def $\Delta^* \quad P(Q) \times \Sigma^* \longrightarrow P(Q)$ 11.03.23

$$\begin{cases} \Delta^*(R,\varepsilon) = R \\ \Delta^*(R,\alpha a) = \bigcup\{\Delta(q,a) \mid q \in \Delta^*(R,\alpha)\} \end{cases}$$

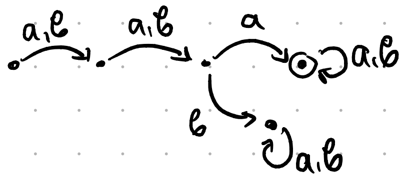
функция на преход

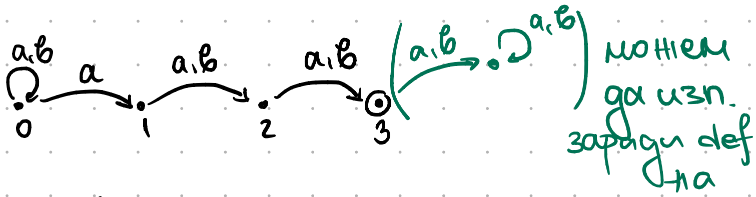
def $\mathcal{L}(N) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \Delta^*(Q_{start},\alpha) \cap F = \emptyset\}$

език на недетерминиран автомат

Пример 1 $L_1 = \{a,b\}^2.\{a\}.\{a,b\}^*$

$L_2 = \{a,b\}^*.\{a\}.\{a,b\}^2$

$\mathcal{A}_1$: 

$\mathcal{A}_2$: 

$\Delta(0,a) = \{0,1\}$

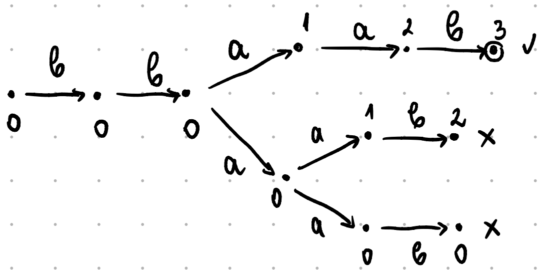
$\Delta(3,a) = \emptyset \quad \Delta(3,b) = \emptyset$

Пример 2 $\bigcup\{\{0,1,2\},\{2\},\{0,2\}\} = \{0,1,2\} \cup \{2\} \cup \{0,2\} = \{0,1,2\}$

От пример 1: $\Delta_2^*(\{0,1\},aa) = \bigcup\{\Delta(q,a) \mid q \in \Delta^*(\{0,1\},a)\} =$

$\bigcup\{\Delta(q,a) \mid q \in \{0,1,2\}\} = \bigcup\{\{0,1\},\{2\},\{3\}\} = \{0,1,2,3\}$

проверка за $\alpha = bbaab$



$\Delta^*(\{0\},b) = \{0\}$

$\Delta^*(\{0\},a) = \{0,1\}$

$\Delta^*(\{0,1\},a) = \{0,1,2\}$

Твърдение: $\Delta^*(R,\alpha\beta) = \Delta^*(\Delta^*(R,\alpha),\beta)$ Индукционно доказателство по $|\beta|$:

База: $\beta = \varepsilon$: $\Delta^*(R,\alpha\varepsilon) = \Delta^*(R,\alpha) = \Delta^*(\Delta^*(R,\alpha),\varepsilon)$

ИС: $\beta = \gamma b$: $\Delta^*(R,\alpha\gamma b) = \bigcup\{\Delta(q,b) \mid q \in \Delta^*(R,\alpha\gamma)\} =$

$= \bigcup\{\Delta(q,b) \mid q \in \Delta^*(\underbrace{\overbrace{\Delta^*(R,\alpha),\gamma}^{и}}_{ип})\} =$

$= \bigcup \{ \Delta(q, b) \mid q \in \Delta^*(\mathcal{U}, \gamma) \} = \Delta^*(\mathcal{U}, \gamma b) = \text{деф.} = \Delta^*(\Delta^*(R, \alpha), \beta)$

Теорема: За всеки НКА $\mathcal{N}$ съществува ДКА $\mathcal{D}$. $\mathcal{L}(\mathcal{N}) = \mathcal{L}(\mathcal{D})$

Доказателство: $\mathcal{N}: (\Sigma, Q, \Delta, Q_{start}, F)$ $\quad \mathcal{D}(\Sigma, Q_D, \Delta, q_{start_D}, F_D)$

$Q_D = P(Q) \quad q_{start_D} = Q_{start} \quad \underset{\in Q_D}{\delta(R, a)} = \underset{\in Q_D}{\Delta^*(R, a)} \quad F_D = \{ R \in Q_D \mid R \cap F = \emptyset \}$

Твърдение: (помощно за теоремата) За всяко $R \subseteq Q$, за всяко α от езика:

$$\Delta^*(R, \alpha) = \delta^*(R, \alpha) \quad \forall R \subseteq Q \quad \forall \alpha \in \Sigma^*$$

Доказателство: Индукция по $|\alpha|$

База $\alpha = \varepsilon$ $\qquad \underset{\text{мн-во от състояния}}{\Delta^*(R, \varepsilon)} = R = \underset{\text{едно състояние}}{\delta^*(R, \varepsilon)}$

