

УДК 517.958

MSC2010 35Q20 +35Q60

© А. В. Кан^{1,2}; И. В. Прохоров¹

!!!//Определение диффузно отражающей поверхности в рассеивающих (мутных) средах

Рассматривается обратная задача для нестационарного уравнения переноса излучения, заключающаяся в определении диффузно отражающей поверхности по заданным функционалам от плотности потока излучения. Для точечного импульсного источника в приближении однократного рассеяния при заданных коэффициентах объемного и донного рассеяний получено нелинейное дифференциальное уравнение для определения профиля поверхности. В вычислительных экспериментах на тестовых примерах рассматривается влияние объемного рассеяния и возмущений исходных данных на восстановлении ламбертовской кривой.

Ключевые слова: *уравнение переноса излучения, диффузное отражение, закон Ламберта, обратная задача, объемное рассеяние*

1. Введение

Обратные задачи для кинетических уравнений имеют многочисленные практические приложения. Это, прежде всего, дистанционное зондирование поверхности Земли, фотометрия и гидролокация морского дна, оптическая и рентгеновская томография [1–10]. В работе рассматривается обратная задача для нестационарного уравнения переноса излучения в области с неизвестной границей, на которой заданы условия диффузного отражения о законе Ламберта. Требуется найти неизвестную границу при некотором условии переопределения решения начально-краевой задачи. С физической точки зрения такая постановка задачи наиболее близка к проблемам мониторинга земной поверхности и морского дна с помощью авиационных радиолокационных станций и гидролокаторов бокового обзора. В данной работе рассмотрена упрощенная двумерная модель локации ламбертовской кривой. Применение такой модели оправдано для узкой в горизонтальной плоскости диаграммы направленности приемной антенны и при небольшой скорости движения источника излучения, в сравнении со скоростью распространения сигнала в среде [9].

¹ Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7,

² Дальневосточный федеральный университет, 690050, г. Владивосток, ул. Суханова, 8

Электронная почта: kan.va@inbox.ru (А. В. Кан), prokhorov@iam.dvo.ru (И. В. Прохоров).

В трехмерном случае эта задача рассматривалась в приближении однократного рассеяния и малости отклонения отражающей поверхности от некоторого среднего уровня. При условии, что диаграмма направленности приемной антенны является узкой в горизонтальной плоскости получена явная формула для решения обратной задачи [9, 10]. Проведен численный анализ влияния объемного рассеяния и ширины диаграммы направленности на качество реконструкции диффузно-отражающей поверхности.

Задачи определения диффузно-отражающих поверхностей для стационарных моделей переноса излучения рассматривались в работах [1, 11]. В частности, в [11] предложен метод восстановления ламбертовской оптической кривой по двум ее изображениям и показана его устойчивость по отношению к малым отклонениям от ламбертовости и ошибкам измерений. Методы исследования обратной задачи, используемые для стационарных и нестационарных моделей, несмотря на некоторые близкие аспекты, достаточно сильно отличаются друг от друга. В настоящей работе исследована обратная задача нестационарного уравнения переноса излучения и для определения формы ламбертовской кривой получено нелинейное дифференциальное уравнение, имеющее решение в квадратурах. Проведены численные эксперименты на сравнительно простых тестовых примерах.

2. Постановка задачи

В работе рассматривается уравнение переноса излучения следующего вида [7–9, 12–16]:

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} + \mu \right) I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{\Omega} I(\mathbf{r}, \mathbf{k}', t) d\mathbf{k}' + J(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t), \quad (1)$$

где $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]$ и волновой вектор \mathbf{k} принадлежит единичной окружности $\Omega = \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{k}| = 1\}$. Функция $I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$ интерпретируется как плотность потока энергии волны в момент времени t в точке \mathbf{r} , распространяющейся в направлении \mathbf{k} со скоростью c . Величины μ и σ имеют смысл коэффициентов затухания и рассеяния, а функция J описывает источники звукового поля.

