19.04.23

def. Нека $\varphi: \Sigma^* \to \Sigma^*$, удовлетворяваща $\varphi(\alpha.\beta) = \varphi(\alpha).\varphi(\beta)$

хомоморфизъм

$\alpha = a_1.a_2 \dots a_n$, $\varphi(\alpha) = \varphi(a_1).\varphi(a_2)\dots\varphi(a_n)$, $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon$

① Ако L е регулярен и φ е хомоморфизъм, то $\varphi[\alpha]$ е регулярен

образ $\varphi[L] = \{\varphi(\alpha) \mid \alpha \in L\}$

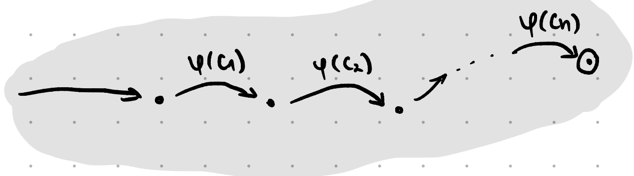
- $\varphi[L_1 \cup L_2] = \varphi[L_1] \cup \varphi[L_2]$
- $\varphi[\underset{\alpha}{L_1}.\underset{\beta}{L_2}] = \varphi[L_1].\varphi[L_2]$ $\varphi(\alpha.\beta) = \varphi(\alpha).\varphi(\beta)$
- $\varphi[L_1^*] = (\varphi[L_1])^*$

② Ако L е регулярен и φ е хомоморфизъм, то $\underbrace{\varphi^{-1}[\alpha]}_{\text{праобраз на } L \text{ при } \varphi}$ е регулярен

$\varphi^{-1}[L] = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \varphi(\alpha) \in L\}$

вход: | c_1 | c_2 | c_3 | - - - | γ $?\ \varphi(\gamma) \in L = \varphi(c_1).\varphi(c_2)\dots\varphi(c_n) \in L$

$\mathcal{A}$ за L



$\mathcal{A}_{-1}$: $Q_{-1} = Q$ $\delta_{-1}(p,c) = \delta^*(p, \varphi(c))$

$F_{-1} = F$

$S_{-1} = S$

Твърдение: $\delta^*_{-1}(s,\alpha) = \delta^*(s, \varphi(\alpha))$

Приложение

$L_1 = \{a\}^*$ е регулярен

$\varphi(a) = aa$

$\varphi[L_1] = \{\varphi(\alpha) \mid \alpha \in L\} =$

$= \{\varphi(a^n) \mid n \in \mathbb{N}\} =$

$= \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

$L_2 = \{a\}^*\{b\}^*$

$\varphi(a) = bb$ $\varphi(b) = a$

$\varphi[L_2] = \{b^{2n}a^k \mid n,k \in \mathbb{N}\}$

Нека L е език и $C(L) = \{\alpha^{-1}(L) \mid \alpha \in \Sigma^*\}$ $\quad \alpha^{-1}(L) = \{\beta \mid \alpha\beta \in L\}$

Теорема: L е регулярен $\iff$ $C(L)$ е крайно
Майхил-Нероуд

1. $L_1 = \{\boxed{a^n} b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ Ще докажем, че $C(L)$ е безкрайно || търсим безкрайно подмножество

Разглеждаме езиците от вида $\boxed{(a^n)^{-1}(L)}$. Ще покажем, че те са два по два разл., т.е. ако $n \neq k$, то $(a^n)^{-1}(L) \neq (a^k)^{-1}(L)$

Търсим дума γ, такава че $\gamma \in (a^n)^{-1}(L)$ и $\gamma \notin (a^k)^{-1}(L)$ или $\gamma \notin (a^n)^{-1}(L)$ и $\gamma \in (a^k)^{-1}(L)$ $\iff$ $a^n.\gamma \in L$ и $a^k.\gamma \notin L$ или $a^n.\gamma \notin L$ и $a^k.\gamma \in L$

Нека $n \neq k$

$a^n \underline{\quad b^n \quad} \in L$

$a^k \underline{\quad b^n \quad} \notin L$

пишем едно и също

$\to (a^n)^{-1}(L) \neq (a^k)^{-1}(L)$

Тогава множеството $\{(a^n)^{-1}(L) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq C$ е безкрайно

