Signaler och System
Del 2

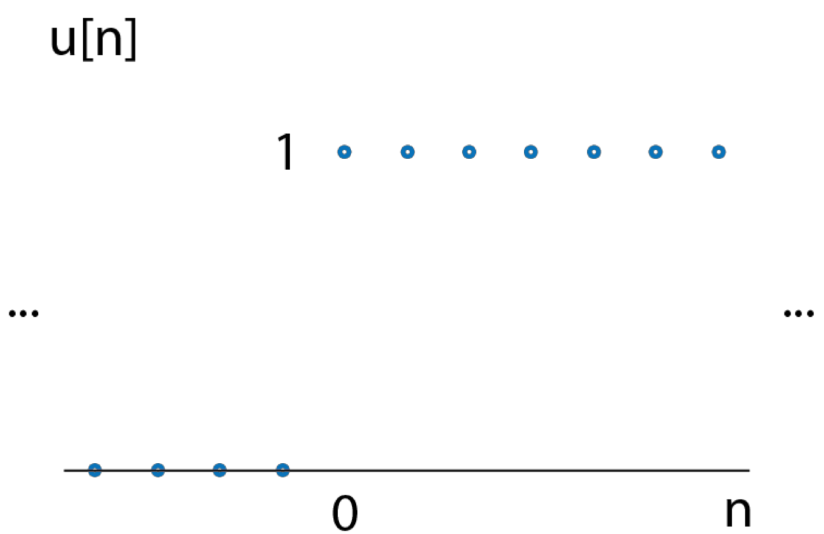
ELA405, Signaler och Signalbehandling
20190124, Västerås
elaine.astrand@mdh.se

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Enhetsstegfunktion

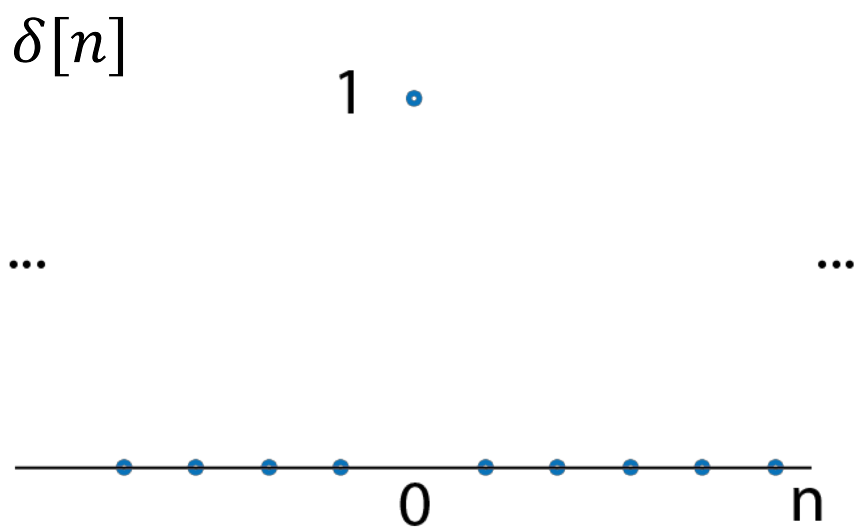
- tidsdiskret

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$



Enhetsimpuls
- tidsdiskret

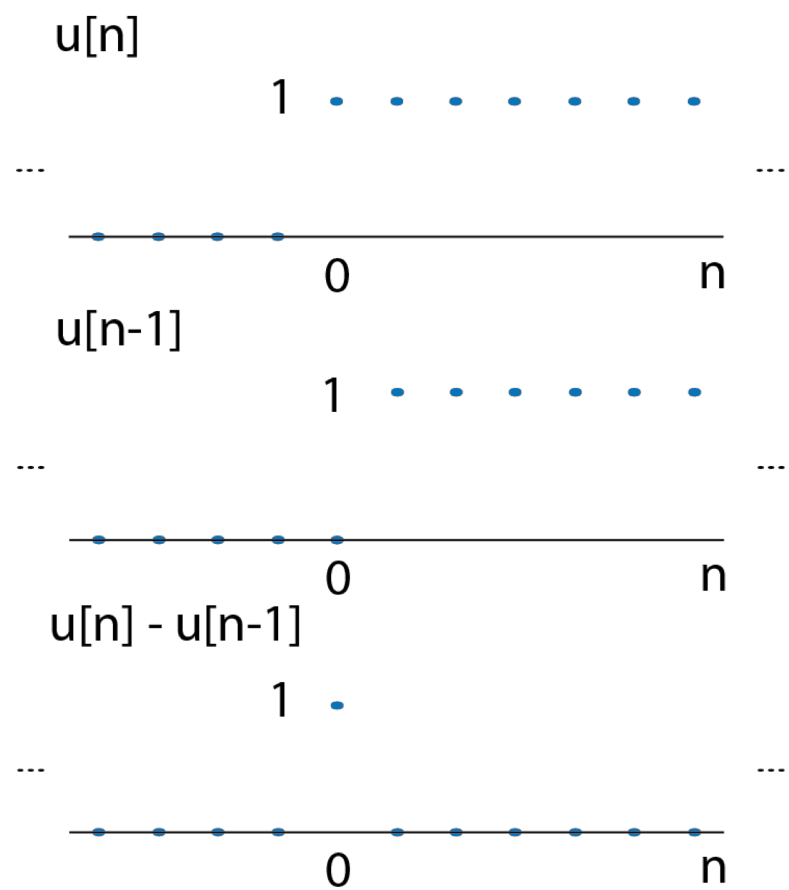
$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$



Enhetsstegfunktion & enhetsimpuls
- tidsdiskret

Relation:

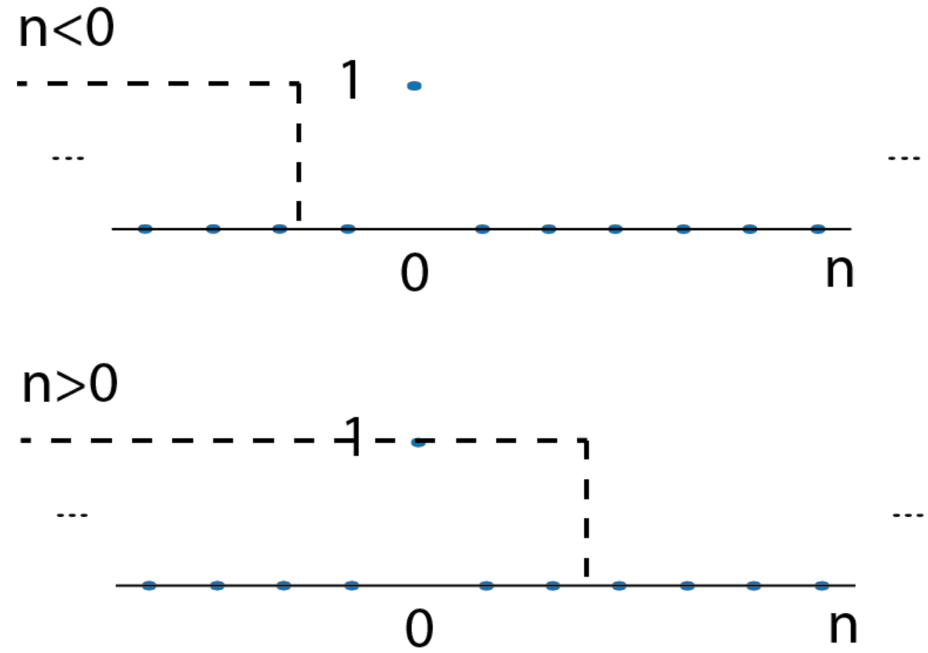
$$\delta[n] = \underbrace{u[n] - u[n-1]}_{\text{Första skillnad /first difference}}$$



Enhetsstegfunktion & enhetsimpuls
- tidsdiskret

Relation:

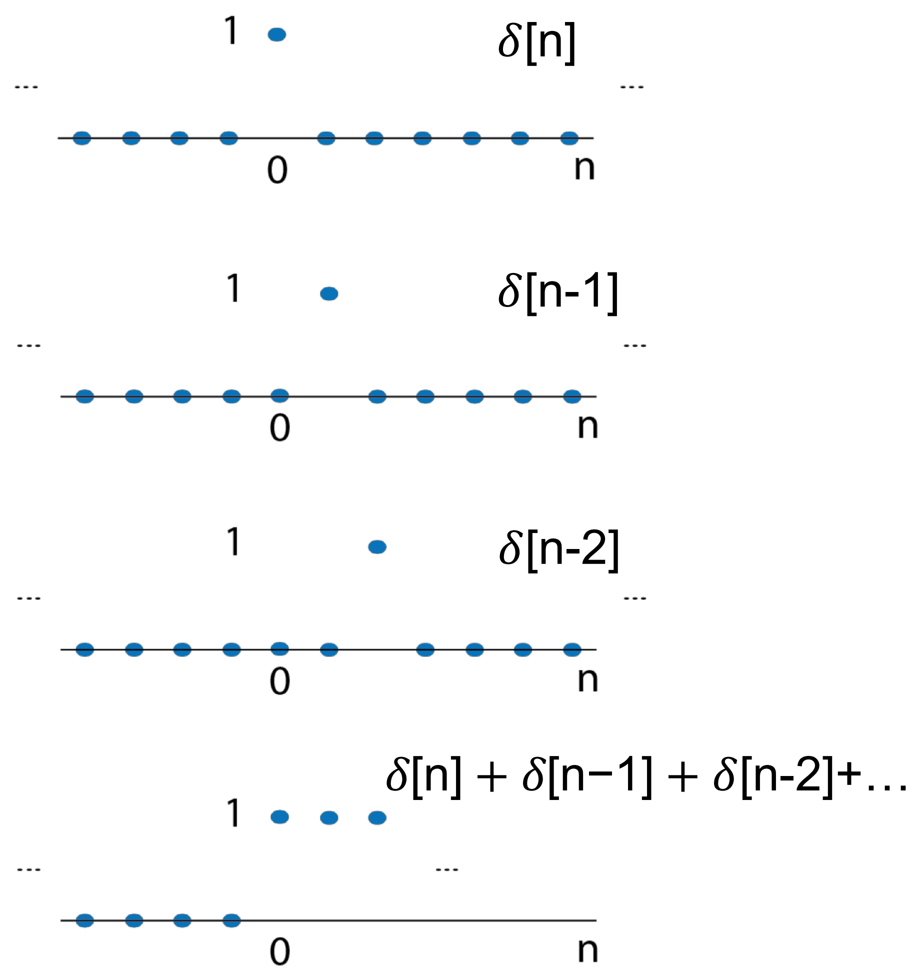
$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$$



Enhetsstegfunktion & enhetsimpuls
- tidsdiskret

u[n] kan också ses som en följd av enhetsimpulser

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

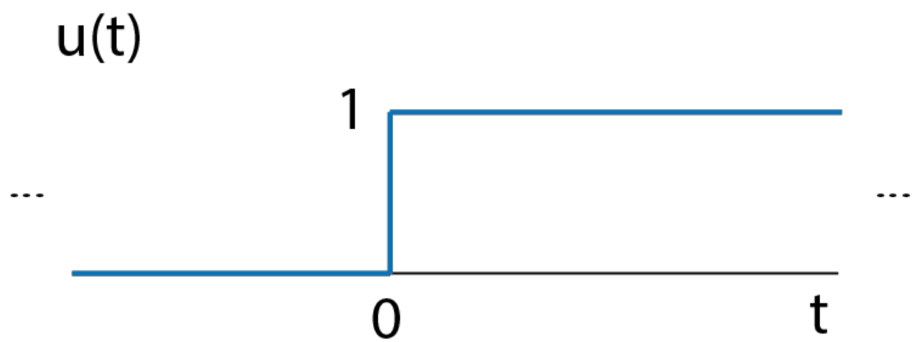


Enhetsstegfunktion
- tidskontinuerlig

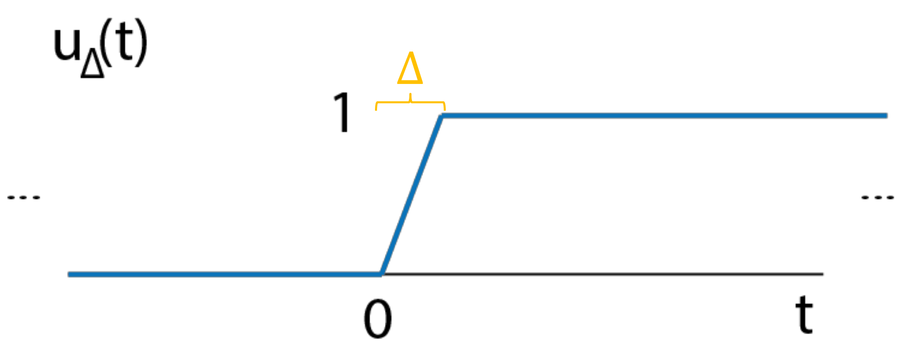
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Vad händer när t=0?

Jo, då är u(t) diskontinuerlig!



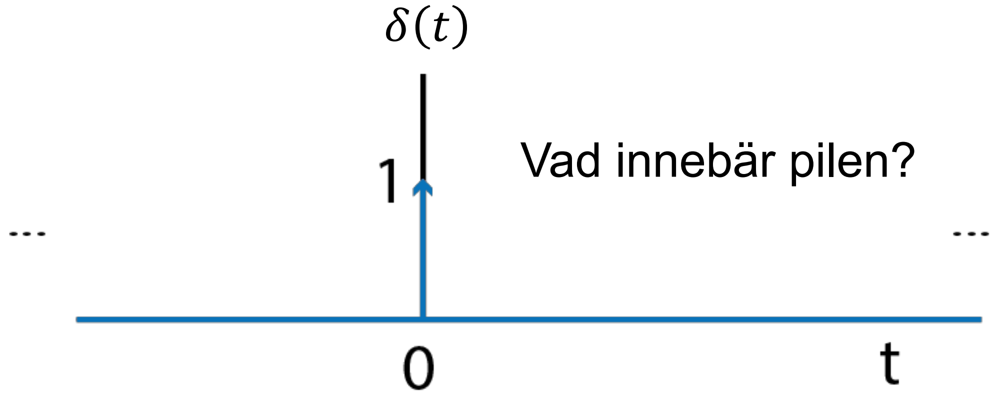
Vi uppskattar u(t) till en kontinuerlig funktion



$$u(t) = u_\Delta(t) \text{ } när \text{ } \Delta \rightarrow 0$$

Enhetsimpuls
- tidskontinuerlig

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$



Vad innebär pilen?

