16.03.23

$\mathcal{A}_1 = \langle \Sigma, Q_1, s_1, F_1, \delta_1 \rangle$

$\mathcal{A}_2 = \langle \Sigma, Q_2, s_2, F_2, \delta_2 \rangle$

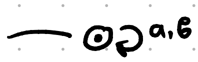
$\mathcal{A}$: $Q = Q_1 \times Q_2$ $\qquad \delta(\langle p_1,p_2\rangle, c) = \langle \delta_1(p_1,c), \delta_2(p_2,c)\rangle$

$s = \langle s_1, s_2\rangle$ $\qquad \delta^*(\langle p_1,p_2\rangle, \alpha) = \langle \delta_1^*(p_1,\alpha), \delta_2^*(p_2,\alpha)\rangle$

$F_\cap = F_1\times F_2$ $\qquad F_\cup = \{\langle p_1,p_2\rangle \mid p_1\in F_1 \text{ или } p_2 \in F_2\} = Q_1\times F_2 \cup Q_2 \times F_1$

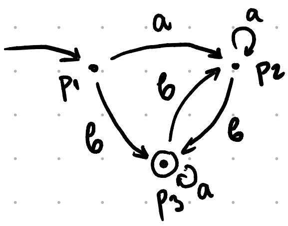
$F_\setminus = \{\langle p_1,p_2\rangle \mid p_1 \in F_1 \text{ и } p_2 \notin F_2\} = F_1(Q_1\times Q_2)$

Ако L е автоматен и $\overline{L} = \Sigma^*\setminus L$ е автоматен $\qquad \Sigma^*$:



Ако $\mathcal{A} = \langle\Sigma,Q,s,F,\delta\rangle$, то $\overline{\mathcal{A}} = \langle \Sigma, Q, s, Q\setminus F, \delta\rangle$ разпознава $\overline{\mathcal{L}(\mathcal{A})}$

пример



$\alpha\in\mathcal{L}(\mathcal{A}) \iff \delta^*(s,\alpha)=p_3$

$\alpha \in \overline{\mathcal{L}(\mathcal{A})} \iff \alpha\notin \mathcal{L}(\mathcal{A}) \iff \overbrace{\delta^*(s,\alpha)\neq p_3}^{\notin F} \iff$

$\iff \underbrace{\delta^*(s,\alpha)=p_2 \text{ или } \delta^*(s,\alpha)}_{\in Q\setminus F}=p_1 \iff \alpha \in \mathcal{L}(\overline{\mathcal{A}})$

① Да се докаже, че $L = \{\alpha\in\Sigma^* \mid |\alpha| \text{ е четно} \iff \alpha \text{ завършва на } bab\} =$

$= \{\alpha\in\Sigma^* \mid (|\alpha| \text{ е четна и } \alpha \text{ завършва на } bab) \text{ или } (|\alpha| \text{ не е четна и } \alpha \text{ не завършва на } bab)\} = \{\alpha\in\Sigma^*\mid (|\alpha| \text{ е четна}) \text{ и } (\alpha \text{ завършва на } bab)\} \cup \{\alpha\in\Sigma^* \mid (|\alpha| \text{ не е четна}) \text{ и } (\alpha \text{ не завършва на } bab)\} =$

$\varphi_1 \to \varphi_2$ е вярно точно тогава, когато φ_1 не е вярно или φ_2 е вярно.

$\varphi_1 \iff \varphi_2$ е вярно точно тогава, когато φ_1 и φ_2 са верни или φ_1 и φ_2 са грешни

$= [\{\alpha\in\Sigma^* \mid |\alpha| \text{ е четна}\} \cap \{\alpha\in\Sigma^* \mid \alpha \text{ завършва на } bab\}] \cup [\overline{\{\alpha\in\Sigma^*\mid |\alpha| \text{ е четна}\}} \cap \overline{\{\alpha\in\Sigma^*\mid \alpha \text{ завършва на } bab\}}] = (L_1\cap L_2)\cup(\overline{L_1}\cap\overline{L_2})$

сега показваме, че L_1 и L_2 са автоматни

Операциите $\cup, \cap, \overline{}$ запазват автоматните езици и езикът L се получава чрез прилагане на краен брой такива операции в/у автоматни езици. Следователно L е автоматен

