Права в равнината

1. параметрично $g: \begin{cases} x = x_0 + sp_1 \\ y = y_0 + sp_2 \end{cases}$

2. общо $g: Ax + By + C = 0$

3. права през 2 точки, отрезово у-ние, декартово

4. полуравнини

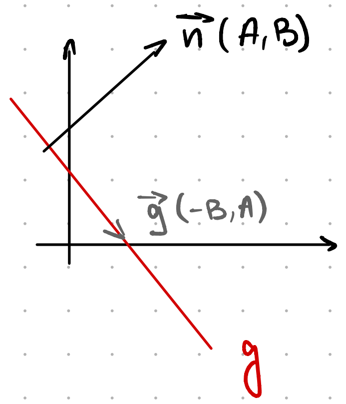
5. нормално у-ние на права / раст. от точка до права

Права в равнина се задава с

т. $M_0(x_0, y_0) \in g$ и $\vec{p}(p_1, p_2) \parallel g$

$\Rightarrow g: \begin{cases} x = x_0 + sp_1 \\ y = y_0 + sp_2 \end{cases} \longrightarrow g: Ax + By + C = 0$ общо

$\vec{g}(-B, A) \parallel g$



Твърдение: $\forall\ Ax + By + C = 0$ е уравнение на права

Док: разгл. права $\ni M_0\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$

$\parallel \vec{p}\,(-B, A)$

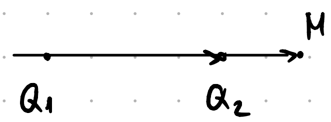
$\forall$ т. $M(x,y) \in g \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p_1}$

$\overrightarrow{M_0M}\left(x + \frac{C}{A}, y - 0\right) \quad \vec{p}(-B, A)$

$$\Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} x + \frac{C}{A} & y - 0 \\ -B & A \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta = Ax + C + By = 0 \qquad g: Ax + By + C = 0$$

Уравнение на права $g \ni Q_1(x_1, y_1)$ и $Q_2(x_2, y_2)$

$\forall$ т. $M(x,y) \in g \Leftrightarrow \overrightarrow{Q_1M} \parallel \overrightarrow{Q_1Q_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{Q_1M} = s.Q_1Q_2$



$\overrightarrow{Q_1M}(x - x_1, y - y_1)$

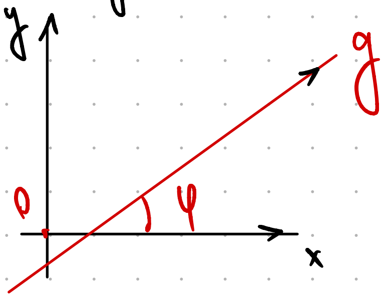
$Q_1Q_2(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

$$g = Q_1Q_2: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

Декартово уравнение

Нека $k: Oxy$ ортонормирана $\qquad g: y = kx + d$

Твърдение Нека $\varphi = \measuredangle(g, Ox) \Rightarrow k = tg\,\varphi$



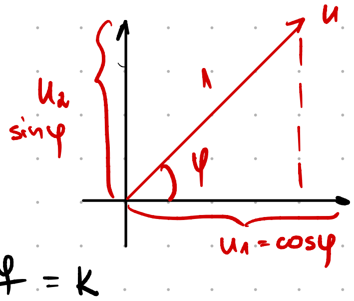
$g: \; kx - y + d = 0$

$\vec{g}(-(-1), k) \quad \vec{g}(1, k) \quad \vec{g} \parallel g$

$\vec{p}(p_1, p_2) \neq \vec{O}$

$\frac{p}{|p|} = \frac{1}{|p|} |p| = 1$

Нека $\vec{u}(u_1, u_2) \quad |\vec{u}| = 1$



$\frac{g}{|g|} = \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}}_{\cos\varphi}, \underbrace{\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}_{\sin\varphi} \right) \qquad tg\,\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = k$

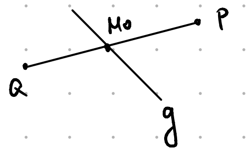
Полуравнини

Тв. Нека $g: \; Ax + By + C = 0$ и $\ell(M) = \ell((x,y)) = Ax + By + C$

Тогава $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$ са в различни полуравнини определени от $g \iff$

