

الجُمُهُورِيَّةِ الْعَرَبِيَّةِ السُّوْرِيَّةِ

وزارة التربية

المَركَزُ الْوطَنِيُّ لِتَطْوِيرِ الْمَنَاهِجِ التَّربِيَّيَّةِ

الرياضيات

الجزء الثاني

الصف الثالث الثانوي العلمي

العام الدراسى ٢٠٢١ - ٢٠٢٢ م
١٤٤٢ - ١٤٤٣ هـ

حقوق التأليف والنشر محفوظة

لوزارة التربية في الجمهورية العربية السورية



حقوق الطبع والتوزيع محفوظة

للمؤسسة العامة للطباعة

طبع أول مرة للعام الدراسي ٢٠١٦ - ٢٠١٧ م

لجنة التّأليف

فِئَةُ الْمُخْتَصِّينَ



خطة توزيع منهج الرياضيات

يخصّص أربع حصص أسبوعياً لكتاب الرياضيات الجزء الثاني

الشهر	الأسبوع الأول	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
أيلول	المسافة في الفراغ	الأشعة في الفراغ	العلم في الفراغ	الارتباط الخطي لثلاثة أشعة
تشرين أول	مركز الأبعاد المتناسبة في الفراغ	تمرينات وسائل قدماً إلى الأمام	تمرينات وسائل قدماً إلى الأمام	الجداء الشمسي في المستوى
تشرين ثاني	التعامد في الفراغ	تمرينات وسائل لتعلم	تمرينات وسائل لتعلم	تقاطع مستقيمات ومستويات
كانون أول	التعامد في الفراغ	البحث	البحث	تقاطع مستويات
كانون ثاني	المعادلة الديكارتية لمستوي	المسافة	المسافة	التمثيلات الوسيطية
شباط	الشكل الأسّي لعدد عقدي	أنشطة	أنشطة	الشكل الأسّي لعدد عقدي
آذار	المعادلة التّربيعية ذات الأمثل	البحث	البحث	استعمال العدد العقدي
نيسان	الحقيقة	البحث	البحث	الممثل لشعاع، الكتابة
أيار	أنشطة	أنشطة	أنشطة	العقدية للتحولات الهندسية
	التحولات المشروطة	الاستقلال الاحتمالي	الاستقلال الاحتمالي	أنشطة، تمرينات وسائل:
	التحولات العشوائية	متحوّلين	متحوّلين	التحولات العشوائية ذات الأمثل
	التحولات العشوائية	حل نماذج اختبارات	حل نماذج اختبارات	إنشاء قوائم من عناصر

مقدمة

يأتي منهاج الرياضيات في الصف الثالث الثانوي العلمي متمماً لمنهاج الرياضيات في الصفين الأول والثاني الثانوي الذي جرى إعداده في المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية وفق المعايير الوطنية، معتمدًا في بنائه على التراكم الحلواني للمفاهيم والمهارات وتكاملها، إذ تتطور المفاهيم والمهارات في بناء مترابطٍ، فتُقرن المعرفات بالحياة العملية وتقدم المادة العلمية بطريق سهلة ومتعددة ومدعمة بموافق حياتية وتكامل مع المواد الدراسية الأخرى.

يشتمل كتاب الرياضيات الجزء الثاني على سبع وحداتٍ متضمنة **ثلاثين درساً** وينتهي كل درس بعده من التدريبات تهدف إلى تقويم الطالب وتمكينه من المعرفات والمهارات التي تعلمها في الدرس، ولمتابعة بقية دروس الوحدة، ونجد في كل وحدة عدداً من الفقرات المميزة التي تجملها فيما يأتي:

- **المقدمة:** وهي مقدمة تحفيزية تهدف إلى تنمية اتجاهات إيجابية نحو الرياضيات واحترام ما قدمه العلماء من إسهامات في ميدان العلوم المختلفة.
- **انطلاقة نشطة:** تهدف إلى تعزيز المهارات الأساسية التي يحتاجها المتعلم مزودة بأسئلة وشروط وتوسيعات كمدخل للوحدة والإضافة على مفاهيمها.
- **أمثلة:** تتضمن مختلف الفقرات الموجودة في الدرس وهي في أغلب الأحيان تعرض حلولاً نموذجية جرى صوغها صياغة لغوية سليمة وأسلوب منهجي علمي لتكون نماذج يجب اتباعها عند حل الأنشطة والتدريبات والمسائل.
- **تكريراً للفهم :** تطرح سؤالاً هاماً للمناقشة يتعلّق بفكرة الدرس الأساسية في مادة التعلم والإجابة عنه بطريق متعددة موضحة بالأمثلة المناسبة لتقدير الفهم عند المتعلم حيث يتم إعادة فكرة الدرس بأساليب مختلفة .

- **أفكار يجب تمثيلها**: وهي فقرة يجري فيها التدوية إلى قضايا ومفاهيم أساسية في الوحدة حيث تُعاد صياغتها بأسلوب مختصر ومبسطٍ.
- **منعكسات يجب امتلاكها**: وهي فقرة تتضمن إرشادات للمتعلم على كيفية التفكير قبل البدء بالإجابة عن سؤال، وما هو المنعكس السريع الذي يجب أن يتบรร إلى ذهنه وكيفية استعمال القضايا والمفاهيم الأساسية في أمثلة توضيحية.
- **أخطاء يجب تجنبها**: حيث جرت الإشارة إلى بعض الأخطاء الشائعة التي يقع فيها الطالب عادة، أو المفاهيم التي يستعملها الطالب في غير مكانها، أو بأسلوب منقوص.
- **أنشطة**: في نهاية كل وحدة مجموعة من التمرينات والتطبيقات الحياتية صيغت على شكل أنشطة تفاعلية .
- **لنتعلم البحث**: وهي فقرة تدرب المتعلم على طرائق حل المشكلات وتشجع التعلم الذاتي عن طريق تزويد الطالب بمنهجية التفكير الاستقصائي وجعله يطرح على نفسه الأسئلة الصحيحة بهدف الوصول إلى حلول المسائل ثم صياغة هذه الحلول بلغة سليمة.
- **قدماً إلى الأمام**: وهي تمارين ومسائل متعددة ومترددة في صعوبتها تشمل في بعض الأحيان مواقف حياتية تتيح للمتعلم فرص تعلم كثيرة وتعزز مهارات حل المسائل والتفكير الناقد لديه.
- وهكذا كانت الوحدة الأولى (**الأشعة في الفراغ**) ليعمم مفهوم الشّعاع ، الذي درسناه في الصف الثاني الثانوي ، دونما فوارق أساسية، إلى الفراغ.
- **الوحدة الثانية (الجاء السليمي في الفراغ)** ستقصر في دراستنا على المفهوم الهندسي البسيط وتطبيقاته المباشرة .
- ثم تأتي الوحدة الثالثة (**المستقيمات والمستويات في الفراغ**) إذ تهتم هذه الوحدة بدراسة حلول جملة ثلاثة معادلات خطية بثلاثة مجهول، ودراسة التمثيل الوسيطي لمستقيم إذ يتيح التفسير الهندسي في حل بعض جمل المعادلات معرفة سابقة لعدد حلول الجملة، مما يجعل التحقق من صحة الحل الجبري أمراً يسيراً.
- وندرس في الوحدة الرابعة (**الأعداد العقدية**) وفيها نتعرف مجموعة الأعداد العقدية والشكل الجبري والشكل المثلثي والشكل الأسي لعدد عقدي وطويلته وزاويته وبعض قواعد حسابه وحل المعادلة من الدرجة الثانية ذات الأمثال الحقيقية.

- وننترّف في الوحدة الخامسة (**تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة**) ومنها تمثيل الأشعة بأعداد عقدية، العدد العقدي المافق لمركز الأبعاد المناسبة والكتابة العقدية لبعض التحويلات الهندسية.

- وفي الوحدة السادسة (**التحليل التواقي**) ندرس بعض طرائق العد ومنتشر ذي الحدين.

- واخِيرًا تأتي الوحدة السابعة (**الاحتمالات**) لنتائج فيها دراسة الاحتمالات والتَّمثيل الشجري للتجارب الاحتمالية المركبة، القواعد العامة في حالة التَّمثيل الشجري لتجربة، والتحولات العشوائية ، والقانون الحداني .

رُوِّد الكتاب أيضًا بمجموعة من نماذج الاختبارات تشمل جميع مفاهيم الكتاب. وجرى فيها توسيع طرائق عرض الأسئلة، وتضمين تمارين متدرجة في المستوى لتمكن المتعلمين من حلها تبعاً لمستويات تحصيلهم. نرجو أن تكون هذه النماذج عوناً للمدرس في بناء نماذج مشابهة، تساعد في قياس مدى تحقيقه للأهداف التعليمية المطلوبة.

وهنا نريد التأكيد على أن تحقيق الأهداف المرجوة من الكتاب في تنمية مهارات التفكير المختلفة وخاصة مهارات التفكير الناقد والتفكير الإبداعي، يتطلب من المدرس أن يؤدي دور الميسر والموجه للعملية التعليمية، فيطرح التساؤلات المناسبة، ويختار المناسب من الأمثلة، ويرتب الأفكار ترتيباً منطقياً، ويووجه مهداً الطريق لحل المسائل، ويصوغ الحلول صياغة لغوية سليمة على السَّبورة. وأخيراً نأمل من زملائنا الإسهام معنا في إنجاح هذه التجربة الجديدة وتزويتنا بمقترناتهم البناءة المتعلقة بهذا الكتاب متعاونين معاً لتطوير الكتاب المدرسي باستمرار. وننوه أنه يمكن الحصول على النسخة الإلكترونية من هذا الكتاب من موقع المركز الوطني لتطوير المناهج التَّربوية على الشَّبكة:

.www.nccd.gov.sy

المعدون

المحتوى

الأشعة في الفراغ

①

13	1. عموميات
17	2. الارتباط الخطّي لثلاثة أشعة
21	3. المعلم في الفراغ
25	4. المسافة في الفراغ
28	5. مركز الأبعاد المناسبة في الفراغ
33	أنشطة
35	تمرينات ومسائل

الجداء السُّلْمِي في الفراغ

②

45	1. الجداء السُّلْمِي في المستوى (تنكرة)
48	2. الجداء السُّلْمِي في الفراغ
51	3. التَّعَامِد في الفراغ
54	4. المعادلة الديكارتية لمستوٍ
57	أنشطة
61	تمرينات ومسائل
64	

المستقيمات والمستويات في الفراغ

③

73	1. المستقيم والمستوى بصفتهما مراكز أبعاد متناسبة
78	2. التَّمثيلات الوسيطية
82	3. تقاطع مستقيمات ومستويات
85	4. تقاطع ثلاثة مستويات
88	أنشطة
92	تمرينات ومسائل
94	

④

الأعداد العقدية

99

103.....	1. مجموعة الأعداد العقدية
106.....	2. مراافق عدد عقدي
108.....	3. الشكل المثلثي لعدد عقدي
111.....	4. طولية عدد عقدي وزاويته
114.....	5. الشكل الأسي لعدد عقدي
117.....	6. المعادلات من الدرجة الثانية ذات الأمثال الحقيقية
120.....	أنشطة
122.....	تمرينات ومسائل

⑤

تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة

127

128.....	1. تمثيل الأشعة بأعداد عقدية
130.....	2. استعمال العدد العقدي الممثل لشعاع
134.....	3. الكتابة العقدية للتحويلات الهندسية
138.....	أنشطة
140.....	تمرينات ومسائل

⑥

التحليل التّوافقي

147

149.....	1. إنشاء قوائم من عناصر مجموعة
153.....	2. التّوافقي
156.....	3. خواص عدد التّوافقي $({}^n_r)$ ، ومنشور ذي الحدين
161.....	أنشطة
164.....	تمرينات ومسائل

الاحتمالات

169

173.....	1. الاحتمالات المشروطة
181.....	2. المتحولات العشوائية
185.....	3. الاستقلال الاحتمالي لمتحولين عشوائين
188.....	4. المتحولات العشوائية الحدّانية
194.....	أنشطة
198.....	تمرينات ومسائل

اختبارات عامة

205

215

مسرد المصطلحات العلمية

1

الأشعة في الفراغ

عموميات 

الارتباط الخطّي لثلاثة أشعة 

المعلم في الفراغ 

المسافة في الفراغ 

مركز الأبعاد المناسبة في الفراغ 

تاربخياً، يمكن إرجاع مفهوم الأشعة إلى بداية القرن التاسع عشر، في أعمال بولزانو Bolzano الذي نشر عام 1804 كتاباً عن أسس الهندسة، يتعامل فيه مع النقاط والمستقيمات والمستويات بصفتها عناصر غير معرفة، ثم يعرف عمليات عليها، وكانت هذه خطوة مهمة على طريق وضع الأسس الموضوعاتية للهندسة، وقفزة ضرورية من التجريد اللازم نحو مفهوم الأشعة والفضاءات الشعاعية.

وفي عام 1827 نشر موبيوس Möbius كتاباً عن حساب مراكز الأبعاد المتناسبة : انطلاقاً من أي مثلث ABC ، أي نقطة P من المستوى هي مركز ثقل النقاط A و B و C وقد وضعنا فيها أوزاناً مُناسبة a و b و c . تكمن أهمية هذا العمل في أن موبيوس كان يتَّمَّل مقداراً موجحة، الظهور الأول للأشعة. وفي عام 1837 نشر موبيوس نفسه كتاباً في علم التوازن يتحدث فيه صراحة عن تحليل مقدار شعاعي على محورين.

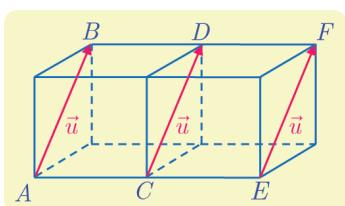
في عام 1814 مثل آرغان Argand الأعداد العقدية بنقاط في المستوى، أي بأزواج من الأعداد الحقيقة، ولكن هاملتون Hamilton هو من تعامل مع هذه الأعداد بصفتها أشعة ثنائية الأبعاد في مقالة علمية نشرت عام 1833، وأمضى بعدها عشر سنين من حياته مُحاولاً - دون جدوى - تعميم عملية ضرب الأعداد العقدية على الأشعة في الفراغ الثلاثي الأبعاد. ولكنه نجح في فضاء ذي أربعة أبعاد واكتشف عام 1843 ما يُعرف بحقل الرباعيات Quaternion وهو حقل غير تبديلٍ يمدد حقل الأعداد العقدية.

الأشعة في الفراغ

عموميات ①

1.1. التعريف وقواعد الحساب

يعمّم مفهوم الشّعاع، الذي رأيناه في المستوى في الصف الثاني الثانوي، دونما فوارق، إلى الفراغ.



① نقرن بكل شائنة نقاط (A, B) من الفراغ، الشّعاع \overrightarrow{AB} .

▪ في حالة $A \neq B$ ، يمتلك الشّعاع \overrightarrow{AB} :

▫ منحى هو منحى المستقيم (AB) .

▫ اتجاهًا يتحقق مع الانتقال من A إلى B .

▫ طولاً أو ظيماً هو المسافة بين A و B . نرمز إلى نظيم الشّعاع \overrightarrow{AB} بالرمز

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB$$

▪ في حالة $A = B$ ، الشّعاع \overrightarrow{AA} هو الشّعاع الصّافي ويرمز إليه بالرمز $\vec{0}$.

② نقول إنَّ أشعة متساوية عندما تمتلك المنحى ذاته، والاتجاه ذاته، والطول ذاته. نكتب عندئذ، $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ كما يشير الشكل السابق.

③ إذا لم تكن النقاط الأربع A و B و C و D على استقامة واحدة، عندئذ :

$$\text{« } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \text{ » يكافئ } ABDC \text{ متوازي أضلاع «}$$

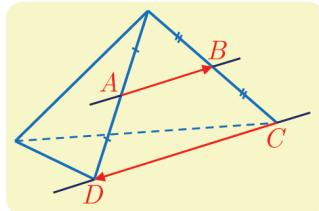
④ أياً تكون النّقطة A من الفراغ، وأياً يكن الشّعاع \vec{u} ، توجد نقطة واحدة B تحقق $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

⑤ قواعد الحساب المتبعة مع الأشعة في الفراغ، هي ذاتها المتبعة مع الأشعة في المستوى (علاقة شال مثلاً).

2.1. الأشعة المرتبطة خطياً، التوازي والوقوع على استقامة واحدة

يُعرف الارتباط الخطّي لشعاعين في الفراغ كما هي حال التعريف في المستوى. والأمر ذاته فيما يتعلق بالمبرهنات والنتائج المترتبة عليها:

تعريف 1

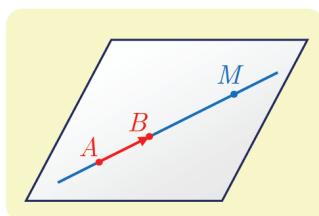


القول إن الشعاعين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{CD} غير الصُّفَرِيَّين، مرتبطان خطياً، يعني أن المستقيمين (AB) و (CD) متوازيان (الانطباق حالة خاصة من التوازي). أي إن لهما المنحى ذاته. اصطلاحاً الشعاع الصُّفَرِيُّ وأي شعاع \vec{u} مرتبطان خطياً.

مبرهنة 1

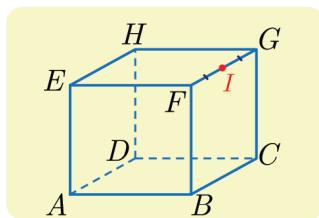
- يكون الشعاعان \vec{u} و \vec{v} مرتبطين خطياً إذا وفقط إذا نتج أحدهما من الآخر بضرره بعدد حقيقي أي إذا وجد عدد حقيقي k يحقق $\vec{v} = k\vec{u}$ أو وجد عدد حقيقي k' يحقق $\vec{u} = k'\vec{v}$.
- تكون النقاط المتمايزة A و B و C على استقامة واحدة إذا وفقط إذا كان الشعاعان \overrightarrow{AC} و \overrightarrow{AB} مرتبطين خطياً وهذا بدوره يكفي وجود عدد حقيقي غير معروف k يحقق $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ ومثلما في المستوى، لدينا المبرهنة الآتية:

مبرهنة 2



لتكن A و B نقطتين مختلفتين من الفراغ، عندئذ المستقيم (AB) هو مجموعه النقاط M التي تجعل \overrightarrow{AM} و \overrightarrow{AB} مرتبطين خطياً، أي مجموعه النقاط M التي تتحقق $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ حيث t من \mathbb{R} .

مثال كيف نستفيد من قواعد الحساب؟



. $ABCDEF$ مكعب و I منتصفحرف $[FG]$.

① عين النقطة M التي تتحقق العلاقة (1) الآتية:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{AM}$$

② أثبت صحة العلاقة (2) الآتية :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CB}$$

الحل

- ① إذا كانت A نقطة معلومة وكان \vec{u} شعاعاً معلوماً، أمكن تعين النقطة M التي تتحقق $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FI} = \vec{u}$. ومنه فكرة البحث عن شعاع واحد يساوي الشعاع $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

الرباعي $ABFE$ مربع، إذن $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF}$ استناداً إلى قاعدة متوازي الأضلاع في جمع الأشعة، ومنه $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{AI}$. ثم نستفيد من علاقة شال لنجد $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FI}$. $M = I$ نجد $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM}$ ، وبالتعميض في (1) نجد $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{AI}$ لإثبات المساواة (2)، فنكتب، استناداً إلى علاقة شال $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB}$ ، إذن

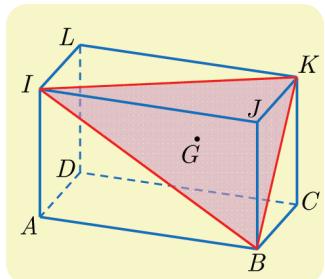
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FB} \\ \therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

وبالاستفادة من علاقة شال ثانية، نجد



أتبعي العلاقة التي أثبتتها في المثال السابق صحيحة أيًّا كانت النقاط A, B, C, F في الفراغ؟

مثال كيف ثبتت وقوع نقاط على استقامة واحدة؟



ليكن $ABCDIJKL$ متوازي سطوح. ولتكن G مركز ثقل المثلث BIK . أثبت أنَّ النقاط D و G و J تقع على استقامة واحدة.

أحد أساليب إثبات وقوع النقاط D و G و J على استقامة واحدة هو إثبات أنَّ الشعاعين \overrightarrow{DG} و \overrightarrow{DJ} مرتبطان خطياً.

الحل

لما كانت G مركز ثقل المثلث BIK ، كان $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GK} = \vec{0}$. لنسع إلى إظهار الشعاع \overrightarrow{DG} بالاستفادة من علاقة شال، نجد

$$\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DK} = \vec{0}$$

ومنه

$$3\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{DK} = \vec{0}$$

ومن جهة أخرى لنسع إلى إظهار الشعاع \overrightarrow{DJ} ، نلاحظ أنَّ

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{DK} &= \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{AJ} \\ &= 2\overrightarrow{DJ} + \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JI}}_{\vec{0}} = 2\overrightarrow{DJ}\end{aligned}$$

أو $3\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DJ}$ أي $3\overrightarrow{GD} + 2\overrightarrow{DJ} = \vec{0}$. إذن تقع النقاط D و G و J على استقامة واحدة.

تحريساً للفهم



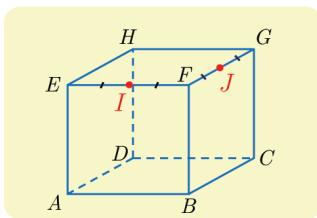
ما فائدة مفهوم الارتباط الخطّي لشعاعين في الفراغ؟

- لإثبات توازي مستقيمين أو نفي توازيهما.
- لإثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة أو نفي وقوعها.

تجربة

. $[FG]$ منتصف I مكعب $ABCDEFGH$ ①

❶ في كلٌ من الحالات التالية، بين إذا كانت النقطة M المعرفة بالمساواة الشعاعية المفروضة



تطبق أو لا تطبق على أحد رؤوس المكعب. وعلل إجابتك.

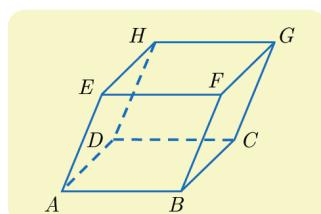
$$\begin{aligned} \cdot \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \quad ■2 & \cdot \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH} \quad ■1 \\ \cdot \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BF} \quad ■4 & \cdot \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DG} \quad ■3 \\ \cdot \overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB}) \quad ■5 \end{aligned}$$

❷ في كلٌ من الحالات الآتية، حدد موقع النقطة N المحققة للمساواة الشعاعية المفروضة.

$$\begin{aligned} \cdot \overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HJ} \quad ■2 & \cdot \overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FJ} \quad ■1 \\ \cdot \overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EI} \quad ■3 \end{aligned}$$

❸ في كلٌ من الحالات الآتية، عبّر عن المجموع الشعاعي المفروض بشعاع واحد (قد يكون مضروباً بعدد) وذلك باستخدام نقطتين من الشكل حسراً.

$$\cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{JF} \quad ■4 \quad \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} \quad ■3 \quad \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC} \quad ■2 \quad \cdot \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BA} \quad ■1$$



متوازي سطوح $ABCDEFGH$ ②

❶ أثبت صحة المساواة الشعاعية، في كلٌ من الحالات الآتية:

$$\begin{aligned} \cdot \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CF} &= \vec{0} \quad ■2 & \cdot \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BE} &= \vec{0} \quad ■1 \\ \cdot \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FG} &= \overrightarrow{FD} \quad ■4 & \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EB} &= \vec{0} \quad ■3 \end{aligned}$$

❷ وضع النقاط P و Q و R بحيث يكون:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \quad ■1 \\ \cdot \overrightarrow{AQ} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \quad ■2 \\ \cdot \overrightarrow{CR} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \quad ■3 \end{aligned}$$

❸ عين شعاعاً يساوي $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BF}$ وأثبت أنَّ هذا الشعاع يرتبط خطياً بالشعاع \overrightarrow{AH} .

