المستقيمات والمستويات في الفضاء

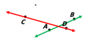
مسلمات (موضوعات) الفضاء Space Postulates

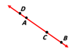
يرتكز بناء علم الهندسة على مجموعة من النظريات الهندسية التي يتم إثباتها انطلاقًا من التسليم بصحة عبارات رياضية **أولية** نقبلها **دون برهان** تسمى « **الموضوعات** » أو « **المسلمات** » ومنها :

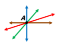
[موضوعة ⓐ]

(I) أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد (واحد وواحد فقط) .

(II) كل مستقيم يحوي على الأقل نقطتين مختلفتين .







أي نقطة يمر بها عدد لا نهائي من المستقيمات في المستوي أو في الفضاء .

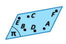
ولكن أي نقطتين مختلفتين يمر بهما مستقيم وحيد

لذلك يعيّن المستقيم بنقطتين مختلفتين

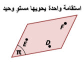
[موضوعة ⓑ]

(I) في كل مستوٍ يوجد على الأقل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة .

(II) أي ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة واحدة يحويها مستوٍ وحيد



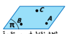
A, B, E ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة



D, E, F ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

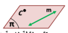
حالات تعيين المستوي في الفضاء

- **أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة** تعيّن مستويًا واحدًا فقط .



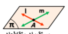
ثلاث نقاط غير مستقيمة

- **أي مستقيم ونقطة خارجة عنه** يعيّنان مستويًا واحدًا فقط .



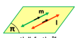
مستقيم ونقطة خارجة عنه

- **أي مستقيمان متقاطعان** يعينان مستويًا واحدًا فقط .



مستقيمان متقاطعان

- **أي مستقيمان متوازيان مختلفان** يعينان مستويًا واحدًا فقط .



مستقيمان متوازيان

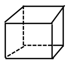
[موضوعة ⓒ]

يحوي الفضاء على الأقل أربع نقاط مختلفة غير مستوية .

النقاط A, B, C, D لا تقع في مستوٍ واحد

معلومة :

المستقيمان اللذان لا يمكن أن يحويهما مستوٍ واحد يسميان **مستقيمين متخالفين**



تدريب في الشكل المقابل شبه مكعب. أكمل :

ⓐ المستوي $ABCD$ يتعين بالمستقيمين المتوازيين $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$ . .

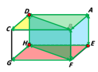
ⓑ المستوي HFG يتعين بالمستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{BH}$ ، $\overleftrightarrow{BG}$ . .

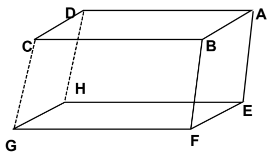
ⓒ المستوي $DBFH$ يتعين بالمستقيمين المتوازيين $\overleftrightarrow{BF}$ ، $\overleftrightarrow{DB}$ . .

ⓓ المستوي $AEHD$ يتعين بالمستقيم $\overleftrightarrow{DA}$ ،والنقطة B . .

ⓔ المستوي ABC هو نفس المستوي ....DCB... أو .ABD.....

A





مثال ١ - ص ١١٩ - أثبت أن أضلاع أي شبه منحرف تقع جميعها في مستو واحد.

المعطيات $ABCD$ شبه منحرف فيه $\overline{AB} // \overline{DC}$

المطلوب إثبات أن $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ تقع جميعًا في مستوٍ واحد

البرهان

$\because$ $\overline{AB} // \overline{DC}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{DC}$, $\overleftrightarrow{AB}$ يعينان مستويًا وحيدًا وليكن π

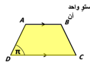
$\because$ النقطتين A, D تنتميان إلى المستوي π

$\therefore$ $\overline{AD} \subset \pi$

$\because$ النقطتين B, C تنتميان إلى المستوي π

$\therefore$ $\overline{BC} \subset \pi$

$\therefore$ $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ تقع جميعًا في مستوٍ واحد



حاول ١ - ص ١١٩ - في الشكل المقابل $\overline{AC}, \overline{BD}$ يتقاطعان في O

أثبت أن أضلاع الرباعي $ABCD$ تقع جميعها في مستوٍ واحد

المعطيات $\overline{AC}, \overline{BD}$ يتقاطعان في O

المطلوب أثبت أن أضلاع الرباعي $ABCD$ تقع جميعها في مستوٍ واحد

البرهان

$\because$ $\overline{AC}, \overline{BD}$ يتقاطعان في O

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{AC}$ يعينان مستويًا وحيدًا وليكن π

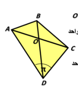
$\because$ النقطتين A, B تنتميان إلى المستوي π ⟵ $\overline{AB} \subset \pi$

$\because$ النقطتين B, C تنتميان إلى المستوي π ⟵ $\overline{BC} \subset \pi$

$\because$ النقطتين C, D تنتميان إلى المستوي π ⟵ $\overline{CD} \subset \pi$

$\because$ النقطتين D, A تنتميان إلى المستوي π ⟵ $\overline{DA} \subset \pi$

$\therefore$ أضلاع الرباعي $ABCD$ تقع جميعها في مستوٍ واحد



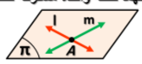
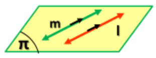
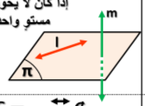
أوضاع المستقيمات في الفضاء
Positions of Lines in Space

l , m مستقيمان **مختلفان** في الفضاء .

