def. Нека G е безк. гр.; G е в НФЧ

всяко правило е от вида $X \to YZ$ или $X \to \sigma$ за $\sigma \in \Sigma$ или $S \to \varepsilon$ (само ако S е началната пром и S не е от дясна страна)

Твърдение: L е безконтекстен $\iff$ има граматика G в НФЧ, такава че $\mathcal{L}(G) = L$.

1. дървета за извод за G в НФЧ: има ограничена широчина
дърветата са двоични (т.е всеки връх има най-много 2 наследника)

добавка: винаги можем да изберем гр. G в НФЧ така че вс. пром. могат да генерират дума, стига $\mathcal{L}(G) \neq \emptyset$

пример: $S \to XA \mid \cancel{YZ} \mid BX$ $B \to b$

$X \to YX \mid AB \mid a$ $\cancel{T \to ZA}$

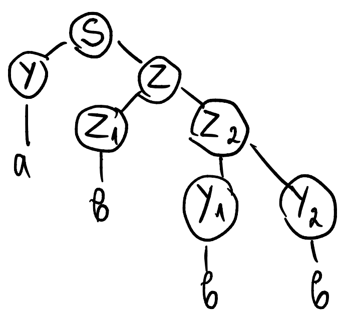
$\cancel{Z \to TZ \mid TT}$ $Y \to BA$

2. всяка променлива може да генерира $\alpha \in \Sigma^*$ стига $\mathcal{L}(G) \neq \emptyset$.

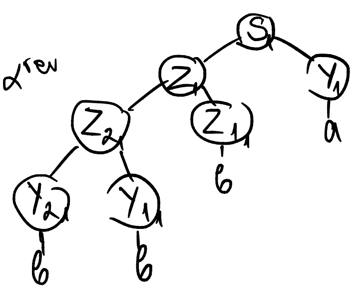
типове задачи: Нека L е безконтекстен, h е операция над езици, да се докаже, че $h(L)$ е безконтекстен

① Да се докаже, че винаги когато L е безконтекстен, L^{rev} е безконтекстен.
Нека G е граматика за L в НФЧ (без ненужни пром)

прим. дърво на извод за $\alpha \in L$



α^{rev}



строим граматика G_1 за L^{rev}

променливи: $V_1 = \{X_1 \mid X \in V\}$ $\quad$ S_1 - начална пром. където S е нач. за G

R_1: $\forall$ правило от вида $X \to YZ$ в R, добавяме правило $X_1 \to Z_1 Y_1$ в R_1

R_2: $\forall$ правило от вида $X \to \sigma$ в R, добавяме правило $X_1 \to \sigma$ в R_1

ако в G има правило $S \to \varepsilon$, добавяме в R_1: $S_1 \to \varepsilon$.

доказателство за коректност: $\mathcal{L}(G_1) \overset{\supseteq}{\underset{\subseteq}{}} \mathcal{L}(G)^{rev}$

1. $\mathcal{L}(G_1) \subseteq \mathcal{L}(G^{rev})$: ще докажем $\forall$ пром. X, че $\mathcal{L}(X_1) \subseteq \mathcal{L}(X)^{rev}$

индукция по $h(T)$, T - дърво на извод в G_1 с $word(T) \in \Sigma^*$,

ако $root(T) = X_1$, то $word(T) \in \mathcal{L}(X)^{rev}$

• <u>база</u>: $h(T) = 0$: тривиално изпълнено

• <u>ИП</u>: Ако T е дърво в G_1 и $h(T) \leq n$ и $root(T) = X_1$, то $word(T) \in \mathcal{L}(X)^{rev}$

• <u>ИС</u>: нека $h(T) = n+1$

сл.1: първото ниво в T се определя от правило $X_1 \to \sigma \in R_1$

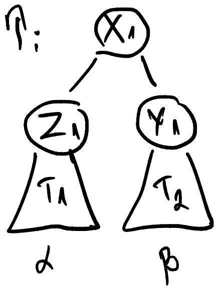
T:  искаме дърво T' в G, такова, че $word(T') = \sigma^{rev} = \sigma$

понеже $X_1 \to \sigma$ е в R_1, то в R има правило $R \to \sigma$.

