Краен детерминиран автомат (КДА)

Интуитивно: КДА е програма, използваща константно количество памет

задача: вход: дума α

изход: да, ако $|\alpha|$ е четно

не, ако $|\alpha|$ е нечетно

```
string str
cin >> str;
cout<< str.length()%2==0 <<endl
```

Не използва константна памет

Представяне на поведение на програма чрез код

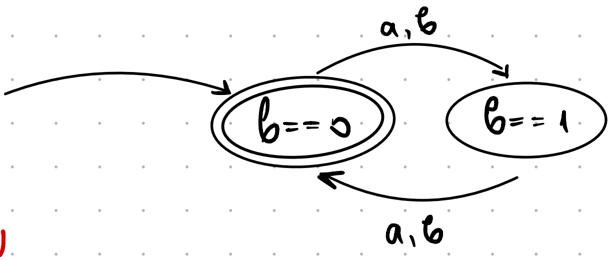
```
char c; bool b=0;          //counter=0
while (cin>>c){
    b=!b;                  //counter++
}
cout<< b==0 <<endl;        //cout << counter%2==0<<endl
```

вход: α = a b a a b

b= 0 1 0 1 0 1

да

не

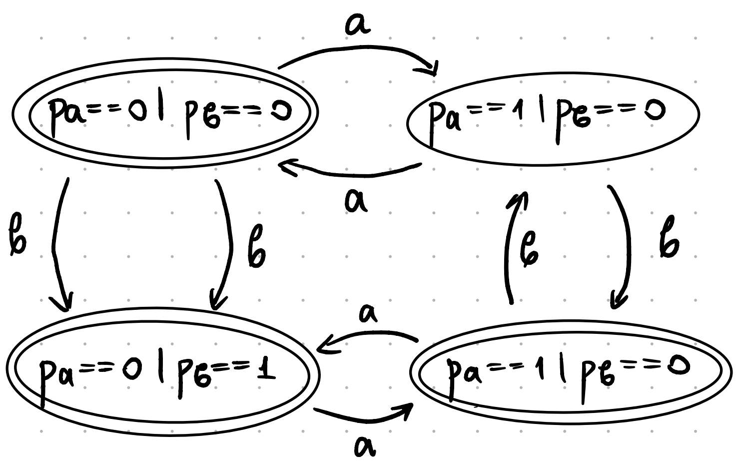


Задача 2: вход: дума α

изход: да, ако бр. на a е четно или бр. на b е нечетно

не, иначе

```
char c; bool pa=0, pb=0;
while (cin>>c){
    if(c=='a') pa=!pa;
    else pb=!pb;
}
cout<< ... <<endl;
```



Дефиниция: Краен детерминиран автомат наричаме

$\mathcal{A}: \langle \Sigma, Q, s, F, \delta \rangle$, където:

- Σ - крайна азбука
- Q - крайно множество от състояния
- $s \in Q$ - начално състояние
- $F \subseteq Q$ - мн-во от финални състояния (дават отг. да)
- δ - функция на преходите: $\delta: Q \times E \to Q$

① $\alpha = \{a, b\}$

$Q = \{(0|0), (0|1), (1|0), (0|1)\}$

$s = \{(0|0)\}$

$F = \{(0|0), (0|1), (1,1)\}$

$\delta((0|0), a) = (1|0)$

$\delta((0|0), b) = (0|1)$

$\delta((0|1), a) = (1|1)$

$\delta((0|1), b) = (0|0)$

Дефиниция: език на автомат $\mathcal{A}$

$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid$ пътят, определен от думата α и започващ от начално състояние, приключва във финално състояние$\}$

② $aaababb \in \mathcal{L}$, $aaababbab \notin \mathcal{L}$

деф. $\delta^*: Q \times \Sigma \to Q$ индуктивна дефиниция по:

дълж. на α дефинираме колко е $\delta^*(p, \alpha)$ за всяко състояние $p \in Q$

- база: $|\alpha| = 0$, тогава $\alpha = \varepsilon$; тогава дефинираме $\delta^*(p, \varepsilon) \overset{def}{=} p \quad \forall p \in Q$
- индуктивно предположение: нека сме дефинирали $\delta^*(p, \alpha) \ \forall \alpha$ с $|\alpha| = n$
- индуктивна стъпка: ще деф. $\delta^*(p, \alpha)$ за $|\alpha| = n+1$

$|\alpha| = n+1$ $\quad \alpha = \mu . a$

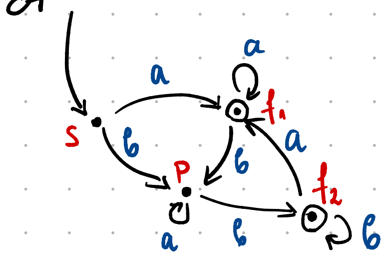
$$p \xrightarrow{\mu} \delta^*(p, \mu) \xrightarrow{a} \delta^*(\delta^*(p, \mu), a)$$