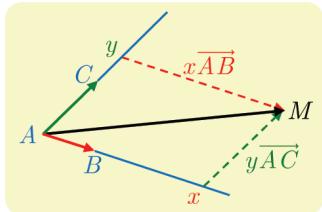
❹ أوجد شعاعاً يساوي $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FB}$ وأثبت أنَّ هذا الشعاع يرتبط خطياً بالشعاع \overrightarrow{DF} .

الارتباط الخطّي لثلاثة أشعة

2

1.2. الخاصّة المميّزة لمستوي الفراغ

مِبرهنة 3



لتكن A و B و C ثلات نقاط ليست واقعة على استقامة واحدة. عندئذ المستوي (ABC) هو مجموع النقاط M المعرفة بالعلاقة:

$$\overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$$

نقول في هذه الحالة إن \overrightarrow{AC} و \overrightarrow{AB} **يوجّهان** المستوي (ABC) .

ونقول أيضاً إن \overrightarrow{AC} و \overrightarrow{AB} **هما شعاعاً توجيه** في المستوي (ABC) .

 يتعيّن مستوٍ \mathcal{P} عموماً بنقطة وشعاعين \vec{u} و \vec{v} غير مرتبطين خطياً، هما شعاعاً توجيه \mathcal{P} .

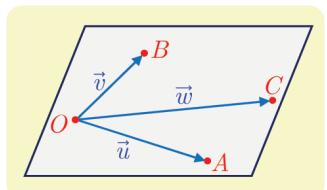
الإثبات (يركز إلى قراءة ثانية)

▪ النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة، فالشعاعان \overrightarrow{AC} و \overrightarrow{AB} غير مرتبطين خطياً، إذن معلم في المستوي (ABC) . فإذا كانت M نقطة من ذاك المستوي، وُجدت ثنائية حقيقة (x,y) تتحقق $\overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$.

▪ وبالعكس، لنثبت أن كلّ نقطة M معينة بالعلاقة $\overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$ هي نقطة من المستوي (ABC) . لما كان معلم في المستوي (ABC) ، إذن توجد نقطة N من هذا المستوي $M = N$. فالنقطة E إحداثياتها (x,y) أي $\overrightarrow{AN} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$ ومنه تنتهي إلى المستوي (ABC) .

2.2. الارتباط الخطّي لثلاثة أشعة

تعريف 2



نقول إن الأشعة \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} مرتبطة خطياً، إذا وفقط إذا وُجدت نقطة O تجعل النقاط O و A و B و C ، المعرفة وفق $\vec{u} = \vec{u}$ و $\vec{v} = \vec{v}$ و $\vec{w} = \vec{w}$ ، تقع في مستوٍ واحدٍ.

وعندئذ أيّ نقطة O من الفراغ تتحقّق هذه الخاصّة.

ملاحظة: عندما يكون الشعاعان، غير الصُّفريَّين \vec{u} و \vec{v} ، مرتبطين خطياً، تكون النقاط O و A و B على استقامة واحدة، فيوجد على الأقل مستوى يحوي المستقيم (OA) والنقطة C ، وعندئذ تكون الأشعة \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} مرتبطة خطياً.

مبرهنة 4

\vec{u} و \vec{v} و \vec{w} ثلاثة أشعة. نفترض أن \vec{u} و \vec{v} ليسا مرتبطين خطياً. عندئذ تكون الأشعة \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان a و b يحققان $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

الإثبات (يترك إلى قراءة ثانية)

- لنفترض أن الأشعة \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} مرتبطة خطياً. ولتكن O نقطة تقع في مستوى واحد \mathcal{P} مع النقاط A و B التي تحقق :

$$\overrightarrow{OC} = \vec{w} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OB} = \vec{v} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OA} = \vec{u}$$

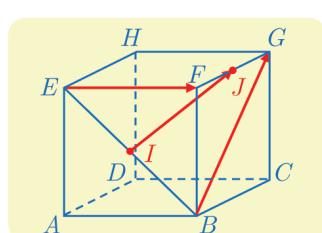
لما كان الشعاعان \vec{u} و \vec{v} غير مرتبطين خطياً، كانا شعاعاً توجيه في المستوى (OAB) أي \mathcal{P} . واستناداً إلى التعريف، تنتهي النقطة C إلى هذا المستوى. وعملاً بالمبرهنة 3، يوجد عددان حقيقيان a و b يحققان $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ ، أي $\overrightarrow{OC} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$.

- وبالعكس، لنفترض أن $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ حيث a و b من \mathbb{R} . ولتكن O نقطة ما من الفراغ

عندئذ نعرف النقاط A و B و C بالعلاقات

$$\overrightarrow{OC} = \vec{w} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OB} = \vec{v} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OA} = \vec{u}$$

فيكون لدينا $\overrightarrow{OC} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ ، وهذا يثبت، بناءً على المبرهنة 3 نفسها، أن C تنتهي إلى المستوى (OAB) . وبذا يتم إثبات المطلوب.



مثال

إثبات ارتباط خطى لأشعة
ABCDEF G H مكعب. النقطة I منتصف $[BE]$ و J منتصف $[FG]$. أثبت أن الأشعة \vec{EF} و \vec{BG} و \vec{IJ} مرتبطة خطياً.

الحل

ليس واضحاً من الشكل وجود شعاعين مرتبطين خطياً من بين الأشعة الثلاثة وقد لا يكون ذلك صحيحاً. لحاول إذن التعبير عن \vec{IJ} بدلالة \vec{EF} و \vec{BG} و \vec{FG} و \vec{EB} و \vec{GF} و \vec{GE} . وهذا غير مرتبطين خطياً لأنهما متعامدان. لأجل ذلك، نستفيد من علاقة شال.

على سبيل المثال

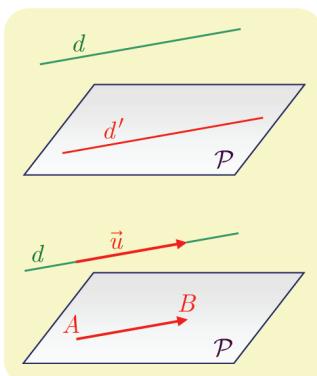
$$\textcircled{1} \quad \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FJ}$$

$$\textcircled{2} \quad \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GJ}$$

فإذا أخذنا في الحسبان أن $\overrightarrow{FJ} + \overrightarrow{GJ} = \vec{0}$ و $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ طرفاً مع طرف، فنجد $2\overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BG} + (\overrightarrow{FJ} + \overrightarrow{GJ})$ ومنه $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$. وهذا يثبت الارتباط الخطّي للأشعة \overrightarrow{EF} و \overrightarrow{BG} و \overrightarrow{IJ} .

تحريساً للفهم

؟! كيف نثبت توازي مستقيم ومستوى؟

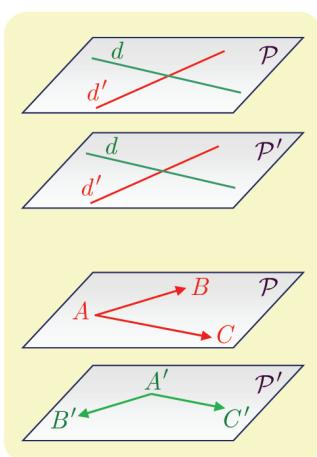


هندسياً

لإثبات أنَّ مستقيماً d يوازي مستوىً P ، يمكننا إثبات أنَّ d يوازي مستقيماً d' من P .

شعاعياً

لإثبات أنَّ مستقيماً d يوازي مستوىً P ، يمكننا إثبات أنَّ في المستوى P نقطتين A و B تتحققان $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ ، و \vec{u} شاعع توجيه للمستقيم d .



هندسياً

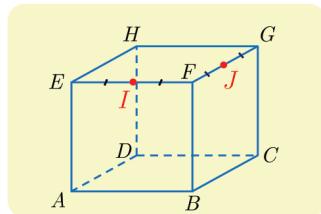
لإثبات توازي مستويين، يمكن إثبات أنَّ مستقيمين متقطعين من أحدهما، يوازيان مستقيمين متقطعين من الآخر.

شعاعياً

لإثبات توازي مستويين، يكفي إيجاد شعاعين غير مرتبطين خطياً \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} من الأول، وشعاعين غير مرتبطين خطياً $\overrightarrow{A'B'}$ و $\overrightarrow{A'C'}$ من الثاني، تحقق أنَّ الأشعة $\overrightarrow{A'B'}$ و \overrightarrow{AC} و $\overrightarrow{A'C'}$ مرتبطة خطياً، وكذلك أنَّ الأشعة \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} مرتبطة خطياً.

تجربة

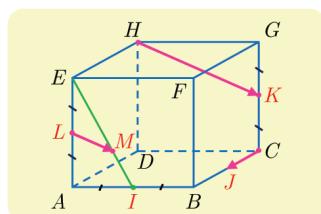
- ① A و B و C ثلات نقاط متمايزه من الفراغ. أ تكون الأشعه \overrightarrow{BC} و \overrightarrow{AC} و \overrightarrow{AB} مرتبطة خطياً؟
- ② A و B و C ثلات نقاط متمايزه من الفراغ. E نقطة تحقق $\overrightarrow{BE} = 4\overrightarrow{BC}$ ، و F نقطة تتحقق $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$. أتقع النقاط A و B و C و E و F في مستوي واحد؟



- ③ $ABCDEF$ مكعب. I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[FG]$.
 ① أنتهي النقشه J إلى المستوى (ABI)
 ② أتقع الأشعه \overrightarrow{AJ} و \overrightarrow{AI} في مستوي واحد؟

- ④ $ABCD$ رباعي وجوه. M هي النقطه المحققه للعلاقه $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.
 عير عن \overrightarrow{AM} بدلالة \overrightarrow{BC} و \overrightarrow{AB} . واستنتج أن M تنتهي إلى المستوى (ABC) .

- ⑤ $ABCDEF$ مكعب. فيه M نقطه تحقق $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ ، و N نقطه تحقق $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
 ① أثبت أن $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$.
 ② أ تكون الأشعه \overrightarrow{EA} و \overrightarrow{MN} و \overrightarrow{HB} مرتبطة خطياً؟



- ⑥ $ABCDEF$ مكعب. I و J و K و L هي بالترتيب منتصفات $[AE]$ و $[CG]$ و $[BC]$ و $[AB]$. ولتكن M النقطه المحققه للعلاقه $3\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EI}$.
 ① لماذا M هي مركز تقل المثلث AEB ؟
 ② أ تكون الأشعه \overrightarrow{HK} و \overrightarrow{LM} و \overrightarrow{CJ} مرتبطة خطياً؟

المعلم في الفراغ (3)

1.3. المعلم في الفراغ

اختيار معلم في الفراغ، هو إعطاء نقطة O تسمى مبدأ المعلم، وجملة ثلاثة أشعة $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ليست مرتبطة خطياً. نرمز إلى هذا المعلم بالرمز $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. ونسمى عادة الجملة $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ أساس أشعة الفراغ. ونقول إن بُعد الفراغ يساوي 3 لأنّ عدد أشعة أي أساس فيه يساوي 3.

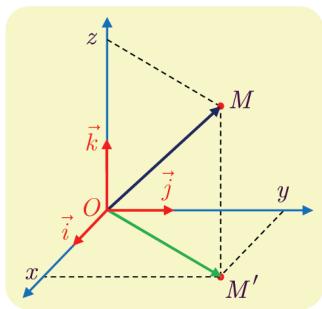
ملاحظة: تُعد المعلمات $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ و $(O; \vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$ و ... و $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلمات مختلفة في الفراغ. 

2.3. الإحداثيات

مقدمة وتعريف 5

معلم في الفراغ. عندئذ أيًّا كانت النقطة M من الفراغ، **توجد ثلثية** (x, y, z) **وحيدة** من الأعداد الحقيقية، تحقق : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. تسمى (x, y, z) **إحداثيات** النقطة M في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. x هي **فاصلة** M و y هي **ترتيب** M و z هي **علو أو رقم** M في هذا المعلم.

الإثبات



لما كانت الأشعة \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} ليست مرتبطة خطياً، استنتجنا أنَّ المستقيم المار بالنقطة M موجهاً بالشعاع \vec{k} يتقاطع مع المستوى $(O; \vec{i}, \vec{j})$ في نقطة M' . إذن يوجد عددان x و y يتحققان $\overrightarrow{OM'} = x\vec{i} + y\vec{j}$ و $\overrightarrow{M'M} = z\vec{k}$. ولما كان الشعاعان $\overrightarrow{M'M}$ و \vec{k} مرتبطين خطياً، يوجد عدد حقيقي z يتحقق $\overrightarrow{M'M} = z\vec{k}$. وتبعاً لعلاقة شال $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$ ، ومنه $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + z\vec{k}$. **نقبل** وحدانية كتابة \overrightarrow{OM} بدلالة \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} .

تعريف 3

معلم في الفراغ. نقرن بالشعاع \vec{u} النقطة M التي تتحقق $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. نعرف **مركبات الشعاع** \vec{u} بأنها (x, y, z) **إحداثيات** النقطة M . وعليه يكتب أي شعاع \vec{u} بطريقة واحدة بالصيغة $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

وكما هي الحال في المستوى، يمكن أن نكتب مركبات الشعاع \vec{u} في عمود : $\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

3.3. الحساب باستعمال الإحداثيات

جميع النتائج المتعلقة بالإحداثيات في المستوى، تمتد على الفراغ بالإضافة إلى إحداثية ثالثة. في معلم معطى $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، إذا أعطيت إحداثيات \vec{u} و \vec{v} وفق

$$\vec{v}(x', y', z') \quad \text{و} \quad \vec{u}(x, y, z)$$

عندئذ:

- أيًّا كان العدد الحقيقي k ، كانت (kx, ky, kz) مركبات الشّعاع $k\vec{u}$.
- مركبات الشّعاع $(x + x', y + y', z + z')$ هي $\vec{u} + \vec{v}$.
- إذا أعطينا النقّتين $B(x_B, y_B, z_B)$ و $A(x_A, y_A, z_A)$ كان لدينا:
 - مركبات الشّعاع \overrightarrow{AB} هي $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.
 - إحداثيات النقّطة M منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ هي $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

مثال الحساب في معلم

نتأمل، في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقّاط $A(1, 2, -3)$ و $B(-1, 3, 3)$ و $C(4, -1, 2)$. ولتكن D نقطة تجعل $ABCD$ متوازي الأضلاع. احسب إحداثيات D ، ثم احسب إحداثيات I مركز متوازي الأضلاع هذا.

الحل

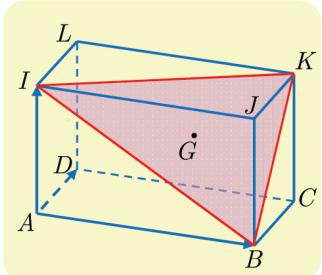
■ يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. ولكن مركبات \overrightarrow{AB} هي $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (-2, 1, 6)$ وإذا افترضنا $D(x, y, z) = (4 - x, -1 - y, 2 - z)$. وعليه ثُكتب المساواة $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ بالشكل

$$\begin{bmatrix} 4 - x \\ -1 - y \\ 2 - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

ومنه $x = 6$ و $y = -2$ و $z = -4$ ، أي $D(6, -2, -4)$.

■ مركز متوازي الأضلاع I ، هو منتصف قطره $[AC]$. فإذا I هي $\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}, \frac{z_A + z_C}{2}\right) = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{2-1}{2}, \frac{-3+2}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ أو

مثال



ليكن $ABCDIJKL$ متوازي سطوح. ولتكن G مركز ثقل المثلث BIK . أثبت تحليلياً، بعد اختيار معلم مناسب، أنَّ النقاط D و J تقع على استقامة واحدة.



نختار معلماً تكون إحداثيات رؤوس المجسم المعطى بالنسبة إليه سهلة الحساب.

الحل

نختار، على سبيل المثال، المعلم $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI})$ ، فيكون $B(1,0,0)$ و $D(0,1,0)$ و $I(1,0,1)$ و $K(1,1,1)$. ولما كانت G مركز تقل المثلث BIK ، كان : $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GK} = \vec{0}$ ، ولكننا نبحث عن مركبات \overrightarrow{AG} ، لذلك نستفيد من علاقة شال لنتستنتج مما سبق أن

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AK} = \vec{0}$$

أو

$$3\overrightarrow{GA} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK})$$

$$\text{إذن } G \cdot \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK}) \text{ هي فُؤاديات}$$

$$\left(\frac{1+0+1}{3}, \frac{0+0+1}{3}, \frac{0+1+1}{3} \right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

وبالعودة إلى الأشعة، لما كان $\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD}$ استنتجنا أنَّ

$$\overrightarrow{DJ}(1, -1, 1) \quad \text{and} \quad \overrightarrow{DG}\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

إذن $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{DJ}$. والشعاعان \overrightarrow{DG} و \overrightarrow{DJ} مرتبطان خطياً، فالنقاط D و G و J تقع على استقامة واحدة.

تَكْرِيسًا لِلْفَهْمِ

؟! كيف نتعرّف الارتباط الخطّي لشعاعين في الفراغ تحليلياً؟

في معلم معطى، يكون الشعاعان $\vec{v}(x', y', z')$ و $\vec{u}(x, y, z)$ غير المعدومين، مرتبطين خطياً، إذا وجد عدد حقيقي k غير معروف، يحقق $\vec{u} = k\vec{v}$ ، أي $x = kx'$ و $y = ky'$ و $z = kz'$. وهذا يكفي أن $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = k$ في حالة x' و y' و z' من \mathbb{R}^* .

تجربة

١ نتأمل النقاط $F(8,13,3)$ و $E(3,9,2)$ و $D(-2,5,1)$ و $C(0,-2,2)$ و $B(2,-1,3)$ و $A(3,5,2)$ في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ للفراغ.

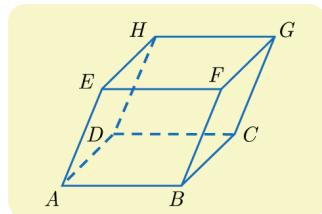
١ احسب إحداثيات منتصف القطع المستقيمة $[EF]$ و $[AB]$ و $[CD]$.

٢ احسب مركبات الأشعة \overrightarrow{EF} و \overrightarrow{CD} و \overrightarrow{AB} .

٣ عين إحداثيات النقطة K بحيث يكون الرباعي $ABCK$ متوازي أضلاع.

٤ جد مركبات كل من الشعاعين :

$$\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{EF} \quad \text{و} \quad \vec{u} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}$$



٢ في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ للفراغ. تعطى إحداثيات أربع من رؤوس متوازي السطوح $ABCDEFGH$ المرسوم جانباً، وهي $E(3, -1, 3)$ و $C(-3, 2, 0)$ و $B(1, 3, -1)$ و $A(2, 1, -1)$. جد إحداثيات الرؤوس الأربع الأخرى.

٣ لدينا، في معلم للفراغ، النقاط $A(3, 0, -1)$ و $B(-2, 3, 2)$ و $C(1, 2, -2)$.

١ جد إحداثيات النقطة I منتصف $[AB]$.

٢ جد إحداثيات النقطة D نظيرة I بالنسبة إلى C .

٣ جد إحداثيات النقطة M التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

٤ جد إحداثيات النقطة N التي تتحقق العلاقة $\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{NC}$.

٤ لدينا النقطتان $A(2, 3, -2)$ و $B(5, -1, 0)$. جذ، إنْ أمكن، في كل حالة، إحداثيات النقطة M المحققة للعلاقة المفروضة.

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} \quad ②$$

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} \quad ④$$

$$\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB} \quad ①$$

$$3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \quad ③$$

٥ أيمكن تعريف a و b لتقع النقاط $M(a, b, 2)$ و $B(3, 2, 1)$ و $A(2, 3, 0)$ على استقامة واحدة؟

٦ أيمكن تعريف a ليكون الشعاعان $\vec{v}(1, -2, a)$ و $\vec{u}(2, a, 5)$ مرتبطين خطياً؟

٧ في كل من الحالات الآتية، بين إذا كانت النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة.

$$C(2, 0, -3), \quad B(0, 2, 4), \quad A(3, -1, 2) \quad ①$$

$$C(0, -1, 7), \quad B(-2, 0, 5), \quad A(-4, 1, 3) \quad ②$$

$$C(1, -1, -3), \quad B(1, -1, 4), \quad A(1, -1, 0) \quad ③$$

المسافة في الفراغ 4

1.4. المعلم المتجانس

نتأمل نقاطاً O و I و J و K من الفراغ، ونكتب \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} .

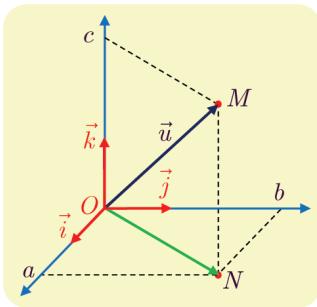
تعريفه 3

نقول إن المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم متجانس إذا تحقق الشرطان:

- المستقيمات (OI) و (OJ) متعامدة مثنى.
- نظيم كل من \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} يساوي واحدة الطول، أي $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

2. نظيم شعاع، المسافة بين نقطتين

مبرهنة 6



في معلم متجانس يتحقق ما يأتي :

① يعطى نظيم الشعاع \vec{u} الذي مركباته (a, b, c) بالعلاقة

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

② وفي حالة نقطتين $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ يكون

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

الإثبات

① ليكن المعلم المتجانس، ولتكن M النقطة التي تحقق $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ ، فيكون $\overrightarrow{ON} = a\vec{i} + b\vec{j}$ ، لتكن N النقطة من المستوى $(O; \vec{i}, \vec{j})$ التي تحقق $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ و $\overrightarrow{NM} = c\vec{k}$. فيكون

$$NM^2 = c^2 \quad \text{و} \quad ON^2 = a^2 + b^2$$

ولكن المعلم متجانس، فالمستقيمان $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و $(O; \vec{k})$ عموديان على المستوى $(O; \vec{i}, \vec{j})$ والمثلث ONM قائم في N ، إذن

$$OM^2 = ON^2 + NM^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

ولكن $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ ، إذن $OM = \|\vec{u}\|$

② لدينا $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$ ومركبات \overrightarrow{AB} هي $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ ، إذن استناداً إلى نجد الخاصة المطلوبة.

مثال

- في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
- إذا كان $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ، كان $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$ ■
 - إذا كانت $A(4, -1, 3)$ و $B(2, 3, -2)$ ، كان $AB = \sqrt{(2-4)^2 + (3+1)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ ■

الحساب في معلم

مثال

نتأمل، في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقاط الآتية.

- $D\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ و $C(-2, 3, -2)$ و $B(-2, -1, 2)$ و $A(2, 3, 2)$
- احسب المسافات ① CD, BD, BC, AD, AC, AB
 - بين طبيعة وجوه رباعي الوجوه ② $ABCD$

الحل

حساب الأطوال ①

- $AB = 4\sqrt{2}$ ، أي $AB^2 = (-2-2)^2 + (-1-3)^2 + (2-2)^2 = 32$ ■
- $AC = 4\sqrt{2}$ ، أي $AC^2 = (-2-2)^2 + (3-3)^2 + (-2-2)^2 = 32$ ■
- $AD = \frac{\sqrt{123}}{3}$ ، أي $AD^2 = \left(\frac{1}{3}-2\right)^2 + \left(\frac{2}{3}-3\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}-2\right)^2 = \frac{25}{9} + \frac{49}{9} + \frac{49}{9} = \frac{123}{9}$ ■
- $BC = 4\sqrt{2}$ ، أي $BC^2 = (-2+2)^2 + (3+1)^2 + (-2-2)^2 = 32$ ■
- $BD = \frac{\sqrt{123}}{3}$ ، أي $BD^2 = \left(\frac{1}{3}+2\right)^2 + \left(\frac{2}{3}+1\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}-2\right)^2 = \frac{49}{9} + \frac{25}{9} + \frac{49}{9} = \frac{123}{9}$ ■
- $CD = \frac{\sqrt{123}}{3}$ ، أي $CD^2 = \left(\frac{1}{3}+2\right)^2 + \left(\frac{2}{3}-3\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}+2\right)^2 = \frac{49}{9} + \frac{49}{9} + \frac{25}{9} = \frac{123}{9}$ ■

، فالمتلث ABC متساوي الأضلاع. ②

- و $BD \neq AB$ ، فالمتلث ABD متساوي الساقين رأسه D وهو ليس متلثاً قائماً لأنّ $DA^2 + DB^2 \neq AB^2$

نجد، بالمثل، أنَّ كلاً من المتلثين ACD و BCD متلثٌ متساوي الساقين. ■

يضاف إلى ما سبق، أنَّ المتلثات ABD و ACD و BCD متلثٌ طبوقة. ■

مثال معادلة كرة مركزها المبدأ

نتأمل، في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقطة A التي إحداثياتها $(1, 2, -4)$.

