01.03.24

Теория на групите

$5+x=3$
$-5+(5+x)=-5+3$
$(-5+5)+x=-2$
$0+x=-2$

обратен елем.
асоциативност
неутрален елем.

$\}$ аксиоми за свищ. на група

Определение Нека G е непр. мн-во с бин. оп. $*: G\times G \to G$. G е зат. относно $*$. $(G,*)$ е група, ако:

i) $\forall a\in G$ $\exists$ неутрален елемент e: $a*e=e*a=a$

ii) $\forall a\in G$ $\exists$ обратен елем a^{-1} : $aa^{-1}=a^{-1}a=a$

iii) асоциативност: $\forall a,b,c\in G$ $(a*b)*c=a*(b*c)$

Определение Абелева група е всяка група G, в която $\forall a,b\in G$ $a*b=b*a$

Примери: $(\mathbb{Z},+), (\mathbb{Q},+), (\mathbb{R},+), (\mathbb{C},+), (\mathbb{F}^*,\cdot)$ където $\mathbb{F}^*=\mathbb{F}\setminus\{0\}$, $\mathbb{F}$ е числ. поле

Определение Нека $(G,*)$ е група и $S\subseteq G$. $(S,*)$ е подгрупа на G, ако $(S,*)$ е група

Твърдение Нека $(G,*)$ е група, $S\subseteq G$ и $(S,*)$ е подгрупа на G, ако

1) S е затворено относно $*$

2) $\forall a\in S$, $a^{-1}\in S$

① ДСД, че следните мн-ва са групи:

а) $SL_n(\mathbb{Z})=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{Z}) \mid \det A=1\}$ относно умножението

решение:

Първо ще докажем, че $GL(\mathbb{Z})=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{Z}) \mid \det A\neq 0\}$ е група относно умножението. По този начин ще използваме горното твърдение

1) неутрален елемент E_n 2) обратен елемент A^{-1}: $AA^{-1}=A^{-1}A=E$

3) асоциативност $\Rightarrow (GL,\cdot$ е група

От твърдението е достатъчно да докажем, че $SL_n(\mathbb{Z})$ е:

1) затворен относно умножение

Нека $A,B\in SL_n(\mathbb{Z})$ $\det(AB)=\det A\det B=1.1=1 \Rightarrow AB\in SL_n(\mathbb{Z})$

2) $\forall A\in SL_n(\mathbb{Z})$ $\exists A^{-1}\in SL_n(\mathbb{Z})$: $AA^{-1}=E_n$ $\forall A\in M$ $\det A=\frac{1}{\det A^{-1}} \Rightarrow \det A^{-1}=1 \Rightarrow$

$\forall A \in SL_n(\mathbb{Z})\ \exists A^{-1} \in SL_n(\mathbb{Z})$

$\Rightarrow SL_n(\mathbb{Z})$ е група

б) $n\mathbb{Z} = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$ n - фиксирано $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $\quad n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$

$(n\mathbb{Z}, +)$ - група

1) $nz_1, nz_2 \in n\mathbb{Z}$ $\quad nz_1 + nz_2 = n(z_1+z_2) \in n\mathbb{Z} \Rightarrow$ затв. относно съб.

2) $-(nz) = n.(-z)$ е противоположен елем. $\forall z \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (n\mathbb{Z}, +)$ е група

в) В $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ е зададена бин. операция Δ

$(x_1, y_1) \Delta (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 \cdot y_2)$

1) неутр. елем $(0,1)$ $\quad (a,b) \Delta (0,1) = (a+0, b.1) = (a,b)$

$(0,1) \Delta (a,b) = (0+a, 1.b) = (a,b)$

2) прот. елем $(-a, b^{-1})$ $\quad (a,b) \Delta (-a, b^{-1}) = (a-a, b.\frac{1}{b}) = (0,1)$

3) асоц. $\quad ((x_1,y_1) \Delta (x_2,y_2)) \Delta (x_3,y_3) = ((x_1+x_2)+x_3, (y_1 \cdot y_2) y_3)$

$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$

$(x_1,y_1) \Delta ((x_2,y_2) \Delta (x_3,y_3)) = (x_1 + (x_2+x_3), y_1 (y_2 . y_3))$

