Дальневосточный математический журнал. 2019. Т. 19. № 1. С. 1–8

УДК 517.958
MSC2010 35Q20 +35Q60

© А. В. Кан[1,2], И. В. Прохоров[1]

!!!//Определение диффузно отражающей поверхности в рассеивающих (мутных) средах

Рассматривается обратная задача для нестационарного уравнения переноса излучения, заключающаяся в определении диффузно отражающей поверхности по заданным функционалам от плотности потока излучения. Для точечного импульсного источника в приближении однократного рассеяния при заданных коэффициентах объемного и донного рассеяний получено нелинейное дифференциальное уравнение для определения профиля поверхности. В вычислительных экспериментах на тестовых примерах рассматривается влияние объмного рассеяния и возмущении исходных данных на восстановлении ламбертовской кривой.

Ключевые слова: *уравнение переноса излучения, диффузное отражение, закон Ламберта, обратная задача, объемное рассеяние*

1. Введение

Обратные задачи для кинетических уравнений имеют многочисленные практические приложения. Это, прежде всего, дистанционное зондирование поверхности Земли, фотометрия и гидролокация морского дна, оптическая и рентгеновская томография [1–10]. В работе рассматривается обратная задача для нестационарного уравнения переноса излучения в области с неизвестной границей, на которой заданы условия диффузного отражения о закону Ламберта. Требуется найти неизвестную границу при некотором условии переопределения решения начально-краевой задачи. С физической точки зрения такая постановка задачи наиболее близка к проблемам мониторинга земной поверхности и морского дна с помощью авиационных радиолокационных станций и гидролокаторов бокового обзора. В данной работе рассмотрена упрощенная двумерная модель локации ламбертовской кривой. Применение такой модели оправдано для узкой в горизонтальной плоскости диаграммы направленности приемной антенны и при небольшой скорости движения источника излучения, в сравнении со скоростью распространений сигнала в среде [9].

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7,
[2] Дальневосточный федеральный университет, 690050, г. Владивосток, ул. Суханова, 8
Электронная почта: `kan.va@inbox.ru` (А. В. Кан), `prokhorov@iam.dvo.ru` (И. В. Прохоров).

В трехмерном случае эта задача рассматривалась в приближении однократного рассеяния и малости отклонения отражающей поверхности от некоторого среднего уровня. При условии, что диаграмма направленности приемной антенны является узкой в горизонтальной плоскости получена явная формула для решения обратной задачи [9, 10]. Проведен численный анализ влияния объемного рассеяния и ширины диаграммы направленности на качество реконструкции диффузно-отражающей поверхности.

Задачи определения диффузно-отражающих поверхностей для стационарных моделей переноса излучения рассматривались в работах [1,11]. В частности, в [11] предложен метод восстановления ламбертовской оптической кривой по двум ее изображениям и показана его устойчивость по отношению к малым отклонениям от ламбертовости и ошибкам измерений. Методы исследования обратной задачи, используемые для стационарных и нестационарных моделей, несмотря на некоторые близкие аспекты, достаточно сильно отличаются друг от друга. В настоящей работе исследована обратная задача нестационарного уравнения переноса излучения и для определения формы ламбертовской кривой получено нелинейное дифференциальной уравнение, имеющее решение в квадратурах. Проведены численные эксперименты на сравнительно простых тестовых примерах.

2. Постановка задачи

В работе рассматривается уравнение переноса излучения следующего вида [7–9, 12–16]:

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{k}\cdot\nabla_r + \mu\right) I(\mathbf{r},\mathbf{k},t) = \frac{\sigma}{2\pi}\int\limits_{\Omega} I(\mathbf{r},\mathbf{k}',t)d\mathbf{k}' + J(\mathbf{r},\mathbf{k},t), \tag{1}$$

где $\mathbf{r}\in\mathbb{R}^2, t\in[0,T]$ и волновой вектор $\mathbf{k}$ принадлежит единичной окружности $\Omega=\{\mathbf{k}\in\mathbb{R}^2 : |\mathbf{k}|=1\}$. Функция $I(\mathbf{r},\mathbf{k},t)$ интерпретируется как плотность потока энергии волны в момент времени t в точке $\mathbf{r}$, распространяющейся в направлении $\mathbf{k}$ со скоростью c. Величины μ и σ имеют смысл коэффициентов затухания и рассеяния, а функция J описывает источники звукового поля.