في الهندسة **المستوية** يكون مستقيمان **متوازيين** أو **متقاطعين** .

أما في الهندسة **الثلاثية الأبعاد** فهناك ثلاثة أوضاع : **متقاطعان** أو **متوازيان** أو **متخالفان** .

يقال لمستقيمين مختلفين في الفضاء أنهما :

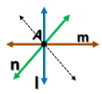
a متقاطعان	b متوازيان	c متخالفان
إذا وقعا في مستوٍ واحد وكان بينهما نقطة واحدة مشتركة فقط .	إذا وقعا في مستوٍ واحد وكانا غير متقاطعين.	إذا كان لا يحويهما مستوٍ واحد
		
$\overleftrightarrow{l} \subset \pi\ ,\ \overleftrightarrow{m} \subset \pi$ $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \{A\}$	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi\ ,\ \overleftrightarrow{m} \subset \pi$ $\boxed{\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \{\ \}} \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi\ ,\ \overleftrightarrow{m} \not\subset \pi$ $\boxed{\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \{\ \}}$
مستقيمان متقاطعان	*مستقيمان متوازيان*	*مستقيمان متخالفان*

ملاحظات :

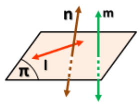
- تتلاقى عدة مستقيمات مختلفة إذا وجدت نقطة وحيدة مشتركة بينها

أي أن :

$\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m}\ \dots\ \overleftrightarrow{n} = \{A\}$



- مستقيمات الفضاء لا يمكن أن تقع جميعها في مستوٍ واحد .



- كل مستقيم يوازي نفسه .

$\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{m}\ ,\ \overleftrightarrow{m} \cap \overleftrightarrow{m} = \overleftrightarrow{m}$

معلومة :

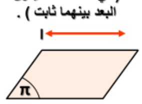
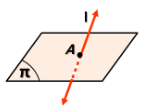
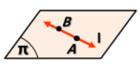
القسم غير المرئي من المستقيم m يمثل بخط متقطع .

الضلع في شبه المكعب يسمى « **حرف** »
كل **جانب** في شبه المكعب يسمى « **وجه** »

سنعتبر **الحرف الأول** في رمز أي هرم **هو رأس الهرم**
الهرم : ABCD رأسه هو A

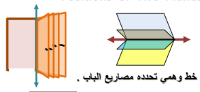
أوضاع مستقيم ومستوٍ في الفضاء
Positions of a Line and a Plane in Space

إن معرفة **عدد النقاط المشتركة** بين مستقيم ومستوٍ في الفضاء تسمح بمعرفة أوضاعهما وهي :

a **صفر نقطة مشتركة :**	b **نقطة مشتركة واحدة :**	c **نقطتان مختلفتان مشتركتان على الأقل**
المستقيم موازٍ للمستوي ولا يقع فيه (في هذه الحالة يكون البعد بينهما ثابت) .	المستقيم يقطع المستوي	المستقيم يقع بكامله (بتمامه) في المستوي (المستقيم يوازي المستوي)
		
$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \emptyset$ $\Rightarrow \boxed{\overleftrightarrow{l} \parallel \pi}$	$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \{A\}$	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi = \overleftrightarrow{l} \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \subset \pi$ $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{l} \Rightarrow \boxed{\overleftrightarrow{l} \parallel \pi}$

أوضاع مستويين في الفضاء

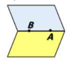
Positions of Two Planes in Space



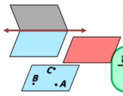
يمكن أن يمر عدد لا نهائي من المستويات في مستقيم واحد .

فكّر في باب مفتوح في أوضاع مختلفة

تمثّل كل وضعية من واجهة الباب مستويًا يمر عبر خط وهمي تحدده مصاريع الباب .



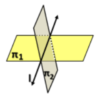
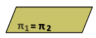
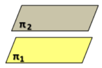
إذا اشترك مستويان مختلفان في نقطة فإنه يوجد على الأقل نقطة أخرى مشتركة بين هذين المستويين .



إذا تقاطع مستويان مختلفان فإنهما يتقاطعان في مستقيم .

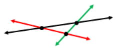
إذا اشترك مستويان في ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة واحدة يكون المستويان منطبقين .

يمكن حصر أوضاع مستويين في الفضاء بثلاث حالات :

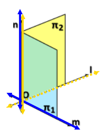
ⓐ المستويان متقاطعان في مستقيم .	ⓑ المستويان منطبقان (يشتركان في جميع النقاط)	ⓒ المستويان المختلفان متوازيان (لا توجد نقاط مشتركة بينهما)
		
$\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$	$\pi_1 = \pi_2$	$\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$
$\Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$	$\Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$	$\Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$

معلومة :

مستقيمات تتقاطع مثنى مثنى تعني أن كل مستقيمين يتقاطعان في نقطة .



مثال ٣ ـ صـ ١٢٣ l, m, n ثلاثة مستقيمات لا تقع في مستوٍ واحد تتقاطع مثنى مثنى. أثبت أن المستقيمات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة.



