Свойства на log: $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ $\forall b \in \mathbb{R}^+$ $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ 01.03.24

1) $a^{\log_a b} = b$ 2) $\log_a a = 1$ 3) $\log_a 1 = 0$

4) $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$ // $\log_a b^n = n \log_a b$

5) $\log_a x + \log_a y = \log_a (x.y)$

6) $\log_a x - \log_a y = \log_a (\frac{x}{y})$

7) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ $b \in \mathbb{R}^+ / \{1\}$

8) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

9) $\log_b a . \log_a x = \log_b x$

10) $a^{\log_b x} = x^{\log_b a}$

Свойства на степените

1) $x^n . x^m = x^{n+m}$

2) $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

3) $(x^n)^m = x^{n.m}$

4) $(x.y)^n = x^n y^n$

5) $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

① DCD, че $n^\varepsilon \prec a^n$ за $a>1$ и $\varepsilon>0$

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\varepsilon}{a^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varepsilon . \log n}{n . \log a} = 0 \Rightarrow n^\varepsilon \prec a^n$

$\Theta(1) \prec \log_a^k n \prec n^\varepsilon \prec a^n \prec n! \prec n^n$

② Сравнете асимптотично $n^{\lg n}$ и $(\lg n)^n$

$\lg n^{\lg n}$ $\lg \lg n^n$

$\lg n \lg n$ $n . \lg \lg n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lg n \lg n}{n . \lg \lg n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{\lg \lg n}}{n . \cancel{\lg \lg n}} = \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow n^{\lg n} \prec (\lg n)^n$

③ $n^{\lg \lg \lg n}$ и $(\lg n)!$

Сл. Стерлинг

$\lg(n!) \stackrel{\smile}{\sim} n \lg n$

$\lg n^{\lg \lg \lg n}$ $\lg((\lg n)!)$

$m = \lg n$

$m^{\lg \lg m}$ $\lg(m!)$

$\lg \lg m . \cancel{m}$ $\cancel{m} \lg m$

$k \leftarrow \lg m$

$\lim\limits_{m\to\infty} \frac{\lg m}{\lg \lg m} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k}{\lg k} = \infty$

④ Да се подредят по асимптотично нарастване:

$f_1 = n$ $f_2 = 2^n$ $f_3 = n^2$ $f_4 = n^3$ $f_5 = (\frac{3}{2})^n$ $f_6 = (n+1)!$ $f_7 = n!$ $f_8 = n . \lg n$ $f_9 = e^n$

$f_{10} = n . 2^n$ $f_{11} = 2^{2^n}$ $f_{12} = \lg(n!)$ $f_{13} = (\lg n)^{\lg n}$ $f_{14} = n^{\lg \lg n}$ $f_{15} = 2^{2^{n+1}}$ $f_{16} = (\lg n)!$ $f_{17} = 4^{\log_2 n}$ $f_{18} = 2^{\lg n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_6}{f_7}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n!}(n+1)}{\cancel{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{1}=\infty \Rightarrow \quad f_7\prec f_6$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_3}{f_4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \Rightarrow f_3\prec f_4$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_2}{f_5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\frac{3}{2}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{3^n}=\infty \Rightarrow \quad f_5\prec f_2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_3}{f_{17}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4^{\log_2 n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^{2\log_2 n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^{\log_2 n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}=1 \Rightarrow f_3\asymp f_{17}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{11}}{f_{15}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2^n}}{2^{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2^n}}{2^{2^n\cdot 2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{2^{2^n}}}{\cancel{2^{2^n}}\cdot 2^{2^n}}=0 \Rightarrow f_{11}\prec f_{15}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_8}{f_{12}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n.\lg n}{\lg(n!)}\overset{\text{Сл.Стр.}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{n.\lg n}{n.\lg n}=1 \Rightarrow f_8\asymp f_{12}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{18}}{f_1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\log_2 n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}=1 \Rightarrow f_1\asymp f_{18}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_1}{f_8}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}.\lg n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lg n}=0 \Rightarrow f_1\prec f_8$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_3}{f_8}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n\lg n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lg n}=\infty \Rightarrow f_8\prec f_3$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_4}{f_{16}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(\lg n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lg n^3}{\lg((\lg n)!)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cancel{\lg n}}{\cancel{\lg n}.\lg\lg n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\lg\lg n}=0 \Rightarrow f_4\prec f_{16}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{13}}{f_{16}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lg n^{\lg n}}{(\lg n)!}=\lim_{m\to\infty}\frac{m^m}{m!}=\infty \Rightarrow f_{16}\prec f_{13}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{13}}{f_{14}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lg n^{\lg n}}{n^{\lg\lg n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\lg\lg n}}{n^{\lg\lg n}}=1 \Rightarrow f_{13}\asymp f_{14}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_5}{f_{14}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n^{\lg\lg n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n.\lg\frac{3}{2}}{\lg\lg n.\lg n}=\infty \Rightarrow f_{14}\prec f_5$$

$\lg\lg n<\lg n\lg n\prec n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_2}{f_{10}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{2^n}}{n.\cancel{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \Rightarrow f_2\prec f_{10}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_9}{f_{10}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n.2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{e}{2}\right)^n}{n}=\lim_{n\to\infty}\infty \Rightarrow f_{10}\prec f_9$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_7}{f_9}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{e^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lg n!}{\lg e^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}.\lg n}{\cancel{n}.\lg e}=\lim_{n\to\infty}\infty \Rightarrow f_9\prec f_7$$