Присоединим к уравнению (1) начальные и граничные условия

$$I^-(\mathbf{r},\mathbf{k},t)|_{t<0} = 0, \qquad (\mathbf{r},\mathbf{k}) \in G\times\Omega, \tag{2}$$

$$I^-(\mathbf{y},\mathbf{k},t) = 2\sigma_d \int\limits_{\Omega_+(\mathbf{y})} |\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}'| I^+(\mathbf{y},\mathbf{k}',t)(\mathbf{y},\mathbf{k}',t)d\mathbf{k} \quad (\mathbf{y},\mathbf{k},t)\in\Gamma^-. \tag{3}$$

Здесь $I^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{k},t) = \lim\limits_{\varepsilon\to-0} I(\mathbf{y}\pm\varepsilon\mathbf{k},\mathbf{k},t\pm\varepsilon/c)$,

$$\Gamma^{\pm} = \{(\mathbf{y},\mathbf{k},t)\in\gamma\times\Omega_{\pm}(\mathbf{y})\times(0,T)\}, \quad \Omega_{\pm}(\mathbf{y}) = \{\mathbf{k}\in\Omega : \operatorname{sgn}(\mathbf{n}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{k}) = \pm 1\},$$

где $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ – единичный вектор внешней нормали к границе области G. Условие (3) означает, что отражающие свойства дна определяются только диффузным отражением по закону Ламберта с коэффициентом отражения σ_d.

Уравнение (1) с начальным и граничным условиями (2), (3) при заданных μ,σ,σ_d,J, γ образуют начально-краевую задачу для нахождения неизвестной функции I на множестве $G\times\Omega\times(0,T)$

Дополним систему соотношений (1), (2), (3) следующими условиями

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}_-} S_+(\mathbf{k})I^+(\mathbf{o},\mathbf{k},t)d\mathbf{k} = P_+(t), \quad \int\limits_{\widetilde{\Omega}_+} S_-(\mathbf{k})I^+(\mathbf{o},\mathbf{k},t)d\mathbf{k} = P_-(t), \tag{4}$$

где $\Omega_\pm=\{\mathbf{k}\in\Omega:\mathbf{k}=\pm1\}$, $S_+(\mathbf{k})=0$ при $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}_+=\{\mathbf{k}\in\Omega:k_1>0,k_2<0\}$ и $S_-(\mathbf{k})=0$ при $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}_-\{\mathbf{k}\in\Omega:k_1,k_2<0\}$. Не умаляя общности считаем, что точка $\mathbf{o}=(0,0)$ совпадает с началом декартовой системы координат, а кривая γ определена строго ниже оси абсцисс .

В реальной трехмерной задаче акустического зондирования дна океана с помощью гидролокатора бокового обзора функции $S_-(\mathbf{k})$ и $S_+(\mathbf{k})$ характеризует диаграммы направленности приемных антенн по разным «бортам» носителя антенны [7–9], а функции $P_\pm(t)$ определяют суммарную интенсивность, измеряемую двумя антеннами в различные моменты времени t.

В работе рассматривается следующая обратная задача. Определить кривую γ из соотношений (1)–(4) в которых μ,σ_d,σ,J и функции $P_\pm,S_\pm$ известны.

Будем предполагать, что объемное рассеяние в среде пренебрежимо мало,что соответствует случаю $\sigma=0$, а функция J, описывающая точечный импульсный источник звука, имеет вид

$$J(\mathbf{r},\mathbf{k},t) = \delta(\mathbf{r})\,\delta(t). \tag{5}$$

Процесс распространения эхосигналов происходит в неограниченной области $G\in\mathbb{R}^2$, которая является звёздной относительно начала координат и ее граница $\gamma=\partial G$ задана параметрическими уравнениями:

$$r_1 = \ -\rho(\varphi)\sin\varphi, \quad r_2 = \rho(\varphi)\cos\varphi. \tag{6}$$