معلقة

المعطيات l , m , n ثلاثة مستقيمات لا تقع في مستوٍ واحد بحيث إن :

$$\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} \neq \phi , \overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{n} \neq \phi , \overleftrightarrow{m} \cap \overleftrightarrow{n} \neq \phi$$

المطلوب إثبات أن المستقيمات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة فقط .

البرهان

$\because \overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} \neq \phi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \{o\}$

$\because \overleftrightarrow{n} \cap \overleftrightarrow{m} \neq \phi \Rightarrow$ $\overleftrightarrow{n} , \overleftrightarrow{m}$ يعينان مستويًا وحيدًا وليكن π_1

$o \in \overleftrightarrow{m} \Rightarrow o \in \pi_1$ —— $\boxed{1}$

$\because \overleftrightarrow{n} \cap \overleftrightarrow{l} \neq \phi \Rightarrow$ $\overleftrightarrow{n} , \overleftrightarrow{l}$ يعينان مستويًا وحيدًا وليكن π_2

$o \in \overleftrightarrow{l} \Rightarrow o \in \pi_2$ —— $\boxed{2}$

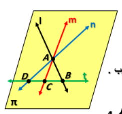
من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ $o \in \pi_1 \cap \pi_2$, $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{n}$

$\therefore o \in \overleftrightarrow{n}$

$\therefore$ o نقطة مشتركة بين المستقيمات الثلاثة

$\therefore$ تتقاطع المستقيمات l , m , n في نقطة واحدة .

حاول ٣ ـ صـ ١٢٣ l , m , n ثلاثة مستقيمات مختلفة تتقاطع في A. المستقيم t يقطع المستقيمات الثلاثة في B, C, D على الترتيب. أثبت أن المستقيمات l , m , n , t تقع في مستوٍ واحد.



معلقة

المعطيات $\overleftrightarrow{l} , \overleftrightarrow{m} , \overleftrightarrow{n}$ ثلاثة مستقيمات مختلفة تتقاطع في A .

المستقيم t يقطع المستقيمات الثلاثة في B , C , D على الترتيب .

المطلوب أثبت أن المستقيمات l , m , n , t تقع في مستوٍ واحد .

البرهان $A , \overleftrightarrow{t}$ يعينان مستويًا وحيدًا وليكن $\pi \Leftarrow A \notin \overleftrightarrow{t}$

$\therefore A , B , C , D \in \pi$

$A , B \in \pi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \subset \pi$

$A , C \in \pi \Rightarrow \overleftrightarrow{m} \subset \pi$

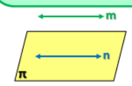
$A , D \in \pi \Rightarrow \overleftrightarrow{n} \subset \pi$

$\therefore$ المستقيمات l , m , n , t تقع في مستوٍ واحد .

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

نظرية – 1

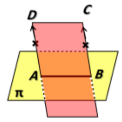
إذا وازى مستقيم خارج مستوٍ مستقيمًا في المستوي ، فإنه يوازي المستوي .



$\overleftrightarrow{n} \subset \pi \ , \ \overleftrightarrow{n} \parallel \overleftrightarrow{m} \Rightarrow \overleftrightarrow{m} \parallel \pi$

مثال ١ - ص ١٢٥

في الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$ ، $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ، $AD = BC$
أثبت أن: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$



المعطيات $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi \ , \ \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC} \ , \ AD = BC$

المطلوب إثبات أن : $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$

البرهان

$\because \ \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AD} , \overleftrightarrow{BC}$ يحددان مستوٍ وحيد ($ABCD$)

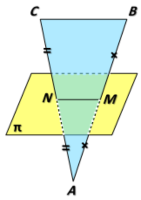
$\because \ \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC} \ , \ AD = BC$

$\therefore$ $ABCD$ متوازي أضلاع $\Leftarrow$ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$

$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi \ , \ \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC} \Rightarrow \overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$

حاول ١ - ص ١٢٥ -

1 في الشكل المقابل: المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{AC}$ ،
M ، N تنتميان إلى المستوي π .
أثبت أن $\overleftrightarrow{BC} \parallel \pi$.



المعطيات المثلث ABC فيه M منتصف AB ، N منتصف AC

N , M تنتميان إلى المستوي π .

المطلوب إثبات أن : $\overleftrightarrow{BC} \parallel \pi$

البرهان

$\because$ M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{AC}$

$\therefore \ \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ —— $\boxed{1}$

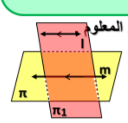
$\because$ N , M تنتميان إلى المستوي π

$\therefore \ \overleftrightarrow{MN} \subset \pi$ —— $\boxed{2}$

من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ $\overleftrightarrow{BC} \parallel \pi$

نظرية – 2

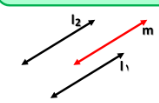
إذا وازى مستقيم مستويًا، فكل مستوٍ مار بالمستقيم ويقطع المستوي، يقطعه فى مستقيم موازٍ للمستقيم المعلوم



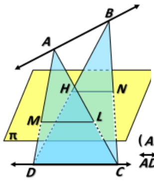
$\overleftrightarrow{l} \parallel \pi \ , \ \overleftrightarrow{l} \subset \pi_1 \ , \ \pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{m} \Rightarrow \overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l}$

نظرية – 3

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيان



$\overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{m} \ , \ \overleftrightarrow{l_2} \parallel \overleftrightarrow{m} \Rightarrow \overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2}$



في الشكل المقابل: إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متخالفان، $\pi \,//\, \overleftrightarrow{CD}$.

