Доказателства за граматика

- даден език $L$

построили сме граматика $G$

искаме да покажем, че $L = \mathcal{L}(G)$

1) $\forall$ пром $X$ съобразяваме език $L_X$ – езикът от думите в $\Sigma^*$, които $X$ поражда

2) $\mathcal{L}(X) \subseteq L_X$ $\forall$ пром $X$

$\mathcal{L}(X) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid$ има дърво на извод с корен $X$ и дума $\alpha$ в листата$\}$

3) $\mathcal{L}(X) \supseteq L_X$

i) $L_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

ii) $L_2 = \{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

iii) $L_3 = \{a^n \# \alpha_1 \# \alpha_2 \# \dots \# \alpha_n \mid n \in \mathbb{N}$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L\}$ където $L = \{\mu \mu^{rev} \mid \mu \in \Sigma^*\}$

① гр. за $L_1$ $S \to aSb \mid \varepsilon$, съобразяваме $L_S = L_1$

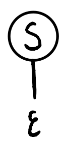
показваме, че $L_S \subseteq \mathcal{L}(S)$

индуктивно твърдение: $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall \alpha$ с $|\alpha| = n$

• ако $\alpha \in L_S$, то $\alpha \in \mathcal{L}(S)$

индукция по $n$: • база $n = 0$ $\sim$ $\alpha = \varepsilon$

$\varepsilon \in L_S$, т.е. предпоставката е изпълнена



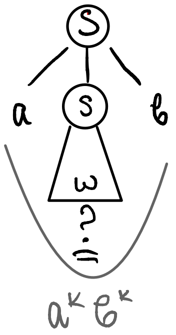
$\left.\begin{array}{l} T \text{ е дърво на извод с } root(T) = S \\ word(T) = \varepsilon \end{array}\right\}$ $\varepsilon \in \mathcal{L}(S)$

• индуктивно предп.: нека знаем, че $\forall k \leq n$, ако $|\alpha| = k$ : $\alpha \in \Sigma^*$, то

ако $\alpha \in L_S$, то $\alpha \in \mathcal{L}(S)$

• индуктивна стъпка: нека $\alpha \in \Sigma^*$ и $|\alpha| = n+1$ $\alpha \neq \varepsilon$

нека $\alpha \in L_S$, тогава има $k \in \mathbb{N}$: $\alpha = a^k b^k$ $k \neq 0$



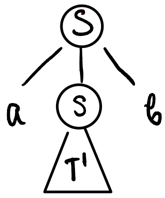

$\alpha = a^k b^k = a.a^{k-1}.b^{k-1}.a$

$w = a^{k-1} b^{k-1}$, $k-1 \in \mathbb{N}$, тогава $w \in L_1$, $|w| < \alpha$, тогава по ИП:

понеже $w \in L_S$, то $w \in \mathcal{L}(S)$

Тогава има $T'$ с $root(T') = S$ и $word(T') = w$

строим дърво $T$:




// $T = \langle S, [T_a, T', T_b] \rangle$

Тогава $word(T) = a.word(T').b = a.w.b = \alpha$

Тогава понеже $root(T) = S \Rightarrow \alpha \in \mathcal{L}(S)$

③ 


$S \to aS\#X \mid \varepsilon$ $\quad L_S = L_S$

$X \to aXa \mid bXb \mid \varepsilon$ $\quad L_X = \{ \mu\mu^{rev} \mid \mu \in \{a,b\}^* \}$

Ще докажем, че $L_S \subseteq \mathcal{L}(S)$

с индукция по n: $\forall \alpha$ с $|\alpha| = n$: 1) ако $\alpha \in L_S$, то $\alpha \in \mathcal{L}(S)$

2) ако $\alpha \in L_X$, то $\alpha \in \mathcal{L}(X)$

база: $n = 0 \leadsto \alpha = \varepsilon$

$\varepsilon \in L_S$, строим $T$:  Тогава $\varepsilon \in \mathcal{L}(S) \Rightarrow$ 1) е изпълнено

$\varepsilon = \varepsilon.\varepsilon^{rev} \in L_X$, строим $T$:  Тогава $\varepsilon \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow$ 2) е изпълнено

индуктивно предположение: Нека знаем, че ако $|\alpha| \le n$, то:

1) ако $\alpha \in L_S$, то $\alpha \in \mathcal{L}(S)$

2) ако $\alpha \in L_X$, то $\alpha \in \mathcal{L}(X)$

индуктивна стъпка: доказваме 1) и 2) за n+1

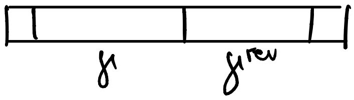
показваме за 2):

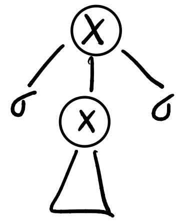
Нека $\alpha \in L_X$. Тогава има $\mu \in \{a,b\}^*$

$\alpha = \mu.\mu^{rev}$. понеже $|\alpha| = n+1$, $|\alpha| \neq 0$ и $\alpha \neq \varepsilon$

В тази посока доказваме твърденията от най-вложените пром.

