# Signaler och System

ELA405, Signaler och Signalbehandling
20190121, Västerås
elaine.astrand@mdh.se

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

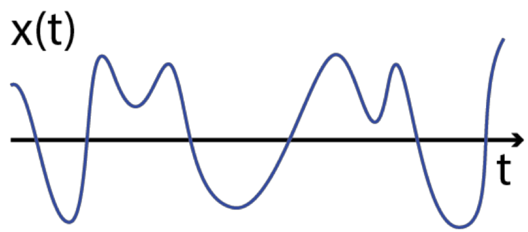
**Vad är en signal?**

→En funktion av en eller flera oberoende variabler ofta innehållande information

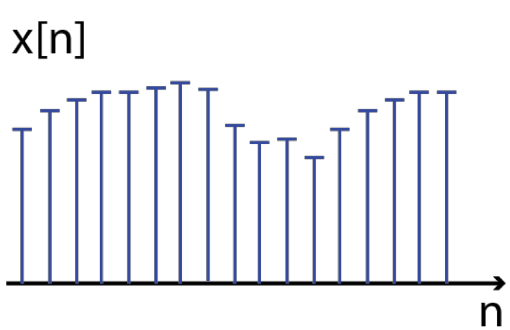
→ **System** används för att behandla signaler

# Intro - Signaler

1. Tidskontinuerliga signaler
   - Ljud, lufttryck, muskelaktivitet..



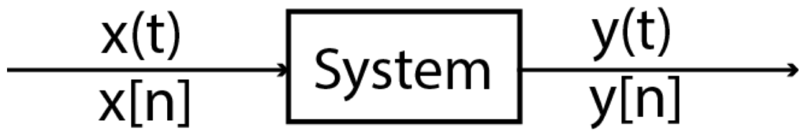

2. Tidsdiskreta signaler
   - Aktiemarknad, bostadspriser..




- Bild

→ ljusstyrka(horiz, vert)

# Intro - System




LTI = Linear TimeInvariant

linjär tidsinvariant

icke-linjär tidsvarierande

Domäner för analys och representation av signaler och system:

1. Tidsdomänen
2. Frekvensdomänen
   - Fourier transform
   - Laplace transform
   - Z-transform

3 bassignaler som är viktiga i signalbehandling:

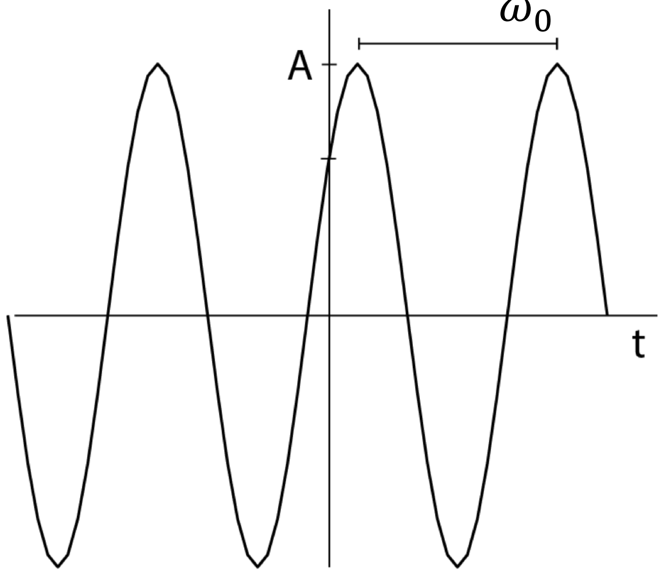
- Sinusvågor
- Reella exponentialer
- Komplexa exponentialer

# Tidskontinuerliga sinusvågor

Sinusvåg: $x(t) = Acos(\omega_0 t + \emptyset)$

amplitud frekvens fas

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$




- Periodisk

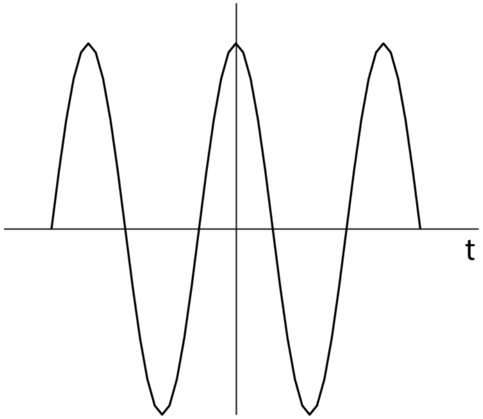
$x(t) = x(t + T_0)$, period = minsta $T_0$

