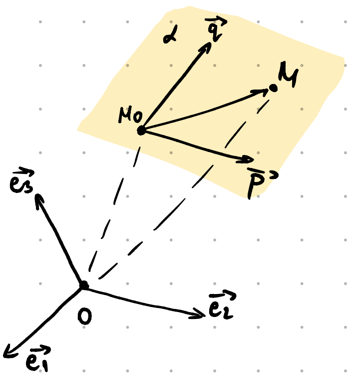
Уравнения на равнина в пространството

Равнина α в пространството се задава:

с т. $M_0 \in \alpha$ и $\vec{p}, \vec{q} \parallel \alpha$, $\vec{p} \nparallel \vec{q}$

$\forall$ т. $M \in \alpha \iff \overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{p} + \mu\vec{q}$



Нека $K: O\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ ($K: Oxyz$)

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ | $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$

$M(x, y, z)$ | $\vec{q}(q_1, q_2, q_3)$

$\overrightarrow{M_0M} + \overrightarrow{OM} = \lambda\vec{p} + \mu\vec{q}$

$\alpha: \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda\vec{p} + \mu\vec{q}$ - векторно параметрично уравн.

$$\alpha: \begin{cases} x = x_0 + \lambda p_1 + \mu q_1 \\ y = y_0 + \lambda p_2 + \mu p_2 \\ z = z_0 + \lambda p_3 + \mu p_3 \end{cases}$$ - координатно параметрично уравн.

Пример: $\alpha \ni M_0(-2,1,3)$, $\alpha \parallel \vec{p}(1,0,-4)$, $\parallel \vec{q}(0,2,-3)$

Търсим координатно параметрично уравнение на α

$$\alpha: \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 1 \quad\quad + 2\mu \\ z = 3 - 4\lambda - 3\mu \end{cases}$$

| $P(0,0,1) \overset{?}{\in} \alpha$ заместваме с координати

Общо уравнение на равнина в пространството

От $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ $\vec{p}(p_1,p_2,p_3), \vec{q}(q_1,q_2,q_3) \parallel \alpha \iff \alpha: \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0$

$\alpha: \begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix}(x-x_0) - \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ q_1 & q_3 \end{vmatrix}(y-y_0) + \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix}(z-z_0) = 0 \implies \alpha: Ax + By + Cz + D = 0$

$(A,B,C) \neq (0,0,0)$

защото $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ т.е. координатите им не са пропорционални

Пример: $\alpha: \ni M_0(1,-2,0)$, $\parallel \vec{p}(1,2,0), \vec{q}(3,4,-1)$

$\alpha: \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$(-2)(x-1) + 1.(y+2) - 2z = 0$

$\alpha: -2x + y - 2z + 4 = 0$

$-2.1 + (-2)(-2).0 + 4 = 0$ (проба с т. M_0)

Параметрично уравнение на α:

$$\alpha = \begin{cases} x = 1+\lambda+3\mu \\ y = 2+2\lambda+4\mu \\ z = \quad\quad -\mu \quad \Rightarrow \mu = -2 \end{cases}$$

Пример $\quad \alpha \ni M_1(1,2,0), M_2(1,3,2), M_3(2,-1,1)$

Общо уравн. на α: От $M_1, M_2, M_3 \in \alpha \Rightarrow \alpha: \begin{cases} \ni M_1(1,2,0) \\ \parallel \overrightarrow{M_1M_2}(0,1,2) \\ \parallel \overrightarrow{M_1M_3}(1,-3,1) \end{cases}$ $\quad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & x \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

α: $7x-7+2y-4-z=0$

$7x+2y-z-11=0$

Равнина през 3 точки. Нека $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \alpha$, $i = \{1,2,3\}$

$$\alpha: \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \alpha: \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ (от примера)