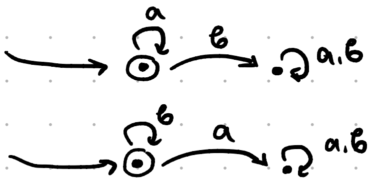
② Да се докаже, че винаги когато L_1 и L_2 са автоматни, то езикът $L = \{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\dots\alpha_n\beta_n \mid \alpha\in L_1, \beta\in L_2$ и $\alpha_i, \beta_i\in\Sigma$ $\alpha=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n$, $\beta=\beta_1\beta_2\dots\beta_n\}$ също е автоматен

$\alpha\in F^*$ означаваме i-тата буква на α с α_i

пример: $L_1=\{abb\}$, $L_2=\{baa\}$ $\Rightarrow$ $L=\{abbaba\}$

идея: $L_1=\{\alpha\in\Sigma^*\mid\alpha$ не съдържа $b\}$

$L_2=\{\alpha\in\Sigma^*\mid\alpha$ не съдържа $a\}$



! $L_1\neq\overline{L_2}$

$L_1=\{a^n\mid n\in\mathbb{N}\}$ $L_2=\{b^n\mid n\in\mathbb{N}\}$

$\alpha\in L_1$ $\beta=L_2$ $\rightarrow$ $\alpha=\overbrace{aaa\dots a}^{n}$ $\rightarrow$ $y=\underbrace{(ab)(ab)(ab)\dots(ab)}_{n}\in L$

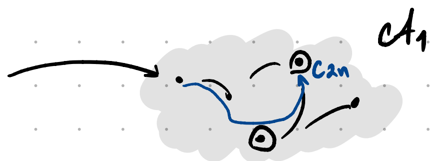
$\beta=\underbrace{bbb\dots b}_{n}$

решение: L_1, L_2 - автоматни

Нека $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ са автомати съотв за L_1 и L_2

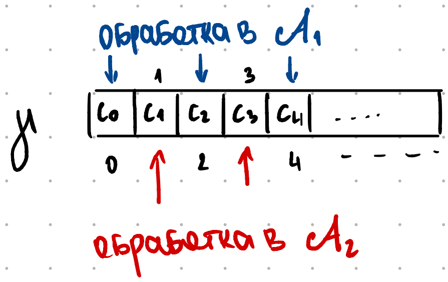
$\mathcal{A}_1=\langle\Sigma, Q_1, s_1, F_1, \delta_1\rangle$

$\mathcal{A}_2=\langle\Sigma, Q_2, s_2, F_2, \delta_2\rangle$



вход: дума y

изход: пров. дали $y\in L$



$\mathcal{A}$: $Q=Q_1\times Q_2\times\{0,1\}$ булев флаг т.е. $\langle \underset{\in Q_1}{p}, \underset{\in Q_2}{q}, \underset{\in\{0,1\}}{f}\rangle$

на всяка прочетена буква следим:

- до къде сме стигнали в $\mathcal{A}_1$ по p

- до къде сме стигнали в $\mathcal{A}_2$ по q
- f ни казва в кой автомат да обработим прочетената буква

$s = \langle s_1, s_2, 1\rangle \quad \delta(\langle p_1, p_2, 1\rangle, c) = \langle \delta_1(p_1, c), p_2, 2\rangle$

$\delta(\langle p_1, p_2, 2\rangle, c) = \langle p_1, \delta_2(p_2, c), 1\rangle$

<u>Твърдение:</u> Нека $\gamma \in \Sigma^*$, $\gamma = \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n$. Нека $even(\gamma)$ е думата, съставена от буквите в γ на четни позиции, а $odd(\gamma)$ е думата, съставена от буквите в γ на нечетни позиции.

пример: $even(\overset{0}{\underline{a}}\overset{1}{b}\overset{2}{\underline{b}}\overset{3}{a}\overset{4}{\underline{b}}) = abb \quad odd(a\underline{b}b\underline{a}b) = ba$

(*) Тогава $\delta^*(\underset{\langle s_1, s_2, 1\rangle}{s}, \gamma) = \langle \delta_1^*(s_1, even(\gamma)), \delta_2^*(s_2, odd(\gamma)), 1 + (|\gamma| \% 2)\rangle$

Доказателство: Индукция по $|\gamma|$.