Присоединим к уравнению (1) начальные и граничные условия

$$I^-(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)|_{t=0} = 0, \quad (\mathbf{r}, \mathbf{k}) \in G \times \Omega, \quad (2)$$

$$I^-(\mathbf{y}, \mathbf{k}, t) = 2\sigma_d \int_{\Omega_+(\mathbf{y})} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}'| I^+(\mathbf{y}, \mathbf{k}', t) d\mathbf{k}' \quad (\mathbf{y}, \mathbf{k}, t) \in \Gamma^-. \quad (3)$$

Здесь $I^{\pm}(\mathbf{y}, \mathbf{k}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\mathbf{y} \pm \varepsilon \mathbf{k}, \mathbf{k}, t \pm \varepsilon/c)$,

$$\Gamma^{\pm} = \{(\mathbf{y}, \mathbf{k}, t) \in \gamma \times \Omega_{\pm}(\mathbf{y}) \times (0, T)\}, \quad \Omega_{\pm}(\mathbf{y}) = \{\mathbf{k} \in \Omega : \text{sgn}(\mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{k}) = \pm 1\},$$

где $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ — единичный вектор внешней нормали к границе области G . Условие (3) означает, что отражающие свойства дна определяются только диффузным отражением по закону Ламберта с коэффициентом отражения σ_d .

Уравнение (1) с начальным и граничным условиями (2), (3) при заданных μ, σ, σ_d, J , γ образуют начально-краевую задачу для нахождения неизвестной функции I на множестве $G \times \Omega \times (0, T)$

Дополним систему соотношений (1), (2), (3) следующими условиями

$$\int_{\tilde{\Omega}_-} S_+(\mathbf{k}) I^+(\mathbf{o}, \mathbf{k}, t) d\mathbf{k} = P_+(t), \quad \int_{\tilde{\Omega}_+} S_-(\mathbf{k}) I^+(\mathbf{o}, \mathbf{k}, t) d\mathbf{k} = P_-(t), \quad (4)$$

где $\Omega_{\pm} = \{\mathbf{k} \in \Omega : \mathbf{k} = \pm 1\}$, $S_+(\mathbf{k}) = 0$ при $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}_+ = \{\mathbf{k} \in \Omega : k_1 > 0, k_2 < 0\}$ и $S_-(\mathbf{k}) = 0$ при $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}_- = \{\mathbf{k} \in \Omega : k_1, k_2 < 0\}$. Не умаляя общности считаем, что точка $\mathbf{o} = (0, 0)$ совпадает с началом декартовой системы координат, а кривая γ определена строго ниже оси абсцисс.

В реальной трехмерной задаче акустического зондирования дна океана с помощью гидролокатора бокового обзора функции $S_-(\mathbf{k})$ и $S_+(\mathbf{k})$ характеризует диаграммы направленности приемных антенн по разным «бортам» носителя антенны [7–9], а функции $P_{\pm}(t)$ определяют суммарную интенсивность, измеряемую двумя антеннами в различные моменты времени t .

В работе рассматривается следующая обратная задача. Определить кривую γ из соотношений (1)–(4) в которых μ, σ_d, σ, J и функции P_{\pm}, S_{\pm} известны.

Будем предполагать, что объемное рассеяние в среде пренебрежимо мало, что соответствует случаю $\sigma = 0$, а функция J , описывающая точечный импульсный источник звука, имеет вид

$$J(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \delta(\mathbf{r}) \delta(t). \quad (5)$$

Процесс распространения эхосигналов происходит в неограниченной области $G \in \mathbb{R}^2$, которая является звёздной относительно начала координат и ее граница $\gamma = \partial G$ задана параметрическими уравнениями:

$$r_1 = -\rho(\varphi) \sin \varphi, \quad r_2 = \rho(\varphi) \cos \varphi. \quad (6)$$

Функция $\rho(\varphi)$ определена непрерывна на множестве $(\varphi, \bar{\varphi})$, где $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi < \bar{\varphi} < \frac{3\pi}{2}$, дифференцируема при $\varphi \in (\varphi, \pi) \cup (\pi, \bar{\varphi})$, монотонно убывает на интервале (φ, π) и монотонно возрастает на промежутке $(\pi, \bar{\varphi})$. В точках $\varphi = \varphi$ и $\varphi = \bar{\varphi}$ функция $\rho(\varphi)$ стремится к бесконечности. Таким образом, кривая γ делит плоскость \mathbb{R}^2 на две неограниченные области: G и $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{G}$.

Кроме того, при решении обратной задачи (1), (2), (3), (4) задано значение функции ρ в точке π : $\rho(\pi) = l$. Последнее условие типично в подобного рода задачах [1, 11] и означает, что известна одна точка искомой кривой. Уравнения (6), описывающие поверхность γ , в задачах акустической локации характеризуют изменение рельефа морского дна и в этом случае равенство $\rho(\pi) = l$ задает высоту, на которой находится приемопередающая антенна относительно донной поверхности (см. рис. 1).

