$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_6}{f_{11}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{2^{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\lg (n+1)!}{\lg 2^{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1).\lg(n+1)}{2^n . \lg 2} = 0 \Rightarrow f_6 \prec f_{11}$$

$n^2 > (n+1)\lg(n+1)$

$2^n > n^2$

⑤ ДСД, че $\binom{2n}{n} \asymp \frac{4^n}{\sqrt{n}}$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{\text{Анал}}{\approx} \frac{\sqrt{4\pi.n}\,\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\,\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\cdot 2^{2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.4^n = \frac{4^n}{\sqrt{\pi.n}}$$

$n! \approx \sqrt{2\pi.n}.\left(\frac{n}{e}\right)^n$ Апрок. на Стерлинг

⑥ ДСД, че $\sqrt[n]{n} \asymp 1$

$$\lim_{n\to\infty} \ln\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \ln n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\ln n = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a > 0 \longleftrightarrow \lim_{x\to\infty}\ln(f(x)) = \ln a$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{1} = e^{\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{n}} = e^0 = 1$$

⑦ Да се сравнят асимптотично 2^{n^2+n} и 3^{n^2}

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n^2+n}}{3^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n^2}.2^n}{3^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n^2}.2^n = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n.\lg 2}{n^2\lg\frac{3}{2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

$n!! = (n!)!$ сравнете $n!!$ и $(n-1)!!.((n-1)!)^{n!}$

Доказателства за коректност

08.03.24

Индукция:

- База
- Индуктивно Предположение
- Индуктивна стъпка

Инвариант (итеративни алг. / цикли)

- База
- Поддръжка
- Терминация

ALG1($n \in \mathbb{N}$)

```
1. s ← 1
2. for i ← 1 to n
3.     s ← s*2
4. return s
```

ALG1 връща 2^n

формулираме инвариант: На всяко достигане на ред 2, $s = 2^{i-1}$ (*)

база: на ред 1 инициализираме $s = 1$ ✓

първо достигане на ред 2, $i=1$, $s = 2^{i-1} = 2^{1-1} = 2^0 = 1$ ✓

поддръжка: допускаме, че инвар. е изпълнен за някое достигане на ред 2, което не е последно.

от (*) имаме, че $s = 2^{i-1}$, $s \leftarrow s*2$, $s = 2^i$, $i' \leftarrow i+1$, $i = i'-1$, $s = 2^{i'-1}$

терминация: при посл. достигане $i=n+1$ следователно от инв. $s=2^{i-1}=2^{n+1-1}=2^n$. На ред 4 връща директно s. Алгоритъмът терминира т.к. размерът на масива е фиксиран.

ALGX(A[1...n])
1. for $i \leftarrow 1$ to n
2. for $j \leftarrow 1$ to n
3. if $A[i] > A[j]$
4. swap(A[i], A[j])

пример за сортиране

ALG2(A[1...n], n>2)
1 sum ← 0
2. for $i \leftarrow 1$ to n
3. sum ← sum + A[i]
4. return sum

ALG2 връща сумата на елементите на масива A

Инвариант: при всяко достигане на ред 2, $sum = \sum_{j=1}^{i-1} A[j]$ ⊛

База: при първо достигане на ред 2, $sum = \sum_{j=1}^{0} A[j] = 0$ ✓

на ред 1 инициализираме sum = 0 ✓

поддръжка: допускаме, че инвар. е изпълнен за някое достигане на ред 2, което не е последно.

От ⊛ имаме, че $sum = \sum_{j=1}^{i-1} A[j]$, от ред 3 $sum \leftarrow sum + A[i]$ $\left(A[1] + \ldots + A[i-1] + A[i] = \sum_{j=1}^{i} A[j] \right)$

$i' \leftarrow i+1$ $\quad i = i'-1$ т.е. $sum = \sum_{j=1}^{i'-1} A[j]$

терминация: при посл. достигане $i=n+1$ следователно от инв. $sum = \sum_{j=1}^{i-1} A[j] = \sum_{j=1}^{n+1-1} A[j] =$
$= \sum_{j=1}^{n} [Aj] = A[1] + \ldots + A[n]$. Алгоритъмът терминира т.к. размерът на масива е фиксиран.

ALG3
1. $a \leftarrow 0$
2. for $i \leftarrow 1$ to n
3. $a \leftarrow a+1$
4. return a

$\Bigg\} \Theta(n)$

$\sum_{i=1}^{n} 1 = n = \Theta(n)$ $\qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \Theta(n^3)$

$\sum_{i=1}^{n} \Theta(c) = \Theta(n)$ $\qquad \sum_{i=1}^{n} n-c+1 = \Theta(n)$ $\qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \Theta(\lg n)$

$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n.(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$ $\qquad \sum_{\substack{i=1 \\ i \vdots k}}^{n} \approx \frac{n}{k} = \Theta(n)$ $\qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6} = \Theta(1)$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{\alpha} = \begin{cases} \Theta(n^{\alpha+1}), & \alpha > -1 \\ \Theta(\lg n), & \alpha = 1 \\ \Theta(1), & \alpha < -1 \end{cases}$$

ADD1($n \in \mathbb{N}^+$)
1. $a \leftarrow 0$ $\Theta(1)$
2. for $i \leftarrow 1$ to n
3. for $j \leftarrow 1$ to n
4. $a \leftarrow a+1$ $\Theta(1)$
5. return a $\Theta(1)$

$\Theta(1) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\Theta(1)}_{4 \text{ ред}} =$

$= \Theta(1) + \sum_{i=1}^{n} \Theta(n)$

$= \Theta(1) + n. \sum_{i=1}^{n} \Theta(1) = \Theta(1) + \Theta(n^2) = \Theta(n^2)$