- Tidsförskjutning ←→ fasändring

$$x(t + t_0) = \cos(\omega_0 t + \underbrace{\omega_0 t_0}_{\emptyset_0})$$

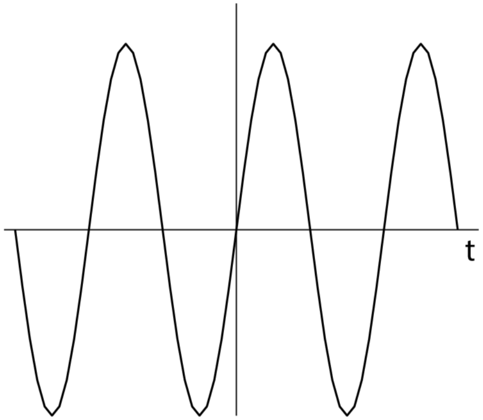
# Tidskontinuerliga sinusvågor

Jämn signal: symmetrisk kring y-axeln → $x(t) = x(-t)$




$$\phi = 0 \;\rightarrow x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

Udda signal: antisymmetrisk kring y-axeln → $x(t) = -x(-t)$



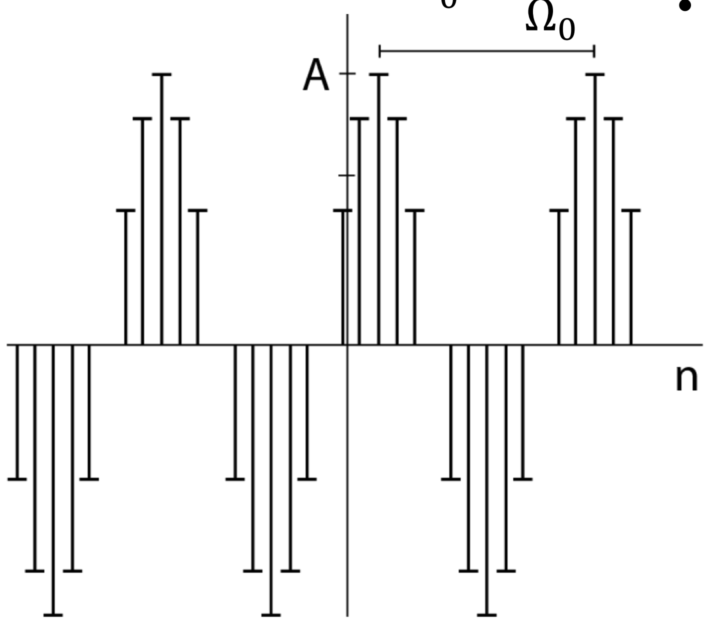

$$\phi = \frac{\pi}{2} \;\rightarrow x(t) = \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\omega_0 t)$$

# Tidsdiskreta sinusvågor

Sinusvåg: $x[n] = A cos(\Omega_0 n + \emptyset)$

amplitud frekvens fas

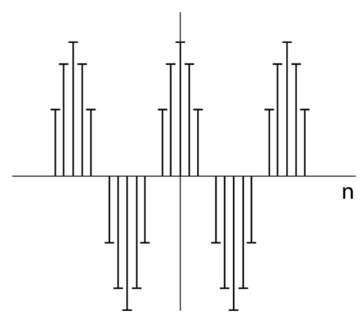
$$N_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$$



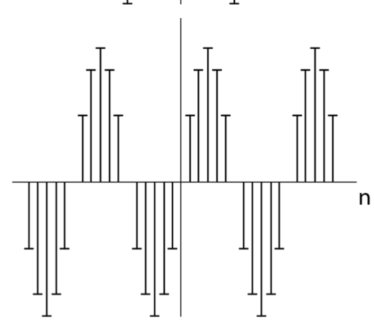

$n_0$ måste vara ett heltal!