Твърдение: $\forall$ уравнение $Ax+By+Cz+D=0$, $(A,B,C) \neq (0,0,0)$

е уравнение на точно една равнина

Доказателство: Нека $A \neq 0$, $\quad$ Търсим равнина $\alpha \ni M_1, M_2, M_3$

т. $M_1\left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right)$

т. $M_2\left(-\frac{B+D}{A}, 1, 0\right)$

т. $M_3\left(-\frac{C+D}{A}, 0, 1\right)$

$$\Rightarrow \alpha \begin{cases} \ni M_1\left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right) \\ \parallel \overrightarrow{M_1M_2}\left(-\frac{B}{A}, 1, 0\right) \\ \parallel \overrightarrow{M_1M_3}\left(-\frac{C}{A}, 0, 1\right) \end{cases} \Rightarrow \alpha: \begin{vmatrix} x+\frac{D}{A} & y & z \\ -\frac{B}{A} & 1 & 0 \\ -\frac{C}{A} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x + \frac{D}{A} + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A}z = 0$$

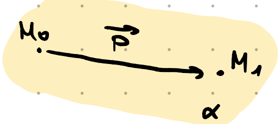
$$\alpha: Ax+By+Cz+D=0$$

Нормално уравнение на равнина. Разстояние от точка до равнина

Твърдение: Спрямо афинна координатна система $KOxyz$ са дадени равнина

$\alpha = Ax+By+Cz+D=0$ и вектор $\vec{p}(\mu, \nu, \gamma)$. $\vec{p} \parallel \alpha \Leftrightarrow A\mu + B\nu + C\gamma = 0$

Доказателство: Аналог. на док. за права в равнина



Нека $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\alpha$ и $\vec{p}=\overrightarrow{M_0M_1}$. $M_1(x_1,y_1,z_1)$ $\quad \vec{p}\parallel\alpha \Leftrightarrow M_1\in\alpha$

$\overrightarrow{M_0M_1}(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)=\vec{p}\,(\mu,\nu,\gamma)$

$x_0=x_1-\mu$

$y_0=y_1-\nu$

$z_0=z_1-\gamma$

От $M_0\in\alpha \Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(x_1-\mu)+B(y_1-\nu)+C(z_1-\gamma)+D=0$

$\Rightarrow Ax_1+By_1+Cz_1+D=A\mu+B\nu+C\gamma$

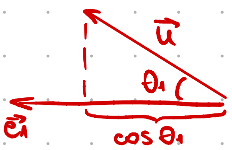
Нека к: $Oxyz$ е ортонормирана и $\alpha = Ax+By+Cz+D=0 \Leftrightarrow \vec{n}(A,B,C)\perp\alpha$

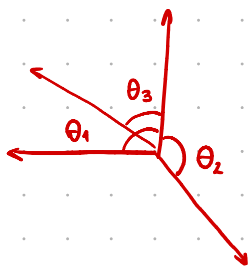
Твърдение: Нека К: $Oxyz$ е ортонормирана, α: $Ax+By+Cz+D=0$ и т. $M_1(x_1,y_1,z_1)$

$$d(M_1,\alpha)=\left|\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$

Пример: $2x-y-2z-3=0$ и т. $M_1(-1,0,5)$ $\quad d(M_1,\alpha)=\left|\frac{-2+0-10-3}{\sqrt{4+1+4}}\right|=\left|\frac{-15}{3}\right|=5$

Док: Нека $\vec{u}$: $|\vec{u}|=1 \Rightarrow \vec{u}(\cos\theta_1,\cos\theta_2,\cos\theta_3)$



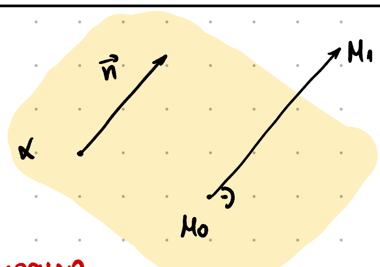


$\theta_1=\sphericalangle(\vec{u},e_1)$, $\theta_2=\sphericalangle(\vec{u},e_2)$, $\theta_3=\sphericalangle(\vec{u},e_3)$

