06.04.23

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$

$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

Критерий на Лайбниц за редове с алтернативно сменящи се знаци

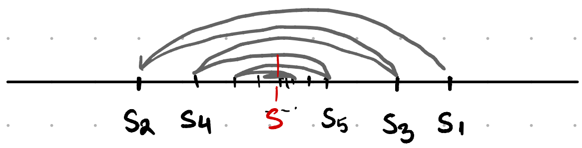
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad , a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ е намаляваща} \\ a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \text{ е сходящ}$$

Доказателство: $S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 - a_2$

$S_3 = a_1 - a_2 + a_3$



- $\{S_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ е намаляваща

взимаме $\quad S_{2(k+1)-1} - S_{2k-1} = (-1)^{2k+2-1} a_{2k+1} + (-1)^{2k-1} a_{2k} = a_{2k+1} - a_{2k} \leq 0$

- $\{S_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ е растяща

взимаме $\quad S_{2(k+1)-1} - S_{2k} = -a_{2k+2} + a_{2k+1} \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$

$S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1} \geq S_{2k} \geq S_2$

нам.

$S_{2k} \leq S_1$

$$\left.\begin{array}{l} S_{2k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} S \\ S_{2k} = S_{2k-1} - a_{2k} \xrightarrow[k\to\infty]{} S - 0 = S \end{array}\right] \{S_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S \text{, т.е. } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = S$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ е сходящ

Забележка: $S_{2k} \leq S \leq S_{2k+1} \quad \forall k \in \mathbb{R}$

$|S - S_{2k}| \leq S_{2k+1} - S_{2k} = a_{2k+1}$

$|S - S_{2k-1}| \leq a_{2k}$

$|S_n - S| \leq a_{n+1}$

Абсолютна сходимост:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Деф: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ се нарича абсолютно сходящ, ако $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ е сходящ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ се нарича условно сходящ, ако $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ е разходящ

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\quad \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ парциални суми е сходяща

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; \forall p \in \mathbb{N} : |\underbrace{s_{n+p} - s_n}_{= \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i}| < \varepsilon$

НДУ Коши за сходимост на числов ред

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ $\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon$

Твърдение: Абсолютно сходящите редове са сходящи

<u>Док:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ е сходящ , ползваме НДУ Коши

$\left. \begin{array}{l} \varepsilon > 0 \text{ произв.} \\ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ сходящ} \end{array} \right] \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; \forall p \in \mathbb{N} : \sum_{i=n+1}^{n+p} |a_i| < \varepsilon$

Нека $n \geq n_0, p \in \mathbb{N}$. Тогава $\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} |a_i| < \varepsilon$

Изследване на ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Изсл. за сходимост: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \begin{cases} \text{сходящ} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ е абсолютно сходящ} \\ \text{разходящ} \begin{cases} \text{Коши/} \\ \text{Даламбер} \end{cases} \Rightarrow |a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ разходящ} \end{cases}$

$a_1+a_2+\dots+a_n+\dots$ $\quad (1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots \neq 1-1+1-1+\dots$ $\quad$ ~~Асоциативност~~

подредица на парциални суми

Комутативен закон

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\quad k: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ биекция $\quad k_1, k_2, \dots, k_n$ разместване на ест. числа

$\downarrow$

разгл. $\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i}$ разместване на реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Казваме, че за един ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е в сила комутативният закон, ако всяко негово разместване $\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i}$ е едновременно сходящ/разходящ с него. При това, ако са сходящи, трябва $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i}$

Теорема: Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абсолютно сходящ, то за него е в сила комутативният закон.