① جد معادلة للكرة S التي مركزها O ونصف قطرها يساوي 5.

② جد معادلة للكرة S' التي مركزها O وتمر بالنقطة A .

لإيجاد معادلة كرة، يمكن استعمال التعريف الآتي : الكرة S التي مركزها O ونصف قطرها $OM^2 = R^2$ ، هي مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق



الحل

① الكرة S التي مركزها O ونصف قطرها 5، هي مجموعة نقاط الفراغ التي تبعد عن O مسافة تساوي 5. فالقول إنّ النقطة $M(x, y, z)$ تتبع إلى الكرة S ، يكفي القول إنّ $OM = 5$ أو $OM^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 25$. ويعني هذا أنّ معادلة للكرة S هي :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

② نصف قطر الكرة S' يساوي OA ، ولما كان $OA^2 = 1^2 + 2^2 + (-4)^2 = 21$. استنتجنا أنّ $x^2 + y^2 + z^2 = 21$ هي معادلة للكرة S' .

تجربة

① احسب نظيم \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} في كلّ من الحالات الآتية:

$$\cdot \vec{w}(4, 1, -2) \text{ و } \vec{v}(4, -4, -2) \text{ و } \vec{u}(2, -2, 3) \quad ①$$

$$\cdot \vec{w} = \sqrt{2}\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j} + \vec{k} \text{ و } \vec{v} = \vec{i} + 5\vec{k} \text{ و } \vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} \quad ②$$

② فيما يأتي، بين هل المثلث ABC قائم؟ هل هو متساوي الساقين؟ هل هو متساوي الأضلاع؟

① في حالة $A(1, 3, -1)$ و $B(3, 6, -2)$ و $C(0, 4, 0)$.

② في حالة $A(1, 3, -2)$ و $B(2, -1, 0)$ و $C(6, -3, -1)$.

③ لدينا النقطتان $A(5, 2, -1)$ و $B(3, 0, 1)$. بين أيّ النقاط C أو D أو E تتبع إلى المستوى المحوري للقطعة $[AB]$ ، في حالة $C(-2, 5, -2)$ و $D(1, 1, -3)$ و $E(3, 2, 1)$.



المستوى المحوري لقطعة مستقيمة هو مجموعة النقاط التي تبعد عن طرفيها المسافة نفسها.

④ نتأمل النقاط $A(1, 1, \sqrt{2})$ و $B(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$ و $C(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$ نظيرة A بالنسبة إلى المبدأ O . أثبت أنّ المثلث ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين.

⑤ نتأمل النقاط $A(2, 3, -1)$ و $B(2, 8, -1)$ و $C(7, 3, -1)$ و $D(-1, 3, 3)$ و $E(5, 3, 3)$. أثبت أنّ A و C و D و E تقع على كرة واحدة مركزها

مركز الأبعاد المتناسبة في الفراغ

يُعمم تعريف مركز الأبعاد المتناسبة الذي درسناه في الصف الثاني الثانوي إلى حالة الفراغ دون عناء، وفي حالة نقطتين أو ثلاثة نقاط، يقول هذا المفهوم إلى الحالة السابقة إذ تجري الدراسة عندئذ على مستقيم أو في مستوى. سننهئ إذن بمركز جملة مؤلفة من أربع نقاط.

تعريف 4

إنَّ مركز الأبعاد المتناسبة G للنقاط المثلثة الأربع (A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,δ) حيث هو النقطة الوحيدة G التي تتحقق العلاقة $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} + \delta \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

إنَّ إثبات وجود ووحدانية النقطة G ، مماثل تماماً لحالة ثلاثة نقاط. كما إنَّ براهين المبرهنات الآتية مماثلة لتلك الموافقة للمبرهنات التي رأيناها في وحدة مركز الأبعاد المتناسبة العام الماضي.

مبرهنة 7

ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثلثة الأربع (A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,δ) حيث $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$ ، عندئذ، أيًّا كانت النقطة M ، كان :

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} + \delta \overrightarrow{MD} = (\alpha + \beta + \gamma + \delta) \overrightarrow{MG}$$

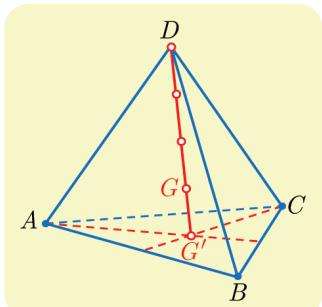
ملاحظة: عندما نقول إنَّ G هي مركز الأبعاد المتناسبة لنقاط مثلثة، فإنَّ قولنا هذا يفترض أنَّ مجموع المعاملات أو الأمثل لا يساوي الصفر.

مبرهنة 8 (الخاصة التجميعية)

ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثلثة الأربع (A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,δ) حيث $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$ ، عندئذ، إذا كان H مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط منها مثل $(H,\alpha + \beta + \gamma)$ و (B,β) و (C,γ) ، كان G مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين (A,α) و (D,δ) .

ملاحظة: إذا كانت H مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين (A,α) و (B,β) ، وكانت K مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين (C,γ) و (D,δ) ، كانت G مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين $(H,\alpha + \beta + \gamma + \delta)$ و $(K,\gamma + \delta)$.

مثال مركز ثقل رباعي الوجوه



ليكن $ABCD$ رباعي وجوه، ولتكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$. لتعيين موضع G ، نستبدل، على سبيل المثال، بالنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ مراكزها G' وهو مركز ثقل المثلث ABC . واعتماداً على المبرهنة 8، G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين $(G',3)$ و $(D,1)$ ، إذن تتحقق G العلاقة

$$\overrightarrow{G'G} = \frac{1}{4} \overrightarrow{G'D}$$

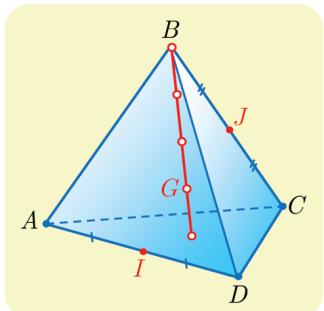
تسمى النقطة G **مركز ثقل رباعي الوجوه** $[G'D]$. وهي تقع على القطعة المستقيمة $ABCD$ التي تسمى **المتوسط** المرسوم من D لرباعي الوجوه وتقع في نهاية الربع الأول من هذا المتوسط من طرف G' .



نرى بإثبات مماثل أن G تقع في نهاية الربع الأول من كلٌ من المتوسطات المرسومة من A و B و C أيضاً. فالمتوسطات الأربع لرباعي الوجوه تقاطع في نقطة واحدة هي G . وهي تقسم كلَّ متوسط بنسبة $4 : 3$ من جهة الرأس.

إثبات وقوع نقاط على استقامة واحدة

مثال



$ABCD$ رباعي وجوه مركز ثقله G . I منتصف $[AD]$ ، J منتصف $[BC]$. أثبت أن I و J و G تقع على استقامة واحدة.



لكي ثبت أن النقاط I و J و G تقع على استقامة واحدة، يمكننا أن ثبت مثلاً أن G هي مركز أبعاد متناسبة للنقاطين (I,α) و (J,β) .

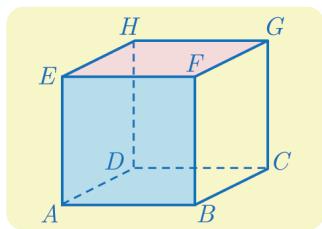
الحل

لما كان G مركز ثقل $ABCD$ ، فهو إذن مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$. ولكن I منتصف $[AD]$ ، هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين $(A,1)$ و $(D,1)$. و J هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين $(B,1)$ و $(C,1)$. واستناداً إلى الخاصية التجميعية، النقطة G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين $(I,2)$ و $(J,2)$. فالنقاط I و J و G تقع على استقامة واحدة، وتكون G في منتصف $[IJ]$.



نستنتج من هذا التمرين أنَّ القطع المستقيمة الواسلة بين منتصفي كل حرفين متقابلين في رباعي الوجوه، متناظفة ونقطة تقائها هي مركز ثقل رباعي الوجه.

مثال إثبات وقوع نقاط من الفراغ في مستوي واحد



أثبت أنَّ النقطة K المعرفة بالعلاقة

$$2\vec{AK} = \vec{CB} + \vec{CA} + 3\vec{AG}$$

تقع في المستوى (BCG) . ارسم النقطة K .

لإثبات أنَّ نقطة K تنتهي إلى مستوى (BCG) ، يكفي إثبات أنَّ K هي مركز أبعاد متناسبة للنقاط (B,α) و (C,β) و (G,γ) .

الحل

■ لإثبات أنَّ K هي نقطة من المستوى (BCG) ، نبحث عن علاقة بين الأشعة \overrightarrow{KB} و \overrightarrow{KC} و \overrightarrow{KG} و \overrightarrow{KA} باستخدام علاقة شال، تكتب العلاقة المفروضة $2\vec{AK} - \vec{CB} - \vec{CA} - 3\vec{AG} = \vec{0}$ ، بالصيغة المكافئة :

$$2\vec{AK} - \vec{CK} - \vec{KB} - \vec{CK} - \vec{KA} - 3\vec{AK} - 3\vec{KG} = \vec{0}$$

أو

$$\vec{KB} - 2\vec{KC} + 3\vec{KG} = \vec{0}$$

ولما كان $0 \neq 1 + (-2) + 3 \neq 0$ ، استنتجنا أنَّ K هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1)$ و $(C,-2)$ و $(G,3)$. وهذا يثبت انتماء K إلى المستوى (BCG) .

■ لرسم النقطة K ، نبدأ برسم مركز الأبعاد المتناسبة لل نقطتين $(G,3)$ و $(C,-2)$ ، إذ تكتب العلاقة $\vec{GL} = -2\vec{GC}$ بالصيغة $3\vec{LG} - 2\vec{LC} = \vec{0}$ ، فرسم L على امتداد $[CG]$ على أن تقع G بين C و L وتحقق $GL = 2GC$.

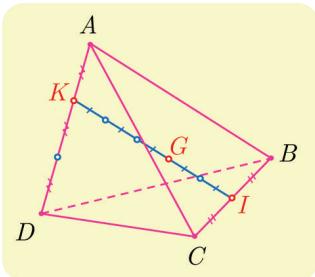
وأخيراً نرسم K ، مركز النقطتين $(B,1)$ و $(L,1)$ ، أي منتصف القطعة $[BL]$.

تحريساً للفهم

؟ ماذا يفيد مفهوم مركز الأبعاد المتناسبة في الفراغ؟

- يفيد في إثبات وقوع نقاط على استقامة واحدة.
- يفيد في إثبات وقوع نقاط في مستوى واحد.
- يفيد في إثبات نقاط متقاطع مستقيمات.

تَحْرِيْبٌ



① بالاستفادة من المعلومات المبينة في الشكل المجاور، عين الأعداد الأربع a و b و c و d ليتحقق ما يأتي :

① مركز الأبعاد المتناسب للنقطتين (A, a) و (D, d) .

② مركز الأبعاد المتناسب للنقطتين (B, b) و (C, c) .

③ مركز الأبعاد المتناسب للنقاط المثلثة

$\cdot (D, d)$ و (C, c) و (B, b) و (A, a)

② عين مركز نقل المثلث ABC ، في حالة $A(-4, -1, 2)$ و $B(-2, 1, 0)$ و $C(6, 3, -5)$.

لدينا ثلاثة نقاط في الفراغ A و B و C .

① أثبت وجود نقطة وحيدة M تتحقق $\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} = \vec{0}$.

② ما القول عن M عندما تكون A و B و C على استقامة واحدة؟

③ ما القول عن الرباعي $ACBM$ عندما لا تقع A و B و C على استقامة واحدة؟

④ ليكن $ABCD$ رباعي وجوه و k عدد حقيقي غير معروف ولا يساوي 1. لتكن I و J و K و L .

$\vec{CL} = k\vec{CB}$ و $\vec{CK} = k\vec{CD}$ و $\vec{AJ} = k\vec{AD}$ و $\vec{AI} = k\vec{AB}$.

① أثبت أن $\vec{IJ} = k\vec{BD} = \vec{LK}$ واستنتج أنَّ النقاط الأربع I و J و K و L تقع في مستوى واحد.

② ما طبيعة الشكل الرباعي $IJKL$ ؟

أفكار يجب تمثُّلها



■ يجري التعامل مع الأشعة في الفراغ مثلاً في المستوى.

□ إذ تعريف المساواة نفسه.

□ وطريقة الجمع نفسها.

□ وطريقة الضرب بعدد نفسها.

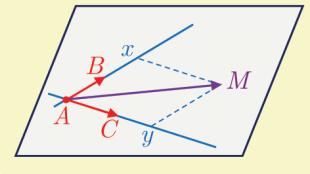
□ وطرق الحساب نفسها.

■ المستقيم (AB) هو مجموعة النقاط M التي تحقق $\vec{AM} = t\vec{AB}$ حيث t من \mathbb{R} . وهذا يتقدَّم مع حالة الهندسة المستوية.

■ وكما في الهندسة المستوية، نقول إنَّ النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة عندما يكون الشعاعان \vec{AC} و \vec{AB} مرتبطين خطياً.

وكما في الهندسة المستوية، يكون شعاعان \vec{u} و \vec{v} غير معدومين، مرتبطين خطياً، عندما يوجد

$$\text{عدد حقيقي } k \text{ بحيث يكون } \vec{u} = k\vec{v}.$$



المستوى (ABC) هو مجموعة النقاط M التي تحقق العلاقة

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

يفيد مفهوم الارتباط الخطى لثلاثة أشعة في الفراغ، في إثبات وقوع أربع نقاط في المستوى نفسه.

لأن القول «تقع النقاط A و B و C و D في مستوى واحد» يكافئ أن الأشعة \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} و \overrightarrow{AD} مرتبطة خطياً.

لإثبات أن ثلاثة أشعة \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} مرتبطة خطياً، يكفي إثبات وجود عددين حقيقين a و b

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

إن نقطة O ، وثلاثة أشعة \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} ليست مرتبطة خطياً، تؤلف معلماً للفراغ نرمز إليه بالرمز

$$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}).$$

في معلم متجانس للفراغ، إذا كان $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ، كان $\vec{u}(x, y, z)$ ،

منعكسات يجب امتلاكه.

لإثبات مساواة شعاعية، فكر في علاقة شال.

فكراً بالاستقادة من أداة جديدة هي «الارتباط الخطى لثلاثة أشعة»

لإثبات انتماء نقاط على مستوى واحد.

لإثبات توازي مستقيم ومستوى.

لإثبات توازي مستويين.

فكراً في أن استعمال معلم يمكن أن يكون عوناً في حل مسألة، فعلى سبيل المثال، في حالة مكعب أو رباعي وجوه، يوجد معلم مناسب «طبيعي».

لإيجاد مركز الأبعاد المتناسبة لأربع نقاط من الفراغ، يمكن استبدال باثنتين أو بثلاث منها مركزها بعد أن نSEND إليه معاملأً يساوي مجموع معاملاتها.

أخطاء يجب تجنبها.

للتعامل مع مسائل المسافات، لا تختر معلمأً كيفياً، بل، اختر، حسراً، معلمأً متجانساً.

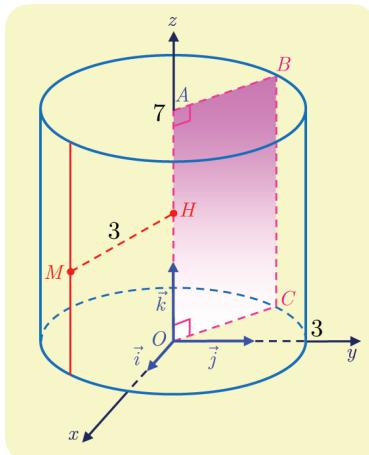
أن يكون شعاعاً توجيه مستقيمين في الفراغ غير مرتبطين خطياً، لا يكفي بالضرورة لتأكيد تقاطع هذين المستقيمين، بل يجب إضافة إلى ذلك، إثبات وقوعهما في مستوى واحد.

أنشطة

نشاط 1 معادلة أسطوانة ومعادلة مخروط

1 معادلة أسطوانة

لتكن A النقطة التي إحداثياتها $(0, 0, 7)$ في معلم متجانس معطى في الفراغ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نتأمل **الأسطوانة المولدة** من دوران الضلع $[BC]$ من المستطيل $OABC$ حول المستقيم (OA) حيث $AB = 3$. ولتكن M نقطة متحولة من الأسطوانة، و H مسقطها القائم على القطعة المستقيمة $[OA]$.



① نفترض أن $M(x, y, z)$. ما إحداثيات النقطة H ؟ أثبت أن إحداثيات M تحقق العلاقات:

$$0 \leq z \leq 7 \quad x^2 + y^2 = 9$$

② بالعكس، إذا كانت $M(x, y, z)$ نقطة من الفراغ تتحقق إحداثياتها $x^2 + y^2 = 9$ و $z \leq 7$. فأثبت أن $MH = 3$ ، واستنتج أن M تقع على الأسطوانة.

النتيجة : معادلة هذه الأسطوانة هي $x^2 + y^2 = 9$ و $0 \leq z \leq 7$

③ أي التقاط الآتية تقع على الأسطوانة $E(\sqrt{3}, \sqrt{6}, 4)$ و $D(3, 0, 3)$ و $F(1, 3, 1)$.

④ ج معادلة للأسطوانة التي محورها (\vec{j}) و قاعدتها الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2 .

b . أعد السؤال ④ . في حالة مركز قاعدة الأسطوانة هو النقطة $Q(0, 8, 0)$.

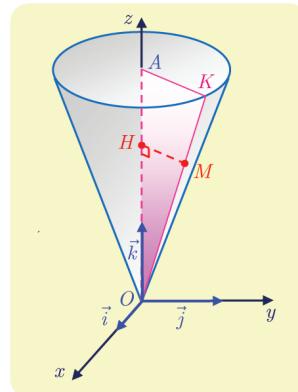
⑤ ج معادلة الأسطوانة التي محورها (\vec{i}) ومركز قاعدتها $T(3, 0, 0)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

⑥ صِفْ مجموعة التقاط $M(x, y, z)$ التي تتحقق إحداثياتها العلاقات

$$0 \leq z \leq 4 \quad x^2 + y^2 = 25$$

❷ معادلة مخروط

لتكن A النّقطة التي إحداثياتها $(0, 0, 5)$ في معلم متجانس معطى في الفراغ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. لنتأمل المخروط المولّد من دوران الصّلع $[OK]$ حول المثلث OA حول محور (OA) مع $AK = 2$.



❸ لتكن M نّقطة من المخروط، و H مسقطها القائم على القطعة $[OA]$.

$$. MH^2 = \frac{4}{25} OH^2, \text{ ثم } \frac{MH}{OH} = \frac{2}{5} . \text{ أثبت أنَّ } a.$$

b. اكتب المساواة السابقة بدلالة إحداثيات $M(x, y, z)$. وأثبت أنَّه إذا كانت

$$\text{نّقطة من المخروط، كان } 0 \leq z \leq 5 \text{ و } x^2 + y^2 - \frac{4}{25}z^2 = 0 .$$

❹ بالعكس، لتكن (x, y, z) نّقطة من الفراغ تحقق إحداثياتها العلاقات

$$. 0 \leq z \leq 5 \text{ و } x^2 + y^2 - \frac{4}{25}z^2 = 0$$

أثبت أنه إذا كان $z \neq 0$ ، كان $\frac{MH}{OH} = \frac{2}{5}$. واستنتج أنَّ M تقع على المخروط. لا تتَّسَّ حالَة

$$. z = 0$$

النتيجة : معادلة هذا المخروط هي $x^2 + y^2 - \frac{4}{25}z^2 = 0$ مع $0 \leq z \leq 5$.

❺ عِين من بين النّقاط الآتية، تلك التي تقع على المخروط، مبرّراً إجابتك :

$$T(2, 2\sqrt{3}, 10) \text{ و } S(1, 1, 3) \text{ و } R(-2, 1, 5) \text{ و } Q(2, 0, 5)$$

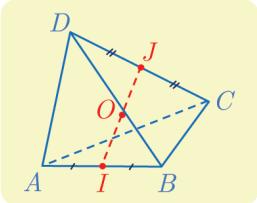
❻ اكتب معادلة للمخروط الذي رأسه O ومحوره (O, \vec{i}) وقاعدته دائرة التي مركزها

$$. \text{ ونصف قطرها } 3 .$$

مُرئيات ومسائل



١. رباعي وجوه. فيه I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$ و O منتصف $[IJ]$.



املا الفراغ : ① $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \dots + \overrightarrow{CD}$. واستنتج أنَّ

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

بسط كلاً من ② $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}$ و $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}$. استنتاج أنَّ

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$$

لماذا ③ $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OJ}$ و $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$ ؟ استنتاج أنَّ

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

٤. لتكن K منتصف $[AD]$ ، و L منتصف $[BC]$. أثبت أنَّ

استنتاج أنَّ $IKJL$ متوازي أضلاع.

٢. رباعي وجوه. وضع على شكل النقاط الآتية:

١. مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين $(A,1)$ و $(B,2)$.

٢. مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين $(C,2)$ و $(D,1)$.

٣. مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$ و $(D,1)$.

٤. مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين $(A,1)$ و $(B,-2)$.

٥. مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,-2)$ و $(C,-1)$ و $(D,1)$.

٦. مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,-2)$ و $(C,-1)$ و $(D,1)$.

٣. في المقولات الآتية، بين الصحيح من الخطأ معللاً إجابتك.

ABC مثلث. مهما كانت D من الفراغ كانت الأشعة \overrightarrow{DC} و \overrightarrow{DB} و \overrightarrow{DA} مرتبطة خطياً.

٢. $ABCD$ رباعي الوجه. لتكن I النقطة المعرفة بالعلاقة $2\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$. عندئذ

تقع I على أحد حروف رباعي الوجه.

٣. نتأمل الأشعة \overrightarrow{AD} و \overrightarrow{AC} و \overrightarrow{AB} . نفترض أنَّ أي شعاعين منها ليسا مرتبطين خطياً، عندها تكون الأشعة \overrightarrow{AD} و \overrightarrow{AC} و \overrightarrow{AB} غير مرتبطة خطياً.

٤. النقاط $A(5,1,3)$ و $B(2,-2,\sqrt{5})$ و $C(3,-3,3)$ متساوية البعد عن $K(2,0,1)$.

٥. النقاط $C(4,0,0)$ و $E(1,2,6)$ و $F(5,1,1)$ و $D(0,-2,0)$ تتتمى إلى المستوى المحوري للقطعة المستقيمة التي طرفيها $A(4,-2,2)$ و $B(2,2,0)$.



لنتعلم البحث معاً

إثبات وقوع نقاط في مستوى واحد 4

نتأمل، في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقاط الآتية :

$$\cdot E(3, 1, 2) \text{ و } C(5, 5, 0) \text{ و } B(1, -2, 1) \text{ و } A(2, 0, 1)$$

أثبت انتماء النقاط A و B و C و D إلى مستوى واحد \mathcal{P} ، وتبين إذا كانت النقطة E تتنمي إلى المستوى \mathcal{P} .

نحو الحل

غير مجد هنا رسم شكل. إذ تكمن الفائدة الوحيدة من الرسم في العمل على إظهار نقاط تقع على استقامة واحدة. ولكن قد تبدو النقاط في شكل فراغي على استقامة واحدة دون أن تكون كذلك. في حين تدعونا معرفة إحداثيات النقاط المفروضة إلى التعامل مع المسألة **تحليلياً**.