ИС $\alpha = \beta a$ $\qquad \Delta^*(R, \beta a) = \Delta^*(\Delta^*(R, \beta), a) =$ // от твърдението

$= \delta(\delta^*(R, \beta), a) = \delta^*(R, \beta a)$ // деф. на δ^*

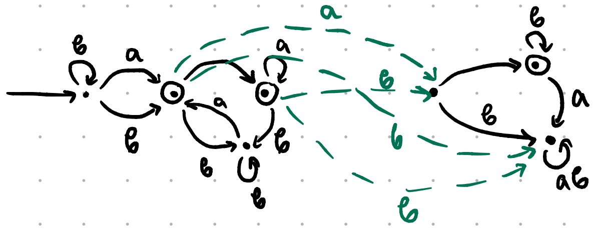
$\alpha \in \mathcal{L}(N) \Leftrightarrow \Delta^*(Q_{start}, \alpha) = R$ & $R \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \delta^*(q_{start_D}, \alpha) = R$ & $R \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \delta^*(q_{start_D}, \alpha) \in F_D$

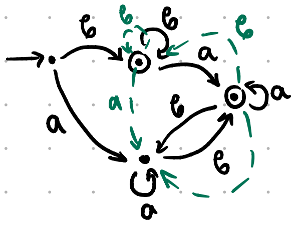
Твърдение: Ако L_1 и L_2 са автоматни, то $L_1 \cdot L_2$ е автоматен

(Засега приемаме без доказателство)



Трябва да махнем финалните състояния на L_1

Твърдение: Ако L е автоматен, то L^+ е автоматен $\quad (L^+ = \bigcup_{n \geq 1} L^n \; ; \; L^* = L^+ \cup \{\varepsilon\})$



$\rightarrow \odot$ осигуряваме, че ε е в езика

$L_n = \{a,b\}^* \{a\} \{a,b\}^{n-1}$ има НКА с $n+1$ състояния

Твърдение: Ако ДКА $\mathcal{A}$, $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L_n$, то $|Q^{\mathcal{A}}| \geq 2^n$

Доказателство: Допускаме, че съществува ДКА $\mathcal{A}$ $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L_n$ и $|Q^{\mathcal{A}}| < 2^n$

$\exists\ \alpha, \beta \in \{a,b\}^n$, $\alpha \neq \beta$, но $\delta^*(q_{start}, \alpha) = \delta^*(start, \beta)$ // Принцип на Дирихле

$\alpha = \lambda . \alpha[i] . \rho$ $\quad$ $\beta = \lambda . \beta[i] . \rho'$ $\quad$ Позицията на първата разлика i.

БОО нека $\alpha[i] = a$, $\beta[i] = b$

- $i = 0$?

$\alpha = a . \rho$ $\qquad |\rho| = n-1 \rightarrow \alpha \in L_n \quad (\delta^*(q_{start}, \alpha) \in F)$

$\beta = b . \rho'$ $\qquad |\rho'| = n-1 \rightarrow \beta \notin L_n \quad (\delta^*(q_{start}, \beta) \notin F)$

$\Rightarrow \delta^*(q_{start}, \alpha) \neq \delta^*(q_{start}, \beta)$ - противоречие

- $i > 0$?

$\alpha = \lambda . a . \rho \Rightarrow \alpha' = \lambda . a . \overbrace{\rho . a^i}^{n-1 \text{ дължина}} \Rightarrow \alpha' \in L_n$

$\beta = \lambda . b . \rho' \Rightarrow \beta' = \lambda . b . \underbrace{\rho . a^i}_{n-1} \Rightarrow \beta' \notin L_n$

$|\lambda| = i \qquad \delta^*(p, a^i) = \delta^*(p, a^i)$

$\delta^*(\delta^*(q_{start}, \alpha), a^i) = \delta^*(\delta^*(q_{start}, \beta), a^i)$

$\delta^*(q_{start}, \alpha') = \delta^*(q_{start}, \beta')$

$\alpha' \in L_n \Rightarrow \underbrace{\in F \qquad \notin F}_{\text{противоречие}} \Leftarrow \beta' \in L_n$

Регулярни езици

def: Регулярен израз $r ::= \emptyset \mid \varepsilon \mid a_1 \mid \dots \mid a_n \mid (r+r) \mid (r.r) \mid r^*$ $\qquad \Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$

пример: $(a \cdot b) + c$

def: Регулярен език $\quad \emptyset, \{\varepsilon\}, \{a_1\}, \dots, \{a_n\}$ са регулярни езици

Ако L_1 и L_2 са регулярни езици, то $L_1 \cup L_2$ е регулярен език

$L_1 . L_2$ - е регулярен език $\quad L_1^*$ - е регулярен език

Примери: $\mathcal{L}[\emptyset] = \emptyset \quad \mathcal{L}[\varepsilon] = \{\varepsilon\} \quad \mathcal{L}[a_i] = \{a_i\} \quad \mathcal{L}[(r_1 + r_2)] = \mathcal{L}[r_1] \cup \mathcal{L}[r_2] \quad \mathcal{L}[(r_1 . r_2)] = \mathcal{L}[r_1] . \mathcal{L}[r_2]$

$\mathcal{L}[(r^*)] = (\mathcal{L}[r])^*$