$\overleftrightarrow{AD}$ تقطع π في M، $\overleftrightarrow{AC}$ تقطع π في L .

$\overleftrightarrow{BD}$ تقطع π في H، $\overleftrightarrow{BC}$ تقطع π في N .

أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \,//\, \overleftrightarrow{NH}$

البرهان $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{AC}$ مستقيمان متقاطعان فى A فهما يعينان مستوٍ وحيد هو (ADC)

$\overleftrightarrow{AD} \cap \pi = \{M\}, \overleftrightarrow{AC} \cap \pi = \{L\} \Longrightarrow (ADC) \cap \pi = \overleftrightarrow{ML}$

$\because \overleftrightarrow{CD} \,//\, \pi , \overleftrightarrow{CD} \subset (ADC)$

$\therefore \boxed{\overleftrightarrow{CD} \,//\, \overleftrightarrow{ML}}$ —— $\boxed{1}$

$\overleftrightarrow{BD}, \overleftrightarrow{BC}$ مستقيمان متقاطعان فى B فهما يعينان مستوٍ وحيد هو (BDC)

$\overleftrightarrow{BD} \cap \pi = \{H\}, \overleftrightarrow{BC} \cap \pi = \{N\} \Longrightarrow (BDC) \cap \pi = \overleftrightarrow{HN}$

$\because \overleftrightarrow{CD} \,//\, \pi , \overleftrightarrow{CD} \subset (BDC)$

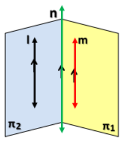
$\therefore \boxed{\overleftrightarrow{CD} \,//\, \overleftrightarrow{HN}}$ —— $\boxed{2}$

$\therefore \overleftrightarrow{NM} \,//\, \overleftrightarrow{NH}$ من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$

https://www.geogebra.org/classic/nsjmwfjh

نتيجة – ١

إذا توازى مستقيمان ومر بهما مستويان متقاطعان ،
فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلًا من هذين المستقيمين .



$\overleftrightarrow{l} \,//\, \overleftrightarrow{m} , \overleftrightarrow{m} \subset \pi_1 , \overleftrightarrow{l} \subset \pi_2 , \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{n}$

$\Downarrow$

$\overleftrightarrow{l} \,//\, \overleftrightarrow{m} \,//\, \overleftrightarrow{n}$

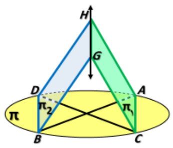
مثال (3)

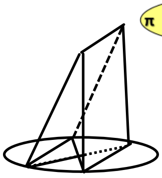
في الشكل المقابل: $\overline{AB}, \overline{CD}$ قطران في مستوي الدائرة π.

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

أثبت أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$.

مثال ٣ ـ صـ ١٢٧ ـ





المعطيات $\overline{AB}, \overline{CD}$ قطران في الدائرة , $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{HG}$

المطلوب إثبات أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$

البرهان $\because$ $\overline{AB}, \overline{CD}$ قطران في الدائرة

$\therefore$ ينصف كل منهما الآخر ومتطابقان

$\therefore$ الشكل $ACBD$ مستطيل

$\therefore \overleftrightarrow{AC} \,//\, \overleftrightarrow{DB}$

$\because \overleftrightarrow{AC} \subset \pi_1 , \overleftrightarrow{DB} \subset \pi_2 , \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

$\therefore \overleftrightarrow{GH} \,//\, \overleftrightarrow{AC} \,//\, \overleftrightarrow{DB}$

$\overleftrightarrow{GH} \,//\, \overleftrightarrow{AC} , \overleftrightarrow{AC} \subset \pi \Longrightarrow \overleftrightarrow{GH} \,//\, \pi$

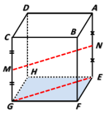
أى أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$

https://www.geogebra.org/classic/xkjpmyhm

حاول أن تحل

3 $ABCDEFGH$ شبه مكعب.
M منتصف $\overline{CG}$, N منتصف $\overline{AE}$.
أثبت أن $(EFGH)$ يوازي $\overline{MN}$.