يتعلق الأمر بمعرفة إذا كانت النقاط A و B و C و D واقعة في مستوى واحد. لهذا ، نتحرى وجود شعاعين غير مرتبطين خطياً من بين الأشعة \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} و \overrightarrow{AD} .

1. احسب مركبات كل من \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} و \overrightarrow{AD} .

2. استنتج أن \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} ، على سبيل المثال، غير مرتبطين خطياً.

استناداً إلى المبرهنة 4، يقول إقرار انتماء نقطة D إلى المستوى (ABC) ، إلى وجود عددين حقيقيين a و b يتحققان

$$\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$$

1. اكتب المساواة الشعاعية السابقة بلغة الإحداثيات، وتحقق أنك ستحصل على جملة من ثلاثة معادلات خطية بالمجهولين a و b هي:

$$\begin{cases} -a + 3b = -5 \\ -2a + 5b = -5 \\ -b = 5 \end{cases}$$

2. لحل مثل هذه الجملة من المعادلات، اختر جملة من معادلتين من هذه المعادلات الثلاث وحلها. هل العددان a و b اللذان وجدهما حلول للمعادلة الثالثة؟ أكمل.

3. تصرف بالمثل مع النقطة E .

أنجز الحل واكتبه بلغة سليمة.



إثبات تقاطع مستقيمين

5

في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، لدينا النقطتان $A(3, -1, 1)$ و $B(3, -3, -1)$ ، والشعاعان $\vec{u}(1, 0, -2)$ و $\vec{v}(2, 1, -3)$. هو المستقيم المار بالنقطة A والموجّه بالشعاع \vec{u} ، و d' هو المستقيم المار بالنقطة B والموجّه بالشعاع \vec{v} . أثبت أنَّ المستقيمين d و d' متقطعان، ثمَّ عين I نقطة تقاطعهما.

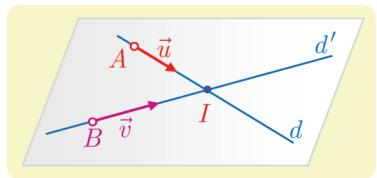
نحو الحل

ليس مفيداً، هنا، رسم شكل بالنقاط والأشعة والمستقيمات المفترضة. إذ قد يبدو مستقيمان في الفراغ متقطعين، دون أن يكونا كذلك، لأنَّهما غير واقعين في مستويٍ واحد.

يتعلّق الأمر بإثبات تقاطع مستقيمين من الفراغ، إذن يجب إثبات أنَّهما غير متوازيين ويقعان في مستويٍ واحد. وندعونا معرفة إحداثيات النقاط ومركبات الأشعة إلى التعامل مع المسألة **تحليلياً**.

1. أثبت أنَّ \vec{u} و \vec{v} غير مرتبطين خطياً.

2. ما قولك بشأن المستقيمين d و d' ؟



يبقى إثبات وقوع المستقيمين d و d' في مستويٍ واحد. المستقيم d والنقطة B يعيّنان مستوىً P طالما B لا تقع على d . فلا إثبات أنَّ d و d' يقعان في مستويٍ واحد، يكفي إثبات أنَّ الأشعة \overrightarrow{AB} و \vec{u} و \vec{v} مرتبطة خطياً.

1. تحقق، بذكر المبرهنة ذات الصلة، أنَّ المسألة تؤول إلى إثبات وجود عددين حقيقيين a و b يحققان $\overrightarrow{AB} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

2. اكتب المساواة السابقة بلغة الإحداثيات، فتحصل على جملةٍ من ثلاثة معادلات خطية بمجهولين.

3. اختر اثنين من المعادلات الثلاث التي حصلت عليها، ثم حلّ الجملة المؤلفة منها. أيكون العددان الحقيقيان a و b اللذان وجدهما حلولاً للمعادلة الثالثة؟ أتمم.

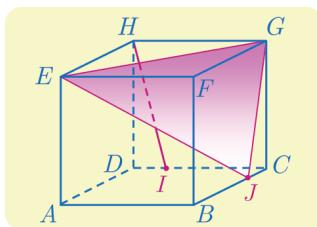
لحساب إحداثيات $I(x, y, z)$ ، نقطة تقاطع المستقيمين d و d' . نسعى، بالتعامل شعاعياً، إلى التأكيد من أنَّ I تقع على كلٍّ من d و d' .

1. تحقق من وجود عددين حقيقيين α و β يحققان $\overrightarrow{BI} = \beta\vec{v}$ و $\overrightarrow{AI} = \alpha\vec{u}$.

2. اكتب هاتين المساواتين بلغة الإحداثيات لتسنّج α و β ومن ثمَّ إحداثيات النقطة I .

أنجز الحل واكتبه بلغة سليمة.

6 التوازي في الفراغ



لنتأمل المكعب $ABCDEFGH$. النقطة I من الحرف $[CD]$ تتحقق المساواة $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ ، والنقطة J من $[BC]$ تتحقق المساواة $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$. أثبت أن المستقيم (HI) يوازي المستوى (EGJ) .

نحو الحل

لا يظهر الشكل مستقيماً من المستوى (EGJ) موازياً (HI) . إذ لو كان مستقيماً من المستوى (EGJ) موازياً (HI) ، لتأكد لنا أن المستقيم (HI) يوازي المستوى (EGJ) . لتفكير إذن بالتعامل مع المسألة تحليلياً. نختار $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ معلمًا لفراغ، لأنه من السهل تعين إحداثيات نقاط الشكل في هذا المعلم. عين في هذا المعلم إحداثيات النقاط G, E, J, I, H .

لإثبات أن المستقيم (HI) يوازي المستوى (EGJ) ، باستعمال الأشعة، يكفي، على سبيل المثال، إثبات أن الأشعة \overrightarrow{HI} و \overrightarrow{EG} و \overrightarrow{EJ} واقعة في مستوى واحد.

1. أثبت أن هذا يقودنا إلى إثبات وجود عددين حقيقيين x و y يتحققان

$$\overrightarrow{HI} = x\overrightarrow{EG} + y\overrightarrow{EJ}$$

2. اكتب هذه المساواة الشعاعية بلغة الإحداثيات : ستحصل على جملة من ثلاثة معادلات بمجهولين.

3. اختر اثنتين من المعادلات الثلاث التي حصلت عليها، ثم حل الجملة المؤلفة منها. هل العددان الحقيقيان x و y اللذان وجدهما حلول للمعادلة الثالثة؟

أنجز الحل واكتبه بلغة سليمة.

حل آخر

فيما سبق، لم نسع إلى إظهار مستقيم في المستوى (EGJ) يوازي (HI) ، فلنجأنا إلى التعامل مع الإحداثيات. ولكن دراسة تقاطع المكعب مع المستوى (EGJ) ، تظهر مستقيماً من هذا القبيل. المستوىان (EFG) و (ABC) متوازيان، والمستوى (EGJ) يقطعهما بفصلين مشتركين متوازيين.

1. ارسم الفصل المشترك للمتوازيين (EGJ) و (ABC) ، ولتكن K نقطة تقاطعه مع (AB) .

يبين لماذا $\overrightarrow{EK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ ؟ أثبت أن $HI \parallel EGJ$.

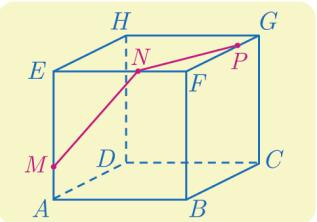
2. ماذا تستنتج بشأن المستقيمين (HI) و (EK) ؟ وكذلك بشأن المستقيم (HI) والمستوى (EGJ) ؟

أنجز الحل الآخر واكتبه بلغة سليمة.

مقطع مكعب بمسار

7

نريد تعين نقاط المقطع MNP مع وجوه المكعب. ولكن بمبدأ؟ نعلم أنه عندما يقطع المستوى MNP وجهين متقابلين من المكعب، وهذا في مستويين متوازيين، يكون الفصلان المشتركان الناتجان متوازيين.



نحو الحل

نريد تعين نقاط المقطع MNP مع وجوه المكعب. ولكن بمبدأ؟ نعلم أنه عندما يقطع المستوى MNP وجهين متقابلين من المكعب، وهذا في مستويين متوازيين، يكون الفصلان المشتركان الناتجان متوازيين.

1. أي وجه من وجوه المكعب يتقاطع مع (MNP) ويباذي (MN) ؟
2. أي وجه من وجوه المكعب يتقاطع مع (MNP) ويباذي (NP) ؟
3. أي وجه تختار إذن لتعامل معه؟

لبداً، على سبيل المثال، بالبحث عن تقاطع المستوى (MNP) مع الوجه (DCG) . لإيجاد الفصل المشترك لهذين المستويين، يكفي إيجاد نقطة مشتركة بينهما. لنبحث إذن عن نقطة من هذا الفيل.

1. لماذا نقطة تقاطع (PN) و (HG) ملائمة؟ ارمز إلى تلك النقطة بالرمز Q .
2. المستقيم المار بالنقطة Q موازياً المستقيم (MN) ، يقطع (CG) في R ويقطع (DC) في S . حدد الفصل المشترك للمستوى (MNP) والوجه (DCG) .
1. لماذا يفيد المستقيم المار بالنقطة S موازياً (PN) ، في تحديد الفصل المشترك للمستوى (MNP) والوجه $(ABCD)$ ؟ لتكن T نقطة تقاطعه مع $[AD]$.
2. ما الفصل المشترك للمستوى (MNP) مع كل من الوجهين $(BCGF)$ و $(ADHE)$ ؟

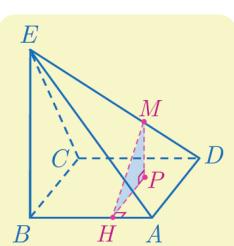
أنجز الحل الآخر واكتبه بلغة سليمة.



حساب مسافة

8

هرم $ABCDE$ رأسه E وقاعدته مربع. $[BE]$ عمودي على المستوى $[ED]$ ، $AB = 4$ و $EB = 4\sqrt{2}$. نقطة M من القطعة $[ED]$. لتكن P المسقط القائم للنقطة M على المستوى $[ABCD]$ و H المسقط القائم للنقطة P على المستقيم (AB) . احسب طول القطعة المستقيمة $[MH]$.



ندعونا مختلف أوضاع التَّعَامِد والتَّسَاوِي في الشَّكْل إلى التعامل تحليلياً مع هذا التَّمْرين. يحضرنا، هنا، المعلم المتَّجَانُس ($B; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) حيث $\overrightarrow{BE} = 4\sqrt{2}\vec{k}$ و $\overrightarrow{BC} = 4\vec{j}$ و $\overrightarrow{BA} = 4\vec{i}$.

1. جد، في هذا المعلم، إحداثيات كلٌ من النقاطين D و E .

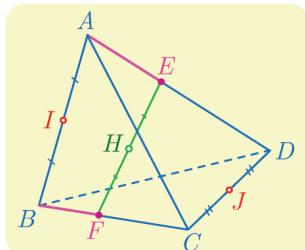
2. حدد إحداثيات النَّقطة M .

P هي المسقط القائم للنَّقطة M على المستوى $(ABCD)$ ، فُسْتَتَّجِ إحداثيات P ، بسهولة، من إحداثيات النَّقطة M . وبالمثل، سُتَّتَّجِ إحداثيات النَّقطة H من إحداثيات P .

1. حدد إحداثيات كلٌ من النقاطين P و H .

2. احسب طول $[MH]$.

أنجز الحل الآخر واكتبه بلغة سليمة.



9

رباعي وجهه، و a عدد حقيقي. I و J هما، بالترتيب، منتصفان $[AB]$ و $[CD]$. و E و F نقطتان تحققان، العلاقتين: $\overrightarrow{BF} = a\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AD}$. وأخيراً H هي منتصف $[EF]$. أثبت أن I و J و H تقع على استقامة واحدة.

نهدف إلى إثبات وقوع ثلات نقاط من الفراغ على استقامة واحدة.ندعونا الفرضيات التي تحدد نقاط الشكل إلى استعمال مركز الأبعاد المتناسبة أداة للإثبات. يكفي إذن، على سبيل المثال، إثبات أن H هي مركز أبعاد متناسبة للنقاطين I و J . وقد أسنذنا إليهما تقلين مناسبين.

1. تيقن أن E هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين $(A,1-a)$ و (D,a) ، وأن F هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين (C,a) و $(B,1-a)$.

2. بالاستفادة من الخاصية التجميعية، أثبت أن H هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطة $(a-1,1-a)$ و (D,a) و (C,a) و $(B,1-a)$.

3. استنتاج أن النقاط I و J و H تقع على استقامة واحدة.

أنجز الحل الآخر واكتبه بلغة سليمة.





قدماً إلى الأئمَّة

10 A و B و C ثلث نقاط ليست على استقامة واحدة من الفراغ. و D و E نقطتان تحققان:

$$\cdot \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CE} \text{ و } 3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$$

① أثبت أن النقاط A و B و C و D و E نقع في مستوى واحد.

② لتكن I منتصف $[BE]$. أثبت وقوع A و I و J على استقامة واحدة.

11 $ABCD$ رباعي وجوه. و E و F و G هي نظائر A بالنسبة إلى منصفات $[BC]$ و $[CD]$ و $[DB]$ بالترتيب.

$$\cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE} \text{ و } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$$

① أثبت أن القطعتين $[DE]$ و $[FB]$ المنصف نفسه.

② استنتج أن E و F و G متلاقيات في نقطة واحدة.

③ أثبت أن المستقيمات (BF) و (DE) و (CG) متلاقيات في نقطة واحدة.

12 $ABCD$ رباعي وجوه. و E هي نظيرة A بالنسبة إلى C ، و F و G هما النقطتان اللتان تجعلان $EBCF$ و $FDAG$ متوازيي الأضلاع.

$$\cdot \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC}$$

① أثبت أن D ، ثم G نقع في مستوى واحد.

② نتأمل في معلم $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ النقاط $A(3,2,1)$ و $B(1,2,0)$ و $C(3,1,-2)$.

① أثبت أن النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

② عند أي قيمة للوسيط m تتتمى النقطة $M(m,1,3)$ إلى المستوى (ABC) ؟

③ ما العلاقة بين x و y لتقع النقاط A و B و C و $D(x,y,3)$ في مستوى واحد؟

مجموعـة نقاط

لتكن \mathcal{E} مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تتحقق إحداثياتها العلاقة: $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

① أثبت أن النقاط $A(7,1,0)$ و $B(5,0,0)$ و $C(2,0,1)$ تتتمى إلى المجموعة \mathcal{E} .

② أثبت أن النقاط A و B و C تحدّد مستوى \mathcal{P} .

③ a. أثبت أن مركبات الشّعاع \overrightarrow{BM} هي $(2y - 3z, y, z)$.

b. استنتاج أن $\overrightarrow{BM} = y\overrightarrow{BA} + z\overrightarrow{BC}$. ماذا يمكنك أن تستنتج من ذلك؟

④ بالعكس، أثبت أن أيّة نقطة $M(x,y,z)$ من المستوى \mathcal{P} تتحقّق المعادلة:

$$x - 2y + 3z - 5 = 0$$

ما هي المجموعة \mathcal{E} ؟

15

نتأمل في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ المستقيم d المار بالنقطة $A(2, 0, 5)$ والموجّه بالشّعاع $\vec{d}(2, 5, -1)$ ، والمستقيم d' المار بالنقطة $B(2, 2, -1)$ والموجّه بالشّعاع $\vec{v}(1, 2, 1)$. هل d و d' متقاطعان؟ في حالة الإيجاب، عين نقطة تقاطعهما.

16

17 ليكن α عدداً حقيقياً، ولنتأمل النقاط الثلاث $A(3, 1, -3)$ و $B(-1, 5, -3)$ و $C(-1, 1, \alpha)$. أثبت أن المثلث ABC متساوي الساقين، أي α كان. أيمكن أن يكون متساوي الأضلاع؟

18

١٠ أوجد نقطةً متساوية البعد عن A و B .

② أوجد العدد الحقيقي λ الذي يجعل النقطة $C(1,1,\lambda)$ متساوية البعد عن A و B .

③ أثبت أن « $M(x, y, z)$ نقطة من المستوى المحوري للقطعة $[AB]$ » إذا وفقط إذا تحقق الشرط

$$\cdot \ll 3x - 3y - 2z + 8 = 0 \gg$$

نتأمل النقاط $A(2,3,0)$ و $B(2,3,6)$ و $M(4,-1,2)$. نهدف إلى حساب بعد M عن المستقيم

$$\bullet \cdot (AB)$$

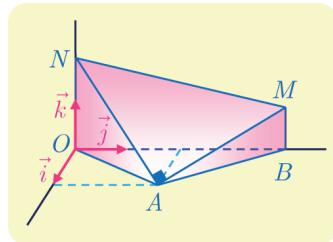
• أثبت أن M لا تقع على المستقيم (AB) ①

② أثبت أن كل نقطة K من المستقيم (AB) إحداثيات من النمط $(2, 3, z)$.

$$\text{احسب } MK^2 \text{ بدلالة } z \quad ③$$

٤) عند أية قيمة للعدد z يكون MK أصغر ما يمكن؟ حدد إذن بعده M عن (AB) .

المسافات وحجم هرم 20



و n عدداً حقيقياً موجباً يتحققان $0 < m < n$. نتأمل النقاط $A(\sqrt{3}, 3, 0)$ و $B(0, 6, 0)$ و $M(0, 0, n)$ و $N(0, 0, 0)$ في MAN متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. عين m و n ليكون المثلث $AOBMN$ يساوي $5\sqrt{3}$ قائماً في A و حجم المجسم $AOBMN$

21 نتأمل رباعي وجوه $ABCD$ ، ونقطتين E و F معرفتين وفق [EF].

أثبت أن G ، مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,3)$ و $(C,1)$ و $(D,2)$ ، يقع على [EF]. ثم عين النقطة G على [EF].

22 نتأمل رباعي وجوه $ABCD$. ونقطتين I و J معرفتين وفق $\overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{JD}$ و $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$.

أيمكن أن تتطبق إحدى النقطتين I و J على الأخرى؟

أثبت أنه، أيًّا كانت النقطة M من الفراغ، كان :

$$\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MJ} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MI}$$

جد مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق :

$$\left\| \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right\| = \left\| 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} \right\|$$

23 لدينا في معلم متاجنس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاطان $A(2, -1, 2)$ و $B(-2, 1, -2)$. نقرن بكل نقطة

من الفراغ، المقدار $f(M) = MA^2 + MB^2$

احسب $f(M)$ بدلالة x و y و z .

أثبت أن مجموعة النقاط M التي تحقق $f(M) = 18$ مؤلفة من نقطة واحدة.

أثبت أن مجموعة النقاط M التي تتحقق $f(M) = 30$ كرة مركزها O . أوجد نصف قطرها.

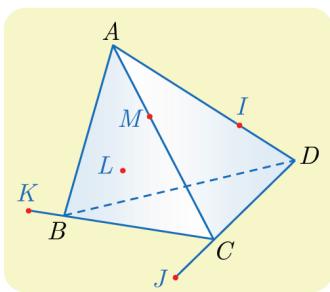
أثبت أنه، وفق شرط على العدد الحقيقي k ، مجموعة النقاط M المحققة للعلاقة $f(M) = k$ هي كرة مركزها O .

24 نتأمل رباعي الوجوه $ABCD$ رباعي وجوه.

① نقطة منحرف $[AC]$. جد مقطع رباعي الوجوه بالمستوي المار بالنقطة M موازياً للمستوى (BCD) .

② I نقطة منحرف $[AD]$ ، و J نقطة من المستقيم (CD) ، و K نقطة من المستقيم (BC) . عين مقطع رباعي الوجوه بالمستوي (IJK) .

③ L نقطة من المستوي (ABD) . أوجد مقطع رباعي الوجوه بالمستوي (KJL) .



نَأْمَل مَكعْبًا $ABCDEFGH$ ، والنَّقَاط I و J و K و L منتصفات $[AE]$ و $[BG]$ و $[EG]$.
و $[AB]$ بالترتيب. والنَّقطة M مركز الأبعاد المتناسبة للنَّقَاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(G,1)$ و $(E,1)$.

أثبت أنَّ M تنتهي إلى $[IJ]$ [①] وعيِّن موضعها على هذه القطعة.

أثبت أنَّ M تنتهي إلى $[KL]$ [②] وعيِّن موضعها على هذه القطعة.

استنتج أنَّ I و J و K و L تقع في مستوى واحد وعيِّن طبيعة الرباعي $ILJK$.

2

المجاء السّلّمي في الفراغ

- 1 المجاء السّلّمي في المستوى (تذكرة)
- 2 المجاء السّلّمي في الفراغ
- 3 التّعامد في الفراغ
- 4 المعادلة الدّيكارتية لمستوٍ



الجداء السّلّمي للأشعة مفهوم حديثٌ نسلياً، يعود إلى القرن الثامن عشر، ولقد ظهر في الفيزياء قبل الرياضيات للحديث عن عمل قوّة تنتقل على مسار، ثم دخل علم الهندسة ليعطي أداة هندسيّة إضافيّة لدراسة التّعامد والإسقاط القائم، وسرعان ما تطّور وأصبح أكثر تجريداً على يد رياضياتيّين من نهاية القرن التاسع عشر من مثل غراسمان وهيلبرت وغيرها.

سنقتصر في دراستنا على المفهوم الهندسي البسيط وتطبيقاته المباشرة، ولكن قد يكون من المفيد أن تعلم أننا في يومنا هذا ندرس فضاءات الأشياء التي يمكن تعريف جداء سلّمي عليها، وجداء سلّمي للتّوابع، وجداء سلّمي لكثيرات حدود، وإسقاطات قائمة، يفيد هذا المفهوم في تعريف المسافة بين هذه الأشياء فأصبح من أهم المفاهيم الرياضيّة على الإطلاق لها من تطبيقات عملية في شتى المجالات، من تقرّيب للتّوابع، وحلّ عددي لمعادلات تفاضليّة وغير ذلك.

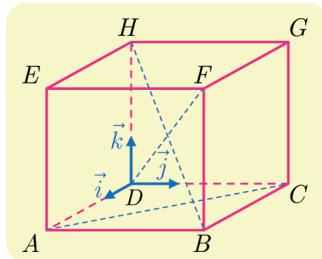
هذا وما زال البحث مستمراً عن تطبيقات جديدة لهذا المفهوم المهم، وربما ينتظرك بعضها، فالمجال هنا ما يزال واسعاً للبحث والإبداع.

الجداء السُّلْمِي في الفراغ

انطلاق نشطة



الحساب في المكعب. نهدف إلى التعبير بصيغة تحليلية عن التعامد في الفراغ. لنتأمل مكعباً طول ضلعه يساوي 3. ولنتأمل المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ المشار إليه في الشكل.



- ① اكتب إحداثيات جميع رؤوس المكعب.
- ② a. علل تعامد المستقيمين (AB) و (FG) .
b. عين (x, y, z) مركبات الشعاع \overrightarrow{AB} و (x', y', z') مركبات الشعاع \overrightarrow{FG} .
- ③ a. علل تعامد المستقيمين (AC) و (BF) .
b. عين (x, y, z) مركبات الشعاع \overrightarrow{AC} و (x', y', z') مركبات الشعاع \overrightarrow{BF} .
c. احسب المقدار $xx' + yy' + zz'$.
- ④ a. ارسم الرباعي $DBFH$ بالأبعاد الحقيقية. أيكون المستقيمان (DF) و (HB) متعامدين؟
b. عين (x, y, z) مركبات الشعاع \overrightarrow{DF} و (x', y', z') مركبات الشعاع \overrightarrow{HB} .
c. احسب المقدار $xx' + yy' + zz'$.
- ⑤ a. ليكن I مركز الوجه $EFGH$. ما إحداثيات I ؟
b. لتكن (x, y, z) مركبات الشعاع \overrightarrow{DF} المحسوبة سابقاً، احسب (x', y', z') مركبات الشعاع \overrightarrow{BI} .
c. احسب المقدار $xx' + yy' + zz'$ ، ماذا تقتصر ؟
- ⑥ a. وضع I على الشكل المرسوم في ④.
b. لإثبات تعامد (DF) و (BI) ، تؤول المسألة إلى مسألة في المستوى. باختيار معلم متجانس في المستوى (DBF) ، أعط إحداثيات نقاط الشكل، واحسب الجداء السُّلْمِي $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{DF}$ ، ماذا تستنتج؟

الجداء السلمي في المستوى (تذكرة)

١.١. العبارات المختلفة للجداء السلمي

١) في المستوى، الجداء السلمي لشعاعين \vec{u} و \vec{v} هو العدد الحقيقي

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$$

إذا كان الشعاعان \vec{u} و \vec{v} غير معدومين كان

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \theta$$

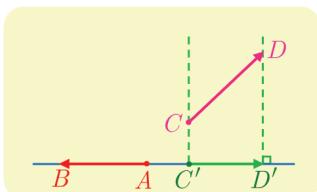
حيث θ هو قياس لزاوية الهندسية للشعاعين \vec{u} و \vec{v} .