- Sekvens/Tidsförskjutning ←→ fasändring

$$x[n + n_0] = \cos(\Omega_0 n + \underbrace{\Omega_0 n_0}_{\emptyset_0})$$




- jämn




- udda

# Sinusvågor

- Tidskontinuerliga sinusvågor är alltid periodiska
- Tidsdiskreta sinusvågor kan vara icke-periodiska

$x[n] = \mathrm{A}\cos(\Omega_0 n + \phi)$

Om periodisk: $x[n] = x[n + N]$

$Acos(\Omega_0(n + N) + \phi) = Acos(\Omega_0 n + \Omega_0 N + \phi)$

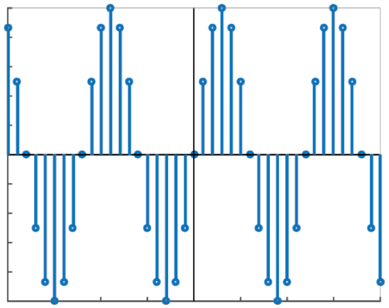
$\Omega_0 N = 2\pi m, m = 1,2,3,..$

$heltalsmultipel\ av\ 2\pi$

$N = \frac{2\pi m}{\Omega_0}$ N måste vara ett heltal för att x[n] ska vara periodisk

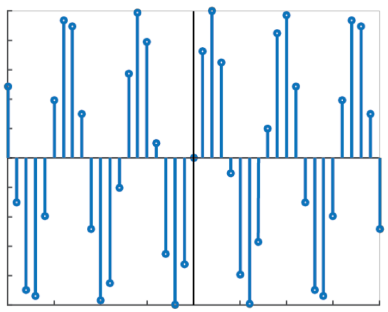
# Sinusvågor

Vad är perioden N?




$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{12}$$

$$N = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 12$$

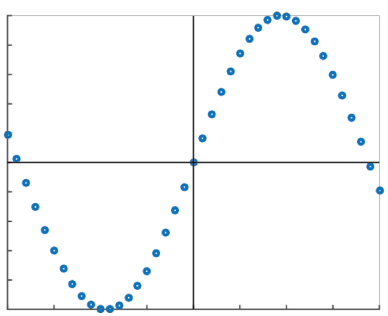



$$\Omega_0 = \frac{8\pi}{31}$$

$$N = \frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{31}{4}k$$

N måste vara ett heltal!

$$\rightarrow N = 31, k = 4$$




$$\Omega_0 = \frac{1}{6}$$

$$N = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 12\pi k$$

Signalen är inte periodisk!

# Sinusvågor

- Tidskontinuerliga sinusvågor: **skilda** signaler för alla värden av frekvensen, $\omega_0$
- Tidsdiskreta sinusvågor: **identiska** signaler för värden av frekvensen, $\Omega_0$, som skiljer sig med $2\pi$

$x(t) = \mathrm{A}\cos\big((\omega_0 + 2\pi m\big)\, t + \phi)$, t är inte alltid ett heltal

$x[n] = \mathrm{A}\cos((\Omega_0 + 2\pi m)n + \phi)$, n är alltid ett heltal

**Viktig skillnad mellan tidskontinuerliga och tidsdiskreta sinusvågor!**

# Sinusvågor

**Tidskontinuerliga sinusvågor**

$x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi)$

- Periodisk för alla värden av $\omega_0$
- Skilda signaler för alla värden av $\omega_0$

**Tidsdiskreta sinusvågor**

$x[n] = \cos(\Omega_0 n + \phi)$

- Periodisk enbart om:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi m}{N}, \qquad m, N \text{ är } heltal$$

