26.04.23

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \quad a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots$

$D = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ е сх.}\}$

област на сходимост

1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad x \in (-1,1)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \longrightarrow x \in (-1,1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x^n}{n!}\right| \quad \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \frac{\frac{|x|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|x|^n}{n}} = |x| \cdot \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|$

$|x| < 1 \rightarrow$ абс. сх.

$|x| > 1 \rightarrow$ разх.

Деф: $R \in (0, +\infty)$ се нарича радиус на сходимост на реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ ако $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ е сходящ $\forall x \in \mathbb{R}$ с $|x-a| < R$ и разходящ $\forall x \in \mathbb{R}$ с $|x-a| > R$

$R \in (0, +\infty)$ (обл. на сход: $(a-R, a+R)$; $[a-R, a+R)$; $(a-R, a+R]$; $[a-R, a+R]$)

Лема: Нека $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi-a)^n$ е сходящ. Тогава $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ е абсолютно сходящ $\forall x \in \mathbb{R}$ за което $|x-a| < |\xi - a|$

Док: $|x-a| < |\xi-a|$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-a)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{|a_n(\xi-a)^n|}_{\le \mu} \cdot \left|\frac{x-a}{\xi-a}\right|^n \le \sum_{n=0}^{\infty} \mu \cdot q^n$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi-a)^n$ сх. $\Rightarrow a_n(\xi-a)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \mu \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : |a_n(\xi-a)^n| \le \mu, \quad q = \left|\frac{x-a}{\xi-a}\right| \in [0,1)$

$\Rightarrow$ сходящ от принципа за сравнение

Теорема: Всеки сходящ ред има радиус на сходимост

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \quad R := \underbrace{\sup\{|x-a| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ е сходящ}\}}_{\neq \emptyset}$$

$x \in \mathbb{R},\ |x-a| > R \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ разх.

$R \in (0, +\infty)$

$x \in \mathbb{R},\ |x-a| < R \quad \Rightarrow \exists \xi \in \mathbb{R}\ |x-a| < |\xi-a|$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi-a)^n$ е сходящ

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ е абс. сх

Формула на Коши-Адамар

Радиусът на сходимост на $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ е $R=\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ (със съглашение $\frac{1}{0}=+\infty$, $\frac{1}{+\infty}=0$)

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow l=\limsup b_n$ ако l е точка на сгъстяване на $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ и

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0: b_n<l+\varepsilon$ $\quad l=\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, $R=\frac{1}{l}$

(а) $|x-a|<\frac{1}{l}$

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-a)^n|$ $\quad \sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|}=\sqrt[n]{|a_n|}.|x-a|$

$l.|x-a|<1 \Rightarrow \exists q,\ l.|x-a|<q<1$

$\limsup \sqrt[n]{a_n} = l<\frac{q}{|x-a|} \Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0: \sqrt[n]{|a_n|}<\frac{q}{|x-a|} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|}<q\ \ \forall n\geq n_0$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}|a_n(x-a)^n|$ е сходящ по крит. на Коши

(б) $|x-a|>\frac{1}{l} \longrightarrow l>\frac{1}{|x-a|}$

$\sqrt[n]{|a_n|}>\frac{1}{|x-a|}$ за безбр. много $n\in\mathbb{N}$ $\quad \left(\sqrt[n_k]{|a_n|}>\frac{1}{|x-a|}\ \forall k\in\mathbb{N}\right)$

$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}(x-a)^{n_k}|}>1\ \ \forall k\in\mathbb{N} \Rightarrow a_{n_k}(x-a)^{n_k}\not\to 0 \Rightarrow a_n(x-a)^n\not\to 0$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ разходящ

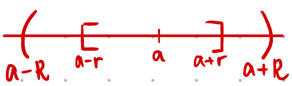
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ сходящи в $(a-R,a+R)$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-a)^n$ $\quad =\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\dots+a_nb_0)(x-a)^n=$

$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-a)^n\right)$

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$, D – област на сходимост $\quad S: D\to\mathbb{R}$ $\quad S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ $\quad R$ – радиус на сх.

Тв. S е непрекъсната в $(a-R,a+R)$



$x_0\in(a-R,a+R) \Rightarrow \exists r>0: x_0\in(a-r,a+r)\subset[a-r,a+r]\subset(a-R,a+R)$, $\quad x\in[a-r,a+r]$

$\Rightarrow |a_n(x-a)^n|\leq|a_n|.r^n$ (във вътр. на областта на сх. има абс. сх.)

$a+r\in(a-R,a+R) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|.r^n$ е сход.

$\rightarrow$ Вайерщрас

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ е равн. сход. в $[a-r, a+r]$ $\Rightarrow$ S е непрекъсната в $[a-r, a+r]$ и x_0

Тв. (Абел) S е непрекъсната в D

$* \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ $\qquad$ $** \sum_{n=1}^{\infty} a_n . n (x-a)^{n-1}$

Теорема: Радиусите на сходимост на $*$ и $**$ са равни.

