Двойно векторно произведение. Детерминанта на Грам

17.03.23

I. Двойно векторно пр.

$(a \times b) \times c = \underbrace{(a.c)}_{\text{скалар}}\, b - (b.c)\, a$

$a \times (b \times c) = (a.c)\, b - (a.b)\, c$

$u.v = |u|\,|v| \cos\sphericalangle(u,v)$

$u v w = (u \times v) \circ w$

$u \times v = |u|\,|v| \sin\sphericalangle u,v$

$u \times v \perp u, v$

II. Детерминанта на Грам

$$\underbrace{(a\,b\,c)}_{\text{смесено}}{}^2 = \begin{vmatrix} a^2 & a.b & a.c \\ a.b & b^2 & b.c \\ a.c & b.c & c^2 \end{vmatrix}$$

пример: нека $|a|=1$ $|b|=2$ $|c|=3$

$\sphericalangle(a,b) = \frac{\pi}{2}$ $\sphericalangle(a,c) = \frac{\pi}{3}$ $\sphericalangle(b,c) = \frac{\pi}{6}$

$\vec{p} = (a \times b) \times c = (a.c)\, b - (b.c)\, a = \frac{3}{2} b - 3.\sqrt{3}\, a$

$\vec{q} = a \times (b \times c) = (a.c)\, b - (a.b)\, c = \frac{3}{2} b - 0.c$

$$|p| = \sqrt{p^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} b - 3\sqrt{3} a\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} b^2 - \cancel{2}.\frac{3}{\cancel{2}}.3\sqrt{3}\, ab + 27a^2} = \sqrt{\frac{9}{\cancel{4}}.\cancel{4} - 9\sqrt{3}.0 + 27.1} =$$

$$= \sqrt{36} = 6$$

$$(abc)^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 4 & 3\sqrt{3} \\ 3/2 & 3.\sqrt{3} & 9 \end{vmatrix} =$$

$36 + 0 + 0 - \frac{9}{\cancel{4}}.\cancel{4} - 0 - 9.3 = 36 - 36 = 0$

Доказателство

I. $a(x_1, y_1, z_1)$

$b(x_2, y_2, z_2)$

$c(x_3, y_3, z_3)$

ОКС $e_1, e_2, e_3 \in S^+$

II. ОКС $e_1, e_2, e_3 \in S^+$

Ако формулата е вярна за базисните вектори, то тя е в сила за всички вектори

Взимаме $a / b / c = e_1 / e_2 / e_3$ (27 равенства)

Формула за лице на Δ в равнината

Тв. Спрямо ОКС $e_1, e_2, e_3 \in S^+$ са дадени

$A_1(x_1, y_1, z_1)$

$A_2(x_2, y_2, z_2)$

$A_3(x_3, y_3, z_3)$

Ориентирано лице $\sigma_{A_1A_2A_3}$ на $A_1A_2A_3$

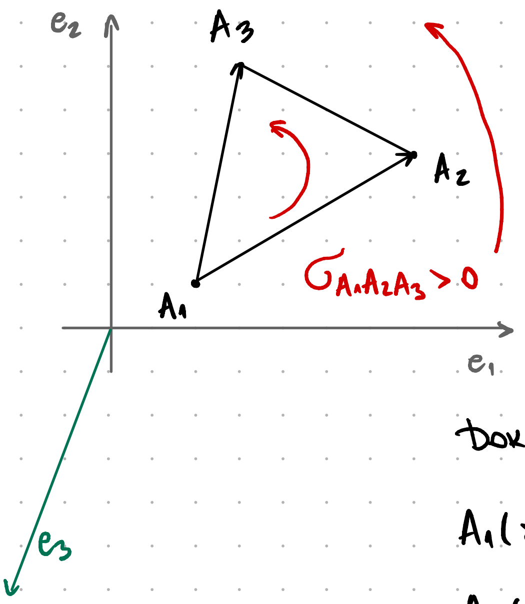
(подредбата на точките е важна)

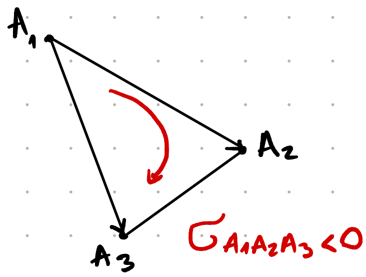
$$\sigma_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix} \right\| \overset{*}{=} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} \overset{*}{\underset{\text{ЛАГ}}{=}} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \begin{array}{cc} A_i & A_{i+1} \\ \end{array} \begin{vmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{vmatrix}$$

в модул

$i=3$: $x_4 = x_1$ $y_4 = y_1$

* за задачи





Док: Допълваме к Oe_1e_2 с $e_3 = e_1 \times e_2$

$A_1(x_1, y_2, 0)$

$A_2(x_2, y_2, 0)$

$A_3(x_3, y_3, 0)$

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}|$$

$A_1A_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_2, 0)$

$A_1A_3 = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, 0)$

$$A_1A_2 \times A_1A_3 = \left(\begin{vmatrix} y_2-y_1 & 0 \\ y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & x_2-x_1 \\ 0 & x_3-x_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \left(0, 0, \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} \right)$$

$\alpha^2 = |\alpha|_{\text{модул}}$

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}|A_1A_2 \times A_1A_3| = \frac{1}{2}\left| \overbrace{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}}^{A} \right|_{\text{модул}}$$