- Identiska signaler för värden av $\Omega_0$ som skiljer sig med $2\pi$

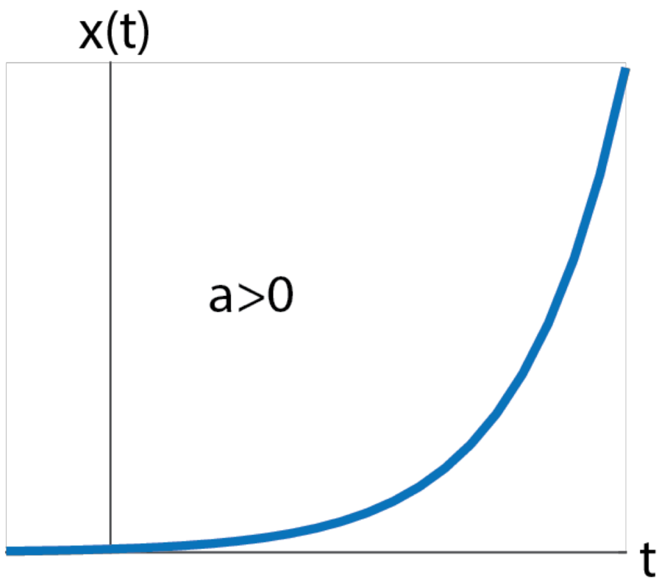
# Reella exponentiella signaler

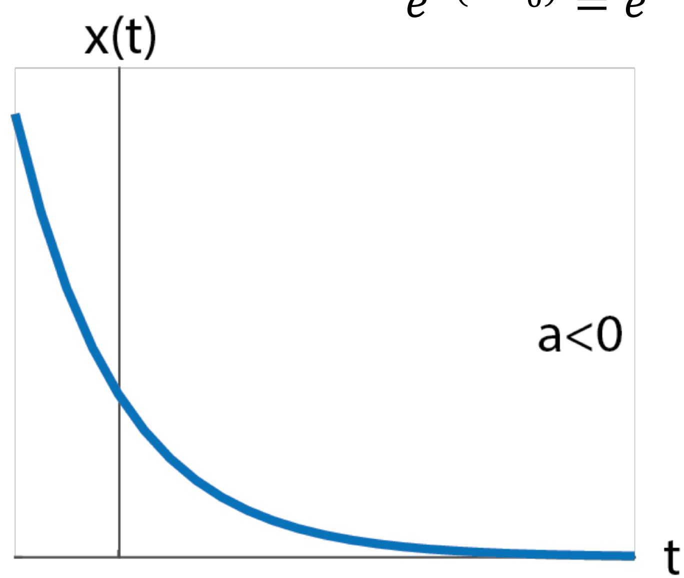
## Tidskontinuerliga signaler

$x(t) = Ce^{at}$, C och a är reella

Tidsförskjutning → skalning

$e^{a(t+t_0)} = e^{at}e^{at_0}$

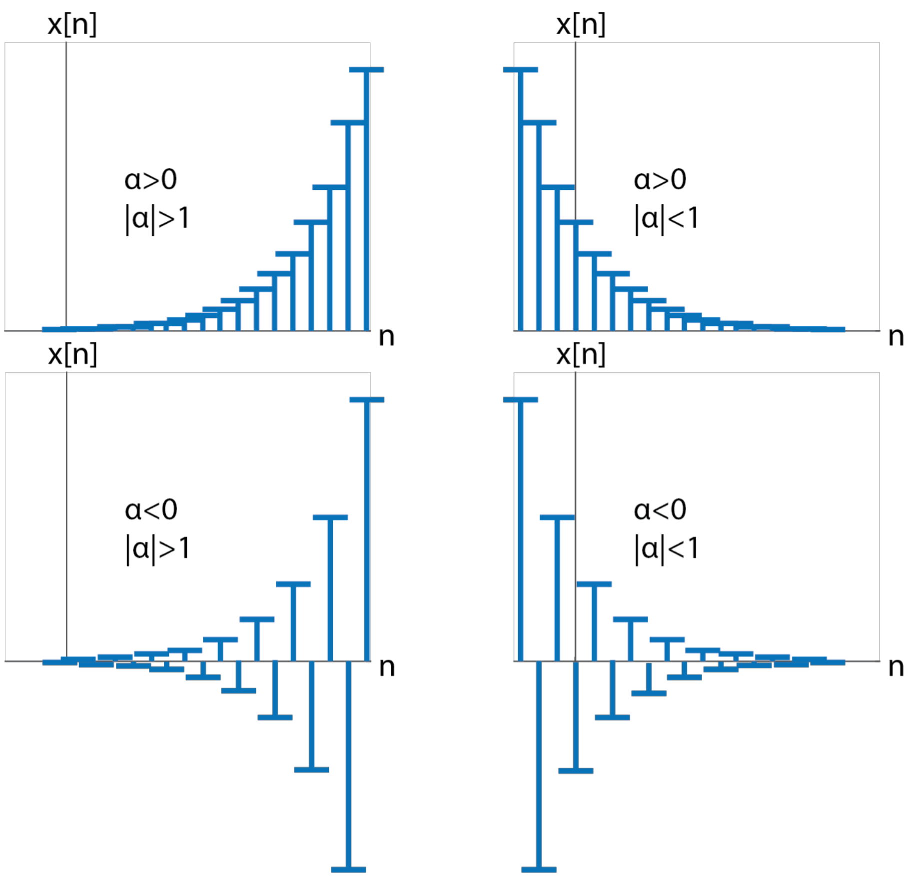


# Reella exponentiella signaler

## Tidsdiskreta signaler

$x[n] = Ce^{\beta n} = C\alpha^n, C, \alpha$ är reella




Om $\alpha > 0$ då är $\beta = \ln(\alpha)$