$\iff \ell(P) . \ell(Q) < 0$

Док. P и Q са в различни полуравнини $\iff$ отс. $PQ \cap g = M_0$ е м/у P и Q



$\iff \overrightarrow{QM_0} = k . \overrightarrow{PM_0}$ и $k < 0$

Нека $M_0(x_0, y_0) \in g \qquad (x_0 - x_2, y_0 - y_2) = k . (x_0 - x_1, y_0 - y_1)$

$x_0 (1 - k) = x_2 - kx_1 \Rightarrow x_0 = \frac{x_2 - kx_1}{1-k}$

$x_0 = \frac{x_2 - kx_1}{1-k} \qquad y_0 = \frac{y_2 - ky_1}{1-k}$

$A \frac{x_2 - kx_1}{1-k} + B \frac{y_2 - ky_1}{1-k} + C = 0$

$\underbrace{(Ax_2 + By_2 + C)}_{\ell(Q)} - k \underbrace{(Ax_1 + By_1 + C)}_{\ell(P)} = 0 \quad \Rightarrow \ell(Q) - k\,\ell(P) = 0$

$k = \frac{\ell(Q)}{\ell(P)} < 0 \iff \ell(Q) . \ell(P) < 0$

Пример $g: \; x - 2y + 3 = 0$

$P(0, -1), \; Q(-5, 0)$

1. Как са разположени?

2). коя от точките лежи в полуравнината на началото (т. О)

$\ell(P).\ell(Q)<0$

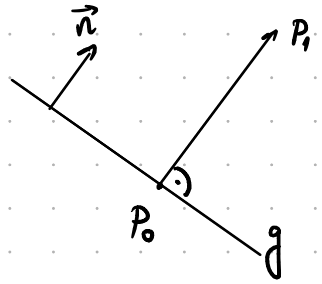
$\ell(P)=5 \quad \ell(0)=3 \quad \Rightarrow \quad 2)-P$

$\ell(Q)=-2$

Нормално уравнение на права

Тв. Спрямо $k: Oxy$ ортонормирана е дадена права $g: Ax+By+C=0$ и т. $P_1(x_1,y_1)$ $d(P_1,g_1)=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$ $\quad g: \frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$ се нарича нормално

Док: $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$



$\vec{n}\left(\overset{\cos\varphi}{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}},\overset{\sin\varphi}{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}\right)\perp g$ и $|\vec{n}|=1 \Rightarrow \exists\varphi:$

$g: \cos\varphi\, x+\sin\varphi\, y+C_1=0$

$\vec{n}(\cos\varphi, \sin\varphi)$

Нека $P_0(x_0,y_0)\in g$ и $P_0P_1\perp g \Rightarrow P_0P_1 \parallel \vec{n} \Rightarrow P_0P_1=\delta.\vec{n}$

$d(P_1,g)=|P_0P_1|=|\delta\vec{n}|=|\delta||\vec{n}|=|\delta|$

от $P_0P_1=\delta\vec{n}$

$(x_1-x_0, y_1-y_0)=\delta(\cos\varphi, \sin\varphi)$

$\begin{vmatrix} x_0=x_1-\delta\cos\varphi \\ y_0=y_1-\delta\sin\varphi \end{vmatrix}$ от $M_0(x_0,y_0)\in g \Rightarrow \cos\varphi.x_0+\sin\varphi.y_0+C_1=0$

$\cos\varphi(x_1-\delta\cos\varphi)+\sin\varphi(y_1-\delta\sin\varphi)+C_1=0$

$\cos\varphi x_1-\delta\cos\varphi^2+\sin\varphi y_1-\delta\sin\varphi^2+C_1=0$

$\delta=\cos\varphi x_1+\sin\varphi y_1+C_1=0$

Нека $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$

1) уравнение на права

$P_1P_2\begin{cases}\ni P_1(x_1,y_1) \\ \parallel \overrightarrow{P_1P_2}\,(x_2-x_1, y_2-y_1)\end{cases}$

- параметрично уравнение

$$g: \begin{cases} x = x_1 + s(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + s(y_2 - y_1) \end{cases} \quad s \in (-\infty; +\infty)$$

- Ако $s \in [0, +\infty)$ уравнение на лъч $\overrightarrow{P_1P_2}$
- Ако $s \in [0, 1]$ уравнение на отсечка P_1P_2