3. Приближение однократного рассеяния

Решение начально-краевой задачи (1),(2),(3) эквивалентно решению следующего уравнения интегрального типа []:

$$\begin{aligned}
 I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = & \int_0^{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})} \exp(-\mu\tau) J\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}, t - \frac{\tau}{c}\right) d\tau + \\
 & + 2\sigma_d \exp(-\mu d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})) \int_{\Omega_+(\mathbf{y})} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}'| I^+\left(\mathbf{y}, \mathbf{k}', t - \frac{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})}{c}\right) d\mathbf{k}' + \\
 & + \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})} \exp(-\mu\tau) \int_{\Omega} I\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}', t - \frac{\tau}{c}\right) d\mathbf{k}' d\tau, \quad (7)
 \end{aligned}$$

где $\mathbf{y} = \mathbf{r} - d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})\mathbf{k} \in \partial G$ и $d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})$ – расстояние от точки $\mathbf{r} \in G$ в направлении $-\mathbf{k}$ до границы области G . Если луч, исходящий из точки \mathbf{r} в направлении $-\mathbf{k}$ не пересекает границу области G , то для функции $I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$ справедлива явная формула

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \int_0^{\infty} \exp(-\mu\tau) J\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}, t - \frac{\tau}{c}\right) d\tau. \quad (8)$$

Заметим, что в этом случае $I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = 0$ когда луч, исходящий из точки \mathbf{r} в направлении $-\mathbf{k}$, не имеет общих точек с носителем функции J в области G .

Возьмем в качестве нулевого приближения для решения уравнения (7) функцию

$$I_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \int_0^{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})} \exp(-\mu\tau) J\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}, t - \frac{\tau}{c}\right) d\tau$$

и построим процесс простых итераций. На первом шаге итерационного процесса для решения начально-краевой задачи (1),(2),(3) получим, так называемое, приближение однократного рассеяния

$$\begin{aligned}
 I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = & \int_0^{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})} \exp(-\mu\tau) J\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}, t - \frac{\tau}{c}\right) d\tau + \\
 & + 2\sigma_d \exp(-\mu d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})) \int_{\Omega_+(\mathbf{y})} |\mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{k}'| \int_0^{d(\mathbf{y}, -\mathbf{k}')} \exp(-\mu\tau) \times \\
 & \times J\left(\mathbf{y} - \tau\mathbf{k}', \mathbf{k}', t - \frac{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})}{c} - \frac{\tau}{c}\right) d\tau d\mathbf{k}' + \\
 & + \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})} \exp(-\mu\tau) \int_{\Omega} \int_0^{d(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, -\mathbf{k}')} \exp(-\mu t') J\left(\mathbf{r} - t'\mathbf{k}' - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}', t - \frac{t'}{c} - \frac{\tau}{c}\right) dt' d\mathbf{k}' d\tau. \quad (9)
 \end{aligned}$$

В (9) сделаем замену переменных $\mathbf{r}' = \mathbf{y} - \tau \mathbf{k}'$, $\mathbf{x} = \mathbf{r} - t' \mathbf{k}'$. Так как $d\tau d\mathbf{k}' = \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{y}|}$, $dt' d\mathbf{k}' = \frac{d\mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|}$ то из (9) вытекает

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = & \int_0^{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})} \exp(-\mu\tau) J\left(\mathbf{r} - \tau \mathbf{k}, \mathbf{k}, t - \frac{\tau}{c}\right) d\tau + \\ & 2\sigma_d \exp(-\mu d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})) \int_{G(\mathbf{y})} \left| \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \frac{\mathbf{y} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{y} - \mathbf{r}'|} \right| \exp(-\mu|\mathbf{r}' - \mathbf{y}|) \times \\ & \times J\left(\mathbf{r}', \frac{\mathbf{y} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{y} - \mathbf{r}'|}, t - \frac{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})}{c} - \frac{|\mathbf{y} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{y} - \mathbf{r}'|} + \\ & \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})} \exp(-\mu\tau) \int_G \frac{\exp(-\mu|\mathbf{r} - \mathbf{x}|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} J\left(\mathbf{x} - \tau \mathbf{k}, \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|}, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|}{c} - \frac{\tau}{c}\right) d\mathbf{x} d\tau, \end{aligned} \quad (10)$$

где $G(\mathbf{y}) = \{\mathbf{r} \in G: \alpha \mathbf{r} + (1 - \alpha)\mathbf{y} \in G, 0 < \alpha < 1\}$ часть области G , «видимой» из точки \mathbf{y} . Применение приближения (9) оправдано не только при $\sigma_d \ll 1$, но и в случае слабо меняющейся донной поверхности. В частности, для плоского дна приближение однократного рассеяния является точным решением начально-краевой задачи [14].