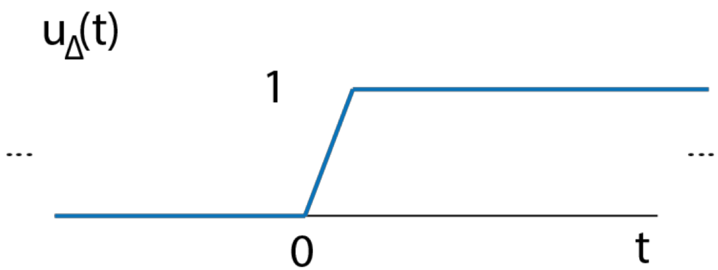
Enhetsstegfunktion & enhetsimpuls

- tidskontinuerlig

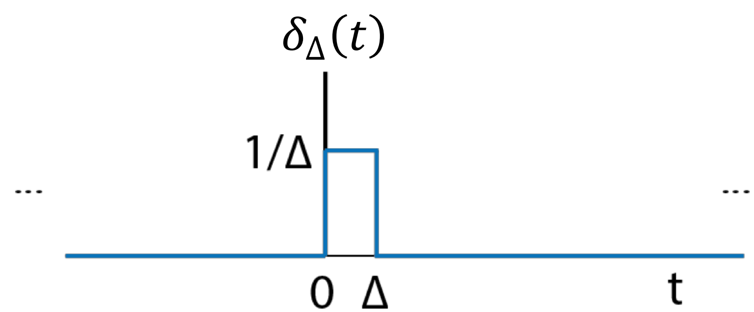
$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt}$$

Oberoende av värdet på Δ så är arean alltid 1

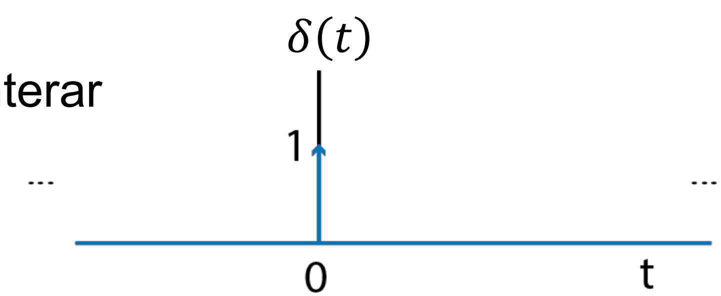


$$\xrightarrow{\frac{du_\Delta(t)}{dt}}$$



Höjden 1 representerar arean=1

$$\delta(t) = \delta_\Delta(t) \text{ när } \Delta \to 0$$

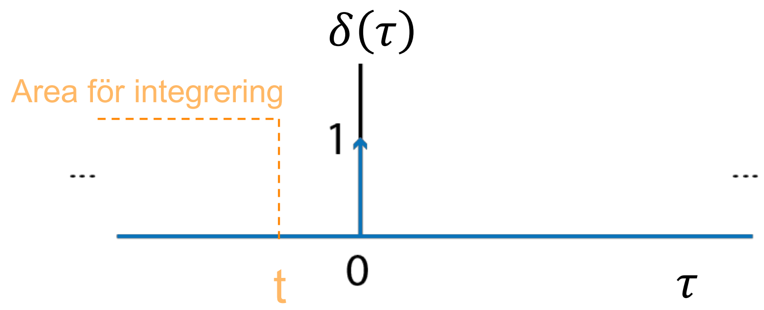


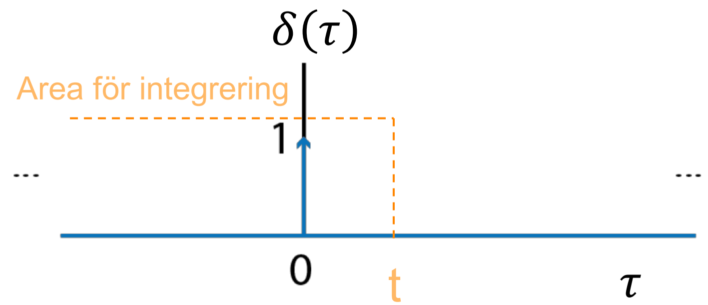
Enhetsstegfunktion & enhetsimpuls

- tidskontinuerlig

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$$





Vi kommer i denna kurs att fokusera på **tidsinvarianta och linjära** system (LTI).

För att utnyttja dessa egenskaper så är strategin är att bryta ner signaler till enkla bassignaler. Vilken typ av bassignal är bäst då?

		Representation
1. Tidsförskjutna enhetsimpulser	↔	Faltning
2. Komplexa exponentialer	↔	Fourier Analys

Nästa föreläsning

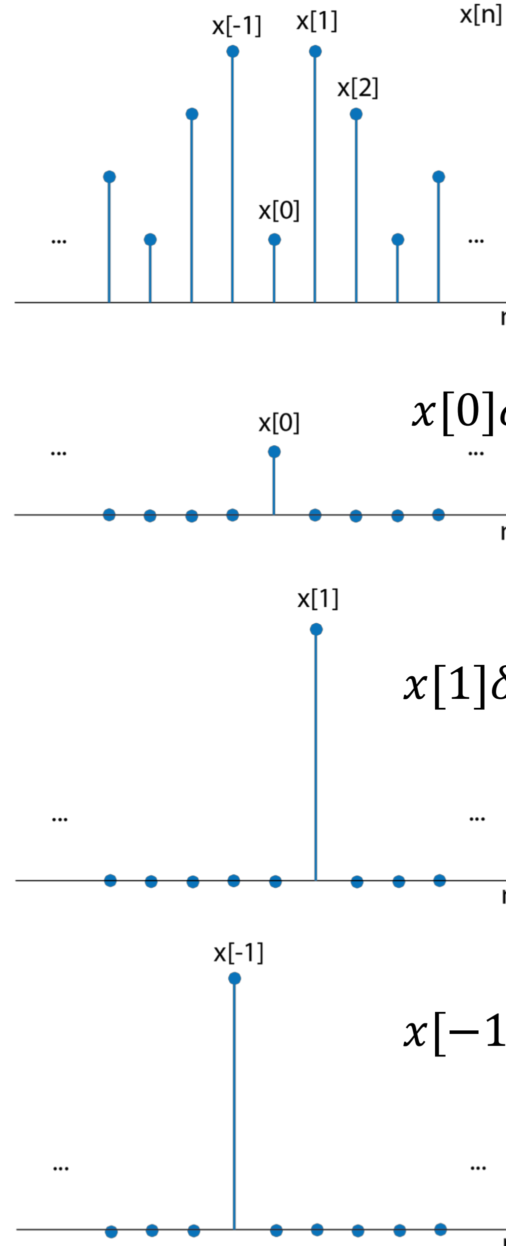
Faltningssumma

- tidsdiskret

Hur kan en godtycklig signal representeras av tidsförskjutna enhetsimpulser?

$$x[n] \\ = x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] \\ + x[-1]\delta[n+1] + \cdots$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$



$x[0]\delta[n]$

$x[1]\delta[n-1]$

$x[-1]\delta[n+1]$

Faltningssumma
- tidsdiskret

Varför är nu denna nedbrutna signal värdefull?

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Jo, vår signal är nu representerad som en linjär kombination av enkla bassignaler (viktade och tidsförskjutna enhetsimpulser) vilket innebär att **om vårt system är linjärt** så är utsignalen en linjär kombination av varje enskild utsignal för varje komponent

Om $\delta[n-k] \rightarrow h_k[n]$

Då är utsignalen till insignalen x[n]:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n]$$

Faltningssumma
- tidsdiskret

Om systemet också är tidsinvariant då är utsignalen till dessa tidsförskjutna enhetsimpulser, tidsförskjutna varianter av varandra

$\delta[n-k]$ är en tidsförskjuten variant av $\delta[n]$, $h_k[n]$ är en tidsförskjuten variant av $h_0[n]$
Dvs. $h_k[n] = h_0[n-k]$

Vi kommer härefter skriva $h\,[n] = h_0[n]$ som definieras som **enhetsimpulssvar** (dvs systemets utsignal när insignalen är en enhetsimpuls)

För ett LTI system:

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$ **Faltningssumma**

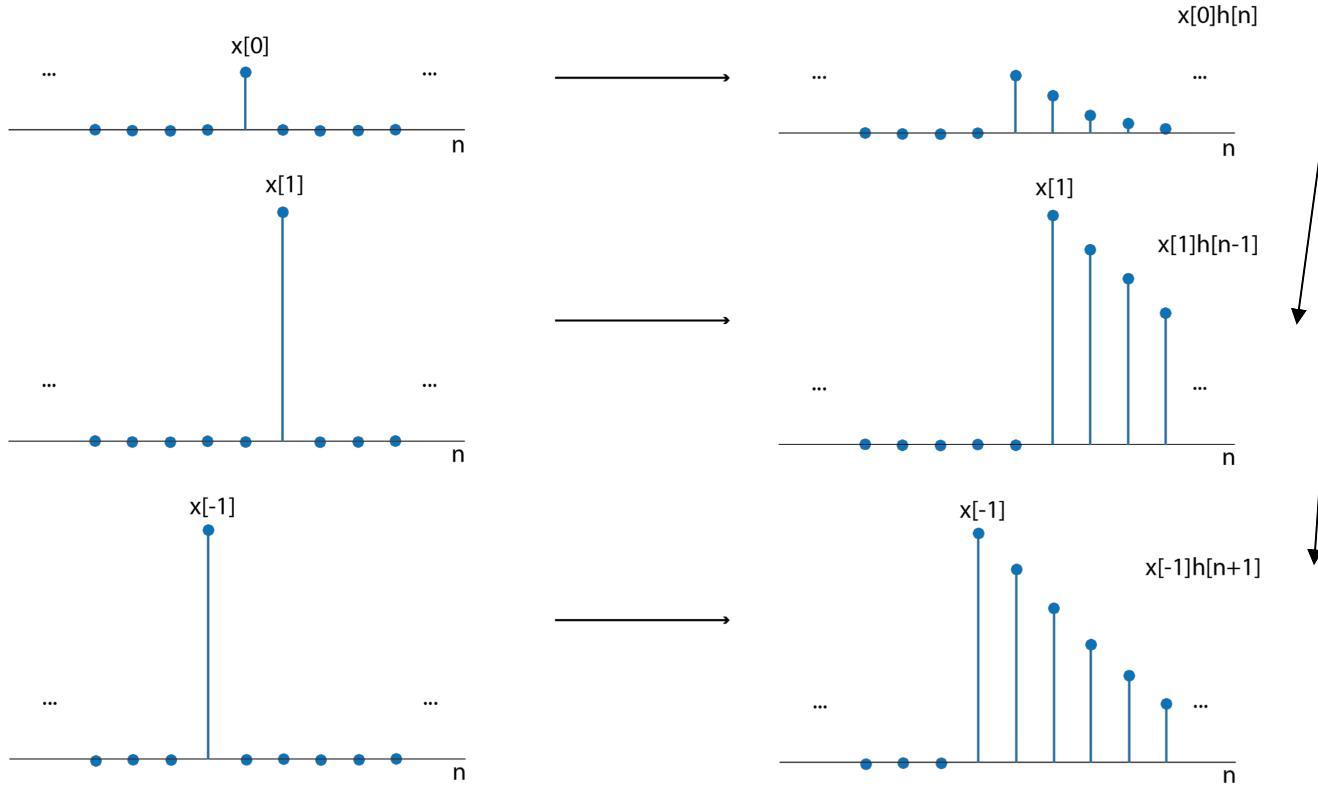
Faltningssumma

- tidsdiskret

Viktade och tidsförskjutna varianter av impulssvaret

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

<u>Faltningssumma</u>



Faltningssumma

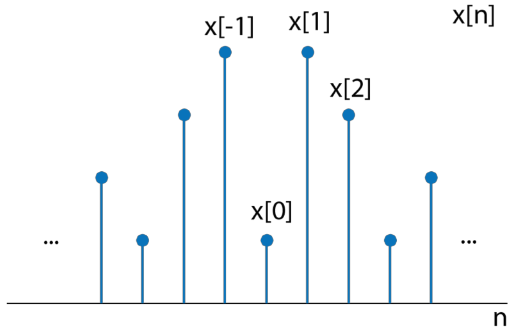
- tidsdiskret

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

<u>Faltningssumma</u>

INSIGNAL

UTSIGNAL



LTI system

En summa av utsignalerna för varje komponent

Vad innebär detta?

Jo vi behöver endast känna till ett systems svar på en enhetsimpuls i tiden noll för att beräkna systemets utsignal till en godtycklig insignal.

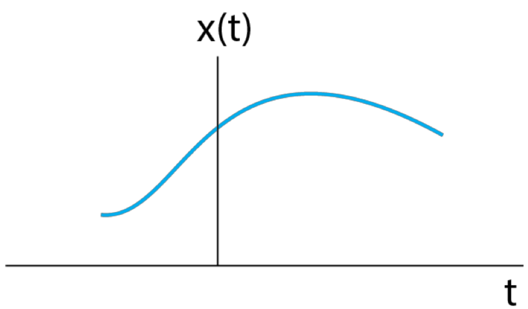
Faltningsintegral

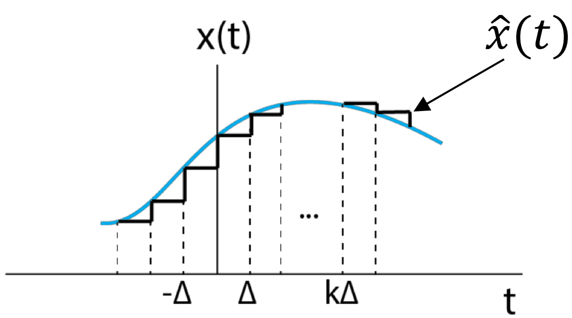
- tidskontinuerlig

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} 1/\Delta, 0 \le t < \Delta \\ 0, annars \end{cases}$$

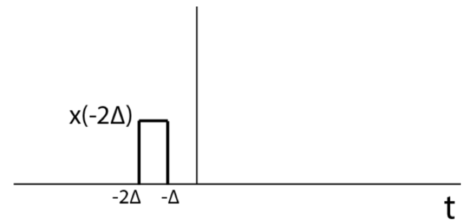
Samma strategi för tidskontinuerliga signaler

→ Bryta ner en signal till en följd av rektanglar med en viss längd. Ju kortare längden på rektanglarna blir desto närmare den tidskontinuerliga signaler kommer vi.

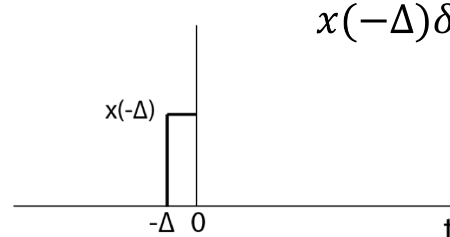




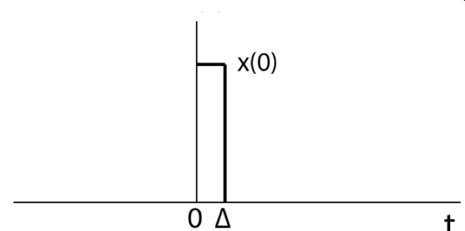
$x(-2\Delta)\delta_\Delta(t+2\Delta)\Delta$



$x(-\Delta)\delta_\Delta(t+\Delta)\Delta$

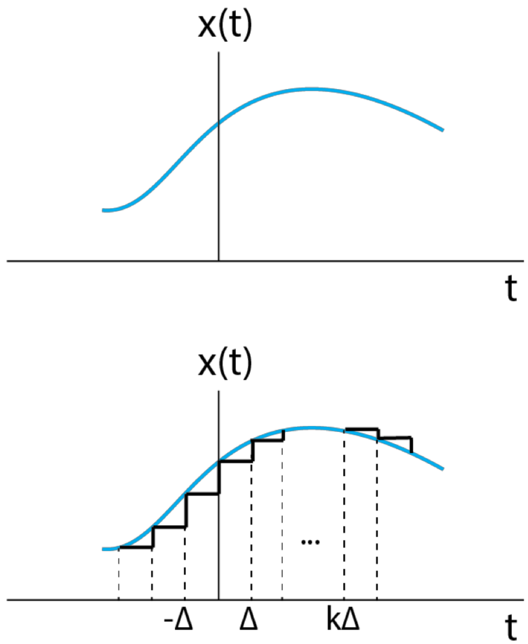


$x(0)\delta_\Delta(t)\Delta$



Faltningsintegral

- tidskontinuerlig



$$x(t) \approx \hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta(t - k\Delta)\Delta$$

