10.05.23

① $L = \{a^n b^m c^k \mid k\text{-четно} \Rightarrow n = m \ \& \ k\text{-нечетно} \Rightarrow n \neq m\}$

$L_1 = \{a^n b^m \mid n = m\}$ $\quad S_1 \to aS_1b \mid \varepsilon$

$L_2 = \{a^n b^m \mid n \neq m\} = \{a^n b^m \mid n > m$ или $n < m\}$

$L_{2.1} = \{a^n b^m \mid n > m\}$ $\quad S_{2.1} \to aSb \mid aS \mid \varepsilon$

$L_{2.2} = \{a^n b^m \mid n < m\}$ $\quad S_{2.2} \to aSb \mid Sb \mid \varepsilon$

$L_{2.1} \cup L_{2.2} = L_2$ $\quad L = \{a^n b^m c^k \mid k$ е четно & $n = m\} \cup \{a^n b^m c^k \mid k$ е нечетно и $n \neq m\}$

$S_2 \to S_{2.1} \mid S_{2.2}$ $\quad \{a^n b^m \mid n = m\} . \{c^k \mid k \text{ четно}\} \cup \{a^n b^m \mid n \neq m\} . \{c^k \mid k \text{ нечетно}\}$

$S \to S_1 C_{\text{четно}} \mid S_4 . C_{\text{нечетно}}$

I н. $C'_{\text{нечетно}} \to c . C'_{\text{четно}}$

$C'_{\text{четно}} \to \varepsilon \mid c C'_{\text{нечетно}}$

препоръчително е да избягваме цикличност (трормави доказателства)

II н. $C'_{\text{нечетно}} \to cc . C'_{\text{нечетно}} \mid c$

$C'_{\text{четно}} \to cc . C'_{\text{четно}} \mid \varepsilon$

2. $L = \{a^n b^m \mid 2n \leq m \leq 3n\} = \{a^n b^m \mid 2n \leq m\} \cap \{a^n b^m \mid m \leq 3m\} \to$ безконтекстен

Няма как да докажем сечението

$L_1 = \{a^n b^m \mid 2n \leq m\}$ $\quad S \to aSbb \mid Sb \mid \varepsilon$

$L_2 = \{a^n b^m \mid m \leq 3n\}$ $\quad S \to aSbbb \mid aS \mid \varepsilon$ (изпуска случаи)

Граматика за L: $S \to aSbb \mid aSbbb \mid \varepsilon$

Сечението не е добра операция при безконтекстни езици:

$L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е безконтекстен $\quad S = aSc$

Ако напишем правило $S \to abSc$, думите са от вида $abab\ldots abc\ldots c$

Ако напишем правило $S \to aSbc$, думите са от вида $a\ldots abcbcbc\ldots bc$

$\Rightarrow$ L не е безконтекстен

$L_1 = \{a^n b^n c^k \mid n,k \in \mathbb{N}\}$ $\quad L_2 = \{a^n b^k c^k \mid n,k \in \mathbb{N}\}$

$$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^m c^k \mid n=m\} \cap \{a^n b^m c^k \mid m=k\} =$$
$$= \{a^n b^m c^k \mid n=m \text{ и } m=k\} = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

! В общия случай, ако L_1 и L_2 са безконтекстни, не е сигурно дали $L_1 \cap L_2$ е безконтекстен.

Наблюдения:

1. L_1 и L_2 са безконтекстни $\Rightarrow$ $L_1 \cup L_2$ е безконтекстен

   Ако $L_1 = \mathcal{L}(G_1)$ и $L_2 = \mathcal{L}(G_2)$, можем да построим алгоритмично граматика G с $\mathcal{L}(G) = L_1 \cup L_2$

   G: Има начална променлива S, $S \notin V_1$ & $S \notin V_2$

   Има правило $S \to S_1 \mid S_2$ и правилата на G_1 и G_2

   Трябва да има $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Ако не е изпълнено – преименуваме

Пример: $L_1 = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{a\}^*$ $\quad G_1: X \to aX \mid \varepsilon$

