Редици и редове от функции ДИС-Л 20.04

$f_n: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$D' : \{x \in D : \lim f_n(x)$ същ.$\}$ област на (поточкова) сходимост на $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$

$f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in D'$ $f: D' \longrightarrow \mathbb{R}$

поточкова граница на $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$

$f, f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

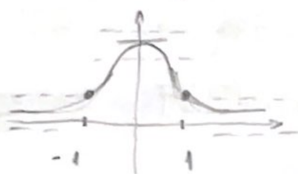
Казваме, че $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно клони към f в D (и пишем $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$), ако

$$\forall \varepsilon > 0\ \underbrace{\exists n_0 \in \mathbb{N}}_{\text{зависимост}}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

f е поточкова граница на $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ в D: $\underbrace{\forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}}_{\text{зависимост}},\ \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Пример:

$f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}$



Равномерна сходимост

Наблюдение: $\|f - f_n\|$ равномерно разстояние

$$\|f - f_n\| := \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|$$

Твърдим, че $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ в D точно тогава когато $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Ако ∃ поточкова гр. е възможно да има равн. сход.

Док: $\varepsilon > 0$ $\frac{\varepsilon}{2} > 0$

$f_n \rightrightarrows f$ в D $\Rightarrow$ $\Big\}$ $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \underbrace{\forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}}_{\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon}$

① **Пример:** $f_n(x) = \frac{\sin nx}{x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) \equiv 0$? $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\sin nx}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

② $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$, $x \neq 1$

$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} \longrightarrow \frac{1}{1-x}$ $|x| < 1$ в $(-1,1)$ има поточкова гр.

$$\sup_{x\in(-1,1)} \left|S_n(x) - \frac{1}{1-x}\right| = \sup_{x\in(-1,1)} \left|\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right| = \sup_{x\in(-1,1)} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} = +\infty$$

③ $f_n(x) = x^n(1-x)$, $x \in [0,1]$

$x^n(1-x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\qquad \sup\limits_{x\in[0,1]} |x^n(1-x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} [x^n(1-x)] = \sup\limits_{x\in[0,1]}$

$x<1 \quad x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$x=1 \quad (1-x)=0$

$(x^n - x^{n+1})' = n.x^{n-1} - (n+1)x^n = x^n\left(\frac{n}{x} - n+1\right) =$

$= x^n\left(\frac{n - xn - x}{x}\right) =$ $\qquad n - xn - x = 0$

$x(n+1) = n \quad \boxed{x = \frac{n}{n+1}}$

$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n+1-n}{n+1}\right)$

$= \left(\frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Теорема Равномерна граница на редица от непрекъснати функции е непрекъсната функция

$f, f_n : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ в D

$x_0 \in D$, f_n е непрекъсната в x_0 $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогава f е непрекъсната в x_0.

$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$ апроксимация

Трябва $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall x$

$\varepsilon > 0 \quad f_n \rightrightarrows f$ в $D \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Ако $n = n_0$ $\quad |f(x) - f_n(x)|$ и $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

f_n непрекъсната в $x_0 \Rightarrow \boxed{\exists \delta > 0}\ \forall x \in D, |x - x_0| < \delta : |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Значи $\forall x \in D$, $|x - x_0| < \delta$ е в сила

$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

НДУ Коши за равн. сх. (редици) $\quad$ Нека $f_n : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Твърдим, че $\exists f : D \to \mathbb{R}$ такава, че $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ в D точно тогава

когато $\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in D : |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon$

Док: $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f \text{ в } D \\ \varepsilon > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$n \geq n_0$, p произв. $\in \mathbb{N}$, $(n+p) \geq n_0$, $x \in D$

$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| - |f(x) - f_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Leftarrow$ търсим кандидат за граница

$x \in D$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ е фундаментална $\Rightarrow$ сходяща $\forall x \in D$

$f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \qquad f: D \to \mathbb{R}$

Да проверим, че $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$. $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in D: |f_n(x) - \underbrace{f_{n+p}(x)}_{p\to\infty}| < \frac{\varepsilon}{2}$

граничен преход

$\Rightarrow \forall n \geq n_0\ \forall x \in D: |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

НДУ Коши равн. сход. (редове) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $f_n: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

ред сх. $\Leftrightarrow$ редицата от парц. суми е сх.

Тогава $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ е равн. сходящ в $D \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in D$
$\left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} f_i(x)\right| < \varepsilon$

$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$

Критерий на Вайерщрас $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $f_n: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad |f_n(x)| \leq a_n\ \forall x \in D$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ тогава $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ е равномерно (и абсолютно) сходящ в D

Док: $\varepsilon > 0$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbb{N}: \left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} a_i\right| < \varepsilon$
$= \sum\limits_{i=n+1}^{n+p} a_i$

Тогава за $n \geq n_0$, $p \in \mathbb{N}$, $x \in D$ имаме

$\left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} f_i(x)\right| \leq \sum\limits_{i=n+1}^{n+p} |f_i(x)| \leq \sum\limits_{i=n+1}^{n+p} a_i < \varepsilon$

Пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ равн. сходящ $\quad \left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходящ
$x \in [-1, 1]$