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta(t - k\Delta)\Delta$$

Definition av integral:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)\, d\tau$$

Vi har nu en representation av x(t) som en linjär kombination av enhetsimpulser→ **vi kan nu utnyttja linjäritet** för att bestämma systemets utsignal

Faltningsintegral
- tidskontinuerlig

För ett linjärt system:

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta(t-k\Delta)\Delta$$

$$y(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)h_{k\Delta}(t)\,\Delta$$

$$\mathrm{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_{\tau}(t)\;d\tau$$

Om systemet också är tidsinvariant:

$$h_{k\Delta}(t) = h_0(t-k\Delta), \text{skrivs som } h(t-k\Delta)$$

Samma tankesätt som för tidsdiskreta signaler

Definieras som:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h\,(t-\tau)\;d\tau = x(t) * h(t)$$

Faltningsintegral

Faltningsintegral

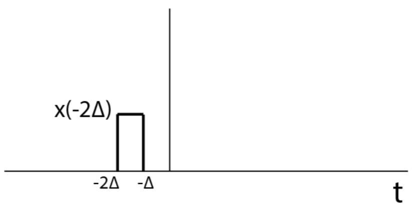
- tidskontinuerlig

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h\,(t-\tau)\ d\tau$$

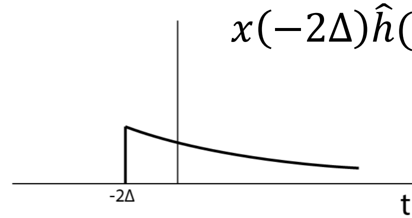
Faltningsintegral

Viktade och tidsförskjutna varianter av impulssvaret

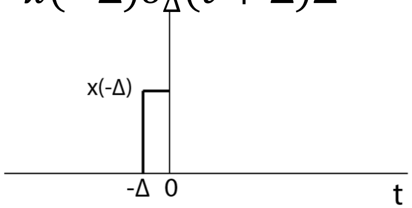
$x(-2\Delta)\delta_\Delta(t+2\Delta)\Delta$



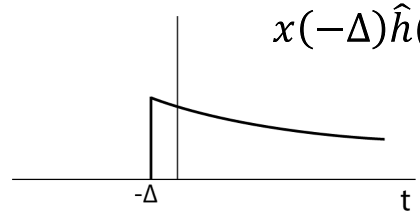
$x(-2\Delta)\hat{h}(t+2\Delta)\Delta$



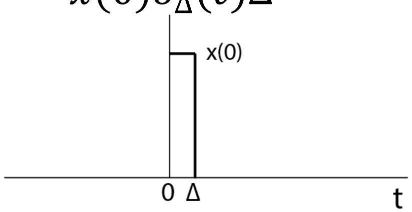
$x(-\Delta)\delta_\Delta(t+\Delta)\Delta$



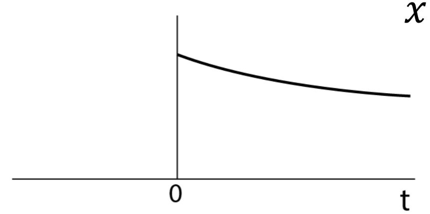
$x(-\Delta)\hat{h}(t+\Delta)\Delta$



$x(0)\delta_\Delta(t)\Delta$



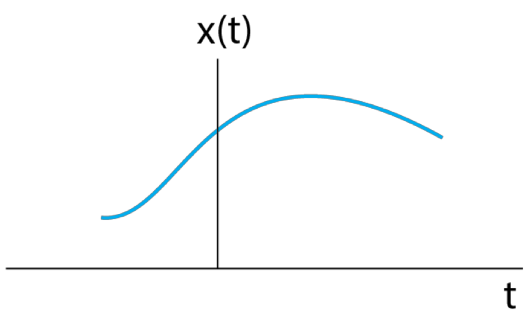
$x(0)\hat{h}(t)\Delta$



Faltningsintegral

$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h\,(t-\tau)\ d\tau$ **Faltningsintegral**

INSIGNAL



LTI system

UTSIGNAL

En summa av utsignalerna för varje komponent

Vad innebär detta?

Jo vi behöver endast känna till ett systems svar på en enhetsimpuls i tiden noll för att beräkna systemets utsignal till en godtycklig insignal.

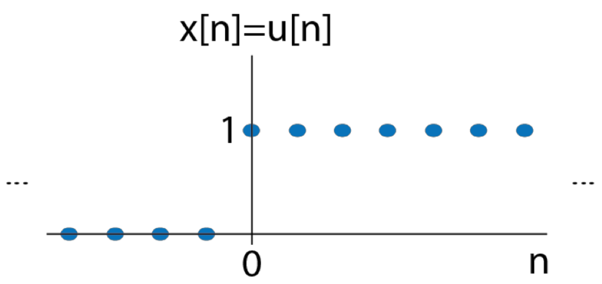
Faltning
- tidsdiskret

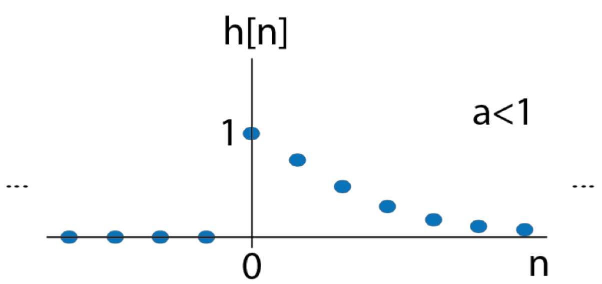
Vad innebär faltning då?

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

Låt oss ta ett exempel med:
$x[n] = u[n]$
$h[n] = a^n u[n], 0 < \mathrm{a} < 1$

Hur faltar vi dessa två signaler?