тогава T':  е дърво на извод в G и значи $\sigma \in \mathcal{L}(X)$.

тогава $word(T) = \sigma \in \mathcal{L}(X)^{rev}$ понеже $\sigma \in \mathcal{L}(X)$ и $\sigma = \sigma^{rev} \in \mathcal{L}(X)^{rev}$

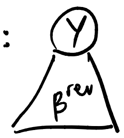
сл.2: първото ниво в T се определя от правило $X_1 \to Z_1 Y_1 \in R_1$,

T:  тогава в R има правило $X \to YZ$.

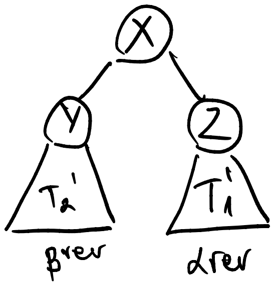
по ИП понеже $h(T_1), h(T_2) \leq h(T) - 1 = n$ знаем, че

$\underbrace{word}_{\alpha}(T_1) \in \mathcal{L}(Z)^{rev}$ и $\underbrace{word}_{\beta}(T_2) \in \mathcal{L}(Y)^{rev}$

тогава $\alpha^{rev} \in \mathcal{L}(Z)$ и $\beta^{rev} \in \mathcal{L}(Y)$ тогава

има дървета T_1':  и T_2': 

строим T':



T' е дърво в G,

тогава $word(T) = \beta^{rev}\alpha^{rev} \in \mathcal{L}(X)$

$(\beta^{rev}\alpha^{rev})^{rev} \in \mathcal{L}(X)^{rev}$

$\| \alpha\beta$

$word(T) \in \mathcal{L}(X)^{rev}$

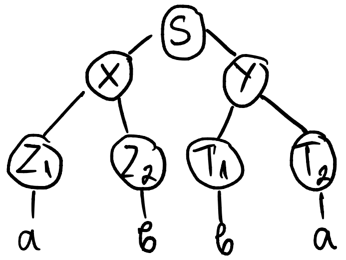
2) $\mathcal{L}(G)^{rev} \subseteq \mathcal{L}(G_1) \iff \mathcal{L}(G) \subseteq \mathcal{L}(G_1)^{rev}$ – аналогично на 1

② Нека L е безк. език, да се докаже, че $Pref(L)$ е безк.

$$Pref(L) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid (\exists \beta \in \Sigma^*)\ \alpha\beta \in L\}$$

Нека G е граматика за L в нфч (без ненужни пром)

примерно дърво на извод



за всяко правило $X \to \sigma$ в R добавяме в R_1: $X_1 \to \varepsilon \mid \sigma$

за всяко правило $X \to YZ$ в R добавяме в R_1: $X_1 \to Y_1 Z_1$

не работи
решава за
$Sub(L)$ е безк.
подредица

Нека пром. в G_1 са от следния вид:

X_{all}, X_{pref} за $X \in V$

Търсим следната семантика: $\mathcal{L}(X_{All}) = \mathcal{L}(X)$

$\mathcal{L}(X_{pref}) = Pref(\mathcal{L}(X))$

начална пром. в G_1: S_{pref}

правила в G_1:

R_1: $\forall$ правило от $X \to YZ$ в R, добавяме $X_{All} \to Y_{All} Z_{All}$ и $X_{pref} \to Y_{All} Z_{pref} \mid Y_{pref}$ в R_1

R_2: $\forall$ правило от $X \to \sigma$ в R, добавяме $X_{All} \to \sigma$ и $X_{pref} \to \sigma \mid \varepsilon$ в R_1

R_3: $\forall$ правило от $S \to \varepsilon$ в R, добавяме $S_{All} \to \varepsilon$ в R_1

③ Нека L е безк., да се докаже, че $L_a = \{a^n \mid \text{има } \alpha \in L, |\alpha| = n\}$ е безк.