Тогава $C(L)$ е безкрайно

$\Rightarrow L$ не е регулярен

$f: n \mapsto (a^n)^{-1}(L)$ е инективно ; f е инекция от $\mathbb{N}$ към $C(L)$

Тогава понеже $\mathbb{N}$ е безкрайно и $C(L)$ е безкрайно

$L_2 = \{b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Допускаме, че L_2 е регулярен, тогава

разгл. хомоморфизъм $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = a$

тогава $\varphi[L_2] = L_1$ и L_1 е регулярен противоречие!

(2) $L_3 = \{a^{2n} b^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\quad \varphi(a) = a^2$, $\varphi(b) = b^3$ $\Rightarrow \varphi[L_1] = L_3$

$\varphi_1^{-1}[L_3] = \{\alpha \mid \varphi(\alpha) \in L_3\} =$

$= \{\alpha \mid \varphi(\alpha) = a^{2n} b^{3n}\} =$

$= \varphi(c_1 c_2 \dots c_n) = \varphi(c_1)\varphi(c_2)\dots\varphi(c_n)$

$= \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

допускаме, че L_3 е регулярен

тогава $\varphi_1^{-1}[L_3]$ е регулярен

т.е. L_1 е регулярен противоречие!

• $\overline{L_1}$ – също не е регулярен L е регулярен $\iff$ $\overline{L}$ е регулярен

$L_1 = \{\alpha \mid \text{има } n\in\mathbb{N}: \alpha = a^n b^n\}$

$\overline{L_1} = \{\alpha \mid \text{няма } n\in\mathbb{N}: \alpha = a^n b^n\} = \{a^n b^k \mid n\neq k\} \cup \{a\}^*\{b\}^*$

Вярно ли е, че:

• Ако L_1 и L_2 са нерегулярни

X $\sim L_1 . L_2$ $(L_1 \cup \{\varepsilon\}).(\overline{L_1}\cup\{\varepsilon\}) = \Sigma^*$ per

X $\sim L_1 \cup L_2$ $\{a^n b^n \mid n\in\mathbb{N}\} \cup \{a^n b^n \mid n\in\mathbb{N}\} = \{a^n b^n \mid n\in\mathbb{N}\}$ нерег.

$\cup\, \overline{\{a^n b^n \mid n\in\mathbb{N}\}} = \Sigma^*$ per.

X $\sim L_1 \cap L_2$ $\{a^n b^n \mid n\in\mathbb{N}\} \cap \overline{\{a^n b^n \mid n\in\mathbb{N}\}} = \emptyset$ per.

X $\sim L_1^*$ $(L_1 \cup \Sigma)^* = L_1^* \cup \Sigma^* = \Sigma^*$ per.

X $\sim L_1 \setminus L_2$

не пазят нерегулярност

Тв. Нека L_1 е краен, тогава L е регулярен $\iff$ $L\cup L_1$ е регулярен

$$L = (L\cup L_1)\setminus(L\cap L_1)$$

$L_1, L_2, \dots, L_n$ – регулярни

Тогава $L_1\cup L_2 \dots \cup L_n$ – регулярен

$(L_n)_{n\in\omega}$, L_n – регулярен за вс. n

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$ не е регулярен

③ $L_2 = \{a^n b^k \mid n\neq k\}$ // $(a^n)^{-1}(L)$ за $n\in\mathbb{N}$

$n\neq k$ $a^k \,\underline{\;b^n\;}\, \in L$

$a^n \,\underline{\;b^n\;}\, \notin L$

Да допуснем, че L_2 е регулярен, т.е. $\overline{L_2}$ е рег.