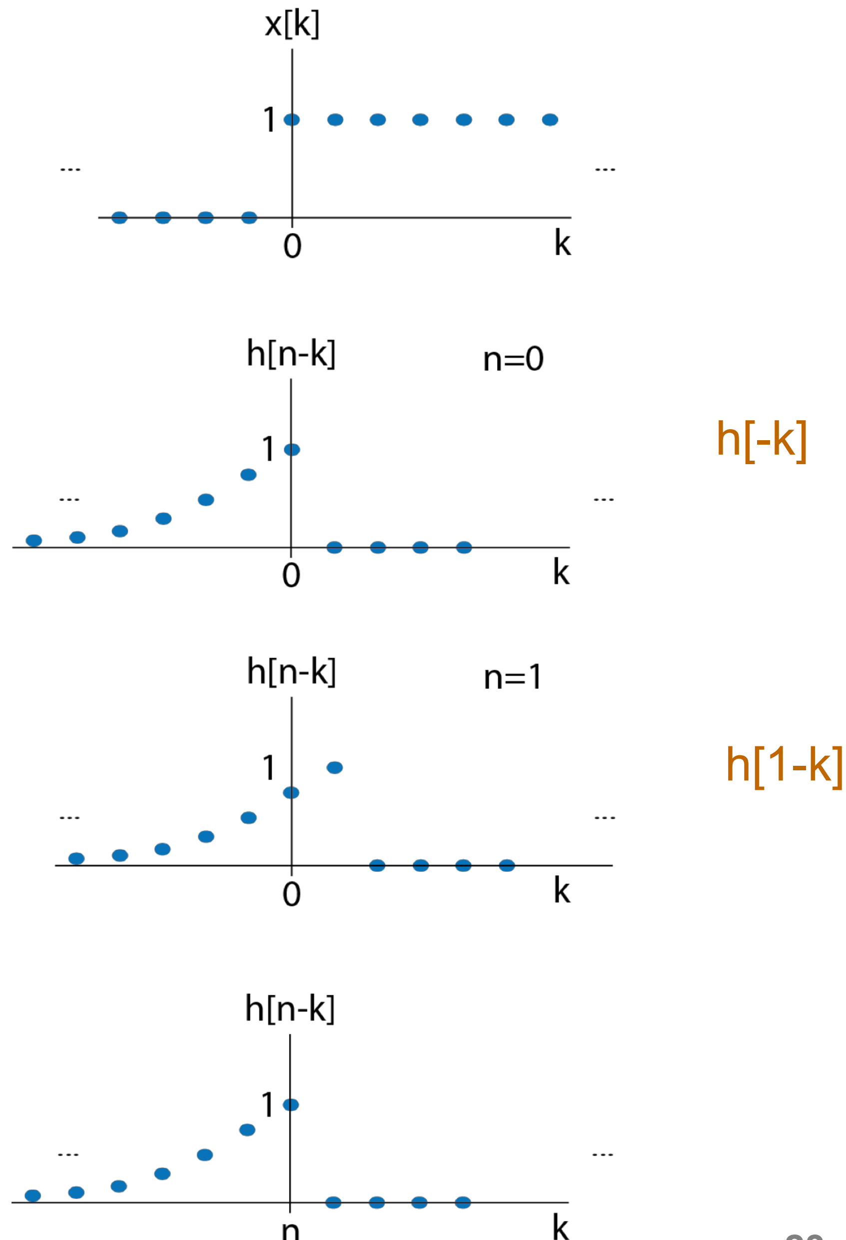
Faltning
- tidsdiskret

1. Bestäm x[k] och h[n-k]

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$$x[n] = u[n]$$
$$h[n] = a^n u[n], \mathrm{a} < 0$$

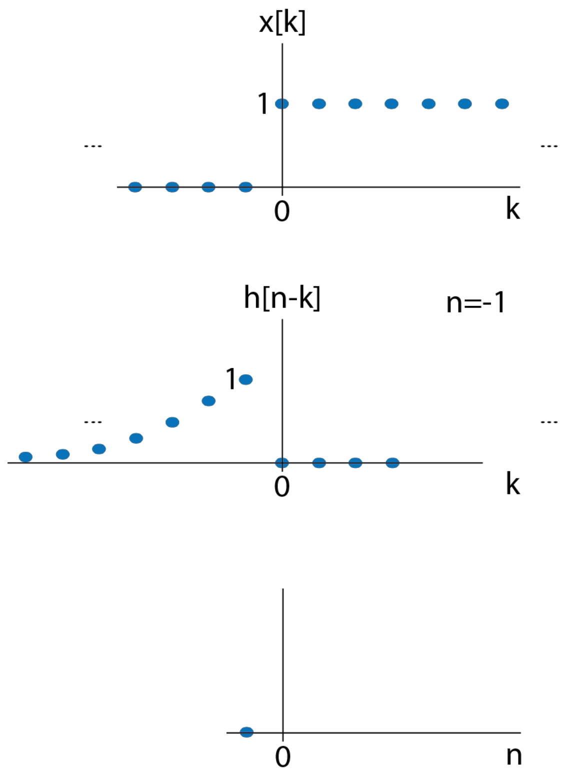
2. För varje n, multiplicera signalen h[n-k] med signalen x[k] och summera produkterna från $k = -\infty \; till \; \infty$



Faltning

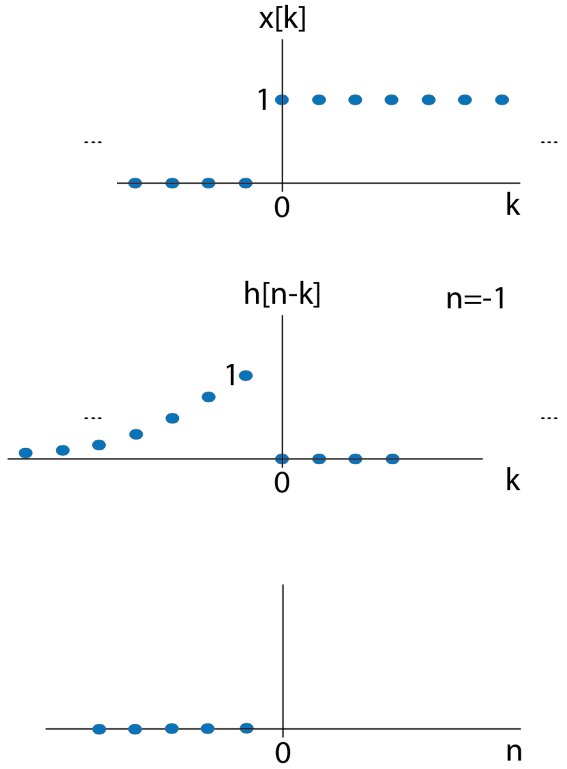
- tidsdiskret

2. För varje n, multiplicera signalen h[n-k] med signalen x[k] och summera produkterna från $k = -\infty \ till \ \infty$



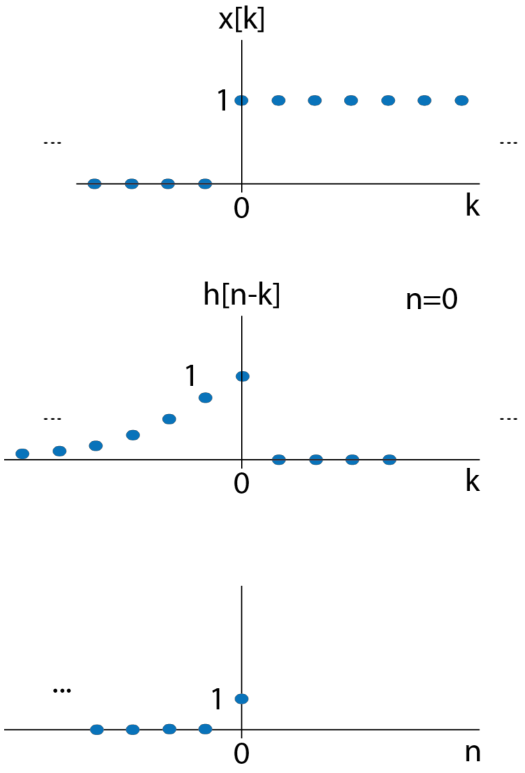
Faltning
- tidsdiskret

2. För varje n, multiplicera signalen h[n-k] med signalen x[k] och summera produkterna från $k = -\infty \; till \; \infty$



Faltning
- tidsdiskret

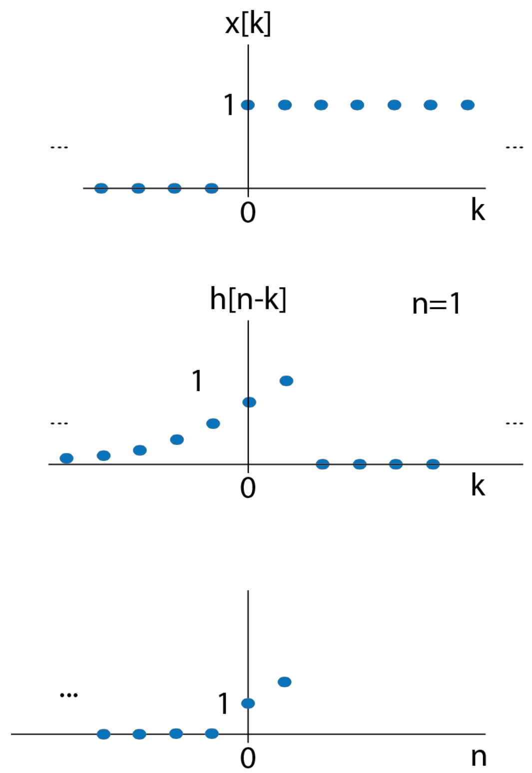
2. För varje n, multiplicera signalen h[n-k] med signalen x[k] och summera produkterna från $k = -\infty \; till \; \infty$