конструкция

R_1: $\forall$ правило от вида $X \to YZ$ в R, добавяме правило $X_1 \to Z_1 Y_1$ в R_1

R_2: $\forall$ правило от вида $X \to a$ в R, добавяме правило $X_1 \to a$ в R_1

R_3: $\forall$ правило от вида $X \to b$ в R, добавяме правило $X_1 \to \varepsilon$ в R_1

ако в G има правило $S \to \varepsilon$, добавяме в R_1: $S_1 \to \varepsilon$.

④ Нека L е безк. и хомоморфизъм $\varphi: \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ такова, че $\forall \alpha$ и β

$\varphi(\alpha.\beta) = \varphi(\alpha) \circ \varphi(\beta)$ ↳ задаваме чрез $\varphi(\sigma)$ $\varphi(a) = ba$

$\varphi(b) = bb$

$\varphi[L] = \{\varphi(L) \mid \alpha \in L\}$ е безк.

констр:

R_1: $\forall$ правило от вида $X \to YZ$ в R, добавяме правило $X_1 \to Z_1 Y_1$ в R_1

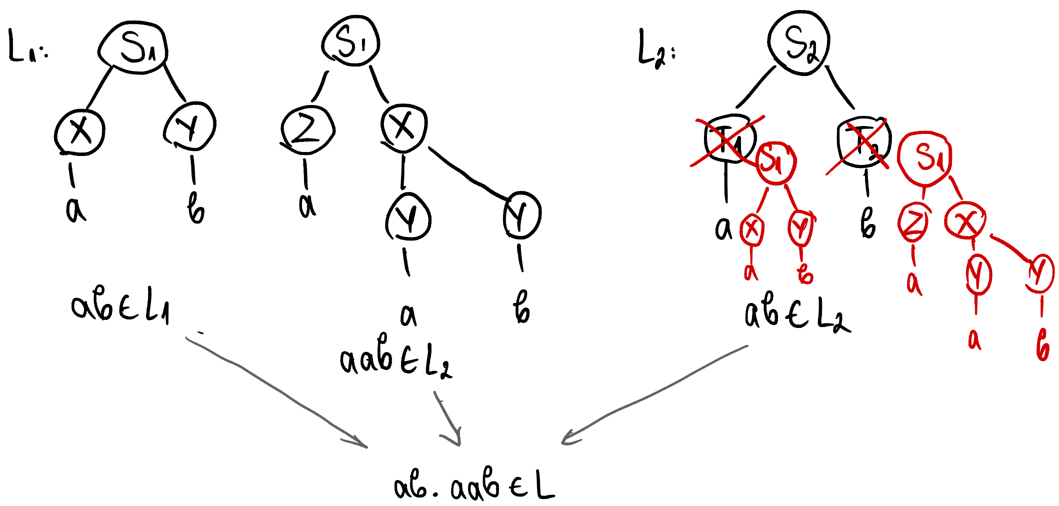
R_2: $\forall$ правило от вида $X \to a$ в R, добавяме правило $X_1 \to \varphi(a)$ в R_1

R_3: $\forall$ правило от вида $X \to b$ в R, добавяме правило $X_1 \to \varphi(b)$ в R_1

⑤ Нека L_1 и L_2 са безк.

Нека $L = \{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \mid \alpha_1 \ldots \alpha_n \in L_1 \text{ и има } \beta \in L_2, |\beta| = n\}$

Да се докаже, че L е безк.