тогава $\mu \neq \varepsilon$.



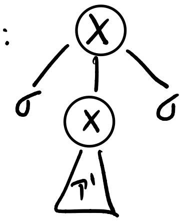

нека $\mu = \sigma . w$ където $\sigma \in \{a, b\}$ и $w \in \Sigma^*$

тогава $\alpha = \mu\mu^{rev} = \sigma w . (\sigma . w)^{rev} = \sigma w . w^{rev} . \sigma$

$w.w^{rev} \in L_X$, $|w.w^{rev}| < |\alpha|$, тогава по ИП, $ww^{rev} \in \mathcal{L}(X)$

има дърво $T'$ : $root(T') = X$ и $word(T') = ww^{rev}$

строим дърво $T$:




$root(T) = X$ и $word(T) = \sigma\, word(T')\, \sigma =$

$= \sigma w w^{rev} \sigma = \alpha$

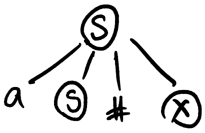
$\Rightarrow \alpha \in \mathcal{L}(X)$

показваме за 1)

нека $|\alpha| = n+1$ и $\alpha \in L_S$, тогава има $k \in \mathbb{N}$ и думи $\mu_1, \dots, \mu_n$:

$$\alpha = a^k \# \mu_1 \mu_1^{rev} \# \dots \# \mu_k \mu_k^{rev}$$

$\alpha \neq \varepsilon$, тогава $k \neq 0$




$$\alpha = a . \underbrace{a^{k-1} \# \mu_1 \mu_1^{rev} \# \dots \# \mu_{k-1} \mu_{k-1}^{rev}}_{w_1} \# \underbrace{\mu_k \mu_k}_{w_2}$$

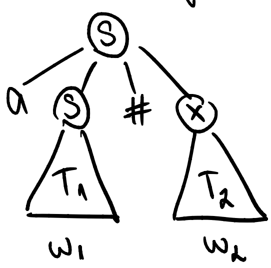
- $|w_1| < |\alpha|$ и $w_1 \in L_S$ и по ИП $w_1 \in \mathcal{L}(S)$, т.е

  има дърво $T_1$ с $root(T_1) = S$ и $word(T_1) = w_1$

- $|w_2| < |\alpha|$ и $w_2 \in L_X$ и по ИП $w_2 \in \mathcal{L}(X)$, т.е.

  има дърво $T_2$ с $root(T_2) = X$ и $word(T_2) = w_2$

строим дърво $T$:

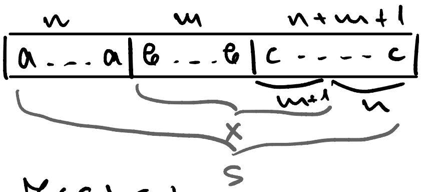



$root(T) = S$ $\quad$ $word(T) = a . word(T_1) . \# . word(T_2) =$

$= a . w_1 . \# . w_2 = \alpha$

$\Rightarrow \alpha \in \mathcal{L}(S)$

(2)




$L_2 = \{a^n b^m c^{n+m+1} \mid n,m \in \mathbb{N}\}$

$S \to aSc \mid X \qquad L_S = L_1$

$X \to bXc \mid c \qquad L_X = \{b^m c^{m+1} \mid m \in \mathbb{N}\}$

## I. $\mathcal{L}(G) \subseteq L$

ще док. с инд. по $h(T)$, където $word(T) \in \Sigma^*$, че ако:

1) $root(T) = S$, то $word(T) \in L_S$

2) $root(T) = X$, то $word(T) \in L_X$

индукция по $h(T)$:

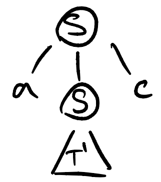
база: $h(T) = 0$ 1) и 2) са тривиално изп.

инд. предп: Ако $h(T) \leq n$, то 1) и 2) са изп.

инд. стъпка: $h(T) = n+1$

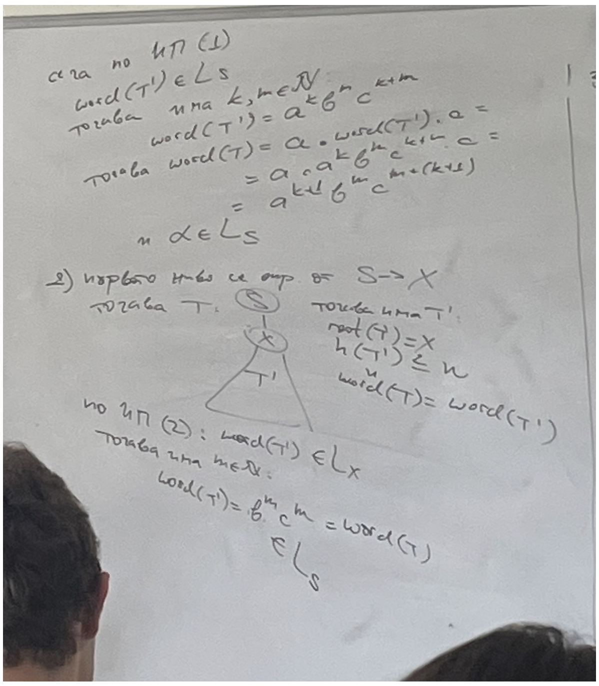
клауза 1): нека $root(T) = S$

1) първо ниво се опр. от $S \to aSc$

тогава T: 