Доказателство: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ е сходящ

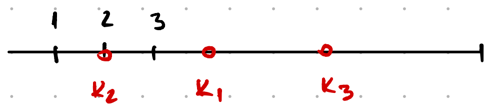
$\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i}$ разместване на $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

1) $\sum_{i=1}^{\infty} |a_{k_i}|$ е сходящ $\to$ редицата от парциални суми е ограничена отгоре

взимаме произв. парциална сума

↳ $|a_{k_1}|+|a_{k_2}|+\dots+|a_{k_m}| \le |a_1|+|a_2|+\dots+|a_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

$\{k_1, k_2, \dots, k_m\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$



$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow S_n = a_1+a_2+\dots+a_n \qquad S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S \longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0 : |S-S_n| < \varepsilon$

$\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i} \longrightarrow \sigma_i = a_{k_1}+a_{k_2}+\dots+a_{k_i} \qquad \sigma_i \xrightarrow[i\to\infty]{} \sigma \longrightarrow \exists i_0 \in \mathbb{N}\ \forall i \ge i_0 : |\sigma-\sigma_i| < \varepsilon$

Апроксимиране $\quad |S-\sigma| \le |S-S_n| + |\sigma-\sigma_i| + |S_n-\sigma_i|$

$\boxed{\varepsilon>0}$

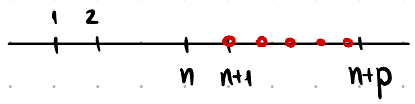
$$\left.\begin{matrix}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ сходящ} \\ \varepsilon>0\end{matrix}\right\} \exists\, \tilde{n}\in\mathbb{N}\ \forall n\ge \tilde{n}\ \forall p\in\mathbb{N}: |a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\dots+|a_{n+p}|<\varepsilon$$

$n\ge \max\{n_0,\tilde{n}\}$

$\{1,2,\dots,n\}$ търсим i достатъчно голямо, че всички числа от 1 до n да влизат в $\{k_1,k_2,\dots,k_i\}$

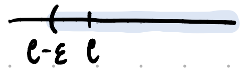
т.е. $\{1,2,\dots,n\}\underset{\boxed{i\ge i_0}}{\subset}\{k_1,k_2,\dots,k_n\}\subset\{1,2,\dots,n+p\}$

$$|s_n-\sigma_i| = |(a_1+a_2+\dots+a_n)-(a_{k_1}+a_{k_2}+\dots+a_{k_i})|\le |a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\dots+|a_{n+p}|<\varepsilon$$



$|S-\sigma|\le\varepsilon\ \forall\varepsilon>0 \Rightarrow S=\sigma$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ а) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не е огр. отдолу $\to \liminf a_n=-\infty$



б) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е огр. отдолу $\to l=\liminf a_n\in\mathbb{R}$ е такава, че l е точка на сгъстяване на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и за всяко $\varepsilon>0$ почти всички членове на редицата са по-големи от $l-\varepsilon$.

Теорема на Риман

Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е условно сходящ. Нека $\alpha,\beta\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$ с $\alpha\le\beta$.
Тогава съществува разместване $\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i}$ на реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ такова, че
$\liminf \sigma_i=\alpha$ и $\limsup \sigma_i=\beta$. $\quad(\sigma_i=a_{k_1}+a_{k_2}+\dots+a_{k_i})$

Док: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходящ, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ разходящ

$p_n=\max\{a_n,0\}=\dfrac{|a_n|+a_n}{2}$ положителните остават, отрицателните стават 0

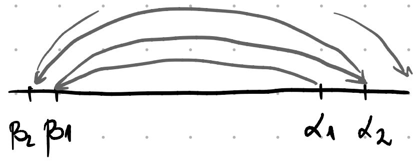
$q_n=-\min\{a_n,0\}=\dfrac{|a_n|-a_n}{2}$ отрицателните остават, положителните стават 0

Твърдим, че $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ са разходящи

Допускаме противното:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ разх $\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty}(p_n-q_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходящ

$\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha, \quad \beta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta, \quad \alpha_n<\beta_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$