от $|\vec{u}|^2=1=\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3=1$

от $|\vec{v}|\neq 1$, то $\left|\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right|=1$ $\quad \alpha$: $\cos\theta_1 x+\cos\theta_2 y+\cos\theta_3 z+D_1=0$

$M_0(x_0,y_0,z_0)$: $M_0\in\alpha$ и $\overrightarrow{M_0M_1}\perp\alpha$



Док: $\Rightarrow d(M_1,\alpha)=|\overrightarrow{M_0M_1}|$

$\overrightarrow{M_0M_1}\parallel\vec{n} \Leftrightarrow \underline{\overrightarrow{M_0M_1}=\delta.\vec{n}}$ ориентирано разстояние

$|\overrightarrow{M_0M_1}|=|\delta\vec{n}|=|\delta||\vec{n}|=|\delta|$

$(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)=\delta(\cos\theta_1,\cos\theta_2,\cos\theta_3)$

$x_0=x_1-\delta\cos\theta_1$ $\quad$ От $M_0\in\alpha \Rightarrow \cos\theta_1 x_0+\cos\theta_2 y_0+\cos_3 z_0+D_1=0$

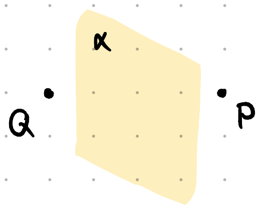
$y_0=y_1-\delta\cos\theta_2$ $\quad \cos\theta_1(x_1-\delta\cos\theta_1)+\cos\theta_2(y_1-\delta\cos\theta_2)+\cos\theta_3(z_1-\delta\cos\theta_3)+D_1=0$

$z_0=z_1-\delta\cos\theta_3$ $\quad \cos\theta_1 x_1+\cos\theta_2 y_1+\cos\theta_3 z_1+D_1=0$

Твърдение: Нека $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$ е равнина (K е афинна)

$\ell(M)=\ell(x,y,z)=Ax+By+Cz+D$

т. P и Q са в различни полупространства определени от $\alpha \iff \ell(P)\ell(Q)<0$



Док: Аналогично на док за права в равнината

Уравнение на права в пространството

Нека $K: Oxyz$ е афинна. Права g се задава: т. $M_0(x_0,y_0,z_0)\in g$ и $\vec{p}(p_1,p_2,p_3)_{\neq 0} \to \parallel g$

$\forall$ т. $M(x,y,z)\in g$

$\vec{OM}=\vec{OM_0}+s\vec{p}$

$$g: \begin{cases} x=x_0+sp_1 \\ y=y_0+sp_2 \\ z=z_0+sp_3 \end{cases}$$

Пример 1 $g: \begin{cases} \ni M_0(2,3,7) \\ \parallel \vec{p}(5,6,-1) \end{cases}$ $g: \begin{cases} x=2+5s \\ y=3+6s \\ z=7-s \end{cases}$

Пример 2 $m: \begin{cases} x=3+2s \\ y=17 \\ z=\quad s \end{cases}$ $m \parallel \vec{m}(2,0,1)$

$M_1(3,17,0)$ $s=0$ $M_2(5,17,1)$ $s=1$

Уравнение на права в пространството като пресечница на две равнини

$$g: \begin{vmatrix} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 : \alpha \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 : \beta \end{vmatrix}$$

$\alpha \nparallel \beta$

Пример: $g: \begin{vmatrix} x-y+z+2=0 \\ x \quad -2z+1=0 \end{vmatrix}$

$-1+2s-y+s+2=0$

$y=1+3s$

$\Rightarrow g: \begin{cases} x=-1+2s \\ y=1+3s \\ z=\quad s \end{cases}$

нека $z=s$ $\quad x=-1+2s$