$\mathbb{R}^n$: $f: D \to \mathbb{R}$ отворено

НУ Нека f има лок. екстремум в т. x_0 и $\exists\, f'_{x_i}(x_0)$, $i=1,\dots n$. Тогава $f'_{x_i}(x_0)=0$, $i=1,\dots n$

ДУ Нека f има непрекъснати частни производни от втори ред и $f'_{x_i}(x_0)=0$ $i=1,\dots n$
Тогава, ако:

1) $H(x_0)$ е положително дефинитна ($h^T H(x_0) h > 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n$), то f има лок. минимум в т. x_0

2) $H(x_0)$ е отрицателно дефинитна ($h^T H(x_0) h < 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n$), то f има лок. максимум в т. x_0

3) $H(x_0)$ не е дефинитна ($h^T H(x_0) h$ приема + и − ст-сти), то f няма екстремум в т. x_0

Критерий на Силвестър

A- симетрична матрица $n\times n$ $\quad A = (A_{ij})_{n\times n} \quad A_1 = a_{11} \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$

1) Ако $A_1 > 0,\ A_2 > 0 \dots A_n > 0$, то A е пол. дефинитна

2) Ако $A_1 < 0,\ A_2 > 0 \dots (-1)^n A_n > 0$, то A е отр. дефинитна

3) Ако $A_{2k} < 0$ за някое $k \in \mathbb{N}$, то A не е дефинитна

Намерете лок. екстремуми на ф-ията

① $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2xy$

1) крит. точки $\quad \begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ 4y^3 - 2y - 2x = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} & x^3 = y^3 \Rightarrow x = y \\ & 4x^3 - 2x - 2x = 0 \\ & 4x(x^2-1) = 0 \end{aligned}$

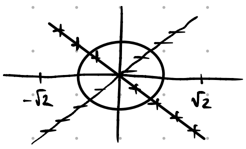
$x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = -1$

2) $H(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2-2 & -2 \\ -2 & 12y^2-2 \end{pmatrix} \quad M_1(0,0) \quad M_2(1,1) \quad M_3(-1,-1)$

$H(1,1) = H(-1,-1) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} & H_1 = 10 > 0 \\ & H_2 = 100 - 4 > 0 \end{aligned} \Rightarrow$ f има лок. минимум в $(1,1)$ и $(-1,-1)$ $\quad f(1,1) = f(-1,-1) = -2$

$H(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} & H_1 = -2 < 0 \\ & H_2 = 0 \end{aligned} \quad f(0,0) = 0 \quad \to$ нужно е доп. изследване

$f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2$



$x + y = 0 \qquad f(x,y) = x^4 + y^4 > 0$

$x - y = 0 \qquad f(x,y) = g(x) = 2x^4 - (2x)^2 = 2x^2(x^2 - 2) < 0 \qquad -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$
$x = y$

$\Rightarrow f$ няма екстремум в $(0,0)$

② $f(x,y,z) = x^3+y^2+z^2+12xy+2z$

1) крит. точки $\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \\ f'_z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x^2+12y=0 \\ 2y+12x=0 \Rightarrow y=-6x \\ 2z+2=0 \Rightarrow z=-1 \end{cases}$ $3x^2-72x=0$ $\quad 3x(x-24)=0$

$x_1=0 \quad x_2=24$

$y_1=0 \quad y_2=-144$

$z_1=-1 \quad z_2=-1$

$M_1(0,0,-1) \qquad M_2(24,-144,-1)$

2) $H(x,y,z) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f'_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$H(0,0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad H_1=0$, $\quad H_2=\begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} < 0$ $\Rightarrow$ няма екстремум в $(0,0,1)$

$H(24,-144,-1) = \begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad H_1 = 144>0$, $\quad H_2=\begin{vmatrix} 144 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 144>0$

$H_3 = |H| = 4\cdot 144 - 2\cdot 12\cdot 12 = 2\cdot 144 > 0$

$\Rightarrow f(x,y,z)$ има лок минимум в $(24,-144,-1)$

③ $f(x,y,z) = \dfrac{xy+xz^2+y^2z}{xyz} + x+1 = \dfrac{1}{z} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{y}{x} + x+1$ $\qquad$ D: $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$

1) Крит. точки $\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \\ f'_z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} -\dfrac{y}{x^2}+1=0 \\ -\dfrac{z}{y^2}+\dfrac{1}{x}=0 \\ -\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{y}=0 \end{cases}$ $\begin{vmatrix} \cdot x^2 \\ \cdot xy^2 \\ \cdot yz^2 \end{vmatrix}$