$L_2 = \{b^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{b\}^*$ $\quad G_2: X \to bX \mid \varepsilon$

$$\left.\begin{aligned} &S \to X \mid X \\ &X \to aX \mid \varepsilon \\ &X \to bX \mid \varepsilon \end{aligned}\right\} \Sigma^* \text{ (невярно)} \Rightarrow \begin{aligned} &G_1: X_1 \to aX_1 \mid \varepsilon \\ &G_2: X_2 \to bX_2 \mid \varepsilon \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &S \to X_1 \mid X_2 \\ &X_1 \to aX_1 \mid \varepsilon \\ &X_2 \to bX_2 \mid \varepsilon \end{aligned} \text{ (вярно)}$$

(преименуваме)

2. Ако $L_1 = \mathcal{L}(G_1)$ и $L_2 = \mathcal{L}(G_2)$, можем да построим алгоритмично граматика G с $\mathcal{L}(G) = L_1 . L_2$

   Трябва да има $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Ако не е изпълнено – преименуваме

   Има променлива $S \to S_1 . S_2$

③ Ако $L = \mathcal{L}(G)$, можем да построим алгоритмично граматика G_* с $\mathcal{L}(G_*) = L^*$ $(L^* = \{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \mid n \in \mathbb{N},\ \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \in L\})$

Има променлива $S \to S_L . S \mid \varepsilon$

Заключение: Безконтекстните езици пазят $\cup$, $\cdot$, $*$.

④ $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ (допълнение)

Допускаме, че ако L_1 е безконтекстен, $\overline{L_1}$ също е безконтекстен

$\overline{L_1}$ и $\overline{L_2}$ са безконтекстни, $\cup$ запазва $\Rightarrow$ $\overline{L_1} \cup \overline{L_2}$ е безконтекстен

От допускането $\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ е безконтекстен, но $\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}} = L_1 \cap L_2$ $\Rightarrow$

$L_1 \cap L_2$ е безконтекстен.

$\Rightarrow$ $\cap$ запазва безконтекстност (противоречие)

$\Rightarrow$ допълнението не запазва безконтекстност

Твърдение: Всеки регулярен език е безконтекстен.

def. $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$, $\{\sigma\}$ са регулярни, Ако L_1 и L_2 са регулярни, то $L_1 \cup L_2$, $L_1 . L_2$, L_1^* са рег.

док: Индукция по построението на регулярен език:

база
- $L = \emptyset$
- $L = \{\varepsilon\}$
- $L = \{\sigma\}$ за някое $\sigma \in \Sigma$

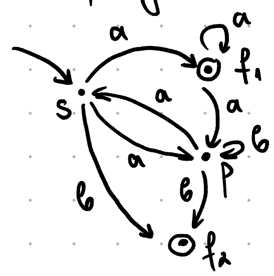
$\Big\}$ крайни $\Rightarrow$ безконтекстни

ИП: Нека L_1 и L_2 са регулярни $\Rightarrow$ безконтекстни

ИС:
- $L_1 \cup L_2$ $\quad$ L_1, L_2 са безконтекстни, $\cup$ запазва безконтекстност $\Rightarrow$ $L_1 \cup L_2$ е безконтекстен
- $L_1 . L_2$ $\quad$ L_1, L_2 са безконтекстни, $\cdot$ запазва безконтекстност $\Rightarrow$ $L_1 . L_2$ е безконтекстен
- L_1^* $\quad$ L_1 е безконтекстен, $*$ запазва безконтекстност $\Rightarrow$ L_1^* е безконтекстен

def. Граматика G е регулярна, ако $R_G \subseteq V \times (\{\varepsilon\} \cup \Sigma . V)$

пример: L регулярен

$\mathcal{N}$: 

$\mathcal{L}(\mathcal{N}) = L$

$\{\alpha \in \Sigma^* \mid$ има път от някое начално до някое крайно състояние$\}$

Идея: Ще построим регулярна граматика, която ще генерира пътищата в автомата.

Конструкция: Взимаме по една променлива за всяко състояние

$S \to aF_1 \mid aP \mid bF_2$

$P \to bF_2 \mid bP \mid aS$

$F_1 \to aF_1 \mid aP \mid \varepsilon$

$F_2 \to \varepsilon$

Искаме започвайки от пром. X, думите, които и записване да са думите, определящи път от съст. X до финално съст.

Алтернатива: За всяко състояние взимаме съотв. променлива

Начална променлива е начално състояние

Правила:
- $\forall$ финално съст. f добавяме правило $F \to \varepsilon$
- $\forall$ съст. p и всеки преход в автомата $p \xrightarrow{\sigma} q$ добавяме правило $P \to \sigma Q$