Трупаме пол. членове докато не надхв. α_1, после трупаме отр. докато не минем β_1, т.н.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{k}b_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}a_ib_j$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n,\ \sum_{m=0}^{\infty}b_m$$

$$\begin{array}{cccc} a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & \dots \\ a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & \dots \\ a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

Теорема Нека $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty}b_m$ са абсолютно сходящи. Нека $k:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ е произв. биекция ($i\longmapsto k(i)=(n_i,m_i)$). Тогава редът $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_{n_i}b_{m_i}$ е абсолютно сходящ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_{n_i}b_{m_i}=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\right)\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty}b_m\right)$

искаме:

$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|a_{n_i}b_{m_i}|$ => парц. суми са огр. отгоре => сходящ

вземаме парц. сума:

$|a_{n_1}b_{m_1}|+|a_{n_2}b_{m_2}|+\dots+|a_{n_i}b_{m_i}|$

$\{n_1,\dots,n_i\}\subset\{1,2,\dots,k\}$
$\{m_1,\dots,m_i\}\subset\{1,2,\dots,k\}$ $\quad k$ дост. голямо

$$|a_{n_1}b_{m_1}|+|a_{n_2}b_{m_2}|+\dots+|a_{n_i}b_{m_i}|\le\sum_{j=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{k}|a_jb_\ell|=\left(\sum_{j=1}^{k}|a_j|\right)\left(\sum_{\ell=1}^{k}|b_\ell|\right)\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}|b_m|\right)$$

Комутативен закон

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}b_m\right)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_{n_i}b_{m_i}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}b_m\right)$$

мокра дъска
„Извинете, обаче нищо не се чете"
∞: „Знам, аз ще го прочета"...
„и се надявам да се вижда като изсъхне"

малко спойлери от бъдещето
- степенни редове

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n,\ \sum_{m=0}^{\infty}b_m$$

$$\begin{array}{cccc} a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & \dots \\ a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & \dots \\ a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

ред произведение на $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty}b_m$ се нарича редът $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k$, където $c_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\dots+a_kb_0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n,\ \sum_{m=1}^{\infty}b_mx^m$$

$$a_0x^0 b_k x^k + a_1 x^1 b_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_k x^k b_0 x^0 = (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0)\, x$$

Теорема (Мертенс)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ абсолютно сходящ

$\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ сходящ

} Редът произведение е сходящ и сумата му е $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right)$

Функционални редове. (Редове и редици от функции)

$D \subset \mathbb{R}$

$f_n : D \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ редица от функции

Поточкова сходимост: $x \in D \rightarrow f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ числова редица

Област на сходимост на $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ се нарича множеството

$D' = \{x \in D : \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е сходящ$\}$

$x \in D' \quad f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ се нарича поточкова граница

$f : D' \rightarrow \mathbb{R}$

Пример: 1) $f_n(x) = x^n \quad D \equiv \mathbb{R} \quad D' = (-1;1] \quad f(x) = \begin{cases} 0, \text{ ако } x \in (-1,1) \\ 1, \text{ ако } x = 1 \end{cases}$

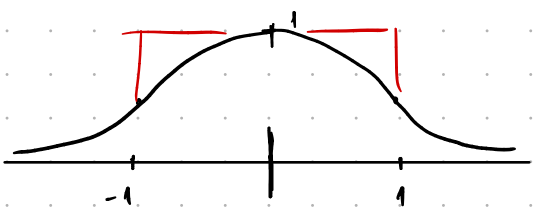
2) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n} \quad D \equiv \mathbb{R} \quad D' = (-\infty; +\infty) \qquad \dfrac{\sin nx}{x} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

3) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^{2n}} \quad D \equiv \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1 \\ 1, & |x| < 1 \\ 1/2, & |x| = 1 \end{cases}$

$|x| < 1 \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+x^{2n}} = 1$

$|x| > 1 \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

$|x| = 1 \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{2}$



Равномерна сходимост

Деф: $f, f_n : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Казваме, че $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно клони към f в D, ако $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$