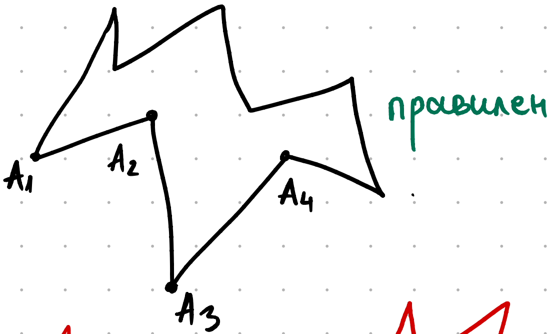
$A>0 \iff A_1A_2 \times A_1A_3 \uparrow\uparrow \vec{e}_3$

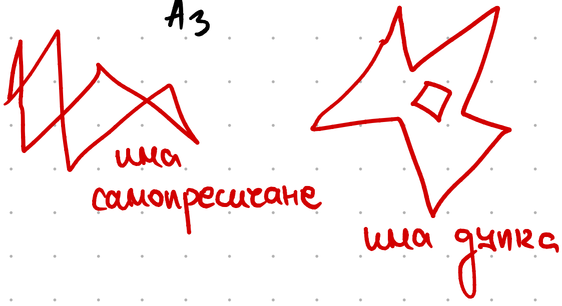
$A<0 \iff A_1A_2 \times A_1A_3 \uparrow\downarrow \vec{e}_3$

Тв. Нека $A_1A_2\dots A_n$ е полигон

Спрямо ОКС $e_1e_2 \in S^+$ $\quad A_i(x_i,y_i)\ \forall\, 1\le i\le n$

$$\sigma_{A_1A_2\dots A_n} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{vmatrix} \qquad ! \quad x_{n+1}=x_1,\ y_{n+1}=y_1$$





Всеки правилен полигон с n върха може да се триангулира с n−2 Δ

! при триангулация върховете на Δ-те трябва да съвпадат с върховете на полигона

Док. индуктивно по n - брой на върховете

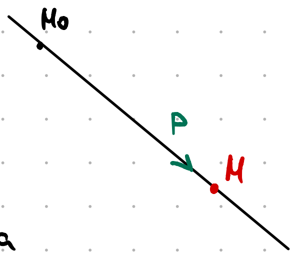
разделяме полигона на по-малки полигони (с по-малко върхове) чрез лъчи от един връх. Ако лъча се свърже с друг връх, разделянето е успешно, ако пресече страна завъртаме лъча докато не се свърже с връх

възможно само в равнината

Уравнения на права в равнината

Права g в равнината се задава с т. $M_0 \in g$ и вектор $\vec{p} \neq \vec{0}$, $p \parallel g$

т. $M \in g \iff \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p} \iff \overrightarrow{M_0M} = s.\vec{p}$ (s параметър)



Нека K: Oxy (K: Oe_1e_2)

$M_0(x_0,y_0)$ $\quad M(x_1,y_1)$ $\quad \vec{p}(p_1,p_2)$ $\qquad \overrightarrow{M_0O} + \overrightarrow{OM} = s\vec{p}$ т.О произволна

$g: \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + s\vec{p}$ – векторно параметрично уравнение на g

$g: \begin{cases} x = x_0 + s.p_1 \\ y = y_0 + s\,p_2 \end{cases}$ – координатно параметрично уравнение на g

пример: $g \begin{cases} \ni M_0(3,2) \\ \parallel \vec{p}(1,5) \end{cases}$ $\quad g: \begin{cases} x = 3 + s \\ y = 2 + 5s \end{cases}$ $\quad s = x - 3$ $\quad y = 2 + 5(x-3)$

$g: 5x - 15 + 2 - y = 0$, $5x - y - 13 = 0$

общо уравнение:

от $p(p_1, p_2) \neq 0 \Rightarrow (p_1, p_2) \neq (0,0)$

нека $p_1 \neq 0 \Rightarrow s = \dfrac{x - x_0}{p_1}$

$y = y_0 + \dfrac{p_2}{p_1}(x - x_0)$

$g: p_2 x - p_1 y + p_1 y_0 - p_2 x_0 = 0$

$g: \; Ax + By + C = 0$

$p_2 = A \quad -p_1 = B \quad p_1 y_0 - p_2 x_0 = C$

$\Rightarrow p_1 = -B \quad p_2 = A \quad p(p_1, p_2) = p(-B, A) \parallel g$

пример $\quad g: 3x + 7y - 9 = 0 \quad p \parallel g? \longrightarrow p(-7, 3) \parallel g$

$Ax + By + C = 0$

$(A, B) \neq (0,0)$

Ще докажем, се задава права в равнината

$g: \begin{cases} \parallel p(-B, A) \neq 0 & \text{нека } A \neq 0 \\ \ni M_0\left(-\dfrac{C}{A}, 0\right) \end{cases}$

$x = -\dfrac{C}{A} - B.s$

$y = 0 + As \Rightarrow s = \dfrac{1}{A}y \qquad x = -\dfrac{C}{A} - B\dfrac{1}{A}y = -\dfrac{C}{A} - \dfrac{B}{A}y$

II Док: Нека т.$M(x,y) \in g \iff M_0M(x - x_0, y - y_0)$, $p(-B, A)$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ -B & A \end{vmatrix} = 0$$