Функция $\rho(\varphi)$ определена непрерывна на множестве $(\underline{\varphi},\overline{\varphi})$, где $\dfrac{\pi}{2}<\underline{\varphi}<\pi<\overline{\varphi}<\dfrac{3\pi}{2}$, дифференцируема при $\varphi\in(\underline{\varphi},\pi)\cup(\pi,\overline{\varphi})$, монотонно убывает на интервале $(\underline{\varphi},\pi)$ и монотонно возрастает на промежутке $(\pi,\overline{\varphi})$. В точках $\varphi=\underline{\varphi}$ и $\varphi=\overline{\varphi}$ функция $\rho(\varphi)$ стремится к бесконечности. Таким образом, кривая γ делит плоскость $\mathbb{R}^2$ на две неограниченные области: G и $\mathbb{R}^2\setminus\overline{G}$.

Кроме того, при решении обратной задачи (1),(2),(3),(4) задано значение функции ρ в точке π: $\rho(\pi)=l$. Последнее условие типично в подобного рода задачах [1,11] и означает, что известна одна точка искомой кривой. Уравнения (6), описывающие поверхность γ, в задачах акустической локации характеризуют изменение рельефа морского дна и в этом случае равенство $\rho(\pi)=l$ задает высоту, на которой находится приемопередающая антенна относительно донной поверхности (см. рис. 1).

3. Приближение однократного рассеяния

Решение начально-краевой задачи (1),(2),(3) эквивалентно решению следующего уравнения интегрального типа [ ]:

$$
\begin{gathered}
I(\mathbf{r},\mathbf{k},t) = \int\limits_0^{d(\mathbf{r},-\mathbf{k})} \exp(-\mu\tau) J\left(\mathbf{r}-\tau\mathbf{k},\mathbf{k},t-\frac{\tau}{c}\right)d\tau + \\
+ 2\sigma_d \exp(-\mu d(\mathbf{r},-\mathbf{k})) \int\limits_{\Omega_+(\mathbf{y})} |\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}'| I^+\left(\mathbf{y},\mathbf{k}',t-\frac{d(\mathbf{r},-\mathbf{k})}{c}\right)d\mathbf{k}' + \\
+ \frac{\sigma}{2\pi}\int\limits_0^{d(\mathbf{r},-\mathbf{k})} \exp(-\mu\tau)\int\limits_{\Omega} I\left(\mathbf{r}-\tau\mathbf{k},\mathbf{k}',t-\frac{\tau}{c}\right)d\mathbf{k}'d\tau, \quad (7)
\end{gathered}
$$

где $\mathbf{y}=\mathbf{r}-d(\mathbf{r},-\mathbf{k})\mathbf{k}\in\partial G$ и $d(\mathbf{r},-\mathbf{k})$ – расстояние от точки $\mathbf{r}\in G$ в направлении $-\mathbf{k}$ до границы области G. Если луч, исходящий из точки $\mathbf{r}$ в направлении $-\mathbf{k}$ не пересекает границу области G, то для функции $I(\mathbf{r},\mathbf{k},t)$ справедлива явная формула

$$
I(\mathbf{r},\mathbf{k},t) = \int\limits_0^{\infty} \exp(-\mu\tau) J\left(\mathbf{r}-\tau\mathbf{k},\mathbf{k},t-\frac{\tau}{c}\right)d\tau. \quad (8)
$$

Заметим, что в этом случае $I(\mathbf{r},\mathbf{k},t)=0$ когда луч, исходящий из точки $\mathbf{r}$ в направлении $-\mathbf{k}$, не имеет общих точек с носителем функции J в области G.

Возьмем в качестве нулевого приближения для решения уравнения (7) функцию

$$
I_0(\mathbf{r},\mathbf{k},t) = \int\limits_0^{d(\mathbf{r},-\mathbf{k})} \exp(-\mu\tau) J\left(\mathbf{r}-\tau\mathbf{k},\mathbf{k},t-\frac{\tau}{c}\right)d\tau
$$