حاول ٣ ـ صـ ١٢٧ ـ



المعطيات $ABCDEFGH$ شبه مكعب

M منتصف $\overline{CG}$, N منتصف $\overline{AE}$

المطلوب أثبت أن $(EFGH)$ يوازي $\overleftrightarrow{MN}$

البرهان نرسم $\overline{GE}$

$\because$ $\overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{CG}$, $AE = CG$,

M منتصف $\overline{CG}$, N منتصف $\overline{AE}$

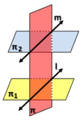
$NEGM$ متوازي أضلاع $\Longrightarrow$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{NE} \parallel \overleftrightarrow{MG}$, $NE = MG$

$\overleftrightarrow{GE} \subset (EFGH)$, $\therefore$ $\overleftrightarrow{NM} \parallel \overleftrightarrow{EG}$

$\therefore$ $(EFGH)$ يوازي $\overleftrightarrow{MN}$

نظرية ـ 4

إذا قطع مستوٍ مستويين متوازيين
فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين

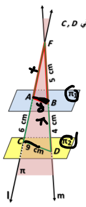


$$\pi_1 \parallel \pi_2 \;,\; \pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{l} \;,\; \pi_2 \cap \pi = \overleftrightarrow{m}$$
$$\Downarrow$$
$$\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$$

مثال (4)

في الشكل المقابل: π_1 , π_2 مستويين متوازيين.
$\overleftrightarrow{l} , \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متقاطعان في F ويقطعان كلًّا من π_1 في A, B، π_2 في C, D
إذا كان $FB = 5\text{ cm}$, $CD = 9\text{ cm}$, $AC = 6\text{ cm}$, $BD = 4\text{ cm}$
فأوجد محيط المثلث FAB

مثال ٤ ـ صـ ١٢٨ ـ



المعطيات $\pi_1 \parallel \pi_2$, $\overleftrightarrow{l}, \overleftrightarrow{m}$ متقاطعان في F ويقطعان π_1 في A , B , π_2 في C, D

, $FB = 5\text{ cm}$, $CD = 9\text{ cm}$, $AC = 6\text{ cm}$, $BD = 4\text{ cm}$

المطلوب إيجاد محيط المثلث FAB

البرهان l , m مستقيمان متقاطعان فى F فهما يعينان مستوٍ وحيد هو π

$\because$ $\pi_1 \parallel \pi_2$, $\pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{AB}$, $\pi_2 \cap \pi = \overleftrightarrow{CD}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\therefore$ المثلثان FAB , FCD متشابهان

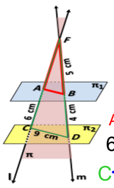
$$\frac{AB}{CD} = \frac{FA}{FC} = \frac{FB}{FD} \Longrightarrow \boxed{\frac{AB}{9}} = \boxed{\frac{FA}{FA+6}} = \boxed{\frac{5}{9}}$$

$$\frac{AB}{9} = \frac{5}{9} \Longrightarrow AB = 5\text{ cm}$$

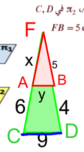
$$\frac{FA}{FA+6} = \frac{5}{9} \Longrightarrow 9\,FA = 5\,FA + 30 \Longrightarrow FA = 7.5\text{ cm}$$

محيط المثلث FAB يساوي:

$$FA + FB + AB = 7.5\text{ cm} + 5\text{ cm} + 5\text{ cm}$$
$$= 17.5\text{ cm}$$



في الشكل المقابل: π_1 , π_2 مستويين متوازيين.
$\overleftrightarrow{l} , \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متقاطعان في F ويقطعان كلًّا من π_1 في A, B، π_2 في C, D
إذا كان $FB = 5\text{ cm}$, $CD = 9\text{ cm}$, $AC = 6\text{ cm}$, $BD = 4\text{ cm}$
فأوجد محيط المثلث FAB



الحل

$\because$ $\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{m}$ متقاطعان في F

$\therefore$ يعينان مستوٍ وحيد π

$\because$ $\pi_1 \parallel \pi_2$, $\pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{AB}$, $\pi_2 \cap \pi = \overleftrightarrow{CD}$

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\Delta FAB \sim \Delta FCD$

$$\frac{FAB}{FCD} \Big| \; \frac{FA}{FC} = \frac{FB}{FD} = \frac{AB}{CD}$$

$$\frac{x}{x+6} = \frac{5}{9} = \frac{y}{9}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{y}{9} \quad \therefore \; y = 5$$

$$\because \frac{x}{x+6} = \frac{5}{9} \quad \therefore \; 9x = 5x + 30$$
$$9x - 5x = 30$$
$$4x = 30$$
$$\boxed{x = 7.5}$$

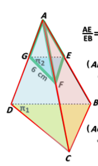
المحيط $= 7.5 + 5 + 5$

$= 17.5$ cm

حاول أن تحل

4 في الشكل المقابل، $ABCD$ هرم ثلاثي.
المستويان π_1 , π_2 متوازيان.
إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$، $FG = 6\text{ cm}$
فأوجد DC

حاول ٤ ـ صـ ١٢٩ ـ



المعطيات $ABCD$ هرم ثلاثي , $\pi_1 \parallel \pi_2$, $FG = 6\text{ cm}$, $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$

المطلوب إيجاد DC

البرهان $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AB}$ مستقيمان متقاطعان فى A فهما يعينان مستوٍ وحيد هو (ABC)

$\because$ $\pi_1 \parallel \pi_2$, $\pi_1 \cap (ABC) = \overleftrightarrow{CB}$, $\pi_2 \cap (ABC) = \overleftrightarrow{FE}$

المثلثان ACB , AFE متشابهان $\Longrightarrow$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{CB} \parallel \overleftrightarrow{FE}$