Определение Нека $(G_1, \star)$ и $(G_2, *)$ са две групи и $\varphi : (G_1, \star) \to (G_2, *)$. φ е хомоморфизъм $\forall a, b \in G_1$ ако $\varphi(a \star b) = \varphi(a) * \varphi(b)$. Ако φ е биекция, то φ е изоморфизъм

② Нека G е група и $g \in G$ е фиксиран. В G въвеждаме бин. оп. $*$: $a * b = agb$. DCD, ее относно тази операция $(G, *)$ е група, изоморфна на първата $(G, \cdot)$

1. неутр. елемент $\quad a * e \overset{?}{=} e * a = a \quad \Rightarrow e = g^{-1}$

$age = ega$

$e = g^{-1}$

2. противопол. $\quad a * a^{-1} = g^{-1}$

$a^{-1} * a = g^{-1}$

$aga^{-1} = g^{-1} \Rightarrow a^{-1} = \frac{g^{-1}}{ag}$

$a^{-1}ga^{-1} = g^{-1} \Rightarrow a^{-1} = \frac{g^{-1}}{ag}$

$\Rightarrow \forall a \in G\ \exists g^{-1}a^{-1}g^{-1} \in G$ т.ее

$a * g^{-1}a^{-1}g^{-1} = g^{-1}$

3) асоц. $\quad (a * b) * c = (agb)gc$

$a * (b * c) = ag(bgc)$ $\Rightarrow \checkmark$

• хомоморфизъм $\quad \varphi : (G, *) \to (G, \cdot)$ $\quad \varphi(a * b) \overset{?}{=} \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

$\varphi(agb) \overset{?}{=} \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ $\quad x \mapsto gx$

$gagb \overset{\checkmark}{=} ga \cdot gb$

Допускаме, че $\varphi(a)=\varphi(b) \quad a\neq b$
$ga = gb \quad a\neq b \,/\, \frac{?}{}$

$\Rightarrow \varphi(a)=\varphi(b) \iff a=b$

Нека $m\in G: \varphi(g^{-1}m) = gg^{-1}m = m$

$\Rightarrow m$ има първообраз

$\Rightarrow \varphi$ е изоморфизъм

③ Q_8 - група на кватернионите $\pm1, \pm i, \pm j, \pm k$

$i^2=j^2=k^2=-1$
$ij=-ji=k$
$jk=-kj=i$
$ki=-ik=j$

$ij\neq ji$

Определение: Ред на група е броят на елементите в групата

Ако групата е съставена от безброй много елем., то $|G|=\infty$.

Определение: G-група и $g\in G$. Ред на елем. g е $\min n\in\mathbb{N}$ т.че. $g^n=e$. Ако $\nexists\, n\in\mathbb{N}$, то $|g|=\infty$

③ ДСН реда на g в гр. G

А) $G=(\mathbb{C}^*,\cdot) \quad g=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt3}{2}i$

$g=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3} \quad \uparrow^n$

$g^n=\cos n\frac{\pi}{3}+i\sin n\frac{\pi}{3} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

Формули на Моавър

$n\frac{\pi}{3}=2k\pi$

$n=6k \Rightarrow \min n=6,\ k=1 \Rightarrow |g|=6$

$a=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

$a^n=r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$

$\sqrt[n]{a}=\{\sqrt[n]{r}\,(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i.\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}),\ k=0,1,\dots,n-1\}$

Б) $g=2,\ G=(\mathbb{Z},+)$

$\underbrace{2+2+\dots+2}_{n}=0 \qquad 2n=0,\ \nexists n\in\mathbb{N} \Rightarrow |g|=\infty$

В) $g=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \qquad G=GL_2(\mathbb{C})$ отн. умн.

$g^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E \Rightarrow |g|=2$

⑤ Нека G е група, в която всеки нееd. елемент е от ред 2. ДСД, че G е абелева

- $\forall a\in G\setminus\{e\} \quad a^2=a.a=e \mid a^{-1}$
  $a=a^{-1}$

- $\forall a,b\in G \quad ab\in G \Rightarrow |ab|=2 \Rightarrow (ab)^2=1 \Rightarrow (a.b)=(ab)^{-1}$