и построим процесс простых итераций. На первом шаге итерационного процесса для решения начально-краевой задачи (1),(2),(3) получим, так называемое, приближение однократного рассеяния

$$
\begin{gathered}
I(\mathbf{r},\mathbf{k},t) = \int\limits_0^{d(\mathbf{r},-\mathbf{k})} \exp(-\mu\tau) J\left(\mathbf{r}-\tau\mathbf{k},\mathbf{k},t-\frac{\tau}{c}\right)d\tau + \\
2\sigma_d \exp\left(-\mu d(\mathbf{r},-\mathbf{k})\right) \int\limits_{\Omega_+(\mathbf{y})} |\mathbf{n}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{k}'| \int\limits_0^{d(\mathbf{y},-\mathbf{k}')} \exp(-\mu\tau)\times \\
\times J\left(\mathbf{y}-\tau\mathbf{k}',\mathbf{k}',t-\frac{d(\mathbf{r},-\mathbf{k})}{c}-\frac{\tau}{c}\right)d\tau d\mathbf{k}' + \\
+\frac{\sigma}{2\pi}\int\limits_0^{d(\mathbf{r},-\mathbf{k})} \exp(-\mu\tau)\int\limits_{\Omega}\int\limits_0^{d(\mathbf{r}-\tau\mathbf{k},-\mathbf{k}')} \exp(-\mu t') J\left(\mathbf{r}-t'\mathbf{k}'-\tau\mathbf{k},\mathbf{k}',t-\frac{t'}{c}-\frac{\tau}{c}\right)dt'd\mathbf{k}'d\tau. \\
(9)
\end{gathered}
$$

В (9) сделаем замену переменных $\mathbf{r}'=\mathbf{y}-\tau\mathbf{k}'$, $\mathbf{x}=\mathbf{r}-t'\mathbf{k}'$. Так как $d\tau d\mathbf{k}'=\dfrac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'-\mathbf{y}|}$, $dt'd\mathbf{k}'=\dfrac{d\mathbf{x}}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}$ то из (9) вытекает

$$
\begin{gathered}
I(\mathbf{r},\mathbf{k},t)=\int\limits_0^{d(\mathbf{r},-\mathbf{k})}\exp(-\mu\tau)J\left(\mathbf{r}-\tau\mathbf{k},\mathbf{k},t-\frac{\tau}{c}\right)d\tau+\\
2\sigma_d\exp\left(-\mu d(\mathbf{r},-\mathbf{k})\right)\int\limits_{G(\mathbf{y})}\left|\mathbf{n}(\mathbf{y})\cdot\frac{\mathbf{y}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{y}-\mathbf{r}'|}\right|\exp(-\mu|\mathbf{r}'-\mathbf{y}|)\times\\
\times J\left(\mathbf{r}',\frac{\mathbf{y}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{y}-\mathbf{r}'|},t-\frac{d(\mathbf{r},-\mathbf{k})}{c}-\frac{|\mathbf{y}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{y}-\mathbf{r}'|}+\\
\frac{\sigma}{2\pi}\int\limits_0^{d(\mathbf{r},-\mathbf{k})}\exp(-\mu\tau)\int\limits_G\frac{\exp(-\mu|\mathbf{r}-\mathbf{x}|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}J\left(\mathbf{x}-\tau\mathbf{k},\frac{\mathbf{r}-\mathbf{x}}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|},t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}{c}-\frac{\tau}{c}\right)d\mathbf{x}d\tau,
\end{gathered}
\tag{10}
$$

где $G(\mathbf{y})=\{\mathbf{r}\in G:\alpha\mathbf{r}+(1-\alpha)\mathbf{y}\in G, 0<\alpha<1\}$ часть области G, «видимой» из точки $\mathbf{y}$. Применение приближения (9) оправдано не только при $\sigma_d\ll 1$, но и в случае слабо меняющейся донной поверхности. В частности, для плоского дна приближение однократного рассеяния является точным решением начально-краевой задачи [14].