حيث $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ $\quad \boxed{\frac{AF}{AC}} = \frac{FE}{CB} = \frac{AE}{AB} = \boxed{\frac{1}{4}}$ —— $\boxed{1}$

$\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AD}$ مستقيمان متقاطعان فى A فهما يعينان مستوٍ وحيد هو (ACD)

$\because$ $\pi_1 \parallel \pi_2$, $\pi_1 \cap (ACD) = \overleftrightarrow{CD}$, $\pi_2 \cap (ACD) = \overleftrightarrow{FG}$

المثلثان ACD , AFG متشابهان $\Longrightarrow$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{FG}$

$\boxed{\frac{AF}{AC}} = \boxed{\frac{FG}{CD}} = \frac{AG}{AD}$ —— $\boxed{2}$

من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$

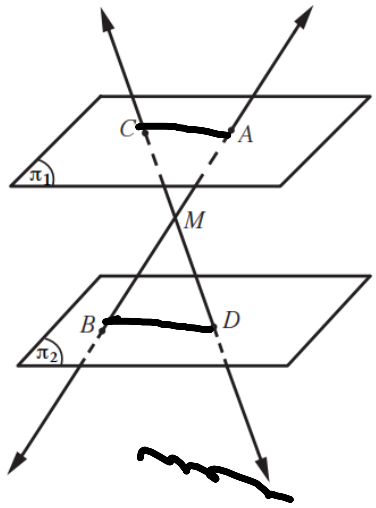
$$\frac{FG}{CD} = \frac{1}{4} \Longrightarrow CD = 4\,FG$$
$$CD = 24\text{ cm}$$

(9) في الشكل المقابل π_2 ,π_1 مستويان متوازيان، M نقطة واقعة بينهما،

حيث $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$

أثبت أن: $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AC}{BD}$

مطلوب



الحل:

$\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ متقاطعان

يعينان مستوى وحيد

$\pi = (ABCD)$

$\pi_1 \parallel \pi_2$, $\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AC}$, $\pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{BD}$

$\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$

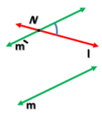
$\therefore \triangle ACM \sim \triangle MBD$

$\therefore \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{MC}{MD} = \dfrac{AC}{BD}$

تعامد مستقيم مع مستوى

الزاوية بين مستقيمين متخالفين
Angle of Two Skew Lines

الزاوية بين مستقيمين متخالفين هي الزاوية التي يصنعها أحدهما مع أي مستقيمٍ قاطعٍ له وموازٍ للآخر .



$\overleftrightarrow{l}, \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متخالفان في الفضاء .

نأخذ النقطة N على أحد المستقيمين وليكن $\overleftrightarrow{l}$

نرسم $\overleftrightarrow{m`}$ بحيث $\overleftrightarrow{m`}$ يوازي $\overleftrightarrow{m}$ ويمر بالنقطة N

الزاوية الحادة أو القائمة الناتجة عن تقاطع $\overleftrightarrow{l}, \overleftrightarrow{m`}$

هى الزاوية بين المستقيمين l , m

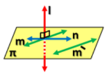
ملاحظة : لا تتأثر الزاوية بتغير موقع النقطة N

تعريف

يكون المستقيم l عموديًا على المستوي π

إذا كان $\overleftrightarrow{l}$ عموديًا على جميع المستقيمات الواقعة في π

ويرمز له بـ: $\overleftrightarrow{l} \perp \pi$



$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi \left\{ \begin{array}{l} \overleftrightarrow{m} \subset \pi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m} \\ \overleftrightarrow{m`} \subset \pi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m`} \\ \vdots \\ \overleftrightarrow{n} \subset \pi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{n} \end{array} \right.$$

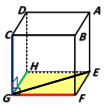
$\overleftrightarrow{l}$ عموديًا على كل المستقيمات في المستوي π

نقول أيضًا إن π عمودي على $\overleftrightarrow{l}$

ويرمز له بـ : $\pi \perp \overleftrightarrow{l}$

نظرية ـ 5

المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديًّا على مستويهما.



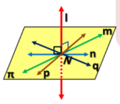
$\overleftrightarrow{GF} \cap \overleftrightarrow{GH} = \{ G \}$, $\overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GF}$, $\overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GH}$

$\Downarrow$

$\overleftrightarrow{CG} \perp (EFGH)$

نتيجة ـ ٢

جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي إلى هذا المستقيم تكون محتواة فى مستوٍ واحد عموديًا على المستقيم المعلوم .



من النقطة N $\overleftrightarrow{m}, \overleftrightarrow{n}, \overleftrightarrow{q}, \overleftrightarrow{p} \perp \overleftrightarrow{l}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{m}, \overleftrightarrow{n}, \overleftrightarrow{q}, \overleftrightarrow{p} \subset \pi \quad , \quad \pi \perp \overleftrightarrow{l}$

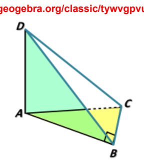
مثال (1)

في الشكل المقابل، المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$.