Om $\alpha < 0$ då är $\beta$ imaginärt

-->

Man brukar använda formen:
$x[n] = C\alpha^n$

# Komplexa exponentiella signaler

## Tidskontinuerliga signaler

$x(t) = Ce^{at}, C, a$ är komplexa

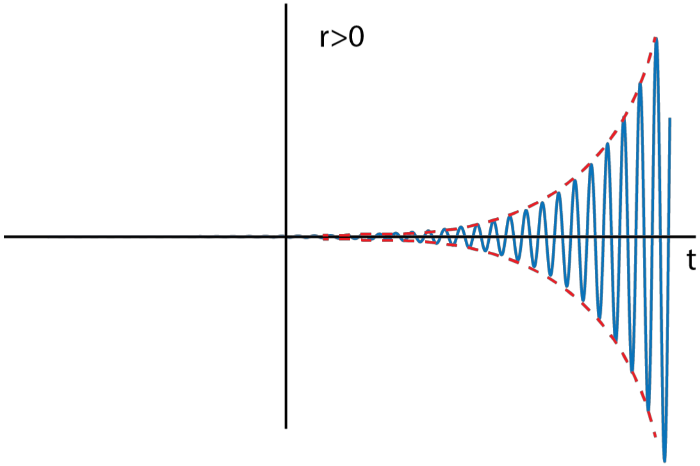
$C = |C|e^{j\theta}$ (polär form)
$a = r + j * \omega_0$ (rektangulär form)

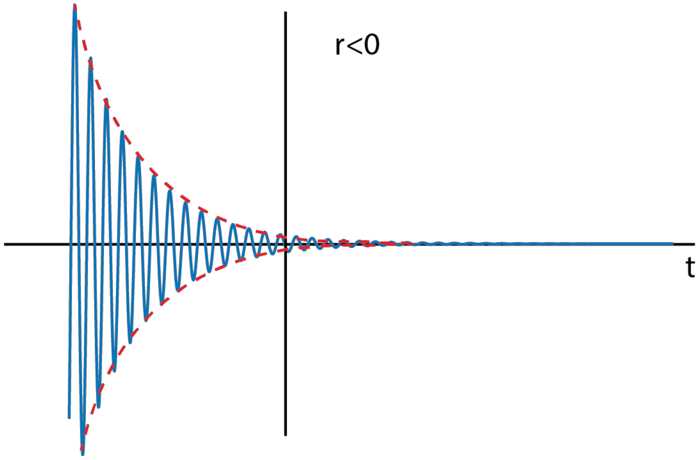
$x(t) = |C|e^{rt}e^{j(\omega_0 t + \theta)}$

Euler's relation: $\cos(\omega_0 t + \theta) + jsin(\omega_0 t + \theta) = e^{j(\omega_0 t + \theta)}$