إذا كانت مركبات الشعاعين \vec{u} و \vec{v} في معلم متجانس هي (x, y) و (x', y') بالترتيب كان

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

إذا كان $\overrightarrow{C'D'}$ هو المسقط القائم للشعاع \overrightarrow{CD} على المستقيم (AB) كان

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{C'D'} \cdot \overrightarrow{AB}$$



٢.١. التَّعَامِدُ وَالْمَسَافَةُ

مبرهنة وتعريف ١

القول إن الشعاعين \vec{u} و \vec{v} متعامدان، يعني أن جداءهما السلمي معدوم: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. وهذا يكفي في معلم متجانس أن $xx' + yy' = 0$ حيث (x, y) و (x', y') هي مركبات الشعاعين \vec{u} و \vec{v} بالترتيب.

ومن جهة أخرى، لما كانت الزاوية الهندسية بين الشعاع وذاته تساوي الصفر استنتجنا أن $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = \|\vec{u}\|^2$.

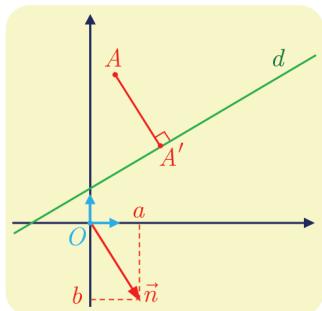
٣.١. بُعد نقطة عن مستقيم

مبرهنة ٢

في معلم متجانس، بُعد النقطة $A(\alpha, \beta)$ عن المستقيم d الذي معادلته $ax + by + c = 0$

$$\text{يساوي } \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

الإثباتات



الشعاع $\vec{n}(a, b)$ شعاعٌ ناظم على المستقيم d ، وبوجه خاص $\vec{n} \neq \vec{0}$.
لترمز (α', β') إلى المسقط القائم للنقطة A على d ، المسافة المطلوبة هي AA' . ولكن الشعاعين \vec{AA}' و \vec{n} مرتبطان خطياً إذن

$$(*) \quad |\vec{n} \cdot \vec{AA}'| = \|\vec{n}\| \cdot AA' = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot AA'$$

ولكن مركبتي الشعاع \vec{AA}' هما $(\alpha' - \alpha, \beta' - \beta)$ إذن

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{AA}' &= a(\alpha' - \alpha) + b(\beta' - \beta) = a\alpha' + b\beta' - a\alpha - b\beta \\ &= \underbrace{a\alpha' + b\beta'}_0 + c - (a\alpha + b\beta + c) = -(a\alpha + b\beta + c) \end{aligned}$$

إذ استخدنا من وقوع النقطة $A'(\alpha', \beta')$ على d لنسنن أن $a\alpha' + b\beta' + c = 0$. وبالتعويض في (*) نجد المساواة المطلوبة.

تُحْرِيساً للفهم

كيف تُجري الحسابات باستعمال الجداء السلمي؟

- أياً كانت الأشعة \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} والأعداد الحقيقة a و b كان

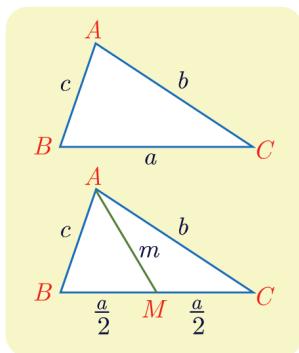
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad ② \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad ①$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \quad ④ \quad (a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab(\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad ③$$

- لا يتحقق الجداء السلمي جميع خواص ضرب الأعداد، فمثلاً $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}$ لا تقتضي $\vec{w} = \vec{v}$. ولكن المساواة $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ تك足 أي إن الشعاعين \vec{u} و $\vec{v} - \vec{w}$ متعامدان.

كيف نحسب $\vec{u} \cdot \vec{v}$ عندما يكون \vec{u} و \vec{v} مرتبطين خطياً؟

- إذا كان الشعاعان مرتبطين خطياً ولهمما الجهة نفسها كان $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| = \vec{u} \cdot \vec{v}$. وإذا كانوا متعاكسين بالجهة كان $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ وفي جميع الأحوال



تطبيقات

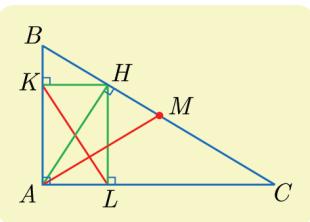
- علاقة الكاشي :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

- مبرهنة المتوسط :

$$b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}$$

- في متوازي الأضلاع: مجموع مربعات أطول الأضلاع يساوي مجموع مربعات طولي القطرين.



مثُلْ قائم في A ، و M منتصف $[BC]$ ، و H موقع الارتفاع المرسوم من A . ليكن K و L المسقطين القائمين للنقطة H على $[AB]$ و $[AC]$ بالترتيب. أثبت تعمد المستقيمين (KL) و (AM) .

الحل

سنستعمل الجداء السلمي. لإثبات تعمد المستقيمين (AM) و (KL) ، نبرهن أن $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{KL} = 0$. لما كانت M منتصف $[BC]$ كان $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ لنحسب إذن $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KL}$ و $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{KL}$ بالاستفادة من المسقط القائم على (AB) نجد:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA}$$

وبالاستفادة من المسقط القائم على (AC) نجد:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$$

إذن

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{KL} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{KL}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0\end{aligned}$$

لأنه استناداً إلى الفرض (AH) عمودي على (BC) . ومنه تعمد المستقيمين (AM) و (KL) .

تَدْرِّبْ

نُعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

❶ احسب $\vec{v} \cdot \vec{u}$ و $\vec{w} \cdot \vec{v}$ و $\vec{u} \cdot \vec{w}$ في الحالتين :

$$\cdot \vec{w} = \frac{1}{3}\vec{i} - 2\vec{j} \quad \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{i} + 5\vec{j} \quad \vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} \quad ①$$

$$\cdot \vec{w}(5, 2) \quad \vec{v}(-\frac{1}{2}, 3) \quad \vec{u}(2, -1) \quad ②$$

❷ أعط في الحالتين الآتيتين معادلة المستقيم المار بالنقطة A والعمودي على المستقيم d :

$$\cdot d : x - 3y + 2 = 0 \quad A(-1, 2) \quad ② \quad \cdot d : 2x + 5y - 5 = 0 \quad A(5, 3) \quad ①$$

❸ أثبت في حالة أربع نقاط A و B و C و D من المستوى أن:

$$2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2$$

❹ أعط في الحالتين الآتيتين بُعد النقطة A عن المستقيم d :

$$\cdot d : \sqrt{2}x - 3y - 1 = 0 \quad A(-\sqrt{2}, 2) \quad ② \quad \cdot d : 2x + y - 5 = 0 \quad A(-2, 4) \quad ①$$

الجداء السلمي في الفراغ ②

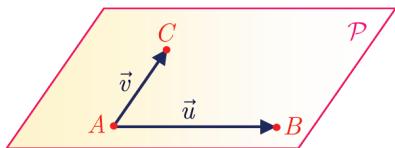
فيما يأتي نفترض أنتا اخترنا في الفراغ واحدة للطول.

تعريف 2



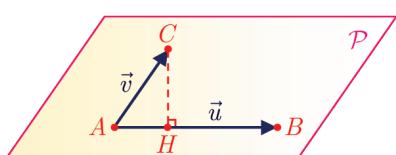
في الفراغ، الجداء السلمي لشعاعين \vec{u} و \vec{v} هو العدد الحقيقي

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$$



لاحظ أنَّ شعاعين يقعان بالضرورة في مستوى، أي إذا
تأملنا ثلاثة نقاط A و B و C بحيث يكون $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ ، فيوجد على الأقل مستوى P يحوي النقاط A و B و C ، وتكون واحدة الطول في P هي نفسها في الفراغ، وهذا
يتقى تعريف الجداء السلمي للشعاعين \vec{u} و \vec{v} في الفراغ مع تعريف الجداء السلمي لهذين
الشعاعين في المستوى P . ينبع من ذلك أنَّ العبارات الآتية للجداء السلمي، التي جرى إثبات صحتها
في المستوى، تبقى صحيحة في الفراغ:

- إذا كان α قياساً للزاوية الهندسية للشعاعين \vec{u} و \vec{v} كان $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \alpha$.
- وجه الخصوص $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$.



■ وإذا كانت H هي المسقط القائم في المستوى P للنقطة

على المستقيم (AB) كان

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

2.2. العبارة التحليلية للجداء السلمي



نفترض أنَّ مركبات الشعاعين \vec{u} و \vec{v} في معلم متاجنس هي (x, y, z) و (x', y', z') بالترتيب،
عندئذ: $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

الإثبات

ضمن شروط المبرهنة لدينا

$$\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \quad \text{و} \quad \|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

و

$$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (x + x')^2 + (y + y')^2 + (z + z')^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2xx' + 2yy' + 2zz'\end{aligned}$$

إذن

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

تفيد المبرهنة السابقة في إثبات صحة قواعد الحساب التي تمثل نظيراتها في المستوى دون عناء.

المبرهنة الآتية تلخص هذه القواعد:

مبرهنة 4



أياً كانت الأشعة \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} والأعداد الحقيقية a و b كان

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad ② \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad ①$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \quad ④ \quad (a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab(\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad ③$$

الإثبات

متروك تمريناً للقارئ.

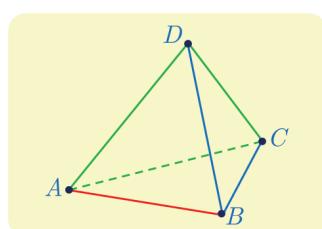
حساب جداء سلمي دون معلم

مثال

رباعي وجوه منتظم. كل وجه فيه مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه a . احسب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

مكعب طول ضلعه a . احسب $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CH}$ و $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{HC}$.

الحل

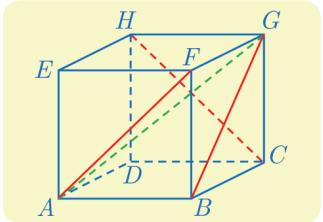


$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos \widehat{BAC} = a^2 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2} \quad ①$$

وبالمثل $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$. وأخيراً، لأن $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$ استنتجنا أن

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$$



■ لأن E هي المسقط القائم للنقطة F على (AE) استنتجنا أن

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE} = a^2$$

■ ولأن A هي المسقط القائم للنقطة B على (AE) و $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BE}$ استنتجنا أن

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE} = a^2$$

■ ولأن H هي المسقط القائم للنقطة G على المستوى G ، و E هي المسقط القائم للنقطة

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE} = a^2$$

■ وأخيراً $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EB} = 0$

حساب جداء سلقي في معلم

مثال

نعطي في معلم متاجنس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط $A(1, 0, 0)$ و $B(0, 1, 0)$ و $C(0, 0, 1)$ و $D(0, 2, 0)$ و $E(1, 1, 1)$. احسب $[AB]$.

الحل

■ مركبات الشعاعين \overrightarrow{AC} و \overrightarrow{AB} هي $(-1, 0, 1)$ و $(-1, 1, 0)$ بالترتيب إذن

■ مركبات الشعاعين \overrightarrow{AD} و \overrightarrow{AE} هي $(0, 1, 1)$ و $(-1, 2, 0)$ بالترتيب إذن

■ لما كان $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ استنتجنا أن مركبات الشعاعين \overrightarrow{OE} و \overrightarrow{CM} هي $(1, 1, 1)$ و $(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ بالترتيب إذن

تَدْرِيْجٌ

نعطي في هذه الفقرة معلمًا متاجنساً $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

① احسب $\vec{v} \cdot \vec{u}$ و $\vec{w} \cdot \vec{v}$ و $\vec{u} \cdot \vec{w}$ في الحالتين :

$$\cdot \vec{w}(0, -\sqrt{3}, 1) \text{ و } \vec{v}(1 - \sqrt{2}, 0, -1) \text{ و } \vec{u}(1 + \sqrt{2}, \sqrt{3}, 0) \quad ①$$

$$\cdot \vec{w}(1, 0, 1) \text{ و } \vec{v}\left(\frac{1}{2}, -2, \frac{2}{3}\right) \text{ و } \vec{u}\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) \quad ②$$

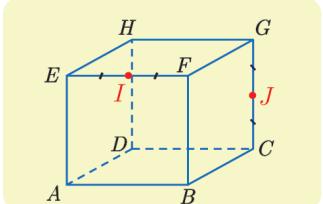
② إذا علمت أن نظيم \vec{u} يساوي 5 ونظيم \vec{v} يساوي 3 وأن $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$ فاحسب المقادير الآتية:

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \quad ② \quad \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \quad ①$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 3\vec{v}) \quad ④ \quad (2\vec{u}) \cdot (\vec{v} - 3\vec{u}) \quad ③$$

③ نتأمل هرماً $S-ABCD$ قاعدته مربع ورأسه S . وطول كل حرف من حروفه وأضلاع قاعدته يساوي a . احسب a .

$$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC} \text{ و } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} \text{ و } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$$



④ مكعب $ABCDEFGH$ مكتوب طول ضلعه a . فيه I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[CG]$. احسب

$$\overrightarrow{JH} \cdot \overrightarrow{JD} \text{ و } \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{IA} \text{ و } \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{GJ} \text{ و } \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{FC} \text{ و } \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{EA}$$

3 التَّعَامِدُ فِي الْفَرَاغِ

3

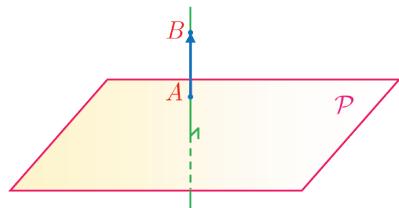
1.3. الأَشْعَةُ الْمُتَعَامِدَةُ

تعريف 3

- في الفراغ، يتعامد شعاعان \vec{u} و \vec{v} إذا وفقط إذا كان $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- وهذا يعني أنه في حالة $\vec{v} = \overrightarrow{CD} \neq \vec{0}$ و $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ فإن تعامد الشعاعين \vec{u} و \vec{v} يكفي تعامد المستقيمين (AB) و (CD) .
- وأنه إذا كان $\vec{u}(x, y, z)$ و $\vec{v}(x', y', z')$ في معلم متاجنس فإن تعامد الشعاعين \vec{u} و \vec{v} يكفي $xx' + yy' + zz' = 0$.

2.3. الشَّعَاعُ النَّاظِمُ عَلَى مَسْطَوٍ

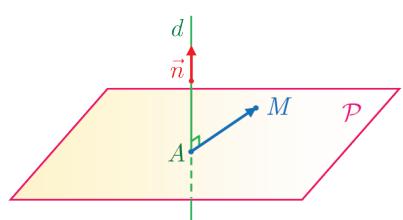
تعريف 4



تعريفاً، القول إن الشعاع غير الصافي \overrightarrow{AB} شعاع ناظم على المستوى P يعني أن المستقيم (AB) عمودي على P . أي يكون $\vec{n} \neq \vec{0}$ شعاعاً ناظماً على المستوى P إذا وفقط إذا كان منحاه عمودياً على P .

3.3. تَعَامِدُ مَسْتَقِيمٍ وَمَسْطَوٍ

ليكن d مستقيماً شعاع توجيهه \vec{n} ، ولتكن A نقطة من d . المستوى P العمودي على d في A هو مجموعة النقاط M التي تتحقق أن المستقيم (AM) عمودي على d (بالإضافة إلى النقطة A ذاتها). إذن P هو مجموعة النقاط M التي تتحقق أن الشعاع \overrightarrow{AM} عمودي على \vec{n} . فالشعاع \vec{n} هو إذن شعاع ناظم على P . عليه:

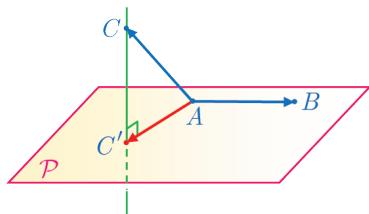


المستوى المار بالنقطة A ويقبل \vec{n} شعاعاً ناظماً هو مجموعة النقاط M التي تتحقق $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

تحريساً للفهم

؟! لحساب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ يمكن استبدال المسقط القائم للشعاع \overrightarrow{AC} على مستوى يحوي (AB) بالشعاع \overrightarrow{AC} .

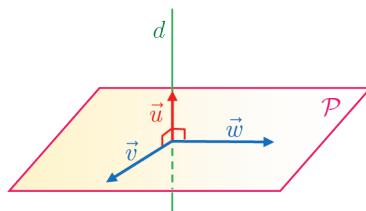
لفترض أن A و B نقطتان من مستوى \mathcal{P} ، والنقطة C لا تنتهي إلى المستوى \mathcal{P} . عندئذ يوجد مستقيم وحيد عمودي على \mathcal{P} ويمر بالنقطة C . يقطع هذا المستقيم المستوى \mathcal{P} في نقطة C' ، نسميتها المسقط القائم للنقطة C على المستوى \mathcal{P} . ويكون



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'C}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'C} \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'C} &= 0 \quad \text{(معامدان)}\end{aligned}$$

ولكن المستقيمين (AB) و (CC') متعامدان، إذن $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'}$.

الخلاصة : لا تتغير قيمة الجداء السلمي لشعاعين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} عند استبدال المسقط القائم للشعاع \overrightarrow{AC} على المستقيم (AB) أو على مستوى يحوي (AB) بالشعاع \overrightarrow{AC} .

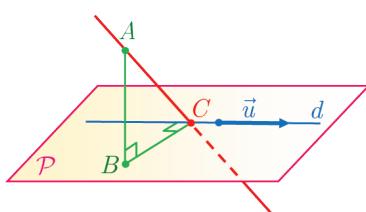


؟! كيف نترجم شعاعياً تعامد مستقيم مع مستوى؟

إذا كان الشعاع الموجه \vec{u} لمستقيم d عمودياً على زوج الأشعة المستقلة خطياً في مستوى \mathcal{P} ، كان d عمودياً على مستوى \mathcal{P} .

- ؟! كيف نعيّن الأوضاع النسبية لمستويين اعتماداً على الأشعة الناظمة؟
- ليكن \vec{n}_1 شعاعاً ناظماً على مستوى \mathcal{P} ، ولتكن \vec{n}_2 شعاعاً ناظماً على مستوى \mathcal{Q} .
 - إذا كان \vec{n}_1 و \vec{n}_2 مرتبطين خطياً كان المستويان \mathcal{P} و \mathcal{Q} متوازيين (أو منطبقين) وإذا كانا غيرمربطين خطياً كان المستويان متقاطعين.
 - إذا كان \vec{n}_1 و \vec{n}_2 متعامدين كان المستويان \mathcal{P} و \mathcal{Q} متعامدين، والعكس صحيح أيضاً.

تعامد مستقيمين (خاصة الأعمدة الثلاثة)



المستقيم d محظى في المستوى \mathcal{P} . والنقطة B هي المسقط القائم لنقطة A خارج \mathcal{P} على \mathcal{P} . و C هي المسقط القائم للنقطة B على d . عندئذ المستقيمان (AC) و d متعامدان.

لإثبات تعامد مستقيمين يمكننا إثبات تعامد شعاع موجه لأحد هما مع شعاع موجه للآخر.



المعلم

ليكن \vec{u} شعاعاً موجهاً للمستقيم d ، \overrightarrow{BC} هو المسقط القائم للشعاع \overrightarrow{AC} على المستوى \mathcal{P} ، والمستقيم (BC) عمودي على d إنشاء إذن $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{BC} \cdot \vec{u} = 0$. وهي النتيجة المرجوة.



نُعطي في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

① بين فيما يأتي بين إذا كان الشعاعان \vec{u} و \vec{v} متعامدين أوعين الوسيط α ليكونا كذلك.

$$\vec{v}\left(-\frac{2}{5}, 2, 3\right), \quad \vec{u}\left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad ①$$

$$\vec{v}\left(-\sqrt{2}, 1, 1\right), \quad \vec{u}\left(\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\right) \quad ②$$

$$\vec{v}\left(-\frac{2}{5}, 3, \alpha\right), \quad \vec{u}\left(2, -\frac{1}{2}, 5\right) \quad ③$$

$$\vec{v}\left(\alpha, 2\alpha, \frac{1}{2}\right), \quad \vec{u}\left(\sqrt{3}, \frac{1}{3}, 2\right) \quad ④$$

② نتأمل النقطتين $A(2, 3, 1)$ و $B(0, 2, 6)$. والمستقيم d المار بالنقطة $C(-2, 1, 5)$ وشاع توجيهه

$$\cdot (AB). \text{ أثبت أن } d \text{ عمودي على المستقيم } (AB).$$

③ أطوال الأشعة \vec{u} و \vec{v} و $\vec{u} + \vec{v}$ هي بالترتيب 6 و 8 و 10. أيكون الشعاعان \vec{u} و \vec{v} متعامدين؟

④ نتأمل شعاعين \vec{u} و \vec{v} ، ونفترض أن $\vec{v} + \vec{u}$ و $\vec{v} - \vec{u}$ متعامدان. أثبت أن للشعاعين \vec{u} و \vec{v} الطول نفسه.

المُعادلة الديكارتية لمستوٍ 4

٤.١. المُعادلة الديكارتية لمستوٍ

مبرهنة ٥

في معلم متجانس.

١ لكل مستوى \mathcal{P} معادلة ديكارتية من الشكل $ax + by + cz + d = 0$ حيث الأعداد a و b و c ليست جميعها معدومة. وعندما يكون $(\vec{n}(a,b,c))$ شعاعاً ناظماً على \mathcal{P} .

٢ وبالعكس، إذا أعطيت الأعداد a و b و c و d ، ولم تكن a و b و c جميعها معدومة، فإن مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $ax + by + cz + d = 0$ هي مستوى يقبل $(\vec{n}(a,b,c))$ شعاعاً ناظماً.

الإثبات

١ ليكن \mathcal{P} مستوىً ولتكن $(\vec{n}(a,b,c))$ شعاعاً ناظماً عليه، في هذه الحالة لا تكون الأعداد a و b و c معدومة معاً. لنختر $A(x_0, y_0, z_0)$ نقطة من \mathcal{P} . عندئذ يكون \mathcal{P} هو مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تتحقق $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. وهذا يكافي

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

أو

$$ax + by + cz + d = 0$$

وقد عرفنا $\cdot d = -ax_0 - by_0 - cz_0$

٢ وبالعكس، لتكن \mathcal{E} مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تتحقق $ax + by + cz + d = 0$ ، حيث الأعداد a و b و c ليست معدومة معاً. عندها من الممكن دوماً اختيار أعداد x_0 و y_0 و z_0 تحقق $(y_0 = z_0 = 0)$ (مثلاً في حالة $a \neq 0$) يمكننا أن نختار $x_0 = -d/a$ و $x_0 = 0$. وهذا تكون $A(x_0, y_0, z_0)$ نقطة من \mathcal{E} . والقول إن $M(x,y,z)$ نقطة ما من \mathcal{E} يكافي:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

أي إن الشعاع $(\vec{n}(a,b,c))$ عمودي على الشعاع \overrightarrow{AM} . والنقطة M تتبع إلى المستوى \mathcal{P} المار بالنقطة A ويقبل $(\vec{n}(a,b,c))$ شعاعاً ناظماً. وهذا يثبت المطلوب.