أثبت أن المثلث DBC قائم في $\widehat{B}$

https://www.geogebra.org/classic/tywvgpvu



المعطيات المثلث ABC قائم في $\hat{B}$, $\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$

المطلوب أثبت أن المثلث DBC قائم في $\hat{B}$

البرهان

$\because \overleftrightarrow{AD} \perp (ABC) \quad , \quad \overleftrightarrow{BC} \subset (ABC)$

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$ —— $\boxed{1}$

$\because$ المثلث ABC قائم في $\hat{B}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ —— $\boxed{2}$

$\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{AB}$ مستقيمان متقاطعان فى A فهما يعينان مستوٍ وحيد هو (ABD) —— $\boxed{3}$

من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ و $\boxed{3}$

$\therefore \overleftrightarrow{BC} \perp (ABD)$

$\because \overleftrightarrow{BD} \subset (ABD)$

$\therefore \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{BD}$

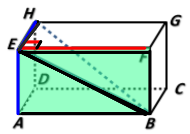
$\therefore$ المثلث DBC قائم في $\hat{B}$

https://www.geogebra.org/classic/facqednr

حاول ١ - ص ١٣٢ -

حاول أن تحل

1 في شبه المكعب المقابل،
أثبت أن المثلث BEH قائم في $\widehat{E}$.



المعطيات $ABCDEFGH$ شبه مكعب

المطلوب أثبت أن المثلث BEH قائم في $\hat{E}$

البرهان

$\because \overleftrightarrow{EH} \perp \overleftrightarrow{EA}$,

$\overleftrightarrow{EH} \perp \overleftrightarrow{EF}$,

$\overleftrightarrow{EA}, \overleftrightarrow{EF}$ مستقيمان متقاطعان فى E فهما يعينان مستوٍ وحيد هو $(AEFB)$

$\therefore \overleftrightarrow{EH} \perp (AEFB)$

$\because \overleftrightarrow{EB} \subset (AEFB)$

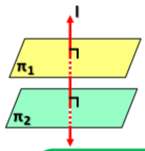
$\therefore \overleftrightarrow{EH} \perp \overleftrightarrow{EB}$

$\therefore$ المثلث BEH قائم في $\hat{E}$

نظرية - 6

إذا كان مستقيم عموديًا على كلٍّ من مستويين مختلفين
فإنهما يكونان متوازيين

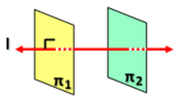
$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \,,\, \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2 \Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$



نظرية - 7

إذا كان مستقيم عموديًا على أحد مستويين متوازيين
فإنه يكون عموديًا على المستوى الآخر

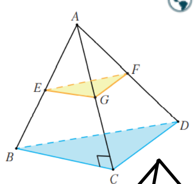
$\pi_1 \parallel \pi_2 \,,\, \overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2$

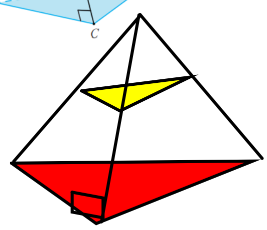


https://www.geogebra.org/classic/gk8tqhep

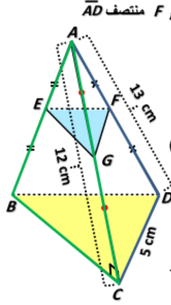
مثال (2)

في الشكل المقابل:
A نقطة خارج المستوى BCD،
والنقاط E, G, F منتصفات $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ ، $\overline{AD}$ على الترتيب.
إذا كان $\overline{AC} \perp \overline{CB}$
وكان $AD = 13$ cm ، $AC = 12$ cm ، $CD = 5$ cm
فأثبت أن: $(EGF) \parallel (BCD)$.





مثال ٢ - ص ١٣٢ -



المعطيات A نقطة خارج المستوى BCD , E منتصف $\overline{AB}$, G منتصف $\overline{AC}$, F منتصف $\overline{AD}$

$\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CB}$, $AD = 13$ cm , $AC = 12$ cm , $CD = 5$ cm

المطلوب أثبت أن: $(EGF) \parallel (BCD)$

البرهان

في $\triangle ACD$ $(AD)^2 = 169$, $(AC)^2 + (CD)^2 = 169$

$\therefore$ المثلث ACD قائم في $\hat{C}$ $\Leftarrow$ $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CD}$

$\overleftrightarrow{CB}, \overleftrightarrow{CD}$ مستقيمان متقاطعان فى C فهما يعينان مستوٍ وحيد هو (BCD)

$\because \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CB}$

$\therefore \boxed{\overleftrightarrow{AC} \perp (BCD)}$ —— $\boxed{1}$

في $\triangle ABC$ E منتصف $\overline{AB}$, G منتصف $\overline{AC}$ $\Leftarrow$ $\overleftrightarrow{EG} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

$\overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{EG}$ $\Leftarrow$ $\therefore m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{EGA}) = 90^\circ$

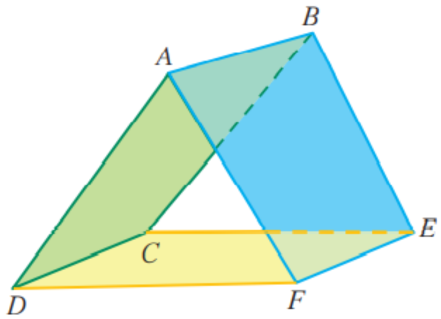
في $\triangle ADC$ F منتصف $\overline{AD}$, G منتصف $\overline{AC}$ $\Leftarrow$ $\overleftrightarrow{FG} \parallel \overleftrightarrow{DC}$