$x(t) = |C|e^{rt}\cos(\omega_0 t + \theta) + j|C|e^{rt}sin(\omega_0 t + \theta)$

# Komplexa exponentiella signaler




→ Dämpade sinusvågor

# Komplexa exponentiella signaler

## Tidsdiskreta signaler

$x[n] = C\alpha^n, C, \alpha$ är komplexa

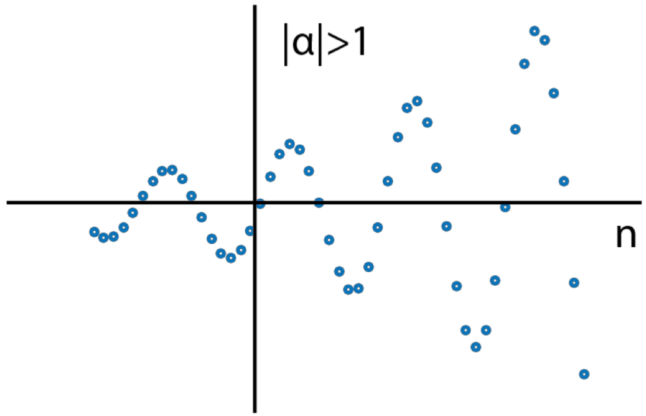
$C = |C|e^{j\theta}$
$\alpha = |\alpha|e^{j\Omega_0}$

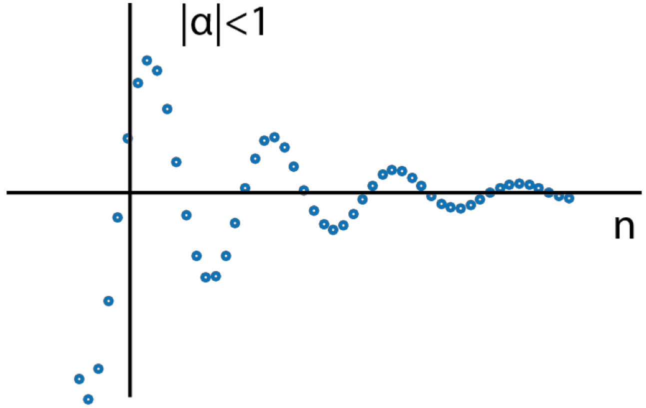
$x[n] = |C||\alpha|^n e^{j(\Omega_0 n+\theta)}$

Euler's relation: $\cos(\Omega_0 n + \theta) + jsin(\Omega_0 n + \theta) = e^{j(\Omega_0 n+ \theta)}$

$x[n] = |C||\alpha|^n \cos(\Omega_0 n + \theta) + j|C||\alpha|^n sin(\Omega_0 n + \theta)$

# Komplexa exponentiella signaler



# Signaler

- Sinusvågor
- Reella exponentialer
- Komplexa exponentialer

Mer komplicerade signaler kan ofta brytas ner till dessa bassignaler

# Signalenergi och medeleffekt

**Energi i en oändlig signal:**

Tidskontinuerlig signal:

$$E_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$$

Tidsdiskret signal:

$$E_\infty \triangleq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

**Power i en oändlig signal:**

Tidskontinuerlig signal:

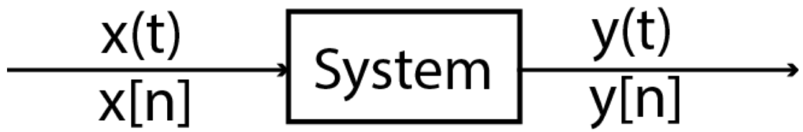
$$P_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$$

Tidsdiskret signal:

$$P_\infty \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

För periodiska signaler krävs endast integrering/summering över en period.

