Пример $\mathbb{Z}\setminus n\mathbb{Z} = \{0,1,\dots,n-1\}$ $\quad (\mathbb{C}_3,\cdot) = \{\omega_3, \omega_3^2, \omega_3^0 = 1\}$

$\mathbb{Z}\setminus 3\mathbb{Z} = \{0,1,2\}$ $\quad \omega_3^{2}\cdot\omega_3^{1} = \omega_3^3 = \omega_3^0 = 1$

Съседни класове

15.03.24

G - група, $H \leq G$, $a \in G$ $\quad aH$ - ляв съседен клас на H, Ha - десен съседен клас на H

$ah = bh \iff b^{-1}a$ или $a^{-1}b \in H$ (Кога a и b пораждат един и същ съседен клас)

Пример: $G = \mathbb{Z}^*$ $\quad H = n\mathbb{Z} \leq G$ $\quad n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ $\quad n\mathbb{Z} = \{0, \pm n, \pm 2n, \dots\}$

леви съседни класове:

$\bar{1} + H = \{1, \pm n+1, \pm 2n+1, \pm 3n+1, \dots\}$ дават ост. 1 при деление на n

$\bar{2} + H = \{2, \pm n+2, \pm 2n+2, \pm 3n+2, \dots\}$

$\bar{3} + H = \{3, \pm n+3, \pm 2n+3, \pm 3n+3, \dots\}$

$\dots$

$(\overline{n-1}) + H = \{n-1, \pm n+n-1, \pm 2n+n-1, \pm 3n+n-1, \dots\}$

$\bar{n} + H = \{n, \pm n+n, \pm 2n+n, \pm 3n+n, \dots\} \equiv H$

Твърдение G - група $H \leq G$

а) всеки ляв съседен клас на G по H се поражда от всеки свой елемент т.е.

b поражда H ако $b \in aH \Rightarrow aH = bH$

Д-во $b = ah \quad |\cdot h^{-1}$ $\quad aH = bh^{-1}H \subseteq bH = ahH \subseteq aH$

$a = bh^{-1}$ $\quad bH = ahH$

$h^{-1}H < H \Rightarrow aH = bH$

$hH < H$

Тв. Два съседни класа (десни или леви) или съвпадат, или нямат общи елементи

Д-во Нека $aH \cap bH = c \Rightarrow c = ah_1 \Rightarrow a = c.h_1^{-1}$ $\quad aH = c.h^{-1}H \subseteq cH = ah_1H \subseteq aH \Rightarrow aH = cH$

$c = bh_2 \Rightarrow b = c.h_2^{-1}$ $\quad bH = c.h^{-1}H \subseteq cH = bh_1H \subseteq bH \Rightarrow cH = bH$

Ако $\exists$ общ елем. за aH и bH, то целите класове съвпадат

Следствие Точно 1 съседен клас по $H = eH$ е подгрупа на G.

$H = eH = He$ $\quad \underline{h}H$ $\quad h_ih_j \in H \;\; \forall h_i, h_j \in H$ - група

Твърдение: G - група, $H \leq G$

А) всеки два съседни класа на G по H са равномощни

Б) мн-вото от левите съседни класове е равномощно на мн-вото от десните съседни класове

$[G:H]$ наричаме индекс на G по H

Теорема на Лагранж: $|G| = |H| . [G:H]$

Следствие: $\forall g \in G$ $|g|$ дели $|G|$

задача: Намерете броя на съседните класове на G относно H

А) $G = \mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{5}\}$ $H = \{0, 3\}$

$|G:H| = \frac{|G|}{|H|} = \frac{6}{2} = 3$ ✓

$H + \bar{0} = H$ $\quad$ $H + \bar{3} = H$

$H + \bar{1} = \{1, 4\}$ $\quad$ $H + \bar{4} = H + \bar{1}$

$H + \bar{2} = \{2, 5\}$ $\quad$ $H + \bar{5} = H + \bar{2}$

3 на брой ✓

б) $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ $\quad$ $H = \{(2,2)\}$

$G = \{(a, b) \mid a \in \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}, b \in \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}\}$

зад 2 Нека G е група, p-просто. ДСД, че G няма нетривиални групи и $G \cong C_p = \{e, \omega_p, \omega_p^2, \dots, \omega_p^{p-1}\}$ $\omega_p^p = 1$

Док: p има само 2 делителя: 1 и p $\Rightarrow$ ако $H \leq G$, то $|H| = 1$ или $|H| = p$

ако $|H| = 1$, то $H = \{e\}$

ако $|H| = p$, то $H \equiv G$

$\Big\}$ тривиални подгр.

зад 3 Нека G – крайна група от ред n и m е min ест. число т.че. $g^m = 1$ $\forall g \in G$ (показател на G)

ДСД, че:

А) $m =$ НОК(редовете на вс. елементи в G)

б) ако G е абелева, то G има елем. от ред m

в) ако G е абелева, то G е циклична $\Leftrightarrow m = n$

Д-во А) $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ $\quad |g_i| = m_i$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ т.е $g_i^{m_i} = 1$

От условието $g_i^m = 1$ $\uparrow^{\frac{m}{m_i}}$ $\quad g_i^{m_i} = 1$ т.е. m_i / m $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall m_i / m$ $\quad i = 1, \dots, n$ $\Rightarrow$ НОК$(m_i) \setminus m$ Но m е min число с това св-во $\Rightarrow$

$\Rightarrow m =$ НОК$(m_1, \dots, m_n)$

б) следствие на зад 1.13 (зад 6 от мин. път за комутиращите елем)