Нека $\alpha = \gamma . c$, където $|\gamma| = n$ и $c \in \Sigma$, тогава $\delta^*(p, \gamma c) = \delta(\delta^*(p, \gamma), c)$

$\delta^*(p,\alpha) = q \iff$ пътечката, определена от α и започваща в състояние p, завършваща в състояние q

$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \delta^*(s,\alpha) \in F\}$

$\mathcal{A}$



финално $\odot$

$\delta(p, b) = f_2$ $\quad$ $\delta^*(p, aba) = f_1$

$\delta(f_1, a) = f_1$ $\quad$ $\delta^*(f_2, baab) = p$

? вярно ли е, че $abab \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$

$\delta^*(s, abab) = f_2 \in F$

? $aaba \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$

$\delta^*(s, aaba) = p \notin F$

$\Rightarrow aaba \notin \mathcal{L}(\mathcal{A})$

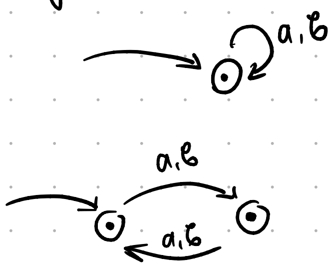
Казваме, че

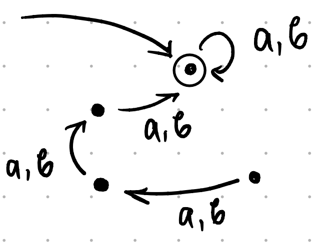
- езикът L е автоматен, ако има KDA $\mathcal{A}$, такъв, че $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L$
- автоматът $\mathcal{A}$ разпознава дума α, ако $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$
- автоматът $\mathcal{A}$ отхвърля дума α, ако $\alpha \notin \mathcal{L}(\mathcal{A})$

$L = \{\alpha \in \Sigma^* \mid$ бр а-та е четен / б. b-та е нечетен$\}$

---

1. да се построи автомат $\mathcal{A}$ с език $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \Sigma^*$





Съществува изоморфизъм м/у автомати

Критерий: $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \Sigma^*$ – всяко състояние, достижимо от началното е финално

→ 1. Нека всяко състояние, дост. от s, е фин:

Нека $\alpha \in \Sigma^*$, тогава съст. $\delta^*(s,\alpha)$ е дост. от s

тогава $\delta^*(s,\alpha) \in F$, т.е. $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$

така $\left.\begin{array}{l} \Sigma^* \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}) \\ \mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq \Sigma^* \end{array}\right\} \mathcal{L}(\mathcal{A}) = \Sigma^*$

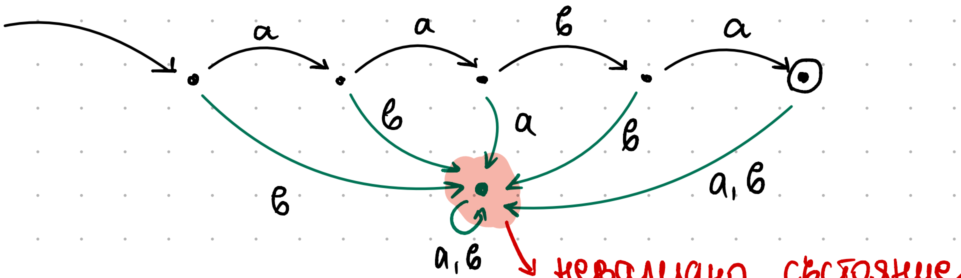
← 2. Нека $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \Sigma^*$ и нека p е дост. от s тогава има дума $\alpha \in \Sigma^*$, $p = \delta^*(s,\alpha)$, но $\alpha \in \Sigma^* = \mathcal{L}(A)$

тогава $\delta^*(s,\alpha) \in F \Rightarrow p$

⇑ $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \emptyset \Leftrightarrow$ всяко достижимо от нач. състояние p е нефинално

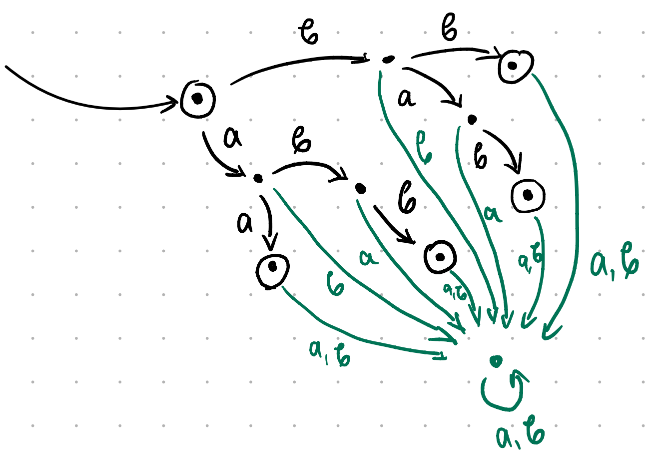
3. Нека $\alpha \in \Sigma^*$, да се построи автомат $\mathcal{A}$ с $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{\alpha\}$