2.4. بُعد نقطة عن مستوى



في معلم متجانس. لتكن $0 = ax + by + cz + d$ معادلة المستوي \mathcal{P} . عندئذ يعطى بعد النقطة

$$\text{dist}(A, \mathcal{P}) = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{العلاقة بين المستوى } A(\alpha, \beta, \gamma) \text{ و } \mathcal{P}$$

الاثبات

الشعاع $\vec{n}(a, b, c)$ شعاعٌ ناظم على المستوى \mathcal{P} ، وبوجه خاص $\vec{n} \neq \vec{0}$. لنرمز $A'(\alpha', \beta', \gamma')$ إلى المسقط القائم للنقطة A على \mathcal{P} ، المسافة المطلوبة هي $\text{dist}(A, \mathcal{P}) = AA'$. ولكن الشعاعين $\vec{AA'}$ و \vec{n} مرتبطان خطياً إذن

$$(*) \quad \left| \vec{n} \cdot \overrightarrow{AA'} \right| = \| \vec{n} \| \cdot AA' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot AA'$$

ولكن مركبات الشعاع $\overrightarrow{AA'}$ هي $(\alpha' - \alpha, \beta' - \beta, \gamma' - \gamma)$ إذن

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AA'} = a(\alpha' - \alpha) + b(\beta' - \beta) + c(\gamma' - \gamma)$$

$$= a\alpha' + b\beta' + c\gamma' - a\alpha - b\beta - c\gamma$$

$$= \underbrace{a\alpha' + b\beta' + c\gamma' + d}_{(a\alpha + b\beta + c\gamma + d)}$$

$$= -(a\alpha + b\beta + c\gamma + d)$$

إذ استخدنا من وقوع النقطة $A'(\alpha', \beta', \gamma')$ في \mathcal{P} لنتتож أن وبالتعويض في (*) نجد

$$\text{dist}(A, \mathcal{P}) = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

إيجاد المعايير الديكارتية لمستوى

نتأمل، في معلم متاجنس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقطة $A(2, 1, -3)$ و الشعاع $\vec{n}(1, 1, 2)$. أعط معادلة لل المستوى \mathcal{P} المار بالنقطة A ويقبل \vec{n} شعاعاً ناظماً.

الحل

تنتمي النقطة $M(x, y, z)$ إلى المستوى المطلوب \mathcal{P} إذا وفقط إذا تحقق الشرط $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n} = 0$. وهذا يكفي.

$$1 \times (x - 2) + 1 \times (y - 1) + 2 \times (z + 3) = 0$$

أو $x + y + 2z + 3 = 0$ وهي المعادلة المطلوبة.

مثال تقاطع مستويين أو توازيهما

في الحالات الآتية نعطي المستويين \mathcal{P} و \mathcal{Q} ويطلب معرفة إذا كانوا متوازيين أو متقاطعين أو متعامدين.

$$\mathcal{Q} : x + 2y - z + 1 = 0, \quad \mathcal{P} : x - 4y + 7 = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$\mathcal{Q} : 2x - 4y + 6z = 0, \quad \mathcal{P} : x - 2y + 3z - 1 = 0 \quad \textcircled{2}$$

$$\mathcal{Q} : 2x + y - z + 1 = 0, \quad \mathcal{P} : x + 2y + 4z - 5 = 0 \quad \textcircled{3}$$

الحل

❶ نلاحظ أن $(\vec{n}_1(1, -4, 0), \vec{n}_2(1, 2, -1))$ شعاع ناظم على \mathcal{P} ، و $\vec{n}_1 = k\vec{n}_2$ لـ k يحقق أي لا يوجد عدد حقيقي k مرتبيان خطياً لأن مركباتهما ليست متناسبة، أي لا يوجد عدد حقيقي k يتحقق $\vec{n}_1 = k\vec{n}_2$. إذن المستويان \mathcal{P} و \mathcal{Q} متقاطعان. ومن الطبيعي أن نتساءل إذا كانوا متعامدين. فنحسب $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -7 \neq 0$ لنرى أن \vec{n}_1 و \vec{n}_2 ليسا متعامدين. فالمستويان \mathcal{P} و \mathcal{Q} غير متعامدين.

❷ هنا نجد أن المستويين \mathcal{P} و \mathcal{Q} متوازيين وغير منطبقين لأن المبدأ $O(0, 0, 0)$ ينتمي إلى \mathcal{Q} ولا ينتمي إلى \mathcal{P} .

❸ في هذه الحالة نجد أن الشعاعين الناظمين على \mathcal{P} و \mathcal{Q} متعامدان فالمستويان المذكوران متعامدان.

تَدْرِبْ

ُعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

❶ في كل من الحالات الآتية اكتب معادلة للمستوى المار بالنقطة A ويقبل الشعاع \vec{n} شعاعاً ناظماً:

$$\vec{n}(2, -3, -1), \quad A(\sqrt{2}, -2, 5) \quad \textcircled{2} \quad \vec{n}(1, -1, 0), \quad A(1, 0, 5) \quad \textcircled{1}$$

$$\vec{n}(\sqrt{3}, 2, 0), \quad A(0, -3, 0) \quad \textcircled{4} \quad \vec{n}(\frac{2}{3}, 4, -1), \quad A(\frac{1}{2}, 3, -1) \quad \textcircled{3}$$

❷ في كل من الحالات الآتية اكتب معادلة للمستوى \mathcal{Q} المار بالنقطة A موازياً المستوي \mathcal{P} :

$$\mathcal{P} : z = 2, \quad A(0, 0, 0) \quad \textcircled{2} \quad \mathcal{P} : 2x - y + 3z = 4, \quad A(1, 0, 1) \quad \textcircled{1}$$

$$\mathcal{P} : 5x - 3y + 4z = 8, \quad A(-1, 2, -3) \quad \textcircled{4} \quad \mathcal{P} : x + y = 5, \quad A(0, 3, 0) \quad \textcircled{3}$$

❸ ادرس تعامد كل زوج من المستويات الآتية:

$$\mathcal{R} : 2x - 3y + 5z + 4 = 0 \quad \mathcal{Q} : 6x - 11y - 9z - 5 = 0 \quad \mathcal{P} : 7x + 3y - z - 1 = 0$$

❹ في كل من الحالات الآتية بين إذا كان المستويان \mathcal{P} و \mathcal{Q} متقاطعين.

$$\mathcal{P} : x - y + z = 0, \quad \mathcal{Q} : x - y + z - 3 = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$\mathcal{P} : 2x + y + 5 = 0, \quad \mathcal{Q} : 4x + 2y + z + 5 = 0 \quad \textcircled{2}$$

❺ احسب بعد النقطة $A(5, -3, 4)$ عن المستوى \mathcal{P} . وكذلك احسب بعد

$$\mathcal{Q} : y - z = 0 \quad \text{عن المستوى } B(2, 2, 5)$$

أفكار يجب تمثيلها



- بعد اختيار واحدة للأطوال في الفضاء. يجري التعبير عن الجداء السلمي لشعاعين \vec{u} و \vec{v} كما في حالة المستوى أي.

$$\cdot \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right) \quad \square$$

$$\cdot \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha \quad \square$$

- إذا كانت H المسقط القائم للنقطة C على المستقيم (AB) أو على مستوى يحوي (AB) كان

$$\cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

تحليلياً إذا كان $\vec{u}(x, y, z)$ و $\vec{v}(x', y', z')$ في معلم متجانس كان $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

- كما في حالة المستوى، يفيد الجداء السلمي في الفراغ في مسائل التعامد وحساب المسافة وتمام جيب زاوية.

- مفهوم الشعاع الناظم على مستوى مفيد وأساسي، فهو يتاح التقسيير الشعاعي لتعامد وتوازي المستقيمات والمستويات. وهو لا يكون معدوماً أبداً.

- المستوى المار بالنقطة A ويقبل \vec{n} شعاعاً ناظماً هو مجموعة نقاط الفراغ M التي تتحقق الشرط $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. وهذا الخاصة المميزة هي التي تفيد في كتابة المعادلة الديكارتية لمستوى.

- تذكر أن بعَد النَّقْطَة $(A, \alpha, \beta, \gamma)$ عن مستوى معادلته $ax + by + cz + d = 0$ يعطى بالعلاقة

$$\frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

منعكسات يجب امتلاكها.



- إذا كانت $ax + by + cz + d = 0$ معادلة مستوى فتذكرة أن $\vec{n}(a, b, c)$ شعاع ناظم عليه. وأن كل نقطة $M(x, y, z)$ تحقق مركباتها معادلة المستوى تقع عليه.

- التقسيير الشعاعي لتعامد والتوازي.

- لا تنس أن استعمال معلم متجانس مفيد في الإثبات. عندئذ نختار معلماً تكون فيه إحداثيات النقاط المفتاحية بسيطة.

أخطاء يجب تجنبها.



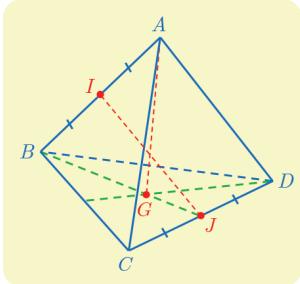
- للتعامل مع مسائل المسافات أو التعامد، لا تختر معلماً كيفياً، بل، اختر، حسراً، معلماً متجانساً.

أشطر

نشاط 1 خواص رباعي الوجوه المنتظم

رباعي الوجوه المنتظم هو مجسم له أربعة وجوه كل منها مثلث متساوي الأضلاع. نسمى حرفين متقابلين كل حرفين لا يشتركان برأس.

١ خواص عامة



لتكن $ABCD$ رباعي وجوه منتظم ولنضع $.AB = a$.

① نهدف إلى إثبات أن كل حرفين متقابلين متعدمان، وأن المستقيم الواصل بين منتصفي حرفين متقابلين عمودي على كل منهما.

a. احسب $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ و $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ و $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

b. أثبت تعاًد المستقيمين (CD) و (AB) .

c. ماذا تستنتج بشأن المستقيمين (AC) و (BD) والمستقيمين (AD) و (BC) ؟

d. ليكن I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$. تيقن أن $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ ، واستنتاج أن المستقيم (IJ) عمودي على كل من المستقيمين (AB) و (CD) .

② في رباعي الوجوه $ABCD$ ، الارتفاع النازل من A هو المستقيم المارّ بالنقطة A عمودياً على المستوى (BCD) .

a. ليكن G مركز تقل المثلث BCD . احسب $\vec{AG} \cdot \vec{BD}$ و $\vec{AG} \cdot \vec{CD}$ ، واستنتاج أن (AG) هو الارتفاع النازل من A .

b. عين بقية الارتفاعات في رباعي الوجوه $ABCD$.

③ نسمى مركز رباعي الوجوه المنتظم $ABCD$ النقطة O مركز الأبعاد المتاسبة لرؤوس رباعي الوجوه وقد أسننا إليها الأمثل ذاتها: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

a. أثبت أن النقاط A و O و G تقع على استقامة واحدة واحسب AG و AO .

b. أثبت أن O هو منتصف القطعة المستقيمة $[IJ]$.

c. احسب الأطوال OI و OB .

d. أثبت أن النقطة O متساوية البعد عن جميع رؤوس رباعي الوجوه.

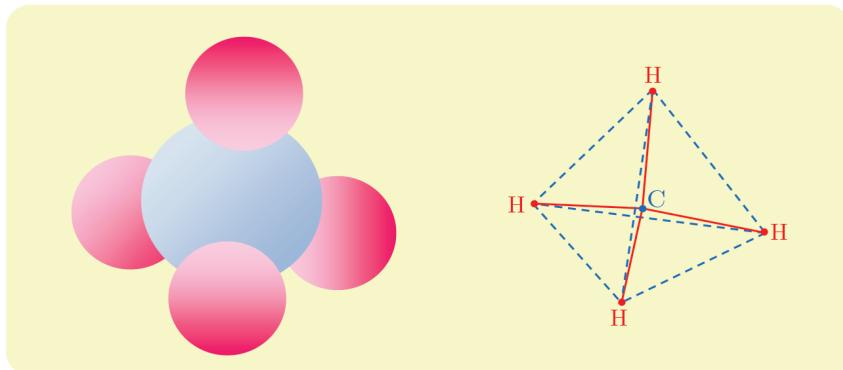
④ نهدف إلى حساب الزاوية الهندسية \widehat{AOB} .

a. احسب $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = (\vec{OI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{OI} + \vec{IB})$ بأسلوبين أحدهما بكتابة

b. استنتاج قيمة تقريرية للزاوية \widehat{AOB} بالدرجات. وبين أن

٢ تطبيق في الكيمياء

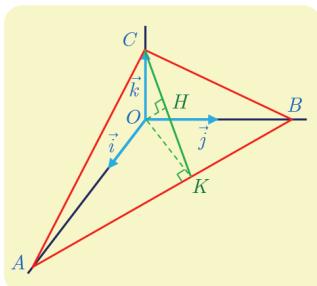
نجد أدناه تمثيلاً لجزئية الميثان. تقع نوى ذرات الهيدروجين الأربع H على رؤوس رباعي وجوه منتظم. تقع نواة ذرة الكربون C داخل رباعي الوجوه على المسافة نفسها من كل واحدة من رؤوس رباعي الوجوه أي في مركزه. لتبسيط تمثيل جزيئ الميثان، نستعمل المخطط المبين أدناه، حيث مثّلنا الروابط بخطوط متصلة وحروف رباعي الوجوه بخطوط متقطعة لتنكرّها. هذا المخطط هو الصيغة стирيلوكيميائية للميثان. أتاحت قياسات تحديد طول الروابط C-H بمقدار $1.09 \times 10^{-10} \text{ m}$.



- ① أعطِ تقريباً لقياس الزاوية بين رابطتين من النوع C-H.
- ② عين طول حرف رباعي الوجوه أي المسافة بين ذرتَي هيدروجين.

نشاط 2 استعمال معلم

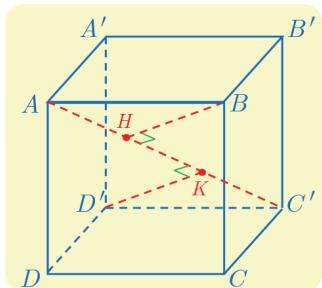
١ رباعي الوجوه ثلاثي الزوايا القائم



نتأمل رباعي الوجوه $OABC$ ثلاثي الزوايا القائمة رأسه O ، أي إن المستقيمات (OA) و (OB) و (OC) متعامدة مثنى مثنى. لنفترض إضافة إلى ذلك أن $OA = 3$ و $OB = 2$ و $OC = 1$. نرمز بالرمز H إلى المسقط القائم للنقطة O على المستوى (ABC) .

- ① نريد إثبات أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC . لختر إذن معلماً متجانساً $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ بوضع $\vec{i} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ و $\vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ و $\vec{k} = \overrightarrow{OC}$.
- a. احسب إحداثيات H .
- b. احسب $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB}$ واستنتج أن المستقيم (AB) عمودي على المستوى (OCH) .
- c. احسب $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH}$ و $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH}$ واستنتاج أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC .
- a. أثبت أن المسقط القائم لكل من النقطتين C و O على المستقيم (AB) هو النقطة K ذاتها، واحسب إحداثيات K .
- b. أعط تقريباً لقياس الزاوية \widehat{OKC} .

٢ بعض خواص المكعب



ليكن $ABCD A'B'C'D'$ مكعباً طول حرفه a . النقطة H هي المسقط القائم للرأس B على المستقيم (AC') . نريد إثبات أن النقطة H هي أيضاً المسقط القائم لكلٍ من A' و D على المستقيم (AC') .

سنستعمل المعلم المتتجانس $(D'; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ حيث

$$\overrightarrow{D'A'} = a\vec{k} \quad \overrightarrow{D'C'} = a\vec{j} \quad \overrightarrow{D'D} = a\vec{i}$$

① اكتب في هذا المعلم إحداثيات رؤوس المكعب.

② لحساب (x, y, z) إحداثيات النقطة H :

a. اكتب بدءاً من المساواة $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC'} = 0$ ، علاقة بين x و y و z و a .

b. اكتب علاقة بين x و y و z و a و λ حيث λ معرفة بالعلاقة $\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{AC'}$. واستنتج قيمة λ ثم احداثيات H .

③ لإثبات أن المسقط القائم للنقطة A' على (AC') هي النقطة H ذاتها، يكفي أن نثبت أن $(A'H)$ عمودي على (AC') . أثبت تعمد الساععين $\overrightarrow{AC'}$ و $\overrightarrow{A'H}$.

④ أثبت أن المسقط القائم للنقطة D على (AC') هي النقطة H ذاتها.

⑤ لتكن K المسقط القائم للنقطة D' على (AC') .

a. ماذا تقول عن الطول $C'K$ ؟

b. حدد موقع K على المستقيم (AC') .

c. ما هي النقاط الأخرى من المكعب التي مسقطها القائم على (AC') هي النقطة K ذاتها.

مُنِيَّاتٍ وَمُسَائِلٍ



1

نُعطي معلماً متجانساً في المستوى.

① بين أزواج الأشعة المتعامدة من بين الأشعة الآتية:

$$\cdot \vec{s}\left(2, -\frac{4}{5}\right) \text{ و } \vec{t}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}\right) \text{ و } \vec{w}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right) \text{ و } \vec{v}(-2, -5) \text{ و } \vec{u}(2, 5)$$

② في الحالتين الآتتين اكتب معادلة لمحور القطعة المستقيمة $[AB]$:

$$B(-1, 2), \quad A(4, 1) \quad ①$$

$$B(-2, \frac{1}{3}), \quad A(-5, 3) \quad ②$$

③ نتأمل النقاط $A(-5, 2)$ و $B(1, -1)$ و $C(-3, 3)$ و $E\left(-\frac{9}{4}, -1\right)$. أ تكون النقطة E متساوية

البعد عن المستقيمات التي تؤلفها أضلاع المثلث ABC ؟

2

$ABCD$ مربع. I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[BC]$. أثبت أن المستقيمين (CI) و (DJ) متعامدان.

3

نُعطي معلماً متجانساً في الفراغ.

① بين في كل من الحالتين الآتتين إذا كان الشعاعان \vec{u} و \vec{v} متعامدين:

$$\vec{v}\left(2, -\frac{3}{2}, 1\right), \quad \vec{u}(1, -2, 5) \quad ①$$

$$\vec{v}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, 1), \quad \vec{u}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, 0) \quad ②$$

② نتأمل النقاط $A(4, 1, -2)$ و $B(-1, 2, 4)$ و $C(0, 2, -5)$ و $D(1, -2, -\frac{7}{2})$. ونعرف

منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. احسب

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CD} \text{ و } \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} \text{ و } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \text{ و } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

③ بين في كل من الحالات الآتية إذا كان المستويان \mathcal{P} و \mathcal{Q} متعامدين:

$$\mathcal{Q} : x + 2y + z - 3 = 0, \quad \mathcal{P} : x + 2y - 5z + 7 = 0 \quad ①$$

$$\mathcal{Q} : y - 2z + 3 = 0, \quad \mathcal{P} : x - 3y + 2 = 0 \quad ②$$

④ احسب في كل من الحالتين الآتتين بعد النقطة A عن المستوى \mathcal{P} :

$$\mathcal{P} : x + y - 2z + 4 = 0, \quad A(0, \sqrt{2}, 1) \quad ①$$

$$\mathcal{P} : 3x + y - \frac{z}{2} + 7 = 0, \quad A(5, -2, 0) \quad ②$$



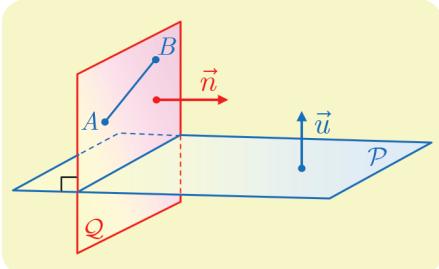
لنتعلم البحث معاً

مستويات متعددة

4

نتأمل، في المعلم المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقطتين الآتيتين : $A(1, -1, 2)$ و $B(2, 0, 4)$ والمستوى \mathcal{P} الذي معادلته $x - y + 3z - 4 = 0$. جد معادلة للمستوى \mathcal{Q} العمودي على \mathcal{P} ويمر بال نقطتين A و B .

نحو الحل



نريد تعين معادلة لمستوى \mathcal{Q} مار ب نقطة (بل اثنين).
وإذا كنا نعرف شعاعاً ناظماً $\vec{n}(a, b, c)$ على \mathcal{Q} استطعنا تعين المستوى. أتوجد فرضيات في المسألة تفيد في تعين \vec{n} ? المستويان \mathcal{P} و \mathcal{Q} متعامدان فرضاً إذن يكون كل شعاع ناظم \vec{u} على \mathcal{P} شعاعاً عمودياً على \vec{n} ، كما إن المستقيم (AB) محتوى في \mathcal{Q} فالشعاع \overrightarrow{AB} عمودي أيضاً على \vec{n} .

1. أعط مركبات شعاع ناظم \vec{u} على \mathcal{P} .

2. علل صحة المساواتين $\vec{AB} \cdot \vec{n} = 0$ و $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.

لدينا إذن جملة المعادلتين

$$\begin{cases} a - b + 3c = 0 \\ a + b + 2c = 0 \end{cases}$$

لا تكفي هاتان المعادلتان لتعيين قيم a و b و c ، وهذا ليس مفاجئاً لأننا نعلم أنه يوجد عدد لا نهائي من الأشعة الناظمة على مستوى. ولأنه يكفي تعين ثلاثة واحدة (a, b, c) تحقق الجملة، يمكننا مثلاً أن نختار قيمة إحدى المركبات. فمثلاً لنضع $c = 2$.

1. أثبت في هذه الحالة أن $b = 1$ ، $a = -5$.

2. تحقق أن $\vec{n}(-5, 1, 2)$ شعاع ناظم على \mathcal{Q} .

3. اكتب معادلة للمستوى \mathcal{Q} .

أنجز الحل واتبه بلغة سليمة.



5

بعد نقطة عن مستقيم في الفراغ

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، لدينا النقطة $A(3, -1, 2)$ ، والمستويان \mathcal{P} و \mathcal{Q} :

$$\mathcal{P} : 2x - y + z - 4 = 0$$

$$\mathcal{Q} : x + y + 2z - 5 = 0$$

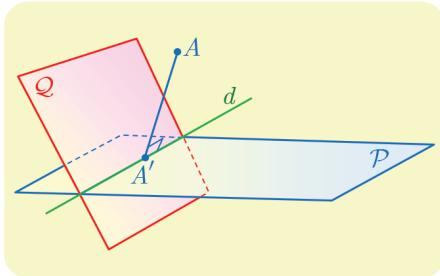
أثبت تقاطع المستويين \mathcal{P} و \mathcal{Q} ، واحسب بعد A عن المستقيم d الذي يمثل فصلهما المشترك.

نحو الحل

للتحقق من تقاطع المستويين \mathcal{P} و \mathcal{Q} ، نستعمل الأشعة الناظمة على كلّ منهما.

1. عين شعاعاً ناظماً \vec{n}_1 على \mathcal{P} ، وشعاعاً ناظماً \vec{n}_2 على \mathcal{Q} .

2. استنتج أن \mathcal{P} و \mathcal{Q} متقطعان.



بعد A عن d يساوي بعد A' عن A حيث A' هي المسقط القائم للنقطة A على d . بالطبع إذا وقعت A على d كان $A = A'$ ومن ثم $AA' = 0$. تيقن أن A في الحقيقة، لا تقع على أيٍ من المستويين \mathcal{P} أو \mathcal{Q} .

إحدى الطرق لحساب AA' تتمثل في تعين إحداثيات A' . تنتهي هذه النقطة إلى كلٌ من \mathcal{P} و \mathcal{Q} فإنّ إحداثياتها تحقق معادلتيهما. بالإضافة إلى ما سبق المستقيم (AA') عمودي على d فإذا كان \vec{u} شعاعاً موجهاً للمستقيم d فإن A' هي النقطة الوحيدة من d التي تحقق $\vec{AA}' \cdot \vec{u} = 0$. علينا إذن تعين شعاع \vec{u} يوجه المستقيم d ، ولهذا نبحث عن نقطتين B و C من d .