4. Решение обратной задачи

Принимая во внимание ограничение (5) для функции J и «звездность» области G относительно начала координат, перепишем соотношение (10) в точке $\mathbf{r} = \mathbf{o}$

$$\begin{aligned} I^+(\mathbf{o}, \mathbf{k}, t) = & 2\sigma_d \exp(-\mu d(\mathbf{o}, -\mathbf{k})) \int_{G(\mathbf{y})} \left| \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \frac{\mathbf{y} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{y} - \mathbf{r}'|} \right| \exp(-\mu|\mathbf{y} - \mathbf{r}'|) \times \\ & \times \delta(\mathbf{r}') \delta\left(t - \frac{d(\mathbf{o}, -\mathbf{k})}{c} - \frac{|\mathbf{y} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{y} - \mathbf{r}'|} + \\ & \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{d(\mathbf{o}, -\mathbf{k})} \exp(-\mu\tau) \int_G \frac{\exp(-\mu|\mathbf{r} - \mathbf{x}|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \delta(\mathbf{x} - \tau \mathbf{k}) \delta\left(t - \frac{\tau}{c} - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|}{c}\right) d\mathbf{x} d\tau = \\ & = \frac{2\sigma_d}{|\mathbf{y}|} \exp(-\mu(d(\mathbf{o}, -\mathbf{k}) + |\mathbf{y}|)) \left| \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \right| \delta\left(t - \frac{d(\mathbf{o}, -\mathbf{k})}{c} - \frac{|\mathbf{y}|}{c}\right) + \\ & \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{d(\mathbf{o}, -\mathbf{k})} \exp(-\mu\tau) \frac{\exp(-\mu|\mathbf{r} - \tau \mathbf{k}|)}{|\mathbf{r} - \tau \mathbf{k}|} \delta\left(t - \frac{\tau}{c} - \frac{|\mathbf{r} - \tau \mathbf{k}|}{c}\right) d\tau = \\ & = \frac{2\sigma_d}{d(\mathbf{o}, -\mathbf{k})} \exp(-2\mu d(\mathbf{o}, -\mathbf{k})) |\mathbf{n}(-d(\mathbf{o}, -\mathbf{k})\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}| \delta\left(t - 2\frac{d(\mathbf{o}, -\mathbf{k})}{c}\right) + \\ & + \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{d(\mathbf{o}, -\mathbf{k})} \exp(-\mu\tau) \frac{\exp(-\mu|\tau \mathbf{k}|)}{|\tau \mathbf{k}|} \delta\left(t - \frac{\tau}{c} - \frac{|\tau \mathbf{k}|}{c}\right) d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

Для удобства, далее мы будем рассматривать только случай при $S_+(\mathbf{k})$, т.к. решение обратной задачи при условии $S_-(\mathbf{k})$ имеет аналогичные выкладки. Подставим (11) в условие (4), получим выражение для функции $P_+(t)$ в точке на приемной антенне.

$$P_+(t) = \int_{\tilde{\Omega}_-} S_+(\mathbf{k}) I^+(\mathbf{o}, \mathbf{k}, t) d\mathbf{k} = \int_{\Omega_-} S_+(\mathbf{k}) \frac{2\sigma_d}{d(\mathbf{o}, -\mathbf{k})} \exp(-2\mu d(\mathbf{o}, -\mathbf{k})) \times \\ \times |\mathbf{n}(-d(\mathbf{o}, -\mathbf{k})\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}| \times \delta\left(t - 2\frac{d(\mathbf{o}, -\mathbf{k})}{c}\right) d\mathbf{k} + \\ + \frac{\sigma}{2\pi} \int_{\tilde{\Omega}_-} S_-(\mathbf{k}) \int_0^{d(\mathbf{o}, -\mathbf{k})} \exp(-\mu\tau) \frac{\exp(-\mu|\tau\mathbf{k}|)}{|\tau\mathbf{k}|} \delta\left(t - \frac{\tau}{c} - \frac{|\tau\mathbf{k}|}{c}\right) d\tau d\mathbf{k}. \quad (12)$$