база $|\gamma| = 0$, т.е $\gamma = \varepsilon$ $\quad \delta^*(s, \gamma) = \delta^*(s, \varepsilon) = s = \langle s_1, s_2, 1\rangle = \langle \delta_1^*(s_1, \varepsilon), \delta_2^*(s_2, \varepsilon), 1 + 0\rangle$

ИП: Нека знаем, че ако $|\gamma| \leq n$, то (*) е изпълнено

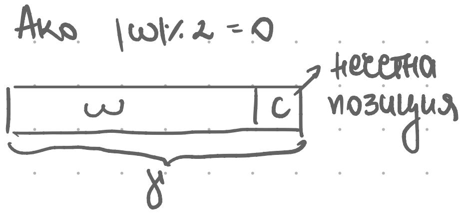
ИС: Нека $|\gamma| = n+1$. Тогава $\gamma = \omega + c$, където $c \in \Sigma$ и $|\omega| = n$.

От ИП знаем, че (*) е в сила за ω, т.е

$\delta^*(s, \omega) = \langle \delta_1^*(s_1, even(\omega)), \delta_2^*(s_2, odd(\omega)), 1 + |\omega| \% 2\rangle$

$\delta^*(s, \gamma) = \delta(\delta^*(s, \omega), c) = \delta(\langle \delta_1^*(s_1, even(\omega)), \delta_2^*(s_2, odd(\omega)), 1 + |\omega| \% 2\rangle, c)$

Ако $|\omega| \% 2 = 0$



$even(\gamma) = even(\omega).c$

$odd(\gamma) = odd(\omega)$

1 сл: $|\omega|$ е четна, тогава

$\delta(\langle \delta_1^*(s_1, even(\omega)), \delta_2^*(s_2, odd(\gamma)), 1\rangle, c) =$

$= \langle \delta_1(\delta_1^*(s_1, even(\omega)), c), \delta_2^*(s_2, odd(\gamma)), 2\rangle =$

$= \langle \delta_1^*(s_1, even(\omega).c), \delta_2^*(s_2, odd(\gamma)), 2\rangle =$

$= \langle \delta_1^*(s_1, even(y)), \delta_2^*(s_2, odd(y)), 1+|y|\%2\rangle$

2сл: ⌂

Сега твърдим, че $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$:

$y \in L \Leftrightarrow |y|$ е четна и $even(y) \in L_1$ и $odd(y) \in L_2 \Leftrightarrow$

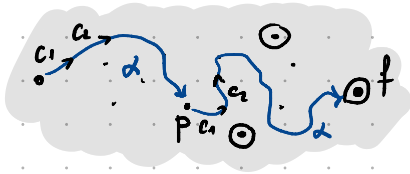
$\Leftrightarrow |y|$ е четна и $\delta_1^*(even(y)) \in F_1$ и $\delta_2^*(odd(y)) \in F_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \langle \delta_1^*(s_1, even(y)), \delta_2^*(s_2, odd(y)), 1+|y|\%2\rangle \in F_1 \times F_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \delta^*(s, y) \in F_1 \times F_2 \times \{1\} = F \Leftrightarrow y \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$

③ Нека L е автоматен. Да се докаже, че $L' = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha.\alpha \in L\}$ е автоматен

$\mathcal{A}$ за L $\longrightarrow$



вход: α

c_1	c_2	c_3	....	c_n

$\langle s, p_1, p_2, \dots, p_n\rangle \longrightarrow \langle \delta^*(s,\alpha), \underset{n}{\overset{\delta^*(p_i,\alpha)}{\longrightarrow}} \rangle$

Нека $\mathcal{A} = \langle \Sigma, \overset{Q=\langle p_1,\dots,p_n\rangle}{Q}, s, F, \delta\rangle$ е автомат за L

Автомат $\mathcal{A}'$ за L':

- $Q' = Q \times Q^n$
- $s' = \langle s, p_1, p_2, \dots, p_n\rangle$
- $\delta'(\langle q, r_1, r_2, \dots, r_n\rangle, c) = \langle \delta(q,c), \delta(r_1,c), \delta(r_2,c), \dots, \delta(r_n,c)\rangle$
- $F' = \{\langle q, r_1, r_2, \dots, r_n\rangle \mid q = p_i$ и $r_i \in F\}$

Твърдение $\delta'^*(s,\alpha) = \langle \delta^*(s,\alpha), \delta^*(p_1,\alpha), \dots, \delta^*(p_n,\alpha)\rangle$ ⌂

Док, че $L' = \mathcal{L}(\mathcal{A}')$