# System



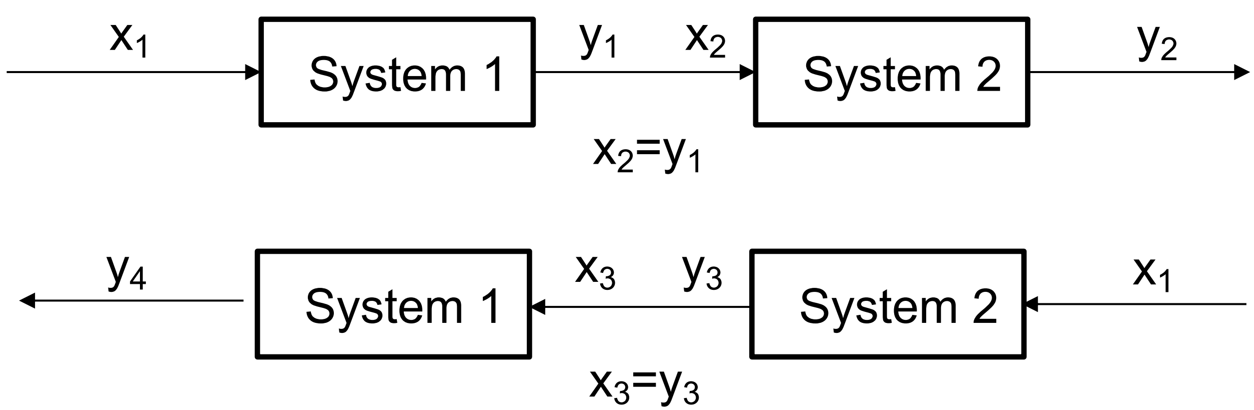

$x(t) \rightarrow y(t)$

- Tidskontinuerliga system
- Tidsdiskreta system

System som är ihopkopplade:

- Kaskad

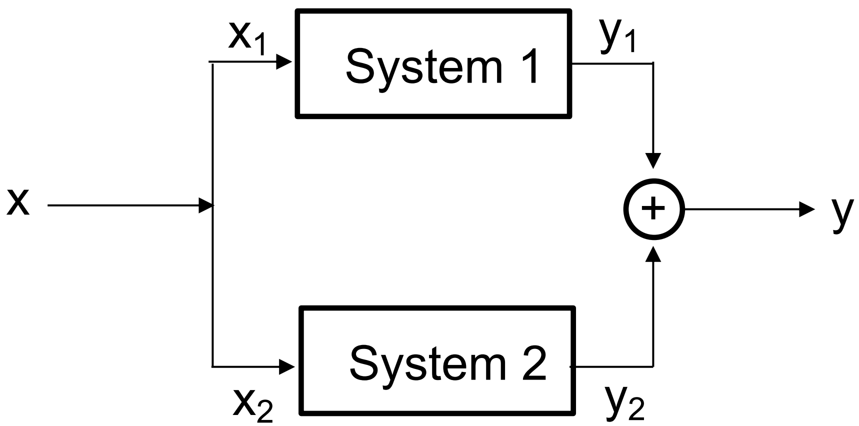
Ordningen är viktig!



# System

System som är ihopkopplade:

- Kaskad
- Parallel




Ordningen spelar ingen roll

$x_1$=$x_2$=x

# System - egenskaper

- **Utan minne** – ett system där utsignalen i en specifik tidpunkt beror enbart på insignalen i samma tidpunkt
  - $x(t)@\, t = t_o \rightarrow y(t)@\, t = t_0$
  - $x[n]@\, n = n_o \rightarrow y[n]@\, n = n_0$

- **Inverterbar** – Med en känd utsignal finns endast en unik insignal

- **Kausalitet** – utsignalen för en godtycklig tid beror enbart på insignalen innan eller lika med den tiden

  $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$
  $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$
  Om $x_1(t) = x_2(t), t < t_0$
  Då är: $y_1(t) = y_2(t), t < t_0$

# System

- **Stabilitet** – för alla begränsade insignaler produceras en begränsad utsignal

- **Tidsinvariant** – om insignalen tidsförskjuts så kommer även utsignal att tidsförkjutas på samma sätt

$$x(t) \to y(t)$$
$$x(t - t_0) \to y(t - t_0)$$

- **Linjäritet** – En linjär kombination av insignaler ger samma linjära kombination av varje relaterad utsignal

  Om

$$x_1(t) \to y_1(t)$$
$$x_2(t) \to y_2(t)$$

  då är

$$ax_1(t) + bx_2(t) \to ay_1(t) + by_2(t)$$

# Signaler och System

Läsning:

*Oppenheim A. Signals and Systems. 2nd Ed. (2014):*

**Kap 1:** 1.1-1.3, 1.5-1.6 (inte feedback system)

Gör tillhörande uppgifter