$\overline{L_2} = L_1 \cup \overline{\{a\}^*\{b\}^*}$

$\underbrace{\overline{L_2}\cap\{a\}^*\{b\}^*}_{\text{регулярен}} = L_1$ е регулярен противоречие

$\overline{L_2} = \{\alpha \mid \alpha \text{ не е от вида } a^n b^k, n\neq k\} = \{\alpha \mid \alpha \text{ не е от вида } a^n b^k\} \cup \underbrace{\{\alpha \mid \alpha \text{ е от вида } a^n b^k, n=k\}}_{L_1}$

$L_3=\{\alpha \mid |\alpha|_a=|\alpha|_b\}$ Допускаме, че L_3 е регулярен, изразяваме L_1 чрез L_3

4) $L_4=\{a^n b^k \mid n<k\}$ регулярен ли е? $n>k$, $n\geq k$, $n\leq k$

Разглеждаме езиците от вида $(a^n)^{-1}(L)$ $n_1\neq n_2$, БОО $n_1<n_2$

$n_1+1\leq n_2$

$a^{n_1}\,\underline{b^{n_1+1}}\in L_4$	$a^{n_1}\,\underline{b^{n_2}}\in L_4$
$a^{n_2}\,\underline{b^{n_1+1}}\notin L_4$	$a^{n_2}\,\underline{b^{n_2}}\notin L_4$

5) $L_5=\{\alpha.\alpha \mid \alpha\in\Sigma^*\}$ $\boxed{\quad}\boxed{\quad}$ $\gamma\in L_5$

- ако $\Sigma=\{a\}$ $L_5=\{a^{2n}\mid n\in\mathbb{N}\}$ регулярен
- ако $\Sigma=\{a,b\}$ L_5 не е регулярен

Грешен подход: $\alpha^{-1}(L)$ не работи

$\alpha_1\neq\alpha_2$ $\alpha_1\,\underline{\alpha_1}\in L$

$\alpha_2\,\underline{\alpha_1}\notin L$

Правилен подход: Разглеждаме прости думи като a^nb, a^nb^n

Разгл. езици от вида $(a^nb)^{-1}(L)$ $n\neq k$

$a^nb\,\underline{a^nb}\in L$

$a^kb\,\underline{a^nb}\notin L$

$L\cap\{a\}^*b\{a\}^*b=$

$=\{a^nba^nb\mid n\in\mathbb{N}\}$

6) $L_6=\{\alpha.\alpha^{rev}\mid \alpha\in\Sigma^*\}$

7) $L_7=\{a^nb^{n.k}\mid n,k\in\mathbb{N}\}$

разгл. $(a^n)^{-1}(L)$ $n\neq k$, $n<k$

$a^n\,\underline{b^n}\in L$

$a^k\,\underline{b^n}\notin L$

8) $L_8=\{a^nb^kc^{n+k}\mid n,k\in\mathbb{N}\}$

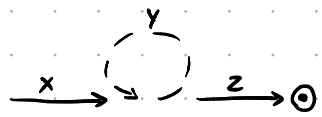
$L_8\cap\{a^*\}\{c\}^*=\{a^nc^n\mid n\in\mathbb{N}\}$

9) $L_9=\{a^nb^kc^{n.k}\mid n,k\in\mathbb{N}\}$

$L_9\cap\{a\}^*\{b\}\{c\}^*=\{a^nbc^n\mid n\in\mathbb{N}\}$

$L=\{a^{f(n)}\mid n\in\mathbb{N}\}$ Ако $f(n)$ расте твърде бързо, L е нерегулярен

пример $L=\{a^{2^n}\mid n\in\mathbb{N}\}$ $xy^nz\in L$



$(a^{2^n})^{-1}(L)$ $n \neq k,\ n < k$

$a^{2^n}\ \underline{\ \ a^{2^n}\ \ } = a^{2^{n+1}} \in L$

$a^{2^k}\ \underline{\ \ a^{2^n}\ \ } = a^{2^n+2^k} \notin L$

Твърдение: Нека $L \subseteq \{a\}^*$ и

$L = \{a^{n_i} \mid i \in \mathbb{N}\}$ n_i - редица от дължини на думи

Ако $\{n_{i+1} - n_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ е неограничено $\Rightarrow$ L е нерег.

$L = \{a^n \mid n \text{ е просто}\}$ $Pr = \{n \mid n \text{ е просто}\}$

$Pr(k)$ = k-то просто число Дали има дупка с дължина поне b?

$\{pr(k+1) - pr(k) \mid k \in \mathbb{N}\}$