26.05.23

Тв. Езици, разпознавани от стекови автомати, са езици, генерирани от граматики

def. Недетерминиран стеков автомат $P(Q, \Sigma, \Gamma, \#, \Delta, q_{start}, q_{accept})$

Q - крайно мн-во състояния, $q_{start}, q_{accept} \in Q$

Σ - входна азбука

$\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

Γ - азбука на стека

$\#$ - специален символ, $\# \in \Gamma$, $\# \notin \Sigma$ (дъно на стека)

Δ - функция на преход $\Delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma^{\leq 2})$ (power set)

Γ^*, но $^{\leq 2}$ е достатъчно

~ пишем последна буква

~ пишем нова буква в стек

~ трием върха

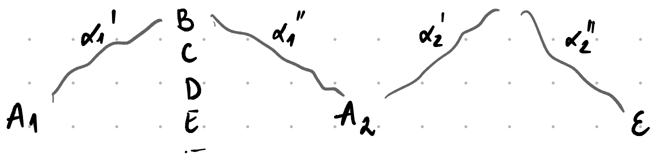
релация $\dfrac{(p, \mu) \in \Delta(q, x, A)}{(q, x\alpha, A\rho) \vdash (p, \alpha, \mu\rho)}$ – от съст q четем x ($x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$) с върх на стека $A\rho$

$$\mathcal{L}(P) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid (q_{start}, \alpha, \#) \vdash^* (q_{accept}, \varepsilon, \varepsilon)\}$$

Свойство на слепване

$$\left.\begin{array}{l}(q, \alpha_1, A_1) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon) \\ (p, \alpha_2, A_2) \vdash^* (v, \varepsilon, \varepsilon)\end{array}\right\} \Rightarrow (q, \alpha_1\alpha_2, A_1A_2) \vdash^* (v, \varepsilon, \varepsilon)$$

стек при разчитане



$\alpha_1 = \alpha_1'\alpha_1''$

$\alpha_2 = \alpha_2'\alpha_2''$

$$\dfrac{(q, \alpha_1, A_1) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)}{(q, \alpha_1\alpha_2, A_1A_2) \vdash^* (p, \alpha_2, A_2) \vdash^* (v, \varepsilon, \varepsilon)}$$

Свойство на разцепване:

Нека $(q, \alpha, A\rho) \vdash^{\ell} (p, \varepsilon, \varepsilon)$ $\quad$ ℓ - брой стъпки на изчисление

Тогава съществуват $\ell_1, \ell_2, \alpha_1, \alpha_2, r$: $\quad$ r - междинно съст.

$(q, \alpha_1, A) \vdash^{\ell_1} (r, \varepsilon, \varepsilon)$

$(r, \alpha_2, \rho) \vdash^{\ell_2} (p, \varepsilon, \varepsilon)$

където $\ell_1 + \ell_2 = \ell$ $\quad$ $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \alpha$

Док: индуктивно по ℓ

База: $\ell=1$: лесно може да се съобрази, че $\alpha=\varepsilon$ или a, $r=p$, $\rho=\varepsilon$

$(q,\alpha,A\rho)\vdash^{1}(p,\varepsilon,\varepsilon)$ Тогава $\rho=\varepsilon$, $\alpha\in\Sigma_\varepsilon$

Нека $\ell_1=1$, $\ell_2=0$, $r=p$, $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=\varepsilon$

случай $\ell>1$: Каква е първата стъпка от изчислението?

А) $$\frac{\Delta(q,x,A)\ni(q',BC)\qquad (q',\alpha',BC\rho)\vdash^{\ell-1}(p,\varepsilon,\varepsilon)}{(q,x\alpha',A\rho)\vdash^{\ell}(p,\varepsilon,\varepsilon)}$$ и.п.