1. تذكر أن $M(x, y, z)$ تقع على d . إذا تحقق الشرطان

$$x + y + 2z - 5 = 0 \quad \text{و} \quad 2x - y + z - 4 = 0$$

2. مثلاً لتعيين نقطة $B(x, y, z)$ من d . نختار $x = 0$ ونعيّن y و z المواتفين. ولتعيين $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$ من d . نختار $x = 1$ ونعيّن y و z . وهذا يتيح لنا تعين

3. أثبت أن (a, b, c) إحداثيات A' تحقق جملة المعادلات

$$\begin{cases} 2a - b + c - 4 = 0 & (1) \\ a + b + 2c - 5 = 0 & (2) \\ a + b - c = 0 & (3) \end{cases}$$

4. استنتاج من (2) و (3) أن $5 = 3c$ ثم احسب إحداثيات A' ، واستنتاج المطلوب.

أنجز الحل واكتبه بلغةٍ سليمة.



6

نقاط مسقٍ ومستوى

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نتأمل نقطتين $A(2, -1, 0)$ و $B(-1, 3, 5)$. والمستوى \mathcal{P} الذي يقبل معادلة $2x - 3y + z - 5 = 0$. أثبت أن المستقيم (AB) يقطع المستوى \mathcal{P} وعِين إحداثيات C نقطة التقاطع.

نحو الحل

لإثبات وجود النقطة C علينا إثبات أن المستقيم (AB) لا يوازي المستوى \mathcal{P} . أعط شعاعاً موجهاً للمستقيم (AB) وشعاعاً ناظماً على \mathcal{P} . واستنتج وجود C .

علينا إذن تعين (a, b, c) إحداثيات النقطة C .

1. علّ وجود ثابت k يحقق $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

2. استنتاج عبارات a و b و c بدلالة k .

3. عيّن k اعتماداً على وقوع C في \mathcal{P} . واستنتاج إحداثيات C .

أنجز الحل واكتبه بلغة سليمة.



7

مستقيم عمودي على مستوى

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نتأمل نقطتين $A(2, 5, 3)$ و $B(-1, 0, -1)$ ، ومستوى \mathcal{P} يقبل $\vec{v}(3, -1, -1)$ و $\vec{u}(1, 1, -2)$ شعاعين موجهين. أثبت أن المستقيم (AB) عمودي على المستوى \mathcal{P} .

نحو الحل

يكفي لإثبات المطلوب أن نبرهن أن الشعاع \overrightarrow{AB} عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوى \mathcal{P} .

1. أعط شعاعاً \vec{w} موجهاً للمستقيم (AB) . وتحقق أن الشعاعين \vec{u} و \vec{v} غير مرتبطين خطياً.

2. أثبت أن \vec{w} عمودي على كل من \vec{u} و \vec{v} .

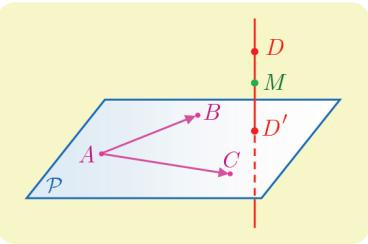
أنجز الحل الآخر واكتبه بلغة سليمة.



8

المسقط القائم على مستوى

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نتأمل النقاط $A(1, 2, 0)$ و $B(0, 0, 1)$ و $C(1, 5, 5)$. يُطلب تعين المسقط القائم للنقطة $D(-11, 9, -4)$ على المستوى D' .



لرسم شكلًا مبسطًا. كيف نجد إحداثيات النقطة D' ? نعلم أن المستقيم (DD') عمودي على المستوى (ABC) , فهو من ثم عمودي على جميع مستقيمات هذا المستوى. الفكرة، إذن، تكمن في التعبير شعاعياً عن هذا التعامل.

1. اشرح لماذا $M(x, y, z)$ تتنمي إلى (DD') إذا وفقط إذا كان

$$\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \quad \text{و} \quad \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

2. اكتب تحليلياً الشرطين السابقين.

3. استنتج أن (DD') هو مجموعة النقاط $M\left(x, \frac{62 - 5x}{13}, \frac{3x - 19}{13}\right)$ حيث x عدد حقيقي.

عليينا كتابة معادلة للمستوى (ABC) لأن D' هي النقطة M من (DD') التي تتنمي إلى هذا المستوى. ولكن أي شعاع موجه للمستقيم (DD') هو شعاع ناظم على (ABC) .

1. بإعطاء قيمتين مختلفتين للمتحول x أعطِ إحداثيات نقطتين مختلفتين من (DD') .

2. استنتاج مركبات شعاع موجه للمستقيم (DD') , أي شعاع ناظم على (ABC) .

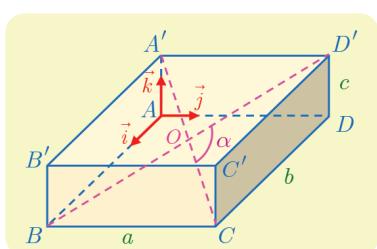
3. اكتب معادلة للمستوى (ABC) .

4. عين قيمة x التي تجعل النقطة M من 3. عنصراً من (ABC) . استنتاج إحداثيات D' .

أنجز الحل الآخر واكتبه بلغة سليمة.



قدماً إلى الأئم



ABCDA'B'C'D' متوازي مستطيلات. يتقاطع قطراته \widehat{AC} و \widehat{BD} في O . نضع $\alpha = \angle COD'$ و $\beta = \angle CA'D'$. ونفترض أن $CD = b$ و $BC = a$ إلى حساب $\cos \alpha$. نختار معلماً متجانساً $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ بحيث يكون \overrightarrow{AB} و \vec{i} مرتبطين خطياً، و \overrightarrow{AD} و \vec{j} مرتبطين خطياً، وكذلك $\overrightarrow{AA'}$ و \vec{k} مرتبطين خطياً.

9

أعطِ إحداثيات جميع رؤوس متوازي المستطيلات وإحداثيات مركزه O .

أثبت أن $\cos \alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$. ادرس على وجه الخصوص حالة المكعب.

10

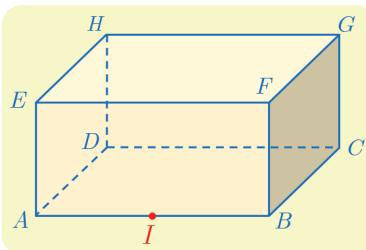
في الحالتين الآتتين، احسب بعد A عن المستوى \mathcal{P} :

$$\mathcal{P} : 2x - y + z + 1 = 0 \quad A(1, 2, -3) \quad ①$$

$$\cdot D(-1, -2, -3) \text{ و } C(-1, 1, 0) \text{ و } B(0, 1, 0) \text{ و } \mathcal{P} \text{ هو المستوى المار بالنقط} \quad ②$$

$ABCDEF$ متوازي مستطيلات، فيه $AB = 2$ و $BC = GC = 1$. لتكن النقطة I

11



منتصف $[AB]$.

① أعط معلماً متجانساً مبدئه A ويمكن التعبير عن إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات فيه ببساطة.

② اكتب معادلة المستوى (IFH) .

③ احسب بعد G عن المستوى (IFH) .

④ احسب بعد G عن المستقيم (IH) . أيّنمي المسقط القائم للنقطة G على المستوى (IH) إلى المستقيم (IH) ؟

12

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، لدينا النقطة $A(2, 2, -1)$ ، والمستويين \mathcal{P} و \mathcal{Q} :

$$\mathcal{P} : x - y + z = 0$$

$$\mathcal{Q} : 3x + z - 1 = 0$$

احسب بعد A عن المستقيم d الذي يمثل الفصل المشترك للمستويين \mathcal{P} و \mathcal{Q} .

13

نتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، لدينا النقطة $A(2, 1, 2)$ ، والمستويين \mathcal{P} و \mathcal{Q} :

$$\mathcal{P} : x + y - 2z - 1 = 0$$

$$\mathcal{Q} : x + y + z = 0$$

أثبت أنَّ المستويين \mathcal{P} و \mathcal{Q} متعامدان.

احسب بعد A عن كلٍ من المستويين \mathcal{P} و \mathcal{Q} .

استنتج بعد النقطة A عن الفصل المشترك للمستويين \mathcal{P} و \mathcal{Q} .

14

في كل من الحالات الآتية، ثُبّطى نقطتين A و B والمعادلة الديكارتية لمستوى \mathcal{P} . تيقن في كل حالة أنَّ المستقيم (AB) ليس عمودياً على \mathcal{P} . ثُمْ أعطِ معادلة المستوى \mathcal{Q} العمودي على \mathcal{P} والمار بالنقطتين A و B .

$$B(0, 1, 1), \quad A(1, 0, 0), \quad \mathcal{P} : x + y + z = 0 \quad ①$$

$$B(1, 0, 1), \quad A(1, 2, 0), \quad \mathcal{P} : x + z = 0 \quad ②$$

$$B(1, 1, 1), \quad A(2, 3, -1), \quad \mathcal{P} : 2x + z - 4 = 0 \quad ③$$

15

نتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، المستويين \mathcal{P} و \mathcal{Q} :

$$\mathcal{Q} : x + y + z + 1 = 0 \quad \mathcal{P} : x - 2y + 3z - 5 = 0$$

① علّ كون المستويين \mathcal{P} و \mathcal{Q} متقاطعين. نرمز بالرمز d إلى فصلهما المشترك.

② أثبت أن d هو مجموعة النقاط $M\left(-\frac{5}{3}z + 1, \frac{2}{3}z - 2, z\right)$ عندما تتحول z في \mathbb{R} .
أعط شعاعاً موجهاً للمستقيم d .

③ اكتب معادلة للمستوي \mathcal{R} العمودي على كل من \mathcal{P} و \mathcal{Q} ويمر بالنقطة $A(2, 5, -2)$.

نتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقاط:

$$E(1, -1, 1) \text{ و } D(0, 4, 0) \text{ و } C(4, 0, 0) \text{ و } B(1, 0, -1) \text{ و } A(2, 1, 3)$$

① أثبت أن النقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.

② أثبت أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CDE) .

نتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقاط:

$$D(3, 3, -3) \text{ و } C(1, -1, 1) \text{ و } B(4, -2, 3) \text{ و } A(2, 4, 3)$$

① أثبت أن النقاط A و B و C ليست واقعة على استقامة واحدة.

② عين إحداثيات المسقط القائم D' للنقطة D على المستوي (ABC) .

نتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقتين $\Omega(2, -1, 3)$ و $A(-1, 0, 1)$. نهدف إلى كتابة

معادلة للكرة S التي مركزها Ω وتمر بالنقطة A .

① احسب ΩA .

② لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفراغ احسب ΩM^2 بدلالة x و y و z .

③ أثبت أن « $M(x, y, z)$ نقطة من S » إذا وفقط إذا تحقق الشرط « $\Omega M^2 = \Omega A^2$ » واستنتج معادلة للكرة S المطلوبة.

19

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω وتمر بالنقطة A .

$$\cdot A(1, -2, 3) \quad \text{②} \quad \cdot A(1, 1, 1) \quad \text{و} \quad \Omega(0, 0, 1) \quad \text{①}$$

20

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω ونصف قطرها r .

$$\cdot r = \sqrt{3} \quad \text{و} \quad \Omega(0, 5, -1) \quad \text{②} \quad \cdot r = 2 \quad \text{و} \quad \Omega(1, 2, 3) \quad \text{①}$$

21

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. عين طبيعة مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ في الحالات الآتية:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2z + 26 = 0 \quad \text{②} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 2 = 0 \quad \text{①}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 5 = 0 \quad \text{④} \quad x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 0 \quad \text{③}$$

22 في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل النقطة $A(2, -2, 2)$ والمستوى $\mathcal{P} : x + 2y + 3z = 5$.

اكتب معادلة للكرة التي مركزها A وتمس المستوى \mathcal{P} .

23 في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(2, 1, 2)$ و $B(-2, 0, 2)$.

① أُعطي معادلة للمجموعة \mathcal{E} المكونة من النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

② ما طبيعة المجموعة \mathcal{E} ؟

نتأمل نقطتين مختلفتين A و B في الفراغ. نضع $r = \frac{1}{2}AB$ ، ونعرف I منتصف $[AB]$.

① أثبت أنه في حالة نقطة M من الفراغ تتحقق المساواة $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - r^2$:

② أثبت أن مجموعة نقاط الفراغ التي تتحقق $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ هي الكرة التي مركزها I ونصف قطرها r ، وهي أيضاً الكرة التي تقبل $[AB]$ قطراً فيها.

25 في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(1, 1, 1)$ و $B(0, -1, -1)$.

① أُعطي معادلة للمجموعة \mathcal{E} المكونة من النقاط $M(x, y, z)$ التي تتحقق $MA = 2MB$

② ما طبيعة المجموعة \mathcal{E} ؟

③ أُعطي معادلة للمجموعة \mathcal{P} المكونة من النقاط $M(x, y, z)$ التي تتحقق $MA = MB$

④ ما طبيعة المجموعة \mathcal{P} ؟

26 نتأمل نقطتين مختلفتين A و B في الفراغ. وعدها موجباً غير معروف k . نعرف \mathcal{E}_k مجموعة

نقاط الفراغ M التي تتحقق الشرط $AM = k \cdot BM$

① حالة $k = 1$

لتكن I منتصف $[AB]$ أثبت أن

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = \frac{MA^2 - MB^2}{2}$$

② استنتج أن \mathcal{E}_1 هي المستوي \mathcal{P} المار بمنتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ والعمودي على (AB) .

② حالة $k \neq 1$

① لتكن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A, 1)$ و (B, k) ، ولتكن J مركز الأبعاد المتناسبة

للنقطتين $(A, 1)$ و $(B, -k)$. أثبت أن

$$\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = \frac{1}{1-k^2}(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = \frac{MA^2 - k^2 MB^2}{1-k^2}$$

② استنتاج أن \mathcal{E}_k هي الكرة S التي تقبل القطعة المستقيمة $[IJ]$ قطراً فيها.

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل النقاط

$$\cdot D(0, 0, -3) \text{ و } C(3, -3, -1) \text{ و } B(2, 2, 2) \text{ و } A(4, 0, -3)$$

① أعطِ معادلة للمستوي المحوري P_1 للقطعة المستقيمة $[AB]$.

② أعطِ معادلة للمستوي المحوري P_2 للقطعة المستقيمة $[BC]$.

③ أعطِ معادلة للمستوي المحوري P_3 للقطعة المستقيمة $[CD]$.

④ علّ لماذا إذا تقاطعت المستويات P_1 و P_2 و P_3 في نقطة واحدة Ω . كانت Ω مركزاً لكرة تمر بالنقاط A و B و C و D .

⑤ بحل جملة من ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل أثبت أنَّ المستويات P_1 و P_2 و P_3 تقاطع في نقطة واحدة Ω .

⑥ احسب نصف قطر الكرة S المارة بالنقاط A و B و C و D .

⑦ اكتب معادلة للكرة S المارة برؤوس رباعي الوجوه $ABCD$.

3

المستقيمات والمستويات في الفراغ

- 1 المستقيم والمستوي بصفتهما مراكز أبعاد متناسبة
- 2 التمثيلات الوسيطية
- 3 تقاطع مستقيمات ومستويات
- 4 تقاطع ثلاثة مستويات

لقد كانت دراسة مسألة تقاطع ثلاثة مستويات، التي تؤول إلى دراسة حلول جملة ثلاث معادلات خطية بثلاثة مجاهيل، نقطة انطلاق فرع مهم جداً وأساسي من فروع الرياضيات. إنه الجبر الخطّي.

كثيراً ما نرجع حل مسألة رياضياتية إلى حل جملة من المعادلات الخطية، مثلاً تعين شكل سطح جناح طائرة، أو التنبؤ بأحوال الطقس في الساعات المقبلة، أو محاكاة تجارب علمية معقدة. ولقد صار من المأثور استعمال الحاسوب لحل جملة مكونة من آلاف المعادلات الخطية ذات آلاف المجاهيل.

هذه بالطبع مسائل مستحيلة الحل بدون استعمال الحواسيب، طريقة غاووس في حل جملة معادلات مكونة من n معادلة خطية ذات n مجهولاً هي بوجه عام مقبولة عندما تكون n صغيرة أي أقل من 1000 مثلاً؛ إذ يتناسب عدد العمليّات الحسابيّة الالزامـة للحلـ، أو زمن الحساب، مع n^3 .

ولكن عندما تصبح n كبيرة نلجأ إلى طرائق خاصة أكثر فعالية. تتيح أفضل طريقة عملية معروفة إجراء هذا الحساب بزمن متناسب مع $n^{\log_7 7} \approx n^{2.8}$ ، وهناك خوارزميات أسرع ولكنها ليست عملية، المجال هنا واسع ورحب للتجسي والبحث. نحن هنا لن نتعمق في التفاصيل ولكن سنكتفي بفتح نافذة تاركين أمر المتابعة للمهتمين.

المستقيمات والمستويات في الفراغ

انطلاق نشطة



حل جملة معادلات خطية

❶ الطريقة الأولى : الحذف بالتعويض

نهدف إلى حل جملة المعادلات الآتية ذات المجاهيل (x, y, z) :

$$(S) \quad \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 & (1) \\ x - 2y + z = 1 & (2) \\ x + y - z = 2 & (3) \end{cases}$$

تسمى الجملة (S) **جملة ثلاثة معادلات خطية بثلاثة مجاهيل** وتعتمد طريقة **الحذف بالتعويض** على إرجاع هذه الجملة إلى جملة معادلتين خطيتين بمحظولين عن طريق معاملة أحد هذه المجاهيل بصفته مقداراً ثابتاً، فمثلاً تكتب المعادلتان (2) و (3) بالشكل

$$\begin{cases} x - 2y = 1 - z \\ x + y = 2 + z \end{cases}$$

ثم نحل هذه الجملة **بالمجهولين** (x, y) .

$$\text{① تحقق أن } y = \frac{1+2z}{3} \text{ و } x = \frac{5+z}{3}$$

نعرض قيمتي $y = g(z)$ و $x = f(z)$ في المعادلة (1) لنحصل على معادلة وحيدة **بالمجهول z** .

$$\text{② تتحقق أنك تحصل على } z = -1 \text{ ، ومن ثم } y = -\frac{1}{3} \text{ و } x = \frac{4}{3}$$

تبرهن النظرية، وهذا ما نقبل به، أتنا بهذا الأسلوب نحصل على مجموعة الحلول. وهكذا تكون قد أثبتنا

$$\text{أن للجملة } (S) \text{ حلاً وحيداً هو } (x, y, z) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right)$$



عندما نصل إلى معادلة لا يظهر فيها إلا متغير واحد، z مثلاً، عندئذ نناقش كما يأتي:

- إذا لم يكن للمعادلة حل، استنتجنا أن ليس للجملة (S) حلول.

- إذا أخذت المعادلة الصيغة $0 \cdot z = 0$ استنتجنا أن للجملة (S) عدداً لا نهائياً من الحلول.

وتكتب مجموعة الحلول بالشكل $(x, y, z) = (f(z), g(z), z)$ حيث z عدد حقيقي.

٢ الطريقة الثانية : الحذف بالجمع

نهدف إلى حل جملة المعادلات الآتية ذات المجهولات (x, y, z) :

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + z = 0 & (L_1) \\ x + y - z = -2 & (L_2) \\ x - y + z = 4 & (L_3) \end{cases}$$

نسمّي معادلة من الصيغة $aL_1 + bL_2$ ، حيث a و b عددان حقيقيان، عبارة خطية في L_1 و L_2 .

١ اجمع المعادلتين L_1 و L_2 ، وكذلك المعادلتين L_2 و L_3 . ما هي المعادلات التي تحصل عليها؟

٢ استنتج قيم x و y و z .

٣ تحقق أنَّ الثلاثية التي حصلت عليها هي حلُّ للجملة المعطاة. ماذا تستنتج؟

عندما نجري مثل هذه التحويلات على غير هدى، ليس هناك ما يجعلنا نستنتج أنَّ الحل أو الحلول التي نجدها هي حلول للجملة الأصلية، مما يحثّ علينا التيقّن من تحقيق هذه الحلول للجملة الأصلية. المثال الآتي يوضح هذا الأمر:



مثال

لنتأمل الجملتين الآتيتين :

$$(S') \quad \begin{cases} 2x + 2y = 3 & (L_1 + L_2) \\ 2y - 2z = 6 & (L_2 - L_3) \\ 2x + 2z = -3 & (L_1 + L_3) \end{cases} \quad \text{و} \quad (S) \quad \begin{cases} x + y + z = 1 & (L_1) \\ x + y - z = 2 & (L_2) \\ x - y + z = -4 & (L_3) \end{cases}$$

هنا يمكنك أن تتحقق بسهولة أنَّ $\left(0, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ حلُّ للجملة (S') ولكنه ليس حلًّا للجملة (S) .

٣ الطريقة الثالثة : طريقة غاوس

هذه الطريقة تشبه طريقة الحذف بالجمع المشار إليها أعلاه ولكنها تتميز بأنَّ الجملة النهائية التي نحصل عليها **كافية** الجملة الأصلية أي يكون لها مجموعة الحلول ذاتها.

نهدف إلى حلَّ الجملة

$$(S) \quad \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 & (L_1) \\ 2x - y + 3z = 9 & (L_2) \\ 3x - 2y + 4z = 11 & (L_3) \end{cases}$$

١ المرحلة الأولى: نسعى إلى حذف x من L_2 و L_3 بالاستفاده من عبارات خطية تشمل L_1 . لهذا الهدف نضرب L_2 بالمقدار $-\frac{1}{2}$ و L_3 بالمقدار $-\frac{1}{3}$ بحيث يظهر الحد $-x$. ثم نجمع L_1 إلى كل منهما ونصلح النتيجة. تتحقق من صحة الخطوات المبينة فيما يأتي:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 & (L_1) \\ -x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z = -\frac{9}{2} & (-\frac{1}{2}L_2) \\ -x + \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}z = -\frac{11}{3} & (-\frac{1}{3}L_3) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 & (L_1) \\ -\frac{5}{2}y + \frac{1}{2}z = -\frac{7}{2} & (L_1 - \frac{1}{2}L_2) \\ -\frac{7}{3}y + \frac{2}{3}z = -\frac{8}{3} & (L_1 - \frac{1}{3}L_3) \end{cases}$$

وبعد إصلاح المعادلتين الأخيرتين بضرب طرفي الثانية بالعدد 2 - وطرفي الثالثة بالعدد 3 - نصل إلى الجملة الجديدة

$$(S') \quad \left\{ \begin{array}{ll} x - 3y + 2z = 1 & (L_1) \\ 5y - z = 7 & (L'_2) \\ 7y - 2z = 8 & (L'_3) \end{array} \right.$$

② **المرحلة الثانية:** نسعى إلى حذف y من L'_3 بالاستفادة من L'_2 . لتحقيق ذلك نضرب L'_3 بالعدد

$-\frac{5}{7}$ - كي يظهر فيها الحد $-5y$ - ثم نجمع إلى المعادلة الناتجة المعادلة

$$\left\{ \begin{array}{ll} x - 3y + 2z = 1 & (L_1) \\ 5y - z = 7 & (L'_2) \\ 7y - 2z = 8 & (L'_3) \end{array} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{ll} x - 3y + 2z = 1 & (L_1) \\ 5y - z = 7 & (L'_2) \\ \frac{3}{7}z = \frac{9}{7} & (L'_2 - \frac{5}{7}L'_3) \end{array} \right.$$

وبعد إصلاح المعادلة الأخيرة بضرب طرفيها بالعدد $\frac{7}{3}$ نصل إلى الجملة الجديدة:

$$(S'') \quad \left\{ \begin{array}{ll} x - 3y + 2z = 1 & (L_1) \\ 5y - z = 7 & (L'_2) \\ z = 3 & (L''_3) \end{array} \right.$$

تبرهن النظرية، وهذا ما نقبل به، أن حلول الجملة (S'') هي حلول الجملة (S) ذاتها.

③ استنتاج مجموعة حلول الجملة (S) .

من المهم ملاحظة أتنا نكتب في كل مرة جمل معادلات، وأننا نكرر كتابة السطر الأول من  (S) والسطر الثاني من (S') .