$\begin{cases} -y+x^2=0 \\ -xz+y^2=0 \\ -y+z^2=0 \end{cases}$ $\quad x^2=z^2=y \Rightarrow y^2=z^4$, $\quad x=\pm z$

1сл) $x=z$ $\quad -z^2+z^4=0$ $\quad z^2(z^2-1)=0$

$z_1=0\notin D \quad z_{2,3}=\pm 1, \; y=1, \quad x_{2,3}=\pm 1$

$M_1(1,1,1) \qquad M_2(-1,1,-1)$

2сл) $x=-z$ $\quad z^2+z^4=0$

$z=0\notin D$

2) $H(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y\cdot(-2)\dfrac{1}{x^3} & -\dfrac{1}{x^2} & 0 \\ -\dfrac{1}{x^2} & -z\cdot(-2)\cdot\dfrac{1}{y^3} & -\dfrac{1}{y^2} \\ 0 & -\dfrac{1}{y^2} & +\dfrac{2}{z^3} \end{pmatrix}$

$H(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad H_1 = 2>0$, $\quad H_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4>0$, $\quad H_3 = 8-2-2 = 4>0$

$\Rightarrow f$ има лок. минимум в $(1,1,1)$

$f(1,1,1)=5$

$$H(-1,1,-1)=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ -1 & -2 & -1\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

$H_1=-2<0$

$H_2=\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -1 & -2\end{vmatrix}=4-1>0$ $\Rightarrow$ f има лок. максимум $f(-1,1,-1)$

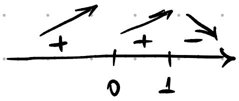
$f(-1,1,-1)=-3$

$H_3=|H|=-8+2+2=-4<0$

④ $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}(x^2+y^2)=g(t)=e^{-t}\cdot t$

$t=x^2+y^2\geq 0$

$g'(t)=-e^{-t}\cdot t+e^{-t}\cdot 1=e^{-t}(1-t)$



лок. максимум на $g(t)$

↳ НМС $g(0)=0$ $g(t)>0\ \forall t>0$

НМС $f(x,y)=$ НМС $g(t)=g(0)=0$

$t=0 \Leftrightarrow x=y=0$

НМС $f(x,y)=f(0,0) \Rightarrow f$ има лок. минимум в $(0,0)$

$g(1)$ – лок. максимум $\Rightarrow f(x,y):\ x^2+y^2=1$ локален максимум

⑤ $f(x,y)=x^4y^5(20-x+2y)=20x^4y^5-x^5y^5+2x^4y^6$

допиши

НГС и НМС в компакт

Следствие (от Вайерщрас) Нека $f: D\to\mathbb{R}$ е непрекъсната, $D\subset\mathbb{R}^n$ – компактно. Тогава f достига НМС и НГС в точки от D.

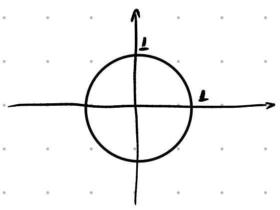
$\Rightarrow$ НМС и НГС се достигат в:

1) критични точки във вътрешността на D ($\mathring{D}$)

2) точки от $\mathring{D}$, в които f няма частни производни

3) точки от контура на D

⑥ НМС и НГС на $f(x,y)=x+y$ в $D: x^2+y^2\leq 1$



D – компактно

f – непр.

$\to f$ достига НМС и НГС в D

1) критични точки в $\mathring{D}$

$\begin{cases} f'_x=0\\ f'_y=0\end{cases}$ $\begin{cases}1=0\\ 1=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ няма крит. точки

2) по контура $x^2+y^2=1$ $r^2=1 \Rightarrow r=1$

пол. коорд. $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}$ $0\leq\varphi<2\pi$

$f(x,y) = g(\varphi) = \cos(\varphi) + \sin(\varphi)$

$g'(\varphi) = -\sin(\varphi) + \cos(\varphi)$

$0 \le \varphi < 2\pi$

$g'(\varphi) = 0 \iff \sin\varphi = \cos\varphi$

$\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

$0 \quad \overset{+}{\nearrow} \quad \frac{\pi}{4} \quad \overset{-}{\searrow} \quad \frac{5\pi}{4} \quad \overset{+}{\nearrow} \quad 2\pi$

лок. max (при $\frac{\pi}{4}$), лок. min (при $\frac{5\pi}{4}$)

