Детерминиран краен автомат **Дефиниция:** $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_{start}, \delta, F)$

$\mathcal{A}$ – автомати, Σ - азбука

δ - функция на преход (тотална)

Q - крайно мн-во от състояния

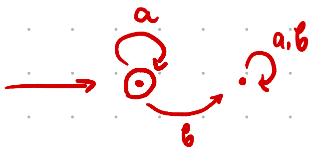
F - финални състояния $\subseteq Q$

q_{start} - начално състояние $\in Q$

$\delta : Q \times \Sigma \to Q$ $\qquad$ $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$

Пример: Постр. автомат, $\Sigma = \{a, b\}$

разпознаващ езика $L = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{a\}^*$



$$\begin{cases} \delta^*(q, \varepsilon) = q \\ \delta^*(q, \beta a) = \delta(\delta^*(q, \beta), a) \end{cases}$$

функция за преход на думи

$\mathcal{L}(\mathcal{A})$ - език на автомата $\mathcal{A}$

$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_{start}, \alpha) \in F\}$

дефиниция

$\Sigma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n$, $L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$, $\emptyset^0 = \{\varepsilon\}$

Езикът на празното мн-во е автоматен

Твърдение $\delta^*(q, \alpha\beta) = \delta^*(\delta^*(q, \alpha), \beta)$ $\quad \forall q \in Q \quad \forall \alpha, \beta \in \Sigma^*$

$q \xrightarrow{\alpha} r \xrightarrow{\beta} p$

Доказателство: $P(n) \overset{def}{:=} \forall q \in Q\ \forall \alpha \in \Sigma^*, \forall \beta \in \Sigma^n \mid \delta^*(q, \alpha\beta) = \delta^*(\delta^*(q, \alpha), \beta)$

свойство

База $n=0$: $\underbrace{\delta^*(q, \underbrace{\alpha\varepsilon}_{\alpha})}_{p} = \delta^*(\underbrace{\delta^*(q, \alpha)}_{p}, \varepsilon) = p$ => вярно за $n=0$.

ИП: Нека $P(n)$ е изпълнено.

ИС: Доказваме, че $P(n+1)$ е изпълнено. $\forall q \in Q\ \forall \alpha \in \Sigma^*\ \forall \beta \in \Sigma^{n+1}$

$\delta^*(q, \alpha\beta) = \delta^*(q, \alpha\overbrace{\gamma a}^{\beta}) =$ $\qquad$ $|\gamma| = n$, $\gamma \in \Sigma^n$

$= \delta(\delta^*(q, \alpha y), a) =$ деф. на δ^*

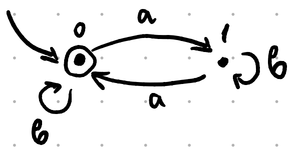
$= \delta(\delta^*(\underbrace{\delta^*(q, \alpha)}_{p}, y), a) =$ от ИП

$= \delta(\delta^*(p, y), a) =$

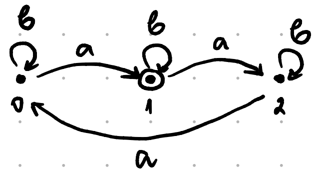
$= \delta(p, \underbrace{ya}_{\beta}) =$ деф на δ^*

$= \delta^*(\delta^*(q, \alpha), \beta)$ $p = \delta^*(q, \alpha)$

задача $L = \{\alpha \in \{a,b\}^* \mid |\alpha|_a \equiv 0 \mod 2\}$ автоматен ли е? да



$L = \{\alpha \in \{a,b\}^* \mid |\alpha|_a \equiv 1 \mod 3\}$ автоматен ли е? да



Трябва да се докаже, че $Q = \{0,1,2\}$ $q_{start} = 0$ $F = \{1\}$

$\delta^*(0, \alpha) = i \iff |\alpha|_a \equiv i \mod 3$

общо: $\delta^*(i, \alpha) = j$ $|\alpha|_a \equiv ? \mod 3$

Обединение, сечение, разлика

Нека $L = \{\alpha \in \{a,b\}^* \mid |\alpha|_a \equiv 1 \mod 2 \ \& \ |\alpha|_b \equiv 0 \mod 2\}$

$L_0 = \{\alpha \mid |\alpha|_b \equiv 0 \mod 2\}$

$L_1 = \{\alpha \mid |\alpha|_a \equiv 1 \mod 2\}$

$L = L_0 \cap L_1$

$\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \iff \delta^*(q_{start}, \alpha) \in F \iff \delta^*(\langle s_0, s_1 \rangle, \alpha) \in F_0 \times F_1 \overset{*}{\iff}$