тогава има $T'$ с $root(T') = S$, $word(T') \in \Sigma^*$ и $word(T) = a.word(T').c$ и $h(T') \leq h(T) - 1 = n+1-1 = n$

---



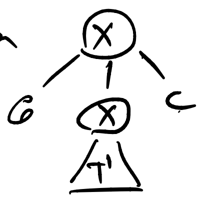

за кл. 2) $root(T) = X$

1) първо ниво се опр. от $X \to \varepsilon$

T: 


и $word(T) = \varepsilon = b^0 c^0 \in L_X$

2) първо ниво се опр. от $X \to bXc$

тогава T: 


има $T'$ $h(T') \leq n$

$word(T) = b.word(T').c$

$root(T') = X$

по ИП 2): $word(T') \in L_X$ ~ има $m \in \mathbb{N}$

$word(T') = b^m c^m$

$word(T) = b.word(T').c = b b^m c^m c = b^{m+1} c^{m+1} \in L_X$

II $L_S \subseteq \mathcal{L}(G)$

с индук. по n: $\forall \alpha \in \Sigma^*$ с $|\alpha| \le n$:

1) ако $\alpha \in L_S$, то $\alpha \in \mathcal{L}(S)$

2) ако $\alpha \in L_X$, то $\alpha \in \mathcal{L}(X)$

<u>индукция по n:</u> База: нека $n=0$, тогава $\alpha = \varepsilon$ сега $\varepsilon \notin L_S \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$ предп. на 1 не е изп., но 1) е вярно (импликация)

$\varepsilon \in L_X \rightsquigarrow$ 2) е вярно

<u>Инд. предп:</u> ако $|\alpha| \le n$, то 1) и 2) са изп.

<u>Инд. стъпка:</u> клауза 2):

$|\alpha| = n+1$ и $\alpha \in L_X$ тогава $\alpha \neq \varepsilon$

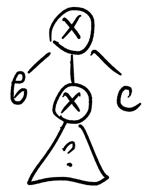
$\alpha = b^m c^{m+1}$ за някое $m \in \mathbb{N}$

1) ако $m = 0$, то $\alpha = c$

T: 

$root(T) = X$ и $word(T) = c = \alpha \Rightarrow \alpha \in \mathcal{L}(X)$

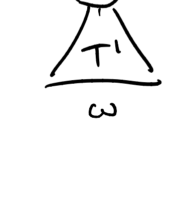
2) ако $m \neq 0$




тогава $\alpha = b.\underbrace{b^{m-1}.c^m}_{\omega}.c$

$w = b^{m-1}c^m \in L_X$ и $|w| < |\alpha|$, тогава по ИП 2):

има: $T'$ с $root(T') = X$ и $word(T') = w$

строим T: 

$root(T) = X$ $word(T) = b.word(T').c =$

$= b\, b^{m-1}.c^m.c = b^m c^{m+1} = \alpha$

$\Rightarrow \alpha \in \mathcal{L}(X)$

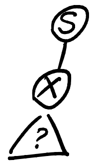
клауза 1:

нека $|\alpha| = n+1$ и $\alpha \in L_S$, тогава има $k, m \in \mathbb{N}$:

$\alpha = a^k b^m c^{k+m+1}$

• ако $k = 0$

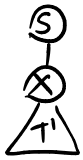
тогава $\alpha = b^m c^{m+1}$ и $\alpha \in L_X$ и $|\alpha| = n+1$



съгл. док. в клауза а) за $n+1$ $\alpha \in \mathcal{L}(X)$

и има $T'$ с $root(T') = X$ и $word(T') = \alpha$

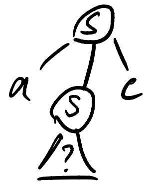
строим $T$:



$root(T) = S$, $word(T) = \alpha \Rightarrow \alpha \in \mathcal{L}(S)$

• ако $k \neq 0$

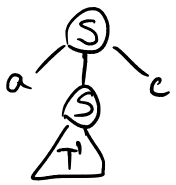
$\alpha = a^k b^m c^{m+k+1} = a . \underbrace{a^{k-1} . b^m c^{m+k}}_{\omega} . c$



$\omega \in L_S$, $|\omega| < |\alpha|$ и по ИП има

$T'$:

строим



$root(T) = S$

$word(T) = a.word(T').c = a.\omega.c = \alpha$

$\Rightarrow \alpha \in \mathcal{L}(S)$

G е в НФЧ, → Нормална форма на Чомски

ако всяко правило е от вида:

$X \to \sigma$ за $\sigma \in \Sigma$

или

$X \to YZ$

или

$\boxed{S \to \varepsilon}$ може да го има само ако S е нач. пр. и S не се среща в дясна страна на никое пр.

Тв: L е безконтекстен $\Leftrightarrow$ има гр. G в НФЧ с $\mathcal{L}(G) = L$