Прочитаме $x\in\Sigma_\varepsilon$ и на мястото на върха на стека A записваме BC

$(q',\alpha_1',B)\vdash^{\ell_1'}(r',\varepsilon,\varepsilon)$ *

$(r',\alpha_2',C\rho)\vdash^{\ell_2'}(p,\varepsilon,\varepsilon)$ – трябва да разцепим

и.п. $\Downarrow_r$

$(r',\gamma_1,C)\vdash^{k_1}(r'',\varepsilon,\varepsilon)$ **

$(r'',\gamma_2,\rho)\vdash^{k_2}(p,\varepsilon,\varepsilon)$

$\gamma_1\gamma_2=\alpha_2'$ $\qquad k_1+k_2=\ell_2'$

$$\frac{\Delta(q,x,A)\ni(q',BC)\qquad \dfrac{*\ \&\ **}{(q',\alpha_1'\gamma_1,BC)\vdash^{\ell_1'+k_1}(r'',\varepsilon,\varepsilon)}}{(q,\underbrace{x\alpha_1'\gamma_1}_{\alpha_1},A)\vdash^{\underbrace{1+\ell_1'+k_1}_{\ell_1}}(r',\varepsilon,\varepsilon)}$$

добавяме букви в стека

Б) $$\frac{\Delta(q,x,A)\ni(q',BC)\qquad (q',\alpha',B\rho)\vdash^{\ell-1}(p,\varepsilon,\varepsilon)}{(q,x\alpha',A\rho)\vdash^{\ell}(p,\varepsilon,\varepsilon)}$$ последна буква

В) $$\frac{\Delta(q,x,A)\ni(q',\varepsilon)\qquad (q',\alpha',\rho)\vdash^{\ell-1}(p,\varepsilon,\varepsilon)}{(q,x\alpha',A\rho)\vdash^{\ell}(p,\varepsilon,\varepsilon)}$$ трием върха

Тв. Нека $L=\mathcal{L}(G)$. Тогава същ. стеков автомат P: $L=\mathcal{L}(P)$

Нека G е в нормална форма на Чомски и $\varepsilon\in L(G)$.

$P=(Q,\Sigma,\Gamma,\#,\Delta,q_{start},q_{accept})$

$\Gamma=\Sigma\cup V\cup\{\#\}$, $Q=\{q_{start},p,q_{accept}\}$

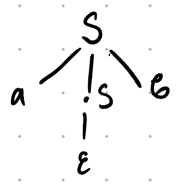
- $\Delta(q_{start}, \varepsilon, \#) = \{(p, S\#)\}$
- $\Delta(p, \varepsilon, A) = \{(p, \alpha) \mid A - \alpha$ е правило в $G\}$
- $\Delta(p, a, a) = \{(p, \varepsilon)\}$
- $\Delta(p, \varepsilon, \#) = \{(q_{accept}, \varepsilon)\}$

пример $S \to aSb \mid c$

$$\# \to S\# \to aSb\# \to Sb\# \to cb\# \to b\# \to \# \to \varepsilon$$

вход: acb, cb, cb, b, ε

дърво на изв:



Ще докажем, че за $X \in V$ и $\alpha \in \Sigma^*$:

А) $X \Delta^* \alpha \Rightarrow (p, \alpha, X) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$

Б) $(p, \alpha, X) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon) \Rightarrow X \Delta^* \alpha$.

А) Индукция по ℓ (височина на дървото): $X \Delta^\ell \alpha$

База: $\ell = 1$ Щом $X \Delta^1 \alpha$: правило $X \to a$ в грам.

$$(p, a, X) \vdash (p, a, a) \vdash (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

$\ell > 1$:

$$\frac{X \to BC \quad B \Delta^{\ell_1} \alpha_1 \quad C \Delta^{\ell_2} \alpha_2}{X \Delta^\ell \alpha} \qquad \ell = \max\{\ell_1, \ell_2\} + 1$$

ИП

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{B \Delta^{\ell_1} \alpha_1}{(p, \alpha_1, B) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)} \\ \\ \dfrac{C \Delta^{\ell_2} \alpha_2}{(p, \alpha_2, C) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (p, \alpha_1\alpha_2, BC) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon) \\ \Delta(p, \varepsilon, X) \ni (p, BC) \end{array}\right\} \Rightarrow (p, \alpha, X) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

Б) Индукция по броя изчисления

Нека $(p, \alpha, X) \vdash^\ell (p, \varepsilon, \varepsilon)$, $X \in V$

$\ell > 1$ Каква е първата стъпка?