Пусть $P_+ = P$, $S_+ = S$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2) = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$, тогда учитывая параметризацию кривой γ ($\rho(\varphi) = d(\mathbf{o}, -\mathbf{k})$) из (12) находим

$$P(t) = \int_{\pi}^{\bar{\varphi}} S(\varphi) I^+(\mathbf{o}, \mathbf{k}(\varphi), t) d\varphi = \int_{\pi}^{\bar{\varphi}} S(\varphi) \frac{2\sigma_d}{\rho(\varphi)} \exp(-2\mu\rho(\varphi)) \times \\ \times |\mathbf{n}(\varphi) \cdot \mathbf{k}(\varphi)| \times \delta\left(t - 2\frac{\rho(\varphi)}{c}\right) d\varphi + \\ + \frac{\sigma}{2\pi} \int_{\pi}^{\bar{\varphi}} S(\varphi) \int_0^{\rho(\varphi)} \frac{\exp(-2\mu\tau)}{\tau} \delta\left(t - \frac{2\tau}{c}\right) d\tau d\varphi. \quad (13)$$

Учитывая, что

$$|\mathbf{n}(\varphi) \cdot \mathbf{k}(\varphi)| = \frac{\rho(\varphi)|\rho'(\varphi)|}{\sqrt{\rho'^2(\varphi) + \rho^2(\varphi)}},$$

из (13) получаем

$$P(t) = 2\sigma_d \int_{\pi}^{\bar{\varphi}} S(\varphi) \exp(-2\mu\rho(\varphi)) \frac{|\rho'(\varphi)|}{\sqrt{\rho'^2(\varphi) + \rho^2(\varphi)}} \delta\left(t - 2\frac{\rho(\varphi)}{c}\right) d\varphi + \\ + \frac{\sigma}{\pi} \int_{\pi}^{\bar{\varphi}} S(\varphi) \chi(ct/2)_{[0, \rho(\varphi)]} \frac{\exp(-\mu ct)}{2t} d\varphi. \quad (14)$$

Согласно предположениям пункта 2, функции $\rho(\varphi)$ монотонна и дифференцируема на интервалах $(\underline{\varphi}, \pi)$ и $(\pi, \bar{\varphi})$, следовательно, на интервале $(\underline{\varphi}, \pi)$ она имеет обратную функцию φ_- , а на интервале $(\pi, \bar{\varphi})$ — обратную функцию φ_+ . Если диаграмма направленности $S_+(\varphi) = 1$ при $\varphi \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, а $S_-(\varphi) = 1$ при $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, то из (14) находим

$$P(t) = \frac{\sigma_d c \exp(-\mu ct)}{\sqrt{1/\varphi_{\pm}^2(ct/2) + (ct/2)^2}} + \frac{\sigma}{2\pi} \frac{\exp(-\mu ct)}{t} \int_l^{\infty} \chi(ct/2)_{[0, \varphi^{-1}(\rho)]} \varphi'(\rho) d\rho. \quad (15)$$

следовательно

$$P(t) = \frac{\sigma_d c \exp(-\mu ct)}{\sqrt{1/\varphi_+^2(ct/2) + (ct/2)^2}} + \frac{\sigma}{2\pi} \frac{\exp(-\mu ct)}{t} (\varphi(\infty) - \varphi(ct/2)), \quad \varphi(\infty) = \frac{3\pi}{2}. \quad (16)$$

Возвращаясь к обозначению $\rho = ct/2$ ($t = 2\rho/c$), из (15) получаем

$$A(\varphi(\rho)) = \frac{\sigma c \exp(-2\mu\rho)}{4\pi\rho} \left(\frac{3\pi}{2} - \varphi(\rho) \right),$$

$$\frac{(P(2\rho/c) - A(\varphi(\rho)))^2}{\sigma_d^2 c^2 \exp(-4\mu\rho) - \rho^2 (P(2\rho/c) - A(\varphi(\rho)))^2} = \varphi'^2(\rho). \quad (17)$$

Так как $\rho(\pi) = l$, то $\varphi_{\pm}(l) = \pi$ и решение дифференциального уравнения (16) можно записать в виде

$$\varphi(\rho) = \pi \pm \int_l^{\rho} \frac{(P(2s/c) - A(\varphi(s))) ds}{\left(\sigma_d^2 c^2 \exp(-4\mu s) - \rho^2 [P(2s/c) - A(\varphi(s))]^2 \right)^{1/2}}. \quad (18)$$

Знаки \pm в выражении (17) выбраны в соответствии с монотонным убыванием функции $\varphi_-(\rho)$ на интервале $(\underline{\varphi}, \pi)$ и монотонным возрастанием функции $\varphi_+(\rho)$ на интервале $(\pi, \overline{\varphi})$.