за вс. правило $X\to YZ$ в R_1: $X_1\to Y_1Z_1$ в R

за вс. правило $X\to \sigma$ в R_1: $X_1\to \sigma$ в R

за $S_1\to \varepsilon$ в R_1: $S_1\to \varepsilon$ в R

за вс. правило $X\to YZ$ в R_2: $X_2\to Y_2Z_2$ в R

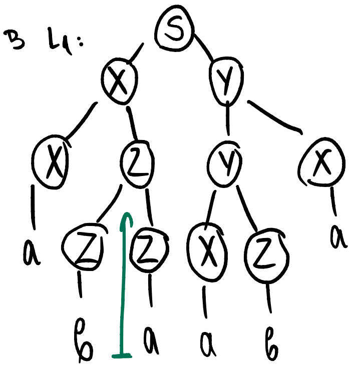
за вс. правило $X\to \sigma$ в R_2: $X_2\to S_1$ в R

за $S_2\to \varepsilon$ в R_2: $S_2\to \varepsilon$ в R

кои са променливите: всички в G_1 и G_2, начална S_2

⑥ Нека L_1 е безк. Нека $L=\{a^{|\alpha|_a}.b^{|\gamma|_b} \mid \alpha\gamma\in L_1\}$ ДСД, че L е безк.

дърво в L_1:



a b $\in L$

spl1: $w=$ ab|abaa $\in L_1$

spl2: $w=$ ababa|a $\in L_1$

aaa $\varepsilon\in L$

променливи в G_1:

$\forall$ пром. X в G добавяме пром. X_A, X_B, X_{mid}

X_a – в цялото поддърво пазим a

X_b – в цялото поддърво пазим b

X_{mid} - търси разделение

за вс. правило $X\to YZ$ в G: $X_A\to Y_AZ_A$ $X_B\to Y_BZ_B$

$X_{mid}\to Y_{mid}Z_B \mid Y_AZ_{mid} \mid Y_AZ_B$

за вс. правило $X\to a$ в G: $X_A\to a$ $X_B\to \varepsilon$

I вар. $X_{mid}\to a\mid\varepsilon$ $X_{mid}\to b\mid\varepsilon$ нач. S_{mid}

II вар: нова нач. пром. $S\to S_{mid}\mid S_A\mid S_B$

за вс. правило $X\to b$ в G: $X_A\to \varepsilon$ $X_B\to \varepsilon$

I вар. $X_{mid}\to a\mid\varepsilon$ $X_{mid}\to b\mid\varepsilon$ нач. S_{mid}

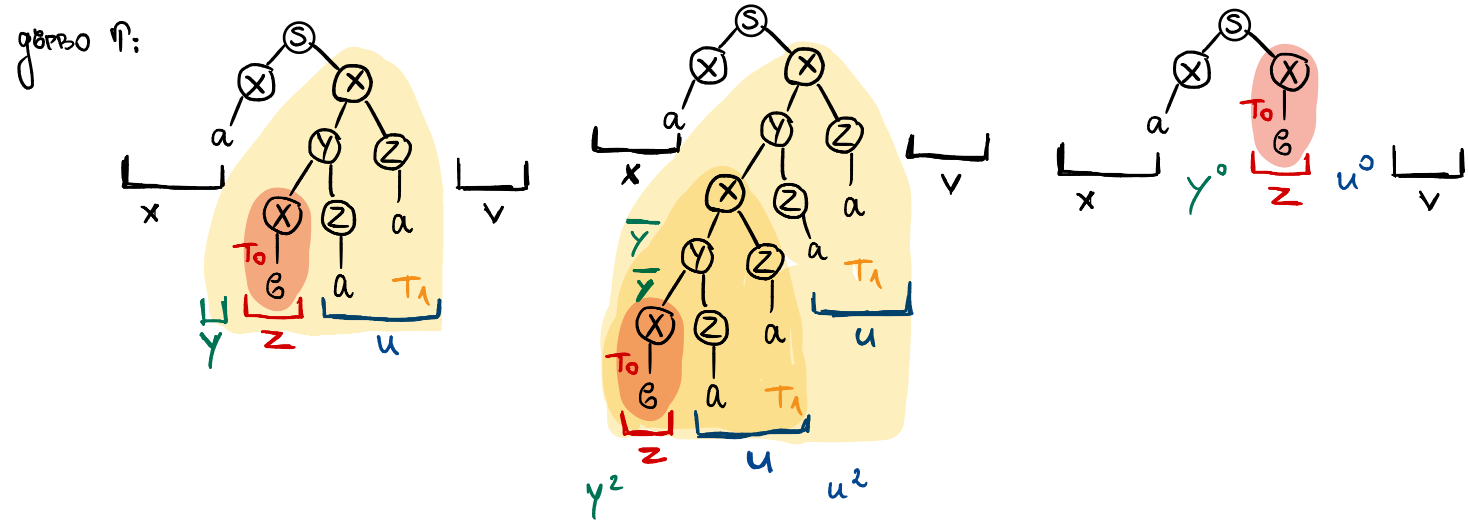
II вар: нова нач. пром. $S\to S_{mid}\mid S_A\mid S_B$