1. сл. $$\frac{\Delta(p, \varepsilon, X) \ni (p, BC) \qquad (p, \alpha, BC) \vdash^{\ell-1} (p, \varepsilon, \varepsilon)}{(p, \alpha, X) \vdash^\ell (p, \varepsilon, \varepsilon)}$$ разцепване

$\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2$
$\ell = \ell_1 + \ell_2$

$$\boxed{\begin{array}{l} (p, \alpha_1, B) \vdash^{\ell_1} (p, \varepsilon, \varepsilon) \\ (p, \alpha_2, C) \vdash^{\ell_2} (p, \varepsilon, \varepsilon) \end{array}} \overset{\text{ИП}}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{l} B \Delta^* \alpha_1 \\ C \Delta^* \alpha_2 \\ X \to BC \end{array}\right\} X \Delta^* \alpha$$

2сл. $\dfrac{\Delta\ (p,\varepsilon,X)\ni(p,a) \qquad (p,\alpha,a)\vdash^{\ell-1}(p,\varepsilon,\varepsilon)}{(p,\alpha,X)\vdash^{\ell}(p,\varepsilon,\varepsilon)}$ Ясно е, че $\ell=2$ и $\alpha=a$.

Създаване на граматика на базата на автомат и съществуваща граматика

- Граматика G в НФЧ, $L_1=\mathcal{L}(G)$
- DKA $\mathcal{A}$: $L_2=\mathcal{L}(\mathcal{A})$

Строим G' : $\mathcal{L}(G')=L_1\cap L_2$ $\exists\alpha$: $S\overset{*}{\Delta}\alpha$, $\delta^*(q_{start},\alpha)=f\in F$

$V'=\{(q,A,p)\mid q,p\in Q,\ A\in V\}$ взимаме нар. тр. (q,A,p) за правила

$$(q,A,p)\overset{*}{\Delta}\alpha \iff A\overset{*}{\Delta}_G\alpha \ \&\ \delta^*_{\mathcal{A}}(q,\alpha)=p$$

Нека $A\to BC$ е правило в G.

$\underbrace{A\overset{*}{\Delta}\alpha}$ $\underbrace{\delta^*(q,\alpha)=p}$ Добавяме в G':

$B\overset{*}{\Delta}\alpha_1$ $\delta^*(q,\alpha_1)=r$ $(q,A,p)\to(q,B,r).(r,C,p)\ \forall r\in Q$

$C\overset{*}{\Delta}\alpha_2$ $\delta^*(r,\alpha_2)=p$

Нека $A\to a$ е правило в G.

Добавяме в G':

$(q,a,p)\to a\ \ \forall\ q,p:\ \delta(q,a)=p$

DCD $(q,A,p)\overset{*}{\Delta}\alpha \iff A\overset{*}{\Delta}_G\alpha\ \&\ \delta^*_{\mathcal{A}}(q,\alpha)=p$

$(\Rightarrow)$

$(\Leftarrow)$

Коя е началната променлива на G'? Добавяме правило $S'\to(q_{start},S,f)$ за $f\in F$

*нужно е ако има няколко финални състояния

Създаване на граматика на базата на стеков автомат

Ще докажем, че $(q,A,p)\overset{*}{\Delta}\alpha \iff (q,\alpha,A)\vdash^{*}(p,\varepsilon,\varepsilon)$

Вход: стеков автомат P

Изход: безконтекстна граматика G

$V = \{ (q, A, p) \mid A \in \Gamma,\ q, p \in Q \}$

сл. 1: Нека $(q', BC) \in \Delta(q, x, A)$, $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

Добавяме в G:

$(q, A, p) \longrightarrow x.(q', B, r).(r, C, p) \quad \forall\, r, p \in Q$

Идея: $\dfrac{\dfrac{(q, x\alpha, A) \vdash^{*} (p, \varepsilon, \varepsilon)}{(q', \alpha, BC) \vdash^{*} (p, \varepsilon, \varepsilon)}}{(q, \alpha_1, B) \vdash^{*} (r, \varepsilon, \varepsilon)\ \&\ (r, \alpha_2, C) \vdash^{*} (p, \varepsilon, \varepsilon)}$! правим 1 стъпка

сл. 2. Нека $(p, B) \in \Delta(q, x, A)$

Добавяме в G: $(q, A, p) \longrightarrow x.(q', B, p) \quad \forall p \in Q$

сл. 3 Нека $(q', \varepsilon) \in \Delta(q, x, A)$

Добавяме в G: $(q, A, q') \longrightarrow x$

Начална променлива

$S = (q_{start}, \#, q_{accept})$