n-мерно Евклидово пространство

$\mathbb{R}^n = \{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1, \dots, n\} \}$

дефинирани са събиране и умножение на вектори

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Норма $\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \longrightarrow \|x\| = \sqrt{\langle x, y \rangle}$

$\Theta = (0, \dots, 0)$

$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

отворено кълбо $B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r \}$

затворено кълбо $\overline{B}_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \le r \}$

$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \ge 1$ Как изглежда $\overline{B}_r(\Theta)$ за тези норми?

$\|x\|_\infty = \max \{ |x_1|, \dots, |x_n| \}$

Топология на $\mathbb{R}^n$

1) околност

2) отворено мн-во

3) затворено мн-во

4) Затворена обвивка на мн-во $A \subset \mathbb{R}^n$

$\overline{A} := \cap \{ F \subset \mathbb{R}^n : F \text{ затворено и } F \supset A \}$

$\overline{A} \supset A$, $\overline{A}$ затворено (като сечение на затворени)

Твърдение $\overline{A} = \{ x \in \mathbb{R}^n : \forall U \text{ ок. на } x : U \cap A \neq \emptyset \}$

Док: "$\subset$" $x \in \overline{A}$, Допускаме, че същ. U отворено, $x \in U$, $U \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow F = \mathbb{R}^n \setminus U$ затворено, $F \supset A \Rightarrow F \subset \overline{A}$

противоречие с $x \in \overline{A} \setminus F$

"$\supset$" Нека $U \cap A \neq \emptyset$ $\forall U$ ок на x и $x \notin \overline{A} \Rightarrow W = \mathbb{R}^n \setminus \overline{A}$ е ок. на x

$\Rightarrow W \cap A = \emptyset$ противоречие

$x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$x(m) \equiv x_m$, $m \in \mathbb{N}$

$\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ радиус в $\mathbb{R}^n$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}^n$

Казваме, че $x_m \xrightarrow[m\to\infty]{} x_0$ ($\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x_0$), ако $\forall \varepsilon>0\ \exists m_0\in\mathbb{N}\ \forall m\ge m_0 : \|x_m - x_0\| < \varepsilon$

или все едно $\|x_m - x_0\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$.

Твърдение Сходимостта в $\mathbb{R}^n$ е покоординатна

$$x_m = (x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m) \in \mathbb{R}^n \quad m\in\mathbb{N}$$
$$x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n \quad m\in\mathbb{N}$$

Тогава $x_m \xrightarrow[m\to\infty]{} x_0 \iff x_i^m \xrightarrow[m\to\infty]{} x_i^0 \quad \forall i\in\{1,\dots,n\}$

$(\Rightarrow)$ $x_m \xrightarrow[m\to\infty]{} x_0$, $i\in\{1,\dots,n\}$

$$|x_i^m - x_i^0| \le \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j^m - x_j^0)^2} = \|x_m - x_0\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \quad \Rightarrow x_i^m \xrightarrow[m\to\infty]{} x_i^0$$

$(\Leftarrow)$ $x_m \xrightarrow[m\to\infty]{} x_0$, $i\in\{1,\dots,n\}$

$$\|x_m - x_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^m - x_i^0)^2} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

Твърдение $A\subset\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \bar{A} = \{x\in\mathbb{R}^n : \exists \{x_m\}_{m=1}^\infty \subset A,\ x_m \xrightarrow[m\to\infty]{} x\}$

Док: "$\subset$" $x\in\bar{A}$, $m\in\mathbb{N} \Rightarrow B_{1/m}(x)\cap A = \emptyset \Rightarrow \exists x_m \in B_{1/m}(x)\cap A$

$\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset A$, $\|x_m - x\| < \frac{1}{m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ т.е. $x_m \xrightarrow[m\to\infty]{} x$

"$\supset$" $x\in\mathbb{R}^n$, същ. $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset A$, $x_m \xrightarrow[m\to\infty]{} x$

U ок. на x $\Rightarrow \exists \varepsilon>0$, $B_\varepsilon(x)\subset U$.
произволна

$$\left.\begin{array}{l} x_m \xrightarrow[m\to\infty]{} x \\ \varepsilon>0 \end{array}\right\} m_0\in\mathbb{N},\ \|x_{m_0} - x\| < \varepsilon$$