$\iff \langle \delta_0^*(s_0, \alpha), \delta_1^*(s_1, \alpha) \rangle \in F_0 \times F_1 \iff$

$\iff \delta_0^*(s_0, \alpha) \in F_0 \ \& \ \delta_1^*(s_1, \alpha) \in F_1 \iff \alpha \in \mathcal{L}(A_0) \ \& \ \alpha \in \mathcal{L}(A_1)$

Общ случай: $\mathcal{A}_0 = \{\Sigma, Q_0, \delta_0, s_0, F_0\}$

$\mathcal{A}_1 = \{\Sigma, Q_1, \delta_1, s_1, F_1\}$ $\qquad \mathcal{A} = \{\Sigma, Q_0 \times Q_1, \delta, q_{start}, F\}$

$\delta(\langle q,p\rangle, a) = \langle \delta_0(q,a), \delta_1(p,a)\rangle$, $q_{start} = \langle s_0, s_1\rangle$, $F = F_0 \times F_1$

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_0) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}_1)$$

* $\delta^*(\langle q,p\rangle, \alpha) = \langle \delta_0(q,\alpha), \delta_1(p,\alpha)\rangle$ доказателство

Индуктивно по α $\quad$ база $\alpha = \varepsilon$: очевидно. //от деф на δ^*

ИП. $\alpha = \beta$: твърдението е в сила

ИС $\alpha = \beta a$: $\delta^*(\langle q,p\rangle, \underbrace{\beta a}_{\alpha}) = \delta(\delta^*(\langle q,p\rangle, \beta), a) =$ //от деф на δ^*

$= \delta(\langle \delta_0^*(q,\beta), \delta_1^*(p,\beta)\rangle, a) =$ //от ИП. за β

$= \langle \delta_0(\delta_0^*(q,\beta),a), \delta_1(\delta_1^*(p,\beta),a)\rangle =$

$= \langle \delta_0^*(q,\beta a), \delta_1^*(p,\beta a)\rangle$

⌂ $F = F_0 \times Q_1 \cup Q_0 \times F_1 = \{\langle p,q\rangle \in Q_0 \times Q_1 \mid p \in F_0 \vee q \in F_1\}$ обединение

Разлика $L = L_0 \setminus L_1$ (т.е. $L_0 \cap \overline{L_1}$)

допълнение на език

$$\Sigma^* \setminus \mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\overline{\mathcal{A}})$$

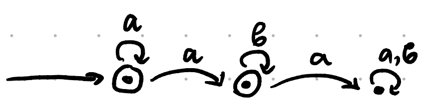
$\overline{\mathcal{A}} = \{\Sigma, Q, q_{start}, \delta, Q \setminus F\}$ $\qquad F = F_0 \times (Q_1 \setminus F_1)$

Автоматните езици са затворени относно сечение/обединение/разлика

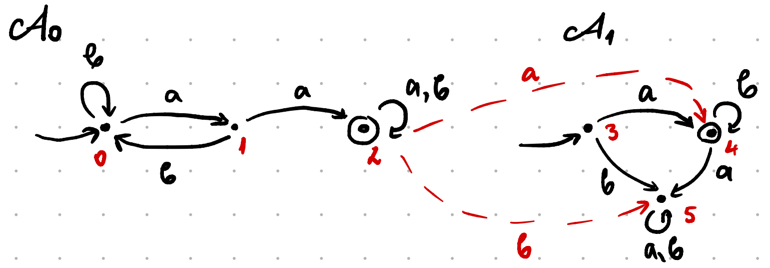
$L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е автоматен език

$L_0 = \{\alpha \in \{a,b\}^* \mid |\alpha|_a = |\alpha|_b\}$

$L_1 = \{a^n b^k, n,k \in \mathbb{N}\} = \{a\}^* . \{b\}^*$



Ако L_0 е автоматен, то $\underbrace{L_0 \cap L_1}_{L}$ е автоматен. L не е автоматен. противор.



$\delta(2,a) = \{2,4\}$

$\delta(2,b) = \{2,5\}$

Недетерминиран краен автомат **Дефиниция:** $\mathcal{N} := (\Sigma, Q, \Delta, \underset{\subseteq Q}{Q_{start}}, \underset{\subseteq Q}{F})$

$\Delta: Q \times \Sigma \to \mathbb{P}(Q)$ $\qquad \Delta^*: P(Q) \times \Sigma^* \to P(Q)$

$$\left| \begin{array}{l} \Delta^*(R, \varepsilon) = R \quad , \ R \subseteq Q \\ \Delta^*(R, \alpha b) = \bigcup \{ \Delta(q, b) \mid q \in \Delta^*(R, \alpha) \} \end{array} \right.$$