Faltning

- tidsdiskret

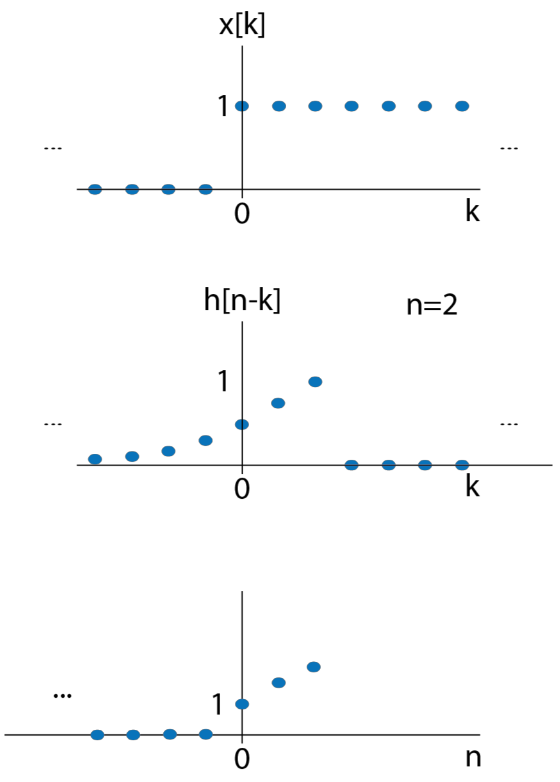
2. För varje n, multiplicera signalen h[n-k] med signalen x[k] och summera produkterna från $k = -\infty \; till \; \infty$



Faltning

- tidsdiskret

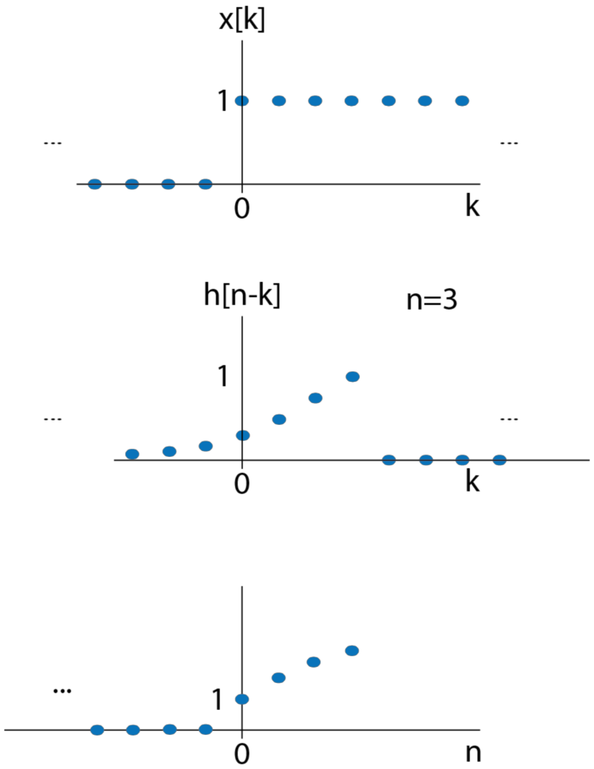
2. För varje n, multiplicera signalen h[n-k] med signalen x[k] och summera produkterna från $k = -\infty \; till \; \infty$



Faltning

- tidsdiskret

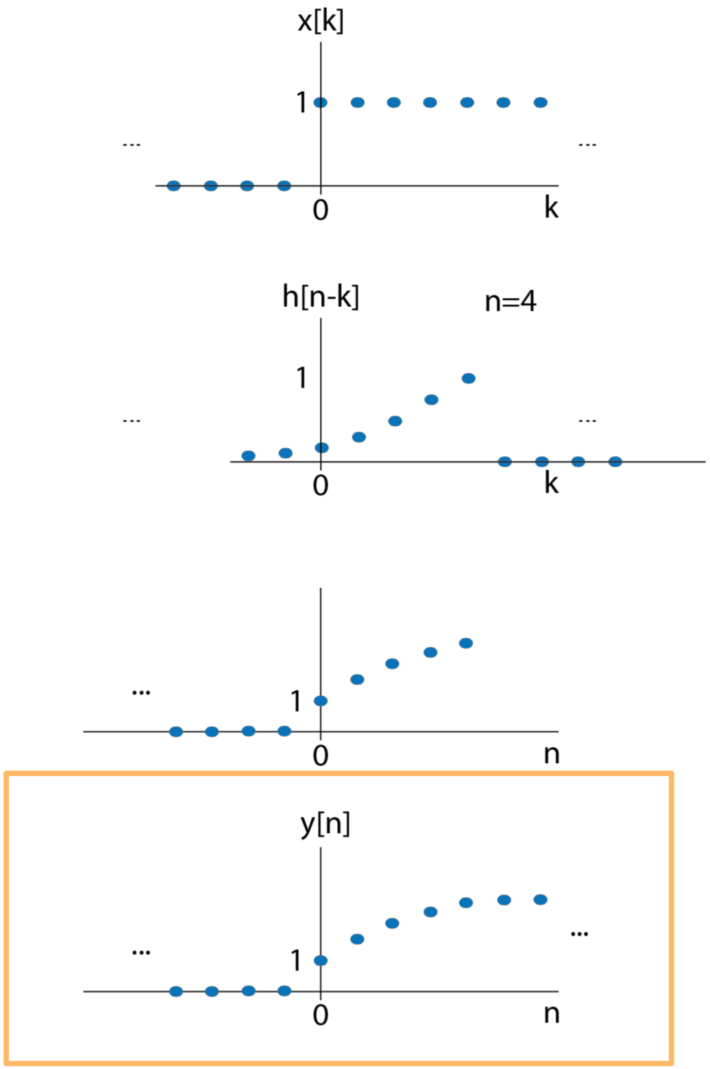
2. För varje n, multiplicera signalen h[n-k] med signalen x[k] och summera produkterna från $k = -\infty \; till \; \infty$



Faltning

- tidsdiskret

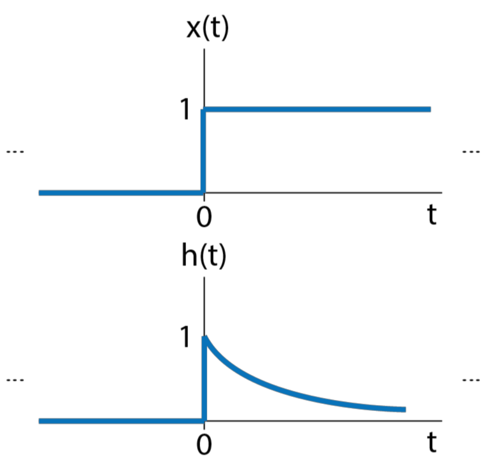
2. För varje n, multiplicera signalen h[n-k] med signalen x[k] och summera produkterna från $k = -\infty \; till \; \infty$