4. Решение обратной задачи

Принимая во внимание ограничение (5) для функции J и «звездность» области G относительно начала координат, перепишем соотношение (10) в точке $\mathbf{r}=\mathbf{o}$

$$
\begin{gathered}
I^+(\mathbf{o},\mathbf{k},t)=2\sigma_d\exp\left(-\mu d(\mathbf{o},-\mathbf{k})\right)\int\limits_{G(\mathbf{y})}|\mathbf{n}(\mathbf{y})\cdot\frac{\mathbf{y}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{y}-\mathbf{r}'|}|\exp(-\mu|\mathbf{y}-\mathbf{r}'|)\times\\
\times\delta\left(\mathbf{r}'\right)\delta\left(t-\frac{d(\mathbf{o},-\mathbf{k})}{c}-\frac{|\mathbf{y}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{y}-\mathbf{r}'|}+\\
\frac{\sigma}{2\pi}\int\limits_0^{d(\mathbf{o},-\mathbf{k})}\exp(-\mu\tau)\int\limits_G\frac{\exp(-\mu|\mathbf{r}-\mathbf{x}|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}\delta\left(\mathbf{x}-\tau\mathbf{k}\right)\delta\left(t-\frac{\tau}{c}-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}{c}\right)d\mathbf{x}d\tau=\\
=\frac{2\sigma_d}{|\mathbf{y}|}\exp\left(-\mu(d(\mathbf{o},-\mathbf{k})+|\mathbf{y}|)\right)\left|\mathbf{n}(\mathbf{y})\cdot\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right|\delta\left(t-\frac{d(\mathbf{o},-\mathbf{k})}{c}-\frac{|\mathbf{y}|}{c}\right)+\\
\frac{\sigma}{2\pi}\int\limits_0^{d(\mathbf{o},-\mathbf{k})}\exp(-\mu\tau)\frac{\exp(-\mu|\mathbf{r}-\tau\mathbf{k}|)}{|\mathbf{r}-\tau\mathbf{k}|}\delta\left(t-\frac{\tau}{c}-\frac{|\mathbf{r}-\tau\mathbf{k}|}{c}\right)d\tau=\\
=\frac{2\sigma_d}{d(\mathbf{o},-\mathbf{k})}\exp\left(-2\mu d(\mathbf{o},-\mathbf{k})\right)|\mathbf{n}(-d(\mathbf{o},-\mathbf{k})\mathbf{k})\cdot\mathbf{k}|\,\delta\left(t-2\frac{d(\mathbf{o},-\mathbf{k})}{c}\right)+\\
+\frac{\sigma}{2\pi}\int\limits_0^{d(\mathbf{o},-\mathbf{k})}\exp(-\mu\tau)\frac{\exp(-\mu|\tau\mathbf{k}|)}{|\tau\mathbf{k}|}\delta\left(t-\frac{\tau}{c}-\frac{|\tau\mathbf{k}|}{c}\right)d\tau.
\end{gathered}
\tag{11}
$$

Для удобства, далее мы будем рассматривать только случай при $S_+(\mathbf{k})$, т.к. решение обратной задачи при условии $S_-(\mathbf{k})$ имеет аналогичные выкладки. Подставим (11) в условие (4), получим выражение для функции $P_+(t)$ в точке на приемной антенне.

$$P_+(t) = \int\limits_{\widetilde{\Omega}_-} S_+(\mathbf{k}) I^+(\mathbf{o},\mathbf{k},t) d\mathbf{k} = \int\limits_{\Omega_-} S_+(\mathbf{k}) \frac{2\sigma_d}{d(\mathbf{o},-\mathbf{k})} \exp\left(-2\mu d(\mathbf{o},-\mathbf{k})\right) \times$$
$$\times |\mathbf{n}(-d(\mathbf{o},-\mathbf{k})\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}| \times \delta\left(t - 2\frac{d(\mathbf{o},-\mathbf{k})}{c}\right) d\mathbf{k} +$$
$$+ \frac{\sigma}{2\pi} \int\limits_{\widetilde{\Omega}_-} S_-(\mathbf{k}) \int\limits_0^{d(\mathbf{o},-\mathbf{k})} \exp(-\mu\tau) \frac{\exp(-\mu|\tau\mathbf{k}|)}{|\tau\mathbf{k}|} \delta\left(t - \frac{\tau}{c} - \frac{|\tau\mathbf{k}|}{c}\right) d\tau d\mathbf{k}. \quad (12)$$