за $S\to\varepsilon$ в G: $S_A\to\varepsilon$ $S_B\to\varepsilon$ $S_{mid}\to\varepsilon$

Лема за покачване: Нека L е безконтекстен, тогава:

PL
$$\begin{cases}(\exists p)\\ (\forall \alpha \in L, |\alpha| \geq p)\\ (\exists \alpha = xyzuv,\ x,y,z,u,v \in \Sigma^*,\ |yu| \geq 1,\ |yzu| \leq p)\\ (\forall j \in \mathbb{N}):\ \underline{\alpha(j) = xy^j z u^j v} \in L\end{cases}$$

дърво T:



Ако L е безконтекстен, PL е изпълнено.

Ако PL не е изпълнено, L не е безконтекстен.

$\neg$ PL

$(\forall p \geq 1)$

$(\exists \alpha \in L, |\alpha| \geq p)$

$(\forall \alpha = xyzuv,\ x,y,z,u,v \in \Sigma^*,\ |yu| \geq 1,\ |yzu| \leq p)$

$(\exists j \in \mathbb{N}):\ \underline{\alpha(j) = xy^j z u^j v} \notin L$

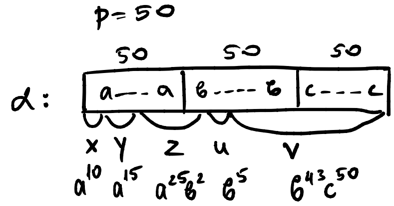
① $L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е безконтекстен

<u>д-во:</u> L удовлетворява $\neg$PL

1) $p \geq 1$ произв.

2) избираме $\alpha \in L$, $|\alpha| \geq p$, $\alpha = a^p b^p c^p$

деко: 3) нека $\alpha = xyzuv$, $|yu| \geq 1$, $|yzu| \leq p$

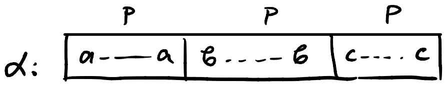


$j=1 \quad \alpha_1 = \alpha$

$j=0 \quad \alpha_0 = xy^0zu^0v = xzv = a^{10}a^{25}b^2 b^{43}c^{50} = a^{35}b^{45}c^{50} \notin L$

$j=2 \quad \alpha_2 = xy^2zu^2v = a^{10}a^{15}a^{15}a^{25}b^2 b^5 b^5 b^{43} c^{50} = a^{65}b^{55}c^{50} \notin L$

коректно 3):



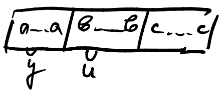
разглеждаме случаи, породени от „плъзгането" на yzu

I сл. $yzu = a^+$ $\quad j=0 \quad \alpha_{(0)} = xzv = a^{p-|yu|}b^pc^p$, но $|yu|>1$

$\Rightarrow p-|yu| \neq p$ и $\alpha_1 \notin L$

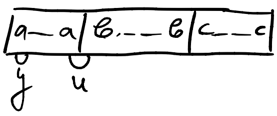
II сл. $yzu = b^+$ $\quad j=2 \quad \alpha_{(2)} = xy^2zu^2v = a^pb^{p+|yu|}c^p$, но $|yu|>1$

$\Rightarrow p \neq p+|yu|$ и $\alpha_2 \notin L$

III сл. 