$\Rightarrow x_{m_0} \in B_\varepsilon(x)\cap A \subset U\cap A \Rightarrow U\cap A \ne \emptyset$

Точка на сгъстяване на редица

Def: $A\subset\mathbb{R}^n$ се нарича ограничено, ако същ. $R>0$ такива, че $A\subset \bar{B}_R(\theta)$

Принцип за компактност

От всяка ограничена редица в $\mathbb{R}^n$ може да се избере сходяща подредица

Док: Б.О.О. $n=3$

$\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{R}^3$ ограничена $\qquad x_m = (x_m^1, x_m^2, x_m^3)$

$\Rightarrow \{x_m^i\}_{i=1}^{\infty}$ е ограничена в $\mathbb{R}$ $\forall i \in \{1,2,3\}$

Ако $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \overline{B}_R(\theta)$ то $|x_m^i| \leq \|x_m\| \leq R$ $\forall i \in \{1,2,3\}$ $\forall m \in \mathbb{N}$

$\{x_m^1\}_{m=1}^{\infty}$ огр. $\Rightarrow$ същ. сходяща подредица $\{x_{m_e}^1\}_{e=1}^{\infty}$, $x_{m_e}^1 \xrightarrow[e\to\infty]{} x_0^1$

$\{x_m^2\}_{m=1}^{\infty}$ огр. $\Rightarrow$ същ. сходяща подредица $\{x_{m_k}^2\}_{k=1}^{\infty}$, $x_{m_k}^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0^2$

$\{x_m^3\}_{m=1}^{\infty}$ огр. $\Rightarrow$ същ. сходяща подредица $\{x_{m_s}^3\}_{s=1}^{\infty}$, $x_{m_s}^3 \xrightarrow[\to\infty]{} x_0^3$

$\{x_{m_{e_{k_s}}}\}_{s=1}^{\infty}$ подредица на $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$

$x_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3) \in \mathbb{R}^3$

Тогава $x_{m_{e_{k_s}}} \xrightarrow[s\to\infty]{} x_0$. Наистина $x_{m_{e_{k_s}}}^3 \xrightarrow[s\to\infty]{} x_0^3$

$x_{m_{e_{k_s}}}^2 \xrightarrow[s\to\infty]{} x_0^2$, защото $x_{m_{e_k}}^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0^2$

Аналогично $x_{m_{e_{k_s}}}^1 \xrightarrow[s\to\infty]{} x_0^1$,

Теорема $K \subset \mathbb{R}^n$. Тогава следните две твърдения са еквивалентни

А) K е ограничено и затворено

Б) От всяка редица от елементи на K може да се избере сходяща подредица, чиято граница е също в K

Док: А) $\Rightarrow$ Б) K огр. затворено

$\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset K \Rightarrow \{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ ограничена

Пр. за комп. $\Rightarrow$ Същ. $\{x_{m_e}\}_{e=1}^{\infty}$ подредица на $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$, $x_{m_e} \xrightarrow[e\to\infty]{} x_0$.

$\{x_{m_e}\}_{e=1}^{\infty} \subset K$, $x_{m_e} \xrightarrow[e\to\infty]{} x_0 \Rightarrow x_0 \in \overline{K}$ Но K е затв. $\Rightarrow \overline{K} = K \Rightarrow x_0 \in K$

Б) $\Rightarrow$ А) $x_0 \in \overline{K}$ произв.

$\Rightarrow$ Същ. $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset K$, $x_m \xrightarrow[m\to\infty]{} x_0$

Б) $\Rightarrow$ Същ. $\underset{\text{подред.}}{x_{m_e}} \xrightarrow[e\to\infty]{} \tilde{x} \in K$

$x_m \xrightarrow[m\to\infty]{} x_0$, $\{x_{m_e}\}_{e=1}^{\infty}$ нейна подредица $\Rightarrow x_{m_e} \xrightarrow[e\to\infty]{} x_0$

$\Rightarrow \tilde{x} = x_0 \in K \Rightarrow \overline{K} \subset K$. Винаги $K \subset \overline{K}$

$\Rightarrow K = \overline{K} \Rightarrow K$ затворено

Допускаме, че K не е ограничено

$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}\ \exists x_m \in K,\ \|x_m\| > m.$

$\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset K$, б) $\Rightarrow x_{m_\ell} \xrightarrow[\ell\to\infty]{} x_0$, $\{x_{m_\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$ подр.