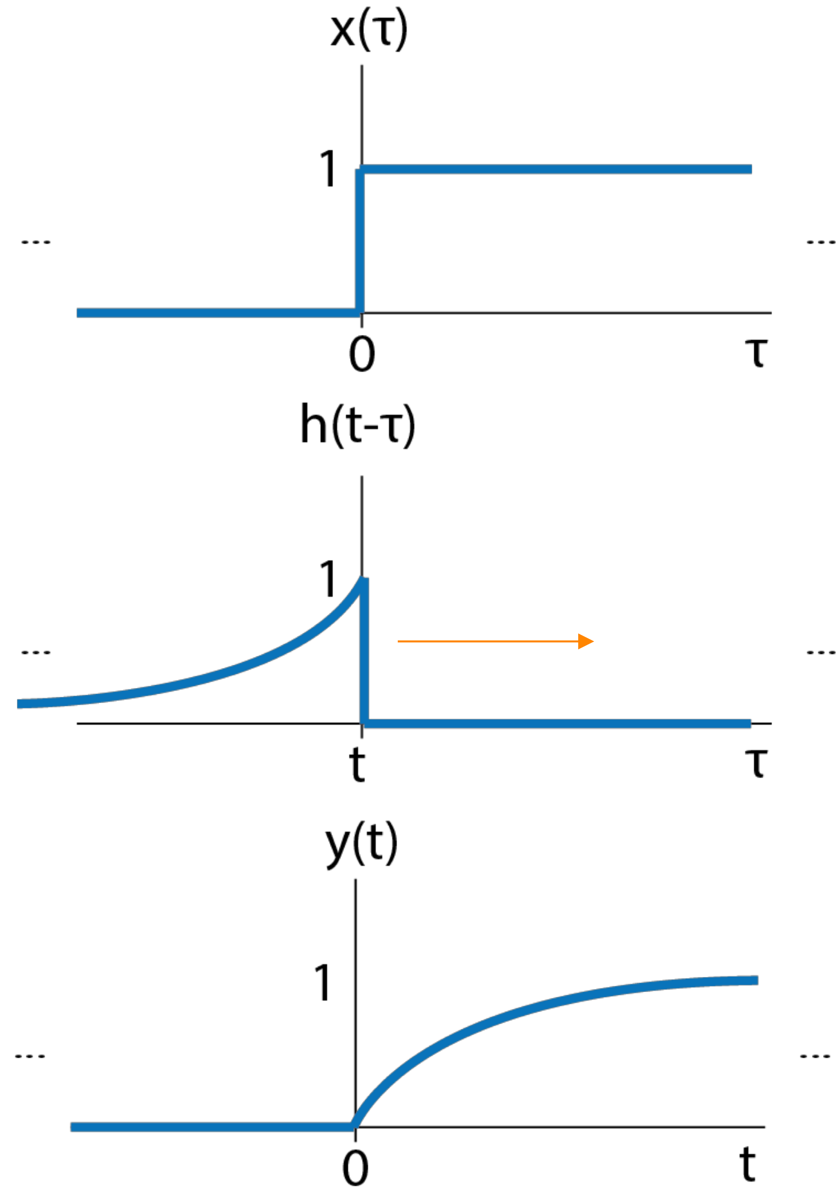


Faltning
- tidskontinuerlig

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h\,(t-\tau)\;d\tau$$

$$x(t) = u(t)$$
$$h(t) = e^{at}u(t), a < 0$$





LTI system
- egenskaper

Kommutativitet

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$
$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

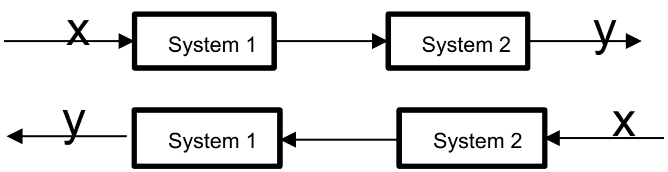
Ordningen spelar ingen roll!

$$Exempel\ tidigare:\ u(t) * e^{at}u(t) \dashrightarrow I\ boken\ (ex. 2.6): e^{at}u(t) * u(t)$$

Associativitet

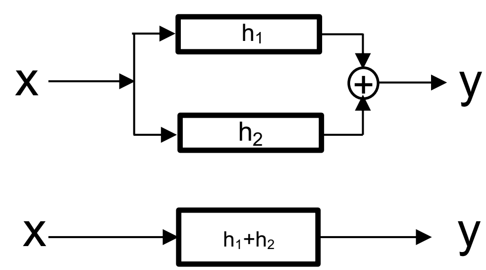
$$x * \{h_1 * h_2\} = \{x * h_1\} * h_2$$

Gruppering spelar ingen roll!



Distribuitet

$$x * \{h_1 + h_2\} = x * h_1 + x * h_2$$

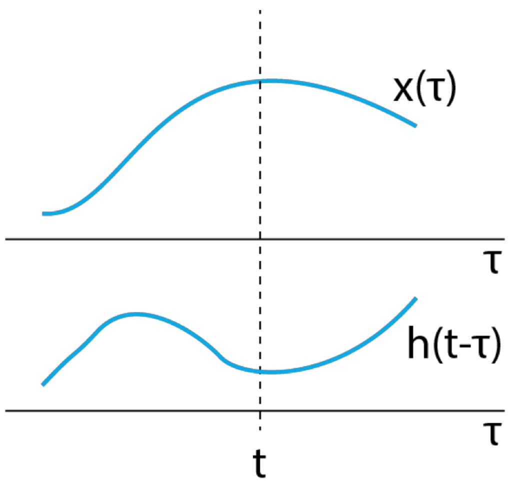


LTI system
- egenskaper

Utan minne – ett system där utsignalen i en specifik tidpunkt beror enbart på insignalen i samma tidpunkt

$$x(t)@\, t = t_o \rightarrow y(t)@\, t = t_0$$
$$x[n]@\, n = n_o \rightarrow y[n]@\, n = n_0$$

- Vad krävs av h för att LTI-systemet inte ska ha minne?



→ $h(t-\tau)$ måste vara skilt från noll enbart när $\tau = t$

→ $h(t) = k\delta(t)$

→ $h[n] = k\delta[n]$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h\,(t-\tau)\; d\tau = kx(t)$$

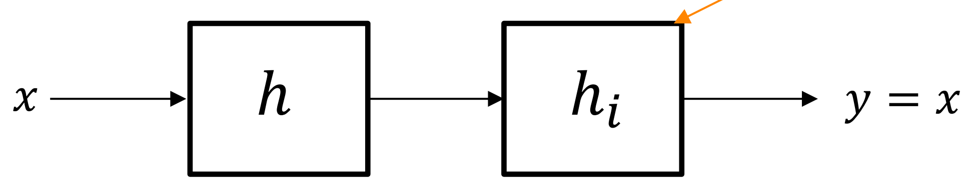
$$y[n] = kx[n]$$

LTI system
- egenskaper

- **Inverterbar** – Med en känd utsignal finns endast en unik insignal

Inverterat system

Ett LTI-system är inverterbart ifall:



$$y = x * (h * h_i) = x$$

Detta innebär att $h * h_i = \delta$

LTI system
- egenskaper

- **Stabilitet** –för alla begränsade insignaler produceras en begränsad utsignal

Ett LTI-system är stabilt ifall:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Absolut summerbar

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

Absolut integrerbar

LTI system
- egenskaper

- **Kausalitet** – utsignalen för en godtycklig tid beror enbart på insignalen innan eller lika med den tiden

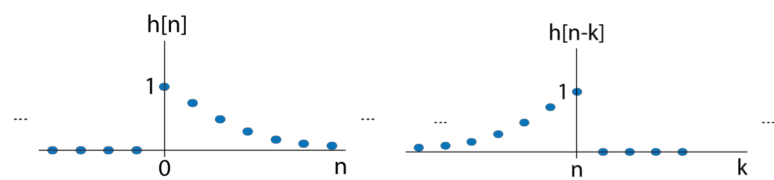
$x_1(t) \rightarrow\ y_1(t)$
$x_2(t) \rightarrow\ y_2(t)$
Om $x_1(t) = x_2(t), t < t_0$
Då är: $y_1(t) = y_2(t), t < t_0$

Ett linjärt system är kausalt om:
Initial vila: vid avsaknad av insignal så är utsignalen noll:
$Om\ x(t) = 0, t < t_0$ (samma för tidsdiskret)
$Då\ y(t) = 0, t < t_0$

Följer av att:
$\delta(t) = 0, t < 0$
$\delta[n] = 0, n < 0$

Ett LTI system är kausalt om:
$h(t) = 0, t < 0$
$h[n] = 0, n < 0$

Kan ses visuellt:



$\rightarrow\ y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k]$
$\rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

Läsning:

Oppenheim A. Signals and Systems. 2^{nd} Ed. (2014):

Kap 1: 1.4

Kap 2: 2.1-2.3

Gör tillhörande uppgifter