$\overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{FG}$ $\Leftarrow$ $\therefore m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{FGA}) = 90^\circ$

$\overleftrightarrow{GE}, \overleftrightarrow{GF}$ مستقيمان متقاطعان فى G فهما يعينان مستوٍ وحيد هو (EGF)

$\therefore \boxed{\overleftrightarrow{AG} \perp (EGF)}$ —— $\boxed{2}$

من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ $\therefore (EGF) \parallel (BCD)$



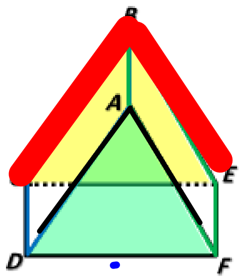
حاول أن تحل

2 في الشكل المقابل:

$ABEF, ABCD$ مستطيلان

أثبت أن: $(AFD) \mathbin{/\!/} (BEC)$

https://www.geogebra.org/classic/cd6qjxfk



حاول ـ ٢ ـ صـ ١٤٤ ـ

هام جداً !!

المعطيات $ABEF, ABCD$ مستطيلان

المطلوب أثبت أن: $(AFD) \mathbin{/\!/} (BEC)$

البرهان ∵ $ABCD$ مستطيل

$\boxed{1}$ ∴ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AD}$

∵ $ABEF$ مستطيل

$\boxed{2}$ ∴ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AF}$

$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BE}$ مستقيمان متقاطعان في B فهما يعينان مستوٍ وحيد هو (BEC) $\boxed{3}$

من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ و $\boxed{3}$

$\boxed{4}$ ∴ $\overleftrightarrow{AB} \perp (BEC)$

$\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{AF}$ مستقيمان متقاطعان في A فهما يعينان مستوٍ وحيد هو (AFD) $\boxed{5}$

من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ و $\boxed{5}$

$\boxed{6}$ ∴ $\overleftrightarrow{AB} \perp (AFD)$

من $\boxed{4}$ و $\boxed{6}$

∴ $(AFD) \mathbin{/\!/} (BEC)$

مثال (3)

في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$ ، $A \in \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$ ، $\pi_1 \parallel \pi_2$

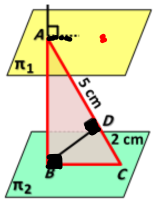
https://www.geogebra.org/classic/xhmxtfxc

رسم: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ في المستوي ABC

إذا كان: $DC = 2\text{ cm}$ ، $AD = 5\text{ cm}$

أوجد: BD

مثال ٣ - ص ١٣٤ -



$BD^2 = 5 \times 2$

$BD = \sqrt{10}$

المعطيات $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$, $\pi_1 \parallel \pi_2$

$AD = 5\text{ cm}$, $DC = 2\text{ cm}$,

المطلوب إيجاد BD

البرهان

$\because$ $\pi_1 \parallel \pi_2$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$

$\because$ $\overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$

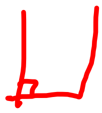
$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$

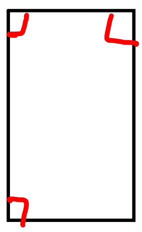
$\therefore$ المثلث ABC القائم الزاوية في B

$\because$ $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$

$\therefore$ $(DB)^2 = DC \times DA = 10$

$BD = \sqrt{10}$ cm





حاول أن تحل

حصة غير متزامنة

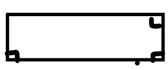
3 في الشكل المقابل: $\pi_1 \parallel \pi_2$

A, B نقطتان في π_1،

C, D نقطتان في π_2 حيث: A, B, C, D في مستوى واحد

$\overline{BC} \perp \pi_2$, $\overline{AD} \perp \pi_2$

أثبت أن $ABCD$ مستطيل.

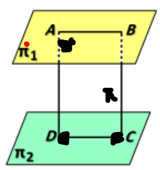


هام

حاول ٣ - ص ١٣٤ -

المعطيات $\overleftrightarrow{BC} \perp \pi_2$, $\overleftrightarrow{AD} \perp \pi_2$, $\pi_1 \parallel \pi_2$

المطلوب أثبت أن $ABCD$ مستطيل



البرهان

$\because$ $\overleftrightarrow{BC} \perp \pi_2$, $\overleftrightarrow{DC} \subset \pi_2$

$\therefore$ $\boxed{\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{CD}}$ —— $\boxed{1}$

$\because$ $\overleftrightarrow{AD} \perp \pi_2$, $\overleftrightarrow{DC} \subset \pi_2$

$\therefore$ $\boxed{\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DC}}$ —— $\boxed{2}$

$\because$ $\pi_1 \parallel \pi_2$, $\overleftrightarrow{AD} \perp \pi_2$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AD} \perp \pi_1$, $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$

$\therefore$ $\boxed{\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AB}}$ —— $\boxed{3}$

$\therefore$ ABCD مستطيل

من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ و $\boxed{3}$ و في الشكل $ABCD$ زواياه الاربعة قوائم

$\therefore$ $ABCD$ مستطيل