R_1 - рад. на сх. на $*$
R_2 - рад. на сх. на $**$ (диференциран)

$$|a_n (x-a)^n| \le |a_n . n (x-a)^n| = |x-a| \, |a_n . n (x-a)^{n-1}| \Rightarrow R_1 \ge R_2$$

Допускаме, че $R_1 > R_2 \rightarrow \exists x, \xi \in \mathbb{R}$ с $R_2 < |x-a| < |\xi - a| < R_1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n . n (x-a)^{n-1}| = \frac{1}{|x-a|} . \sum_{n=1}^{\infty} |a_n . n (x-a)^n| = \frac{1}{|x-a|} . \sum_{n=1}^{\infty} n . \underbrace{|a_n (\xi - a)^n|}_{M} . \left|\frac{x-a}{\xi - a}\right|^n \le \frac{M}{|x-a|} \sum_{n=1}^{\infty} n . q^n,$$

$\sum_{n=1}^{\infty} n . q^n$ $\quad q \in (0,1)$ $\quad \frac{(n+1) q^{n+1}}{n . q^n} = q \cdot \frac{n+1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} q < 1$ $\qquad \left(q = \left|\frac{x-a}{\xi - a}\right| \in (0,1)\right)$

Теорема S е диференцуруема в $(a-R, a+R)$ и $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n . n (x-a)^{n-1}$

$x_0 \in (a-R, a+R)$ $\quad x_0 \in (a-r, a+r) \subset [a-r, a+r] \subset (a-R, a+R)$

R рад. на сх. на $\sum_{n=1}^{\infty} a_n . n (x-a)^{n-1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| . n . r^{n-1}$ е сход.

$$|a_n . n (x-a)^{n-1}| \le |a_n| n . r^{n-1} \quad \forall x \in [a-r, a+r]$$

$\sum a_n (x-a)^n$ сходящ за $x = a \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 - a)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n . n (x_0 - a)^{n-1}$

Следствие S е N пъти диференцуруема в $(a-R, a+R)$ $\forall N \in \mathbb{N}$

Следствие $\int S(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$

$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ $\quad R > 0,$ $(a-R, a+R)$ $\qquad S(a) = a_0$

$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n . n (x-a)^{n-1}$ $\qquad S'(a) = a_1$

$S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n . n (n-1) (x-a)^{n-2}$ $\qquad S''(a) = 2! \, a_2$

$S'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} a_n . n (n-1) (n-2) . (x-a)^{n-3}$ $\qquad S'''(a) = 3! \, a_3$

$a_n = \frac{S^{(n)}(a)}{n!}$ $\quad n = 0, 1, 2, \dots$ $\qquad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$

Δ околност на a $\quad f: \Delta \to \mathbb{R}$ $\quad f$ n пъти диференцируема $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$ ред на Тейлър за f около т. a ($a=0$ ред на Маклорен)

пример: $f(x) \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ $\qquad f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\qquad f(x) \neq 0 \quad \forall x \neq 0$

$0 = 0+0+0+\dots$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

! Всеки степенен ред (около a) съвпада с реда на Тейлър (около a) за своята сума

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n^f(x) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \iff R_n^f(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Развитие на основните елементарни функции в степенен ред

1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ в $\mathbb{R}$ $\qquad (e^x)^{(n)} = e^x$ $\qquad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta_{n,x} x}}{(n+1)!} x^{n+1}$

$$|R_n(x)| = \frac{e^{\theta_{n,x} x}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{\max\{e^x, 1\}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} \text{ сходящ} \Rightarrow \frac{|x|^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{(Даламбер)}$$

2) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ в $\mathbb{R}$ $\qquad \sin^{(n)}(x) = \sin(x + n.\frac{\pi}{2})$

$$|R_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \qquad (\sin(\xi) \leq 1)$$

3) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ в $\mathbb{R}$

4) $(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$ $\qquad \binom{a}{0} = 1$ $\qquad \binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}, \ n \in \mathbb{N}$

$a \in \{0,1,2,\dots\} \to R = +\infty$ $\qquad a \notin \{0,1,2,\dots\}$ $\quad x \neq 0$ $\quad \frac{|\binom{a}{n+1}x^{n+1}|}{|\binom{a}{n}x^n|} =$

$$= |x| \left| \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)(a-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a(a-1)\dots(a-n+1)} \right| = \frac{|a-n|}{n+1}|x| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|$$

$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$ в $(-1,1)$ $\qquad f(x) = (1+x)^\alpha$ $\qquad f'(x) = \alpha.(1+x)^{\alpha-1} \Rightarrow (1+x).f'(x) = a.f(x)$

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{a}{n}.n.x^{n-1} \text{ в } (-1,1)$$

$$(1+x)\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{a}{n} . n . x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{a}{n} . n . x^{n} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{a}{m+1} (m+1)\, x^{m} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} n . x^{n}$$

$$(1+x)\varphi'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\binom{a}{n+1} (n+1) + \binom{a}{n} n \right) x^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} a \binom{a}{n} x^{n} = a . \varphi(x)$$

$$\binom{a}{n+1} (n+1) + \binom{a}{n} n = \frac{a(a-1) \dots (a-n+1)(a-n)}{(n+1)!} (n+1) + \frac{a(a-1) \dots (a-n+1)}{n!} . n$$

$(1+x)\varphi'(x) = a . \varphi(x)$

$$\left(\frac{\varphi(x)}{f(x)} \right)' = \frac{\varphi'(x) f(x) - \varphi(x) f'(x)}{f^{2}(x)} = \frac{\varphi'(x)\,(1+x) - \varphi(x) . a}{(1+x)^{a+1}} = 0$$

$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = const$ в $(-1,1)$ $\quad \varphi(0)=1,\ f(0)=1 \Rightarrow \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 1$ в $(-1,1) \Rightarrow f(x) = \varphi(x)$ в $(-1,1)$