Теорема: Δ огр. интервал $\quad f_n: \Delta \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ диференцируеми

$\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ е равномерно сходяща в Δ

Същ. $x_0 \in \Delta$, $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща

Тогава $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е равн. сходяща в Δ, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ е диференцируема в Δ и

$\left[\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right]' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)\ \forall x \in \Delta$

Пример $f_n(x) = \frac{\sin(n^3 x)}{n} \quad f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ в $\mathbb{R}$ $\quad \left(\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\sin(n^3 x)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \to 0\right)$

$f_n'(x) = \frac{1}{n} \cdot \cos(n^3 x) \cdot n^3 = n^2 \cos(n^3 x)$ не е поточково сходяща

Док. Ползваме НДУ на Коши

$$|f_n(x)-f_{n+p}(x)| \le |(f_n(x)-f_{n+p}(x))-(f_n(x_0)-f_{n+p}(x_0))|+|f_n(x_0)-f_{n+p}(x_0)| =$$

! Ако знаем нещо за $f'(x)$ и искаме да намерим нещо за $f(x) \to$ th. Лагранж

$$= |(f_n-f_{n+p})'(\eta).(x-x_0)|+|f_n(x_0)-f_{n+p}(x_0)| =$$

Δ интервал
f_n-f_{n+p} диф. в Δ, $\eta \in$ м/у x и x_0

$$= |f'_n(\eta)-f'_{n+p}(\eta)|.\underbrace{|x-x_0|}_{\text{оценка const.}}+|f_n(x_0)-f_{n+p}(x_0)| =$$

$M>0$, $\Delta \subset [x_0-M, x_0+M]$

$\varepsilon>0$ $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ сх. $\Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_1\ \forall p \in \mathbb{N}: |f_n(x_0)-f_{n+p}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ равн. сх. $\Rightarrow$ НДУ Коши за равн. сх $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_2\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in \Delta: |f'_{n+p}(x)-f'_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2M}$

$n_0 : \max\{n_1, n_2\}$
$n \ge n_0$, $p \in \mathbb{N}$, $x \in \Delta$

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)| \le |f'_n(\eta)-f'_{n+p}(\eta)|.M+|f_n(x_0)-f_{n+p}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2M}.M+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\eta \in$ м/у x и x_0 $\quad (n_0 \ge n_2)$ $(n_0 \ge n_1)$

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е равн. сх. в Δ (НДУ Коши)

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in D$ $\quad f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ в Δ

$f'_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi$ в Δ $\quad \varphi$ - равн. гр. на производната

Искаме да док., че f е диференцируема и $f'(x)=\varphi(x)\ \forall x \in \Delta$,

т.е. $\left|\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}-\varphi(\xi)\right| \xrightarrow[x\to\xi]{} 0\ \forall \xi \in \Delta$

$$\left|\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}-\varphi(\xi)\right| \le |\varphi(\xi)-f'_n(\xi)|+\left|f'_n(\xi)-\frac{f_n(x)-f_n(\xi)}{x-\xi}\right|+$$

$$+\left|\frac{f_n(x)-f_n(\xi)}{x-\xi}-\frac{f_{n+p}(x)-f_{n+p}(\xi)}{x-\xi}\right|+\left|\frac{f_{n+p}(x)-f_{n+p}(\xi)}{x-\xi}-\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\right| \boxed{<\varepsilon}$$ финал

$\varepsilon > 0 \; \exists n_1 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_1 : |f_n'(\xi) - \varphi(\xi)| < \frac{\varepsilon}{4}$

$\exists n_2 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_2 \; \forall x \in \Delta \; \forall p \in \mathbb{N} : |f_{n+p}'(x) - f_n'(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$

$$\left| \frac{f_{n+p}(x) - f_{n+p}(\xi) - f_n(x) + f_n(\xi)}{x - \xi} \right| = \left| \frac{(f_{n+p} - f_n)'(\eta) \cdot \cancel{(x-\xi)}}{\cancel{x-\xi}} \right| = |f_{n+p}'(\eta) - f_n'(\eta)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

ако $n \geq n_2$

първото и третото събираеми можем да оценим за сметка на n

фиксираме: $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$ и $n \geq n_2$

f_n диференцируема в $\xi \Rightarrow \exists \delta > 0 \; \forall x \in \Delta, |x - \xi| < \delta : \left| \frac{f_n(x) - f_n(\xi)}{x - \xi} - f_n'(\xi) \right| < \frac{\varepsilon}{4}$

$$\left| \frac{f_{n+p}(x) - f_{n+p}(\xi)}{x - \xi} - \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \right| \leq \left| \frac{f_{n+p}(x) - f(x)}{x - \xi} \right| + \left| \frac{f_{n+p}(\xi) - f(\xi)}{x - \xi} \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall p \geq p_0$$

(n, x фикс)

Следствие: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $f_n : \Delta \to \mathbb{R}$ диф. в Δ краен инт. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ е равн. сходящ в Δ

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ в $x_0 \in D$. Тогава $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ е равн. сходящ в Δ, сумата му е диференцируема и $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$

$S_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x)$

$S_n'(x) = f_1'(x) + \ldots + f_n'(x)$