Пусть $P_+ = P$, $S_+ = S$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2) = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$, тогда учитывая параметризацию кривой γ ($\rho(\varphi) = d(\mathbf{o}, -\mathbf{k})$) из (12) находим

$$P(t) = \int\limits_\pi^{\overline{\varphi}} S(\varphi) I^+(\mathbf{o},\mathbf{k}(\varphi),t) d\varphi = \int\limits_\pi^{\overline{\varphi}} S(\varphi) \frac{2\sigma_d}{\rho(\varphi)} \exp\left(-2\mu\rho(\varphi)\right) \times$$
$$\times |\mathbf{n}(\varphi) \cdot \mathbf{k}(\varphi)| \times \delta\left(t - 2\frac{\rho(\varphi)}{c}\right) d\varphi +$$
$$+ \frac{\sigma}{2\pi} \int\limits_\pi^{\overline{\varphi}} S(\varphi) \int\limits_0^{\rho(\varphi)} \frac{\exp(-2\mu\tau)}{\tau} \delta\left(t - \frac{2\tau}{c}\right) d\tau d\varphi. \quad (13)$$

Учитывая, что
$$|\mathbf{n}(\varphi) \cdot \mathbf{k}(\varphi)| = \frac{\rho(\varphi)|\rho'(\varphi)|}{\sqrt{\rho'^2(\varphi) + \rho^2(\varphi)}},$$

из (13) получаем

$$P(t) = 2\sigma_d \int\limits_\pi^{\overline{\varphi}} S(\varphi) \exp\left(-2\mu\rho(\varphi)\right) \frac{|\rho'(\varphi)|}{\sqrt{\rho'^2(\varphi) + \rho^2(\varphi)}} \delta\left(t - 2\frac{\rho(\varphi)}{c}\right) d\varphi +$$
$$+ \frac{\sigma}{\pi} \int\limits_\pi^{\overline{\varphi}} S(\varphi) \chi(ct/2)_{[0,\rho(\varphi)]} \frac{\exp(-\mu ct)}{2t} d\varphi. \quad (14)$$

Согласно предположениям пункта 2, функции $\rho(\varphi)$ монотонна и дифференцируема на интервалах $(\underline{\varphi}, \pi)$ и $(\pi, \overline{\varphi})$, следовательно, на интервале $(\underline{\varphi}, \pi)$ она имеет обратную функцию φ_-, а на интервале $(\pi, \overline{\varphi})$ — обратную функцию φ_+. Если диаграмма направленности $S_+(\varphi) = 1$ при $\varphi \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, а $S_-(\varphi) = 1$ при $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, то из (14) находим

$$P(t) = \frac{\sigma_d c \exp(-\mu ct)}{\sqrt{1/\varphi'^2_\pm(ct/2) + (ct/2)^2}} + \frac{\sigma}{2\pi} \frac{\exp(-\mu ct)}{t} \int\limits_l^\infty \chi(ct/2)_{[0,\varphi^{-1}(\rho)]} \varphi'(\rho) d\rho. \quad (15)$$

следовательно

$$P(t) = \frac{\sigma_d c \exp(-\,\mu ct)}{\sqrt{1/\varphi_+'^2(ct/2) + (ct/2)^2}} + \frac{\sigma}{2\pi}\frac{\exp(-\,\mu ct)}{t}\left(\varphi(\infty) - \varphi(ct/2)\right), \quad \varphi(\infty) = \frac{3\pi}{2}. \tag{16}$$

Возвращаясь к обозначению $\rho = ct/2$ $(t = 2\rho/c)$, из (15) получаем

$$A(\varphi(\rho)) = \frac{\sigma c \exp(-\,2\mu\rho)}{4\pi\rho}\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi(\rho)\right),$$

$$\frac{(P(2\rho/c) - A(\varphi(\rho)))^2}{\sigma_d^2 c^2 \exp(-\,4\mu\rho) - \rho^2(P(2\rho/c) - A(\varphi(\rho)))^2} = \varphi'^2(\rho). \tag{17}$$

Так как $\rho(\pi) = l$, то $\varphi_\pm(l) = \pi$ и решение дифференциального уравнения (16) можно записать в виде

$$\varphi(\rho) = \pi \pm \int\limits_l^\rho \frac{\Big(P(2\rho/c) - A(\varphi(\rho))\Big)ds}{\Big(\sigma_d^2 c^2 \exp(-\,4\mu\rho) - \rho^2[P(2\rho/c) - A(\varphi(\rho))]^2\Big)^{1/2}}. \tag{18}$$

Знаки $\pm$ в выражении (17) выбраны в соответствии с монотонным убыванием функции $\varphi_-(\rho)$ на интервале $(\underline{\varphi},\pi)$ и монотонным возрастанием функции $\varphi_+(\rho)$ на интервале $(\pi,\overline{\varphi})$.