5. Численные примеры

В этом пункте на ряде тестовых примеров мы проведем анализ численного решения обратной задачи (1)–(4). Как было показано в разделе 4, решение обратной задачи сводится к вычислению интегралов (17). В приложениях, например в задачах зондирования донной поверхности, мы имеем дело с дискретным множеством измеренных значений функций $P_{\pm}(\rho/c)$, $\rho = \rho_i$, $i = 0, \dots, n$. Учитывая это замечание, из соотношений (17) получаем рекуррентные формулы для определения φ_{\pm}^i :

$$\varphi_{\pm}^{i+1} = \varphi_{\pm}^i \pm \int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \frac{(P(2\rho/c) - A(\varphi(\rho))) d\rho}{\left(\sigma_d^2 c^2 \exp(-4\mu\rho) - \rho^2 [P(2\rho/c) - A(\varphi(\rho))]^2 \right)^{1/2}} \approx$$

$$\approx \varphi_{\pm}^i \pm \frac{P(2\rho_i/c) - A(\varphi(\rho_i))}{\left(\sigma_d^2 c^2 \exp(-4\mu\rho_i) - \rho_i^2 [P(2\rho_i/c) - A(\varphi(\rho_i))]^2 \right)^{1/2}}, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (19)$$

где $\varphi_{\pm}^0 = \pi$, $\rho_0 = l$ и для аппроксимации интеграла по элементарному отрезку использована формула прямоугольников. Также будем рассматривать аппроксимацию по

формуле трапеций

$$\varphi_{\pm}^{i+1} = \varphi_{\pm}^i \pm \left(\frac{P_{\pm}(2\rho_i/c)(\rho_{i+1} - \rho_i)}{\sqrt{\sigma_d^2 c^2 \exp(-4\mu\rho_i) - \rho_i^2 P_{\pm}^2(2\rho_i/c)}} + \frac{P_{\pm}(2\rho_{i+1}/c)(\rho_{i+1} - \rho_i)}{\sqrt{\sigma_d^2 c^2 \exp(-4\mu\rho_{i+1}) - \rho_{i+1}^2 P_{\pm}^2(2\rho_{i+1}/c)}} \right) / 2, \quad i = 0, \dots, n-1. \quad (20)$$

В вычислительных экспериментах предполагалось, что расстояние между источником и донной поверхностью в направлении $\mathbf{k} = (0, -1)$ равно 30 метрам, то есть $\rho_0 = l = 30$. Скорость распространения звука предполагается постоянной во всей области зондирования $c = 1500$ м/сек, коэффициент затухания и донного рассеяния имели значения $\mu = 0.018 \text{ м}^{-1}$, $\sigma_d = 1$. Облучение поверхности осуществлялось с дальностью зондирования $\rho_n = 300$ м с шагом дискретизации $\Delta\rho = \rho_{i+1} - \rho_i$, который варьировался на промежутке $[0.004, 0.4]$ м.

В первом численном эксперименте γ представляет собой горизонтальную прямую (плоское дно) и задается в следующем виде: Как видно из рис. 2а и рис. 2б погрешность формул (18) не превосходит значений 47,5% и 15% при $\Delta\rho = 0.4$ и $\Delta\rho = 0.04$, соответственно, а вычисления по формулам (19) приводят к ошибке не превосходящей значений 3.6% и 1%, соответственно.