$\|x_{m_\ell}\| \xrightarrow[\ell\to\infty]{} \|x_0\| \Rightarrow \exists \ell_0\ \forall \ell \geq \ell_0 : \|x_{m_\ell}\| < \|x_0\| + 1$

$\|x_{m_\ell}\| > m_\ell \xrightarrow[\ell\to\infty]{} +\infty$ противоречие

$\left(\big| \|x_{m_\ell}\| - \|x_0\| \big| \leq \|x_{m_\ell} - x_0\| \xrightarrow[\ell\to\infty]{} 0 \right)$

def. $K \subset \mathbb{R}^n$ се нарича компакт, ако от всяко отв. покритие на K може да се избере крайно подпокритие

$\left(\forall \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ фамилия от отворени множ. в $\mathbb{R}^n$, $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \supset K \right)$

$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in J,\ \bigcup_{i=1}^{k} \supset K$

На доверие: Едно подмн-во K на $\mathbb{R}^n$ е компакт точно тогава, когато удовлетворява а) (или б)) от предишната теорема

Функции (и изображения) на повече от една променлива

$f: D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ (функция на n променливи)

$f(x) \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$f: D \to \mathbb{R}^k,\ D \subset \mathbb{R}^n$ $(n, k \in \mathbb{R})$

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \cdots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \qquad x \in D$$

$f_1, f_2, \ldots, f_k$ координатни функции на изображението f

Граница на изображение

$f: D \to \mathbb{R}^k,\ D \subset \mathbb{R}^n$ $(k, n \in \mathbb{N})$

x_0 точка на сгъстяване на D

(def x_0: $\forall u$ ок на x_0: $(U \cap D) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$ или $\exists \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\},\ x_m \xrightarrow[m\to\infty]{} x_0$)

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}^k$

(Коши) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D,\; x \neq x_0,\; \|x - x_0\| < \delta : \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$

(Хайне) $\forall \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\},\; x_m \xrightarrow[m \to \infty]{} x_0 : \; f(x_m) \xrightarrow[m \to \infty]{} \ell$

Непрекъснатост на изображение

$f : D \to \mathbb{R}^k$, $D \subset \mathbb{R}^n$

$x_0 \in D$

f е непрекъсната в x_0, ако $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D,\; \|x - x_0\| < \delta : \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ (Коши) $\iff$

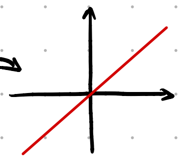
$\forall \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset D,\; x_m \xrightarrow[m \to \infty]{} x_0 : \; f(x_m) \xrightarrow[m \to \infty]{} f(x_0)$ (Хайне)

Пример

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & x = (x_1, x_2) \neq \theta = (0,0) \\ 0, & \text{ако } x = (0,0) \end{cases}$$

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

разгл. права $x_2 = kx_1$, $k \in \mathbb{R}$



$f(t, kt) = \dfrac{t \cdot kt}{t^2 + (kt)^2} = \dfrac{k}{1 + k^2}$ не зависи от стойността на t $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ не съществува!

$t \neq 0$

Задача за домашно: Да се докаже, че за непрекъснато изображение f с деф област компакт и f е биекция, то обратната биекция също е непрекъсната

Основни теореми за непрекъснати изображения

Th. Вайерщрас: Непрекъснат образ на компакт е компакт.