5. Численные примеры

В этом пункте на ряде тестовых примеров мы проведем анализ численного решения обратной задачи (1)—(4). Как было показано в разделе 4, решение обратной задачи сводится к вычислению интегралов (17). В приложениях, например в задачах зондирования донной поверхности, мы имеем дело с дискретным множеством измеренных значений функций $P_\pm(\rho/c), \rho = \rho_i, i = 0, ..., n$. Учитывая это замечание, из соотношений (17) получаем рекуррентные формулы для определения $\varphi_\pm^i$:

$$\varphi_\pm^{i+1} = \varphi_\pm^i \pm \int\limits_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \frac{P_\pm(2\tau/c)d\tau}{\sqrt{\sigma_d^2 c^2 \exp(-\,4\mu\tau) - \tau^2 P_\pm^2(2\tau/c)}} \approx$$

$$\approx \varphi_\pm^i \pm \frac{P_\pm(2\rho_i/c)(\rho_{i+1} - \rho_i)}{\sqrt{\sigma_d^2 c^2 \exp(-\,4\mu\rho_i) - \rho_i^2 P_\pm^2(2\rho_i/c)}}, \qquad i = 0, ..., n-1, \tag{19}$$

где $\varphi_\pm^0 = \pi$, $\rho_0 = l$ и для аппроксимации интеграла по элементарному отрезку использована формула прямоугольников. Также будем рассматривать аппроксимацию по формуле трапеций

$$\varphi_\pm^{i+1} = \varphi_\pm^i \pm \left(\frac{P_\pm(2\rho_i/c)(\rho_{i+1} - \rho_i)}{\sqrt{\sigma_d^2 c^2 \exp(-\,4\mu\rho_i) - \rho_i^2 P_\pm^2(2\rho_i/c)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{P_\pm(2\rho_{i+1}/c)(\rho_{i+1} - \rho_i)}{\sqrt{\sigma_d^2 c^2 \exp(-\,4\mu\rho_{i+1}) - \rho_{i+1}^2 P_\pm^2(2\rho_{i+1}/c)}}\right)/2, \qquad i = 0, ..., n-1. \tag{20}$$

В вычислительных экспериментах предполагалось, что расстояние между источником и донной поверхностью в направлении $\mathbf{k}=(0,-1)$ равно 30 метрам, то есть $\rho_0=l=30$. Скорость распространения звука предполагается постоянной во всей области зондирования c=1500м/сек, коэффициент затухания и донного рассеяния имели значения $\mu=0.018$м$^{-1}$, $\sigma_d=1$. Облучение поверхности осуществлялось с дальностью зондирования ρ_n=300м с шагом дискретизации $\Delta\rho=\rho_{i+1}-\rho_i$, который варьировался на промежутке [0.004, 0.4]м.

В первом численном эксперименте γ представлет собой горизонтальную прямую (плоское дно) и задается в следующем виде: Как видно из рис. 2a и рис. 2b погрешность формул (18) не превосходит значений 47,5% и 15% при $\Delta\rho=0.4$ и $\Delta\rho=0.04$, соотвественно, а вычисления по формулам (19) приводят к ошибке не превосходящей значений 3.6% и 1%, соотвественно.