$j=0 \quad \alpha_{(0)} = a^{p-|y|}b^{p-|u|}c^p$, но $|yu| \geq 1$ тогава $|y| \geq 1$ или $|u| \geq 1$

$\Rightarrow p \neq p-|y|$ или $p \neq p-|u| \Rightarrow \alpha_3 \notin L$

IV сл 

$y = a^t \quad u = a^{t_1}b^{t_2}$

$j=2 \quad \underbrace{a^{|x|}a^t a^{|z|}a^{t_1}}_{a} b^{t_2} a^{t_1} b^{t_2} b^{|v|_b} c^{|v|_c}$! последователността се нарушава $\Rightarrow \alpha_4 \notin L$

Алтернативно док на 3:

Нека $|yu| \geq 1$ и $|yzu| \leq p$, тогава $|yu|_a = 0$ или $|yu|_c = 0$

I сл. $|yu|_a = a^p b^{p-|yu|_b} c^{p-|yu|_c}$ понеже $|yu| \geq 1$ то $p \neq p-|yu|_b$ или

$p \neq p-|yu|_c \Rightarrow \alpha \notin L$

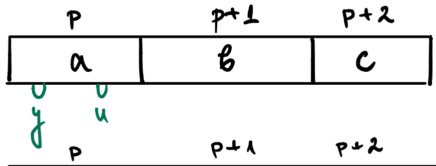
② Нека $L = \{a^nb^kc^t \mid n<k<t\}$. ДСД, че не е безконтекстен

1) нека $p \geq 1$ произв.

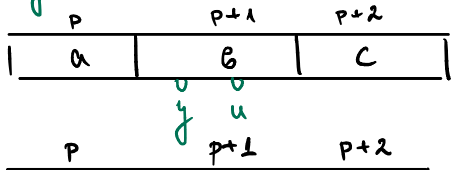
2) изб $\alpha \in L$, $|\alpha| \geq p$, $\alpha = a^pb^{p+1}c^{p+2}$! малки разлики в степените

3) нек $\alpha = xyzuv$, $|yu| \geq 1$, $|yzu| \leq p$

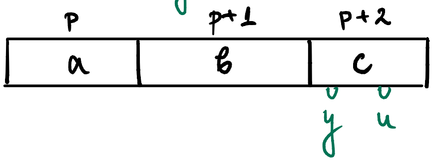
4) случаи:

I. 

$j=2$ $|\alpha|_a \geq |\alpha|_b$

II. 

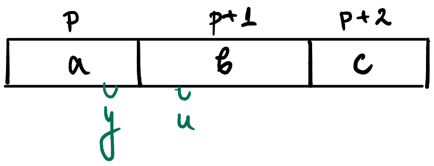
$\forall j \neq 1$

III. 

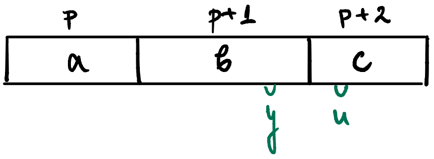
$j=0$ тогава $\alpha(0) = a^p b^{p+1} c^{p+2-|yu|}$

понеже $|yu| \geq 1$ тогава $p+2-|yu| \leq p+2-1 = p+1$

и $|\alpha(0)|_b \geq |\alpha(0)|_c$ => чупим зависимостта и $\alpha \notin L$

IV. 

$\forall j > 1$

V. 

$j=0$