y' = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x' - \frac{p}{2} \\ y = y' \end{cases} \quad \begin{cases} x = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

$g': x' = 0 \quad K': O'x'y'$

$g: x + \frac{p}{2} = 0 \quad K: Oxy$

Пример: $y^2 = 6x$

$y^2 = 2.3x$

$F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

2 сл. $e \neq 1$

$\alpha: (1-e^2)\alpha - p = 0$

$\alpha = \frac{p}{1-e^2}$

$(x, y) \in C \Rightarrow (-x, y), (x, -y), (-x, -y) \in C$

свободен член:

$\cancel{(1-e^2)} \frac{p^2}{(1-e^2)^{\cancel{2}}} - \frac{2p^2}{1-e^2} + p^2 = \frac{p^2}{1-e^2}(1 - 2 + 1 - e^2) = \frac{-p^2 e^2}{1-e^2}$

$(1-e^2)x^2 + y^2 = \frac{p^2 e^2}{1-e^2}$

$C: \frac{x^2}{\frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2 e^2}{1-e^2}} = 1$

Нека $e \in (0; 1)$

$a^2 = \frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2}, \ b^2 = \frac{p^2 e^2}{1-e^2} \Rightarrow C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - канонично уравнение на елипса

спрямо $K: Oxy$

$F_{1,2}(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0), a > b$ - фокуси на елипса

В moodle: $d_{1,2}, e$ - ?

Нека $e \in (1, \infty)$

$a^2 = \frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}$, $b^2 = \frac{p^2e^2}{e^2-1} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – канонично уравнение на хипербола

$F_{1,2}(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0)$

В moodle: $d_{1,2}$, e?

~~Втора~~

Асимптоти: $a_{1,2}: b^2x^2 - a^2y^2 = 0$

$a_1: bx - ay = 0$

$a_2: bx + ay = 0$

Криви от втора степен

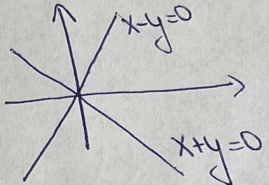
Пример: 1) $x^2 + y^2 = -1$

2) $x^2 - y^2 = 0$

$(x-y)(x+y) = 0$

$x - y = 0$

$x + y = 0$



3) $x^2 = 0$

def: Крива от втора степен е множество от точки $M(x,y)$

$c: F(M) = F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

спрямо ортонормирана $K: Oxy$

$$c: F(x,y) = (x \; y \; 1)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{= A_3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$1 \to x$

$2 \to y$

$3 \to 1$

Твърдение: C е изродена $\Leftrightarrow \det A_3 = 0$.

$$C: F(x,y) = (x\ y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(a_{13}\ a_{23})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{33} = 0$$

Канонизация на уравнение:

$$(x'\ y')\begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} + 2(a_{13}\ a_{23})\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + a_{33}' = 0$$

Твърдение: Чрез две смени на координатната система $K:Oxy$ всяка крива от втора степен може да се доведе до уравненията:

1) $s_1 . x''^2 + s_2 y''^2 = a_{33}''$

2) $s_2 . y''^2 + 2a_{12}'' x' = 0$

3) $s_2 . y''^2 = a_{33}''$