В следующем тесте кривая γ задается следующими параметрическим уравнениями:

$$\begin{cases} r_1 = -\rho\sin\varphi, \\ r_2 = -l^2/\rho. \end{cases} \tag{21}$$

На рис. 3 представлено решение обратной задачи для кривой γ, описываемой параметрическим уравнениями (21) в зависимости от частоты дискретизации. Как и следовало ожидать, точность восстановления кривой возрастает с уменьшением шага дискретизации. Ориентируясь на приложения теоретических результатов к задачам гидролокации, отметим следующее. Разрешение по дистанции гидролокатора бокового обзора, работающего на частотах порядка $100-450$кГц составляет величины порядка $2-5$см [17]. Поэтому для практики представляют интерес графики, приведенные на рис. 2b,2c. Максимальная относительная ошибка реконструкции кривой γ по формулам (19) при $\Delta\rho=0.04$м не превосходит 17.5%, а при $\Delta\rho=0.01$м не превосходит 8.7%. При повышении разрешающей способности необходимо повышать частоту зондирующего излучения, которая в свою очередь сдерживается ростом коэффициента ослабления звука и, соотвественно, дальностью зондирования [17].

Представляет несомненный интерес исследование устойчивости решения обратной задачи при возмущении исходных данных. Предварительные исследования показали, что точность и даже сама возможность восстановления кривой γ определяется не только уровнем шума при возмущении функций $P_{\pm}$, но величиной $\rho'(\varphi)$. Решение обратной задачи особенно чувствительно к ошибкам в исходных данных, если величина производной функции $\rho(\varphi)$ мала. В дальнейшем мы также намерены исследовать задачу нахождения диффузно отражающей кривой в рассеивающей среде ($\sigma\neq0$). Анализ таких задач является предметом наших дальнейших публикаций.

Список литературы

[1] В.Р. Кирейтов, *Обратные задачи фотометрии*, ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1983.

[2] Р.Д. Урик, *Основы гидроакустики*, Судостроение, Л., 1978.

[3] А.В. Богородский, Г.В. Яковлев, Е.А. Корепин, А.К. Должиков, *Гидроакустическая техника исследования и освоения океана*, Гидрометеоиздат, Л., 1984.

[4] Д.С. Аниконов, А.Е. Ковтанюк, И.В. Прохоров, *Использование уравнения переноса в томографии*, Логос, М., 2000.

[5] Yu.E. Anikonov, *Inverse Problems for Kinetic and Other Evolution Equations*, VSP, Utrecht, 2001.

[6] В.В. Тучин, *Оптика биологических тканей. Методы рассеяния света в медицинской диагностике*, Физматлит, М., 2013.

[7] И. В. Прохоров, В. В. Золотарев, И. Б. Агафонов, “Задача акустического зондирования во флуктуирующем океане”, *Дальневост. матем. журн.*, **11**:1 (2011), 76–87.

[8] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, “Исследование задачи акустического зондирования морского дна методами теории переноса излучения”, *Акустический журнал*, **61**:3 (2015), 400–408.

[9] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, В. А. Кан, “Об одной задаче определения рельефа дна флуктуирующего океана”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **18**:2 (2015), 99–110.

[10] V.A. Kan, I.V. Prokhorov, A.A. Sushchenko, “Determining the bottom surface according to data of side-scan sonars”, *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, **10035** (2016), 1003518.

[11] В. А. Шарафутдинов, “О восстановлении ламбертовской оптической кривой по двум ее изображениям”, *Доклады АН*, **249**:3 (1979), 565–568.

[12] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, “О корректности задачи Коши для уравнения переноса излучения с френелевскими условиями сопряжения”, *Сибирский математический журнал.*, **56**:4 (2015), 922–933.

[13] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, А. Ким, “Начально-краевая задача для уравнения переноса излучения с диффузными условиями сопряжения”, *Сибирский журнал индустриальной математики*, **20**:1 (2017), 75—85.

[14] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, “Задача Коши для уравнения переноса излучения в неограниченной среде”, *Дальневосточный математический журнал*, **18**:1 (2018), 101—111.

[15] A.A. Amosov, “Initial-Boundary Value Problem for the Non-Stationary Radiative Transfer Equation with Fresnel Reflection and Refraction Conditions”, *Journal of Mathematical Sciences*, **235**:2 (2018), 117–137.

[16] A.A. Amosov, “Initial-Boundary Value Problem for the Nonstationary Radiative Transfer Equation with Diffuse Reflection and Refraction Conditions”, *Journal of Mathematical Sciences*, **231**:3 (2018), 279–337.

[17] В. Лекомцев, “Гидроакустические средства визуализации для необитаемых подводных аппаратов”, *Современные технологии автоматизации*, 2013, № 3, 78–82.