за $a, b \in G$ $\quad ab = ba$ $\quad |a| = r$ $\quad |b| = s$ $\quad |ab| = rs$ за $GCD(r, s) = 1$

$\Rightarrow \exists$ елем. на G, който има ред НОК(r,s)

в) /$\Rightarrow$/ G е крайна абелева циклична група и $g^m = 1 \ \forall g \in G$

G е циклична $\Rightarrow G = \langle g \rangle \quad |g| = n \Rightarrow m = \text{НОК}(m_1, m_2, \dots, n) = n \Rightarrow m = n$

/$\Leftarrow$/ G - крайна

$m = n = g^m = g^n = 1 \Rightarrow \exists g \in G$ т.ее. $g^n = 1$ и $|G| = n \Leftrightarrow \langle g \rangle \equiv G$

4 зад а) Да се определят всички подгрупи на C_8 и да се направи схема на включванията

$|C_8| = 8$ от Th. на Лагранж всяка подгрупа на C_8 ще има ред някой от делителите на 8.

Дел. на $8 = 1, 2, 4, 8$

- ред 1: $\{e\} = C_1$
- ред 2: $\{e, \omega^4\} = \langle \omega^4 \rangle \cong C_2 \qquad \omega^4 . \omega^4 = \omega^8 = e$
- ред 4: $\{e, \omega^2, \omega^4, \omega^6\} = \langle \omega^2 \rangle \cong C_4$
- ред 8: C_8

$$\begin{tikzcd} C_8 \arrow[d] \\ \langle \omega^2 \rangle \cong C_4 \arrow[d] \\ \langle \omega^4 \rangle \cong C_2 \arrow[d] \\ C_1 \end{tikzcd}$$

б) Да се определят всички подгрупи на C_{12} и да се направи схема на включванията

делители на 12: $1, 2, 3, 4, 6, 12$

ред 1: $\{e\}$

ред 2: $\{e, \omega_{12}^6\} \cong C_2$

ред 3: $\{e, \omega_{12}^4, \omega_{12}^8\} \cong C_4$

ред 4: $\{e, \omega_{12}^3, \omega_{12}^6, \omega_{12}^9\} \cong C_4$

ред 6: $\{e, \omega_{12}^2, \omega_{12}^4, \omega_{12}^6, \omega_{12}^8, \omega_{12}^{10}\} \cong C_6$

ред 12: C_{12}

$$\begin{tikzcd} & & C_{12} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ & C_6 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] & & C_4 \arrow[ddl, dash, dashed] \\ C_3 \arrow[drr, dash] & C_2 \arrow[dr, dash] & & \\ & & C_1 & \end{tikzcd}$$

⇧ сборник 1.21

зад 3. ДСД, че крайна абелева група е циклична $\Leftrightarrow$

сборник (2.9)

А) $\forall$ естествен делител d на $|G|$ уравнението $x^d = 1$ има точно d решения в G (дир. сл-вие от 1.21 сб

б) $\forall$ ест. делител d на $|G|$ има единствена подгрупа от ред d

Д-во: /$\Rightarrow$/ G - крайна абелева група; циклична

$\forall$ циклична група има само циклични подгрупи $\Rightarrow \forall d \,/\, |G| \ \exists$ цикл. група $\{e, g, g^2, \dots, g^{d-1}\} \leq G$

Допускаме, че $\exists$ друга цикл. група от ред d $\quad \langle g^k \rangle$

$$\langle g^{\frac{|G|}{k}} \rangle = \{e, g^{\frac{|G|}{k}}, (g^{\frac{|G|}{k}})^2, \dots, (g^{\frac{|G|}{k}})^{d-1}\}$$

$n = n_1 d$

$(n_1, k_1) = 1$

$g^k \quad \dfrac{n}{(k,n)} = d = \dfrac{n}{n_1}$

$(k,n) = n_1 \qquad k = k_1 n_1 = k_1 \dfrac{n}{d}$

$n = d n_1$

$\Rightarrow g^k$ има ред $d \Leftrightarrow g^{\frac{n}{d}k_1}$ $\quad k_1 = 1, \dots, d-1$! ще се прати довършена в Messenger!

Групата S_n

$f: \Omega_n \longrightarrow \Omega_n$ $\quad \Omega_n$ - пермутации на n елем. $\{1, \dots, n\}$

S_n - множество от всички биекции f

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad 1 \to 3$, $2 \to 1$, $3 \to 2$

$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ $\quad 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 1$

Неутрален елем. $id = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}$

Противоположен: всички разместваня в обратна посока

Асоциативност: $(\sigma_1 \sigma_2)\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$|\sigma|$ = броят на елементите в пермутацията

цикъл с дъл. 2 е транспозиция

независими цикли - цикли без общи елем.

задача Намерете редовете на елементите на S_4 и броят им

$\{1, 2, 3, 4\}$

ред 1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e = id = 1$

ред 2: 1) $(i\,j)$ $\quad C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$

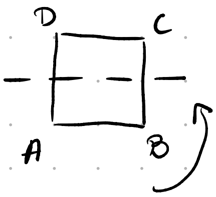
2) $(i\,j)(k\,l)$ $\quad C_4^2 \cdot C_2^2 = 6$

НОК на $[2,2] = 2$

ред 3: $(i\,j\,k)$ $\quad C_4^3 = 4$

ред 4: $(i\,j\,k\,l)$ $\quad C_4^4 = 1$

Пример



$a = (ABCD) = (1\ 2\ 3\ 4)$ въртене

$b = (ABCD) = (1\ 4)(2\ 3)$ симетрия