$g(0) = 1$
$g(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$
$g(\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2}$
$g(2\pi) = 1$

НМС $g(\varphi) = g(\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2} \Rightarrow$ НМС в $f(x,y) = f(\cos\frac{5\pi}{4}, \sin\frac{5\pi}{4}) = f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$

НГС $g(\varphi) = g(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \Rightarrow$ НГС в $f(x,y) = f(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}) = f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$

$\operatorname{grad} f(x,y) = (f'_x, f'_y) = (1,1)$

④ НГС и НМС на $f(x,y) = ye^x\sqrt{1-x^2-y^2}$ в $D: x^2+y^2 \le 1$ D-компакт, f-непр $\Rightarrow$ f достига НМС и НГС в D

1) крит. точки

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} ye^x\sqrt{1-x^2-y^2} + ye^x\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2-y^2}}\cdot(-\cancel{2}x) = 0 \\ e^x\sqrt{1-x^2-y^2} + ye^x\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2-y^2}}\cdot(-\cancel{2}y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ye^x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\left(1-x^2-y^2-x\right) = 0 \\ e^x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\left(1-x^2-y^2-y^2\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(1-x^2-y^2-x) = 0 \\ 1-x^2-2y^2 = 0 \end{cases}$$

$\underset{>0}{e^x}\ \underset{>0}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ $\quad x^2+y^2 < 1$

1 сл.) $y = 0$ $\quad 1-x^2-0 \Rightarrow x = \pm 1 \to (\pm 1, 0) \notin \mathring{D}$

2 сл.) $y \ne 0$ $\quad \begin{cases} 1-x^2-y^2-x = 0 \\ 1-x^2-y^2-y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y^2 \ge 0$

$1 - x^2 - 2x = 0$
$x^2 + 2x - 1 = 0$
$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2} \to x = -1+\sqrt{2}$
$y^2 = -1+\sqrt{2}$
$y = \pm\sqrt{-1+\sqrt{2}}$

$x^2+y^2 = 2+1-2\sqrt{2}+\sqrt{2}-1 = 2-\sqrt{2} < 1$

$$\boxed{\begin{matrix} M_1(-1+\sqrt{2}, \sqrt{-1+\sqrt{2}}) \\ M_2(-1+\sqrt{2}, \sqrt{-1-\sqrt{2}}) \end{matrix}} \in \mathring{D}$$

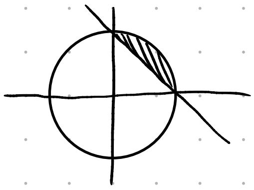
2) по контура $x^2+y^2 = 1$

$f(x,y) = 0$

$f(M_1) = \sqrt{\sqrt{2}-1}\, e^{\sqrt{2}-1}\sqrt{1-(2-\sqrt{2})} > 0 \to$ НГС

$f(M_2) = -\sqrt{\sqrt{2}-1}\, e^{\sqrt{2}-1}\sqrt{1-(2-\sqrt{2})} < 0 \to$ НМС

⑧ НМС и НГС на $f(x,y)=(1-x^2-y^2)(x+y)$ в $D: \begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ x+y\ge 1\end{cases}$



1) критични точки в $\mathring{D}$

$$\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0\end{cases} \quad \begin{cases} -2x(x+y)+(1-x^2-y^2)=0 \\ -2y(x+y)+(1-x^2-y^2)=0\end{cases} \quad \begin{cases} 1-3x^2-2xy-y^2=0 \\ 1-3y^2-2xy-x^2=0\end{cases} \quad \begin{aligned} -2x^2+2y^2&=0 \\ x^2&=y^2 \\ x&=\pm y\end{aligned}$$

1 сл) $x=y$ $\quad 1-6x^2=0 \quad x=\pm\frac{1}{\sqrt6}=y \quad x+y=\pm\frac{2}{\sqrt6}<1 \Rightarrow \notin D^\circ$

2 сл) $x=-y$ $\quad 1-2x^2=0 \quad x=\pm\frac{1}{\sqrt2}=-y \quad x^2+y^2=\frac12+\frac12=1 \Rightarrow \notin D^\circ$

2) по контура

2.1. $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y\ge 1\end{cases}$

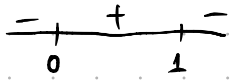
$f(x,y)=0.(x+y)=0$

2.2) $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2\le 1\end{cases}$ $\quad y=1-x$