нека $\alpha = aaba$



4. Нека L е „краен", тогава има автомат $\mathcal{A}$, такъв че $\mathcal{L}(A) = L$

// за опр. нека $L = \{aa, bab, \varepsilon, abb, bb\}$



1. ако $L = \emptyset$ ясно
2. ако $L \neq \emptyset$ и е краен

нека $k = \max\{|\alpha| \mid \alpha \in L\}$

разгл. автомат $\mathcal{A}$ със състояния

$Q = \{\alpha \in \Sigma^* \mid |\alpha| \le k\} \cup \{err\}$

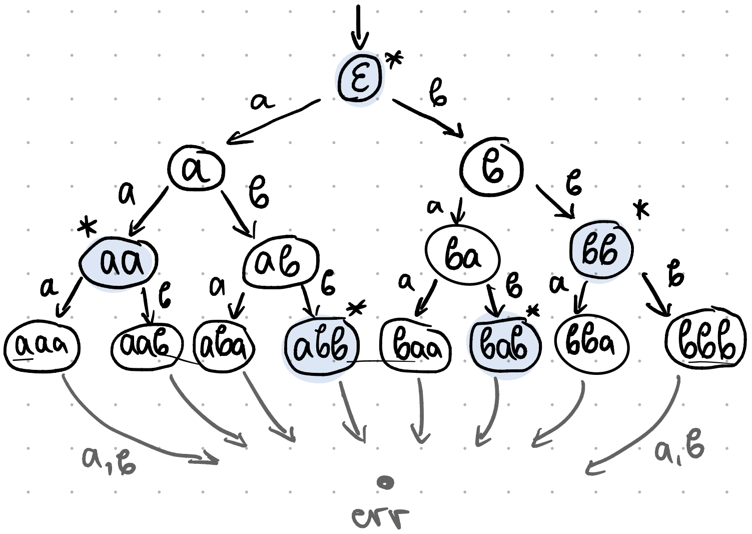
деф. $s=\varepsilon$, $F=L$, за $\forall a\in\Sigma$ $\begin{cases}\delta(y,a)\begin{cases}err, & \text{ако } |y|=k\\ ya, & \text{ако } |y|<k\end{cases}\\ \delta(err,a)=err\end{cases}$

конкретно за 3

$\max\{|\alpha| \mid \alpha\in L\}=3$

съставяме

преходно дърво:



⇧ постр. $\mathcal{A}$. за следните L

- L_1 $\{\alpha \mid |\alpha|$ е четно$\}$
- L_2 $\{\alpha \mid |\alpha|\equiv 1 \pmod 3\}$
- L_3 $\{\alpha \mid \alpha$ започва с $ab\}$
- L_4 $\{\alpha \mid \alpha$ завършва на $ba\}$

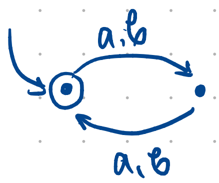
$a\equiv b \pmod k$ за $k\geq 2$

↳ $(a-b)$ се дели на k

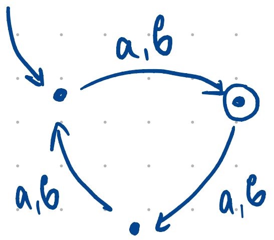
екв., a и b дават еднакви остатъци

при деление с k

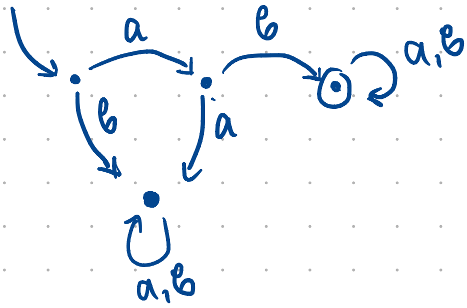
L_1:



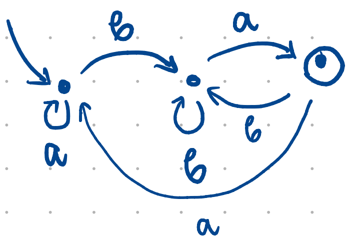
L_2:



L_3:



L_4:



⇧ $\mathcal{L}(\mathcal{A})=\emptyset \iff$ всяко достижимо от нач. състояние p е нефинално

1. Нека всяко състояние, достижимо от s е нефинално

Нека $\alpha \in \phi$, тогава сост. $\delta^*(s,\alpha)$ е достижимо от s

тогава $\delta^*(s,\alpha) \notin F$, т.е. $\alpha \in \phi$

така $\phi \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A})$, $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq \phi \Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{A}) = \phi$

2. Нека $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \phi$ и нека p е дост. от s. Тогава има дума $\alpha \in \phi$,

$p = \delta^*(s,\alpha)$, но $\alpha \in \phi = \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Тогава $\delta^*(s,\alpha) \notin F = p$