$f : K \to \mathbb{R}^k$, $K \subset \mathbb{R}^n$ компакт

f е непрекъсната

$\Rightarrow f(K) = \{ f(x) : x \in K \}$ е компактно подмножество на $\mathbb{R}^k$

Коментар: компакт в $\mathbb{R}^1$ $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекъсната $\Rightarrow$

$\Rightarrow f([a,b])$ е компакт в $\mathbb{R}^1 \to f([a,b])$ ограничено в $\mathbb{R}$ (т.е. f е ограничена) $\Rightarrow$

$\Rightarrow f([a,b])$ затворено в $\mathbb{R}^1$ (значи $\sup f([a,b])$, $\inf f([a,b])$ са в $f([a,b])$)

Док: $f(K) = \{f(x) : x \in K\}$ е компакт $\subset \mathbb{R}^k$

$\{y_m\}_{m=1}^{\infty} \subset f(K)$ произволна $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset K$, K е компакт

$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}\ \exists x_m \in K : y_m = f(x_m)$

$\Rightarrow$ Съществува сходяща подредица $\{x_{m_e}\}_{e=1}^{\infty}$ за $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $x_{m_e} \xrightarrow[e\to\infty]{} x_0 \in K$

$\left.\begin{array}{l} x_0 \in K \Rightarrow f \text{ непрекъсната в } x_0 \\ x_{m_e} \xrightarrow[e\to\infty]{\mathbb{R}} x_0 \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{Хайне}]{} f(x_{m_e}) \xrightarrow[e\to\infty]{} f(x_0)$

$y_{m_e} = f(x_{m_e}) \Rightarrow \{y_{m_e}\}_{e=1}^{\infty}$ подредица за $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ и

$y_{m_e} \xrightarrow[e\to\infty]{} f(x_0) \in f(K) \Rightarrow f(K)$ е компакт

Th. Кантор Непрекъснато изображение с деф. област компакт е равн. непрекъснато

$f: D \to \mathbb{R}^k$, $D \subset \mathbb{R}^n$, D е компакт

Ако f е непрекъсната, то f е равномерно непрекъсната в D, т.е:

(равн. непрекъснатост) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x', x'' \in D, \|x' - x''\| < \delta : \|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$

Доказателство: Допускаме противното, т.е.

$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x'(\delta), x''(\delta) \in D, \|x'(\delta) - x''(\delta)\| < \delta : \|f(x'(\delta)) - f(x''(\delta))\| \geq \varepsilon_0$

Даваме на δ стойности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{m}, \dots$

$x'(\frac{1}{m}) \equiv x'_m$, $x''(\frac{1}{m}) \equiv x''_m$

т.е. $\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists x'_m, x''_m \in D, \|x'_m - x''_m\| < \delta : \|f(x'_m) - f(x''_m)\| \geq \varepsilon_0$

$\{x'_m\}_{m=1}^{\infty}, \{x''_m\}_{m=1}^{\infty}$ редици от елементи на D

D компакт, $\{x'_m\}_{m=1}^{\infty} \subset D \Rightarrow \exists x'_{m_e} \xrightarrow[e\to\infty]{} x_0 \in D$

сега док., че $\exists x''_{m_e} \xrightarrow[e\to\infty]{} x_0$: $\|x''_{m_e} - x_0\| \leq \|x''_{m_e} - x'_{m_e}\| + \|x'_{m_e} - x_0\| < \frac{1}{m_e} + \|x'_{m_e} - x_0\| \xrightarrow[e\to\infty]{} 0 + 0 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x'_{m_\ell} \xrightarrow[\ell\to\infty]{} x_0 \\ x''_{m_\ell} \xrightarrow[\ell\to\infty]{} x_0 \end{array}\right\} \underset{\text{Хайне}}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} f(x'_{m_\ell}) \xrightarrow[\ell\to\infty]{} f(x_0) \\ f(x''_{m_\ell}) \xrightarrow[\ell\to\infty]{} f(x_0) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 \in D \\ f \text{ непр.} \end{array}\right\} f \text{ е непрекъсната в } x_0$$

$$\Rightarrow f(x'_{m_\ell}) - f(x''_{m_\ell}) \xrightarrow[\ell\to\infty]{} f(x_0) - f(x_0) = \theta \Rightarrow \| f(x'_{m_\ell}) - f(x''_{m_\ell}) \| \xrightarrow[\ell\to\infty]{} 0$$

Но $\| f(x'_{m_\ell}) - f(x''_{m_\ell}) \| \geq \varepsilon_0 \quad \forall \ell \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Противоречие