$x^2+(1-x)^2\le 1$

$x^2+\cancel{1}-2x+x^2\le \cancel{1}$

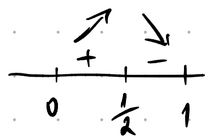
$2x(1-x)\ge 0$



$x\in[0,1]$

$f(x,y)=g(x)=(1-x^2-(1-x)^2).1=$

$=1-x^2-1+2x-x^2=2x-2x^2$



$g'(x)=2-4x$

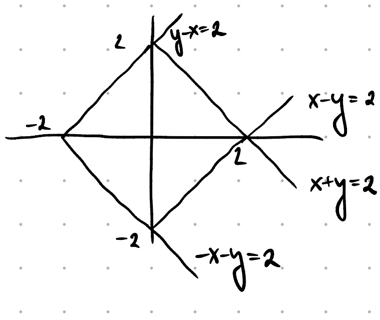
$g(0)=0=f(0,1)$

$g(\frac12)=2.\frac12-2.\frac14=\frac12=f(\frac12,\frac12)$

$g(1)=0=f(1,0)$

$\Rightarrow$ НГС $f(x,y)=f(\frac12,\frac12)=\frac12$ $\quad$ НМС $f(x,y)=f(x,y): \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y\ge 1\end{cases} \quad \begin{cases} 0\le x\le 1 \\ y=\sqrt{1-x^2}\end{cases}$

⑨ НМС и НГС на $f(x,y)=\dfrac{e^{x^3-6xy+y^2}}{1+e^{x^3-6xy+y^2}}$ в D: $|x|+|y|\le 2$



$g(x,y)=x^3-6xy+y^2$

$f(x,y)=\dfrac{e^{g(x,y)}}{1+e^{g(x,y)}}$ $\quad h(t)=\dfrac{e^t}{1+e^t}=1-\dfrac{1}{1+e^t} \Rightarrow h(t)$ растяща

$\Rightarrow$ НГС на $f(x,y)=\dfrac{e^{\text{НГС } g(x,y)}}{1+e^{\text{НГС } g(x,y)}}$

$\Rightarrow$ НМС на $f(x,y)=\dfrac{e^{\text{НМС } g(x,y)}}{1+e^{\text{НМС } g(x,y)}}$

Разгл. $g(x,y)$

1) крит. точки в $\mathring{D}$

$$\begin{cases} g'_x=0 \\ g'_y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2-6y=0 \\ -6x-2y=0 \Rightarrow y=3x \end{cases} \quad 3x^2-18x=0 \quad 3x(x-6)=0$$

$x_1=0$ $\quad$ $x_2=6$

$y_1=0$ $\quad$ $y_2=18$

$0+0\le 2$ $\quad$ $6+18 \not\le 2$

$M_1(0,0)\in\mathring{D}$ $\quad$ $M_2(6,18)\notin\mathring{D}$

$g(0,0)=0$

2) по контура

2.1) $\begin{cases} x+y=2 \\ 0\le x\le 2 \end{cases}$ $\quad y=2-x$

$g(x,y)=u(x)=x^3-6x(2-x)+(2-x)^2=$

$=x^3-12x+6x^2+4-4x+x^2=$

$=x^3+7x^2-16x+4$

$u'(x)=3x^2+14x-16$

$x_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{49+48}}{3}=\dfrac{-7\pm\sqrt{97}}{3}$

$\Rightarrow$ $+$, $-$, $-$, $+$, $+$; $\dfrac{-7-\sqrt{97}}{3}$, 0, $\dfrac{-7+\sqrt{97}}{3}$, 2

$u(0)=4 = g(0,2)$ $\quad$ $u\left(\dfrac{-7+\sqrt{97}}{3}\right) = g\left(\dfrac{-7+\sqrt{97}}{3}, 2-\dfrac{-7+\sqrt{97}}{3}\right)$ $\quad$ $u(2)=8 = g(2,0)$

2.2) $\begin{cases} x-y=2 \\ 0\le x\le 2 \end{cases} \Rightarrow y=x-2$

$g(x,y)=v(x)=x^3-6x(x-2)+(x-2)^2=$

$=x^3-6x^2+12x+x^2-4x+4=$

$=x^3-5x^2+8x+4$

$v'(x)=3x^2-10x+8$

$x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{1}}{3}$ $\begin{matrix} 2 \\ \frac{4}{3} \end{matrix}$

$+$, $+$, $-$, $+$; 0, $\dfrac{4}{3}$, 2

$v(0)=4 = g(0,-2)$ $\quad$ $v\left(\dfrac{4}{3}\right)=$ $\quad$ $v(2)=8 = g(2,0)$