В следующем тесте кривая γ задается следующими параметрическим уравнениями:

$$\begin{cases} r_1 = -\rho \sin \varphi, \\ r_2 = -l^2/\rho. \end{cases} \quad (21)$$

На рис. 3 представлено решение обратной задачи для кривой γ , описываемой параметрическим уравнениями (21) в зависимости от частоты дискретизации. Как и следовало ожидать, точность восстановления кривой возрастает с уменьшением шага дискретизации. Ориентируясь на приложения теоретических результатов к задачам гидролокации, отметим следующее. Разрешение по дистанции гидролокатора бокового обзора, работающего на частотах порядка 100 – 450 кГц составляет величины порядка 2 – 5 см [17]. Поэтому для практики представляют интерес графики, приведенные на рис. 2б, 2с. Максимальная относительная ошибка реконструкции кривой γ по формулам (19) при $\Delta\rho = 0.04$ м не превосходит 17.5%, а при $\Delta\rho = 0.01$ м не превосходит 8.7%. При повышении разрешающей способности необходимо повышать частоту зондирующего излучения, которая в свою очередь сдерживается ростом коэффициента ослабления звука и, соответственно, дальностью зондирования [17].

Представляет несомненный интерес исследование устойчивости решения обратной задачи при возмущении исходных данных. Предварительные исследования показали, что точность и даже сама возможность восстановления кривой γ определяется не только уровнем шума при возмущении функций P_{\pm} , но величиной $\rho'(\varphi)$. Решение обратной задачи особенно чувствительно к ошибкам в исходных данных, если величина производной функции $\rho(\varphi)$ мала. В дальнейшем мы также намерены исследовать задачу нахождения диффузно отражающей кривой в рассеивающей

среде ($\sigma \neq 0$). Анализ таких задач является предметом наших дальнейших публикаций.

Список литературы

- [1] В.Р. Кирейтов, *Обратные задачи фотометрии*, ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1983.
- [2] Р.Д. Урик, *Основы гидроакустики*, Судостроение, Л., 1978.
- [3] А.В. Богородский, Г.В. Яковлев, Е.А. Корепин, А.К. Должииков, *Гидроакустическая техника исследования и освоения океана*, Гидрометеиздат, Л., 1984.
- [4] Д.С. Аниконов, А.Е. Ковтанюк, И.В. Прохоров, *Использование уравнения переноса в томографии*, Логос, М., 2000.
- [5] Yu.E. Anikonov, *Inverse Problems for Kinetic and Other Evolution Equations*, VSP, Utrecht, 2001.
- [6] В.В. Тучин, *Оптика биологических тканей. Методы рассеяния света в медицинской диагностике*, Физматлит, М., 2013.
- [7] И. В. Прохоров, В. В. Золотарев, И. Б. Агафонов, “Задача акустического зондирования во флуктуирующем океане”, *Дальневост. матем. журн.*, **11:1** (2011), 76–87.
- [8] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, “Исследование задачи акустического зондирования морского дна методами теории переноса излучения”, *Акустический журнал*, **61:3** (2015), 400–408.
- [9] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, В. А. Кан, “Об одной задаче определения рельефа дна флуктуирующего океана”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **18:2** (2015), 99–110.
- [10] V.A. Kan, I.V. Prokhorov, A.A. Sushchenko, “Determining the bottom surface according to data of side-scan sonars”, *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, **10035** (2016), 1003518.
- [11] В. А. Шарафутдинов, “О восстановлении ламбертовской оптической кривой по двум ее изображениям”, *Доклады АН*, **249:3** (1979), 565–568.
- [12] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, “О корректности задачи Коши для уравнения переноса излучения с френелевскими условиями сопряжения”, *Сибирский математический журнал*, **56:4** (2015), 922–933.
- [13] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, А. Ким, “Начально-краевая задача для уравнения переноса излучения с диффузными условиями сопряжения”, *Сибирский журнал индустриальной математики*, **20:1** (2017), 75–85.
- [14] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, “Задача Коши для уравнения переноса излучения в неограниченной среде”, *Дальневосточный математический журнал*, **18:1** (2018), 101–111.
- [15] A.A. Amosov, “Initial-Boundary Value Problem for the Non-Stationary Radiative Transfer Equation with Fresnel Reflection and Refraction Conditions”, *Journal of Mathematical Sciences*, **235:2** (2018), 117–137.
- [16] A.A. Amosov, “Initial-Boundary Value Problem for the Nonstationary Radiative Transfer Equation with Diffuse Reflection and Refraction Conditions”, *Journal of Mathematical Sciences*, **231:3** (2018), 279–337.
- [17] В. Лекомцев, “Гидроакустические средства визуализации для необитаемых подводных аппаратов”, *Современные технологии автоматизации*, 2013, № 3, 78–82.