وعندما نحصل على جملة تكون فيها المعادلتان الأخيرتان متكافئتين (لهما الحلول ذاتها)، فعندما تقبل الجملة الأصلية (S) عدداً لا نهائياً من الحلول، كما يبين المثال الآتي:

مثال

$$x = \frac{8+5z}{3} \quad y = \frac{1+z}{3} \quad \text{ومنه} \quad \left\{ \begin{array}{l} x+y=2z+3 \\ 3y=z+1 \end{array} \right. \quad \text{إلى} \quad \left\{ \begin{array}{l} x+y-2z=3 \\ 3y-z=1 \\ 6y-2z=2 \end{array} \right. \quad \text{تؤول الجملة}$$

مجموعة حلول هذه الجملة هي مجموعة الثلاثيات $\left(\frac{8+5z}{3}, \frac{1+z}{3}, z \right)$ حيث z عدد حقيقي.

وأخيراً عندما نحصل على جملة تكون فيه المعادلتان الأخيرتان ممتاقيضتين، لا يكون للجملة أية حلول. 

فمثلاً ليس للجملة $\left\{ \begin{array}{l} x+2y-3z=3 \\ 3y-z=1 \\ 3y-z=0 \end{array} \right.$ حلول.

المستقيم والمستوي بصفتها مراكز أبعاد متناسبة

١.١. المستقيمات والقطع المستقيمة في الفراغ

كما هي الحال في المستوى، في الفراغ أيضاً المستقيم (AB) هو مجموعة النقاط M التي تحقق $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ عندما تتحول t في مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} . والقطعة المستقيمة $[AB]$ هي مجموعة النقاط M التي تتحقق $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ عندما تتحول t في المجال $[0,1]$. ومنه المبرهنة الآتية:

مبرهنة ١

① المستقيم (AB) هو مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاطين المتنقلتين $(A,1-t)$ و (B,t) عندما تتحول t في مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} .

② القطعة المستقيمة $[AB]$ هي مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاطين المتنقلتين $(A,1-t)$ و (B,t) عندما تتحول t في المجال $[0,1]$.

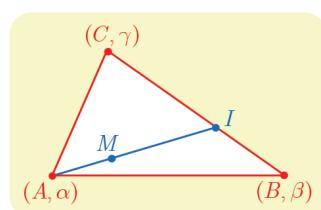
الإثبات

في حالة عدد حقيقي t ، القول إن M هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين المتنقلتين $(A,1-t)$ و (B,t) يعني أن $\overrightarrow{AM} = t(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) = t\overrightarrow{AB}$ أو $(1-t)\overrightarrow{AM} + t\overrightarrow{BM} = \vec{0}$. ومنه نستنتج النقاطين ① و ② مباشرة.



القطعة المستقيمة $[AB]$ هي أيضاً مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاطين المتنقلتين (A,α) و (B,β) حيث $0 \geq \alpha > 0$ و $0 \geq \beta > 0$. في الحقيقة، إن مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين المتنقلتين (A,α) و (B,β) ، هو نفسه مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين المتنقلتين $(A,\frac{\alpha}{\alpha+\beta})$ و $(B,\frac{\beta}{\alpha+\beta})$. فهو إذن مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين المتنقلتين $(A,1-t)$ و (B,t) وقد وضعنا $t = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \in [0,1]$.

نتيجة ٢



إن داخل المثلث ABC هو مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط المتنقلة (C,γ) و (B,β) و (A,α) حيث $0 > \alpha > 0$ و $0 > \beta > 0$ و $0 > \gamma > 0$.

في الحقيقة، لنفترض أن M نقطة من هذا النوع ولنضع I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين المتنقلين (C,γ) و (B,β) ، عندئذ تقع I داخل القطعة المستقيمة $[BC]$ ، واستناداً إلى الخاصة التجميعية، تكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين المتنقلين (A,α) و $(I,\beta + \gamma)$ ، فهي إذن تقع داخل القطعة المستقيمة $[AI]$ ، فهي إذن داخل المثلث ABC .

وبالعكس، إذا كانت M نقطة واقعة داخل المثلث ABC ، قطع المستقيم (AM) المستقيم (BC) في نقطة I واقعة بين B و C ، إذن يوجد $0 < \beta > 0$ و $\gamma > 0$ بحيث تكون I مركز الأبعاد المتناسبة لل نقطتين المتناظرتين (B, β) و (C, γ) . ولكن نقع M داخل القطعة المستقيمة $[AI]$ فيوجد $0 < \alpha < 1$ بحيث تكون M مركز الأبعاد المتناسبة لل نقطتين المتناظرتين (A, α) و $(I, \beta + \gamma)$. واستناداً إلى الخاصة التجميعية، تكون M مركز الأبعاد المتناسبة لل نقاط المتناظرة (A, α) و (B, β) و (C, γ) .

2.1. المستويات في الفراغ

لنتذكر أن المستوى (ABC) هو مجموعة النقاط M التي تحقق $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ حيث x و y عدوان حقيقيان كييفان.

مبرهنة 3

إن انتماء نقطة M إلى المستوى (ABC) يكفي وجود عددين x و y بحيث تكون M مركز الأبعاد المتناسبة لل نقاط المتناظرة $(A, 1 - x - y)$ و (B, x) و (C, y) .

الإثبات

في حالة عددين حقيقين x و y تكفي المساواة x و y ما يأتي:

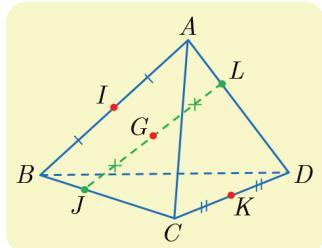
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= x(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + y(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) \\ &= -(x + y)\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC}\end{aligned}$$

أو

$$(1 - x - y)\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

أي إن M هي مركز الأبعاد المتناسبة لل نقاط المتناظرة $(A, 1 - x - y)$ و (B, x) و (C, y) .

مثال



رباعي وجوه، $ABCD$ و I منتصف الحرفين $[CD]$ و $[AB]$ ، J و K نقطتان معرفتان بالعلاقتين $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ و G هي منتصف $[JL]$ أثبت أن النقطة G و I و K تقع على استقامة واحدة.

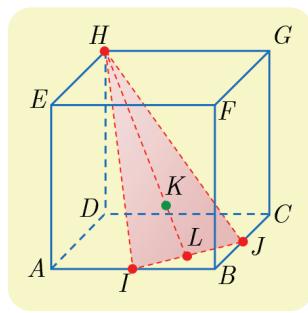
لإثبات وقوع ثلاثة نقاط على استقامة واحدة يكفي إثبات أن إحداها هي مركز الأبعاد المتناسبة لل نقطتين الآخرين.



من تعريف L نرى أن L هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين $(A, 2)$ و $(D, 1)$ ، ونرى بالمثل أن J هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين $(C, 1)$ و $(B, 2)$. لتكن إذن النقطة G' مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, 2)$ و $(C, 1)$ و $(B, 2)$.

باستعمال الخاصّة التجمعيّة نرى أنّ النقطة G' هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين $(L, 3)$ و $(J, 3)$ إذن هي منتصف $[LJ]$ أي إن $G' = G$.

ولكن I هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين $(A, 2)$ و $(B, 2)$ و K هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين $(C, 1)$ و $(D, 1)$ ومن ثم استناداً إلى الخاصّة التجمعيّة نرى أنّ النقطة G' هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين $(I, 4)$ و $(K, 2)$ إذن تقع النقاط G' و K و I على استقامة واحدة.



مثال إثبات وقوع نقاط في مستوى واحد

لإثبات وقوع أربع نقاط في مستوى واحد يكفي إثبات أنّ إحداها هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط بالترتيب، I و J منتصفان للحروف $[BC]$ و $[AB]$ ، K هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, 1)$ و $(B, 2)$ ، G' هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(C, 1)$ و $(D, 1)$. أثبتت وقوع النقاط I و J و K و H في مستوى واحد.

لإثبات وقوع أربع نقاط في مستوى واحد يكفي إثبات أنّ إحداها هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الثلاث الأخرى.



استناداً إلى الفرض I هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين $(A, 1)$ و $(B, 1)$ ، J هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين $(B, 1)$ و $(C, 1)$. ولأنّ K هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, 1)$ و $(B, 1)$ و $(C, 1)$ و $(D, 1)$. استنطينا من الخاصّة التجمعيّة أنّ K هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(I, 2)$ و $(J, 2)$ و $(H, 1)$. وهكذا نرى أنّ K واقعة في المستوى (IJH) والنقاط I و J و H تقع في مستوى واحد.

تَدْرِيْجٌ

- ① النقّطتان A و B نقطتان مختلفتان. في الحالات الآتية عين t التي تتحقّق $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.
- ② مركز الأبعاد المتناسبة للنقّطتين $(A, -2)$ و $(B, 1)$
- ③ مركز الأبعاد المتناسبة للنقّطتين $(A, 2)$ و $(B, 3)$.

- ② أُعطِ في الحالات الآتية α و β لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين (A, α) و (B, β)
- $$\cdot \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \quad \textcircled{3} \quad 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \quad \textcircled{2} \quad \overrightarrow{AM} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} \quad \textcircled{1}$$

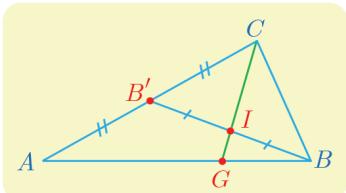
③ في الشكل الآتي التدرجات متساوية. عبر في كل حالة عن كل واحدة من النقاط A و B و C بصفتها مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين الآخرين.



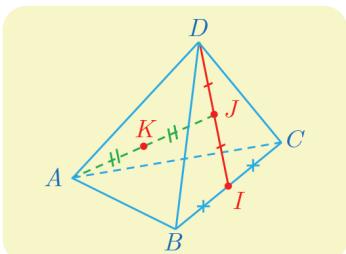
- ④ نتأمل مثلثاً ABC . في كل حالة مما يأتي، جذ عددين x و y بحيث $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$
- مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, -1)$ و $(B, 1)$ و $(C, 1)$ 1
 - مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, 3)$ و $(B, 1)$ و $(C, 2)$ 2

- ⑤ نتأمل مثلثاً ABC . في كل حالة مما يأتي، جذ الأعداد α و β و γ لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A, α) و (B, β) و (C, γ) .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} & \overrightarrow{AM} &= 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} & \textcircled{1} \\ \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} & \textcircled{4} & \overrightarrow{CM} &= 3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} & \textcircled{3} \end{aligned}$$



- ⑥ انطلاقاً من الشكل المجاور. جذ الأمثل α و β و γ لتكون I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A, α) و (B, β) و (C, γ) .
- $$\cdot \overrightarrow{GA} + \lambda \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
- واستنتج λ التي تحقق



- ⑦ انطلاقاً من الشكل المجاور. جذ الأمثل α و β و γ و δ لتكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A, α) و (B, β) و (C, γ) و (D, δ) .

- ⑧ رباعي وجوه. استعمل الخاصَّة التجمعيَّة لتعيين موضع النقطة G في الحالات الآتية:
- مركز G الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, 1)$ و $(B, 1)$ و $(C, 1)$ و $(D, 3)$ 1
 - مركز G الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, -1)$ و $(B, 2)$ و $(C, -1)$ و $(D, -2)$ 2
 - مركز G الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, 1)$ و $(B, 2)$ و $(C, 3)$ و $(D, 6)$ 2

التمثيل الوسيطية

2

1.2. التمثيل الوسيطي لمستقيم

لفترض أن المستقيم d معروف بنقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ وبشعاع موجه $\vec{u}(a, b, c)$. تنتهي النقطة إلى d إذا وُجد عدد حقيقي t بحيث $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ ، وهذا يُترجم باستعمال المركبات كما يأتي: يوجد t بحيث $z - z_0 = ct$ و $y - y_0 = bt$ و $x - x_0 = at$ ، ومنه المبرهنة:

مبرهنة 4

إن المستقيم d المار بالنقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ والموجه بالشعاع $\vec{u}(a, b, c)$ هو مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقق

$$(S) \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

تسمى الجملة (S) **تمثيلاً وسيطياً للمستقيم** d في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، ويسمى t **وسيطاً**. نقرن بكل عدد حقيقي t نقطة وحيدة $(at + x_0, bt + y_0, ct + z_0)$ من المستقيم d . وبالعكس يوافق كل نقطة M من d عدد حقيقي وحيد t يحقق $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

مثال

في حالة $A(1, 2, 3)$ و $B(2, 3, 1)$ يكون الشعاع $\overrightarrow{AB}(1, 1, -2)$ شعاعاً موجهاً للمستقيم (AB) ويقبل

$$\cdot \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = -2t + 3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

2. التمثيل الوسيطي لقطعة مستقيمة ولنصف مستقيم

لتكن $(A(x_0, y_0, z_0), B(x_1, y_1, z_1))$ نقطتين من الفراغ، ولنضع $\overrightarrow{AB} = \vec{u}(a, b, c)$ عندئذ القطعة المستقيمة $[AB]$ هي مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ التي تتحقق

$$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0, \quad t \in [0, 1] \\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

ونصف المستقيم (AB) الذي مبدؤه A ويمر بالنقطة B هو مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ التي تتحقق

$$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0, \quad t \in [0, +\infty[\\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

تحريساً للفهم



كيف نتعرّف تمثيلين وسيطييْن مختلفين للمستقيم نفسه؟

مثال

لتأمّل الجملتين

$$(S') \begin{cases} x = -9t + 4 \\ y = -12t + 4, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3t \end{cases} \text{ و } (S) \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 4t \\ z = -t + 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

يمثل (S) التمثيل الوسيطي للمستقيم d الموجّه بالشعاع $\vec{u}(3, 4, -1)$ والمار بالنقطة $A(1, 0, 1)$. أمّا (S') فهو تمثيل وسيطي لمستقيم d' موجّه بالشعاع $\vec{u}'(-9, -12, 3)$. ولكن $\vec{u}' = -3\vec{u}$ إذن \vec{u}' هو أيضاً شعاع توجيه للمستقيم d' ، والنقطة $A(1, 0, 1)$ من d تتنمي أيضاً إلى d' (يكفي أن نختار $t = \frac{1}{3}$ في التمثيل وسيطي (S') للمستقيم d'). إذن $d = d'$ والجملتان (S) و (S') هما تمثيلان وسيطيان للمستقيم d ذاته.

كيف ندرس تقاطع مستقيمين معروفين وسيطياً؟

مثال

لتأمّل المستقيمين :

$$(d') \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -t - 1, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t + 1 \end{cases} \text{ و } (d) \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 3, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -t + 2 \end{cases}$$

القول إن $I(x, y, z)$ تتنمي إلى $d \cap d'$ يعني أنها نقطة واقعة على كل من d و d' . ووقوع I على d يعني أنه يوجد عدد حقيقي t يحقق $x = t + 1$ و $y = 2t - 3$ و $z = -t + 2$. ولكن **انتبه** لا يعني انتماء I إلى d' أيضاً لأن $x = 3t + 2$ و $y = -t - 1$ و $z = t + 1$ هي ذاتها قيمة الوسيط t التي تتوافق النقطة I على d' . يجب استعمال حرف آخر (s مثلاً) للدلالة على الوسيط على المستقيم d' . وعليه القول إن $I(x, y, z)$ هي نقطة تقاطع المستقيمين d و d' تكافيء وجود عدد حقيقي t و عدد حقيقي s بحيث

$$\begin{cases} t + 1 = 3s + 2 \\ 2t - 3 = -s - 1 \\ -t + 2 = s + 1 \end{cases}$$

نجد من ثم $t = 1$ و $s = 0$ ، وعليه يشتراك المستقيمان d و d' بالنقطة $I(2, -1, 1)$.

مثال

تعرف وضع مستقيمين في الفراغ

ادرس وضع المستقيمين d و d' المعرفين كما يأتي:

$$d' : \begin{cases} x = t \\ y = -3t - 3, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -t + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad d : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -3t + 2, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -3t + 3 \end{cases}$$

لتعيين وضع مستقيمين معرفين وسيطياً ندرس أولاً الارتباط الخطّي لأشعنتهما الموجّهة \vec{u} و \vec{u}' .



الحل

للمستقيمين d و d' شعاعين موجّهين $\vec{u}'(1, -3, -1)$ و $\vec{u}(1, -3, -3)$ بالترتيب. لأنّ مركبات هذين الشعاعين ليست متناسبة استنتجنا أنّ الشعاعين \vec{u} و \vec{u}' غير مرتبطين خطّياً. عليه، إما أن يكون المستقيمان d و d' متقطعين أو أن يكونا متالقين (أي غير واقعين في مستوى واحد). لنبحث إذا كانا

متقطعين، علينا حلّ الجملة

$$\begin{cases} t + 1 = s \\ -3t + 2 = -3s - 3 \\ -3t + 3 = -s + 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} t - s = -1 & (1) \\ -3t + 3s = -5 & (2) \\ -3t + s = -2 & (3) \end{cases}$$

ولكن المعادلتين (1) و (2) متقاضتان، وليس لهذه الجملة حلول. إذن لا يقع المستقيمان d و d' في مستوى واحد.

تَدْرِبْهُ

نعطي في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

① أعط معادلة وسيطية للمستقيم d :

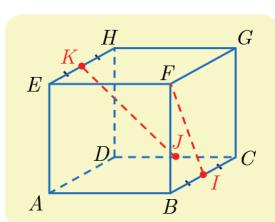
① المستقيم d يمر بالنقطة $A(-1, 2, 0)$ و موجّه بالشعاع $\vec{u}(0, 1, -1)$.

② حيث $d = (AB)$ حيث $d = (AB)$

② نتأمل النقطتين $A(-2, 1, 0)$ و $B(2, 3, 1)$. أعط تمثيلاً وسيطياً لكل من

① المستقيم (AB) . (AB) ② القطعة المستقيمة $[AB]$.

③ نصف المستقيم (AB) . $[BA]$ ④ نصف المستقيم (AB) .



③ $ABCDEF$ مكعب طول ضلعه 1. فيه I منتصف $[BC]$ و J منتصف $[CD]$ و K منتصف $[EH]$. نتأمل المعلم

① أعط تمثيلاً وسيطياً لكل من (IK) و (FJ) .

② أيقاطع المستقيمان (IK) و (FJ) ? هل تقع النقاط I و J و K و F في مستوى واحد؟

تقاطع مستقيمات ومستويات (3)

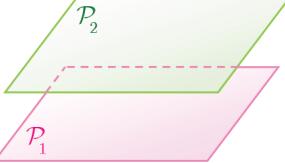
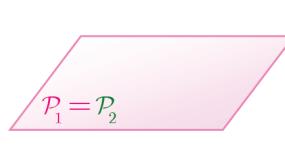
نُعطي في هذه الفقرة جملة متجانسة $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1.3. تقاطع مستويين

لتتأمل مستويين $\mathcal{P}_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ و $\mathcal{P}_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. يمكننا، من حيث المبدأ، معرفة إذا كان هذان المستويان متوازيين أو متقطعين انتلاقاً من كون الأشعة الناظمة عليهما مرتبطة خطياً أو غير ذلك. وعلى وجه الخصوص، عندما يكون هذان المستويان متقطعين، نحصل على إحداثيات نقاط التقاطع بحلّ الجملة المكونة من معادلتي المستويين. لهذه الجملة عدد لا نهائي من الحلول ممثّلة بنقاط المستقيم Δ الفصل المشترك للمستويين \mathcal{P}_1 و \mathcal{P}_2 .

يلخص الجدول الآتي الحالات المختلفة لمجموعة حلول الجملة (S)

$$(S) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 & (1) \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

المستويان متقطنان	المستويان متوازيان ومختلفان	المستويان متطابقان
 حلول الجملة (S) هي نقاط Δ .	 ليس للجملة (S) حلول.	 حلول الجملة (S) كل ثلاثة تكمن في حل (x, y, z) للمعادلة (1) أو (2) .

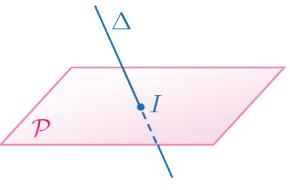
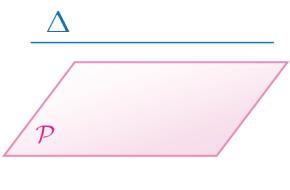
2.3. تقاطع مستقيم ومستوى

لتتأمل مستوىً $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ له شعاع ناظم $\vec{n}(a, b, c)$. ومستقيماً Δ موجّه بالشعاع $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ ويمر بالنقطة $A(x_0, y_0, z_0)$. يمكننا، من حيث المبدأ، معرفة إذا كان Δ موازياً للمستوى \mathcal{P} أو قاطعاً له تبعاً لكون \vec{u} عمودياً على \vec{n} أو لم يكن.

ويوجه خاص، إذا قطع Δ المستوى \mathcal{P} ، فإن إحداثيات نقطة التقاطع هي الثلاثية (x, y, z) حل الجملة الآتية: (\mathcal{S}) :

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ z = \gamma t + z_0 \end{cases}$$

يلخص الجدول الآتي الحالات المختلفة:

المستقيم ينقطع مع المستوى	المستقيم يوازي المستوى	المستقيم محظى في المستوى
		

للحالة (\mathcal{S}) عدد لا نهائي من الحلول لـ (\mathcal{S}) .
بالنسبة إلى I .

للحالة (\mathcal{S}) ليس للجملة (\mathcal{S}) حلول.

للحالة (\mathcal{S}) عدد ممتنع من الحلول.

مثال

نتأمل المستويين $\mathcal{P}_1 : x + 2y - z + 1 = 0$ و $\mathcal{P}_2 : 2x + y - z + 2 = 0$. تيقن أن هذين المستويين متتقاطعان، ثم جد تمثيلاً وسيطياً لصلتهما المشتركة d .

الحل

للمستويين \mathcal{P}_1 و \mathcal{P}_2 الشعاعين الناظمين $\vec{n}_1(2, 1, -1)$ و $\vec{n}_2(1, 2, -1)$ بالترتيب. الشعاعان \vec{n}_1 و \vec{n}_2 غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة، إذن المستويان \mathcal{P}_1 و \mathcal{P}_2 متتقاطعان. تتتمي $M(x, y, z)$ إلى

$$\text{إذا وفقط إذا تحقق الشرطان: } \begin{cases} 2x + y - z + 2 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

لحل هذه الجملة، نستعمل طريقة الحذف بالتعويض، فنعبر مثلاً عن x و y بدلالة z :

$$\begin{cases} 2x + y = z - 2 & L_1 \\ x + 2y = z - 1 & L_2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2x + y = z - 2 & L_1 \\ \frac{3}{2}y = \frac{1}{2}z & L_2 - \frac{1}{2}L_1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2x + y = z - 2 & L_1 \\ y = \frac{1}{3}z & L_2' \end{cases}$$

ومنه $x = \frac{1}{3}z - 1$ و $y = \frac{1}{3}z$. يأخذ المجهول z أية قيمة حقيقة. يمكننا إذن أن نرمز إليه بالرمز

$z = 3t$ تسهيلاً لكتابه ليصبح انتفاء $M(x, y, z)$ إلى d مكافئاً للشرط

$$(d) \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t \\ z = 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

فحصل بذلك على تمثيل وسيطي للفصل المشترك d .

مثال

نتأمل النقطتين $A(2,1,-2)$ و $B(-1,2,1)$. والمستوي $\mathcal{P} : 2x - y + z - 2 = 0$. تيقن أن يقطع المستوي \mathcal{P} في نقطة I يطلب تعين إحداثياتها.

الحل

للمستقيم (AB) شعاع موجه $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-3, 1, 3)$ ، وللمستوي \mathcal{P} شعاع ناظم $\vec{n} = (2, -1, 1)$. ونلاحظ أن $\vec{n} \cdot \vec{u} = -4 \neq 0$ ، فالشعاعان \vec{u} و \vec{n} غير متعاددين مما يثبت تقاطع المستقيم (AB) والمستوي \mathcal{P} . إحداثيات نقطة التقاطع I هي الثلاثية (x, y, z) حل الجملة الآتية:

$$\begin{cases} 2x - y + z - 2 = 0 \\ x = -3t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = 3t - 2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{4} \\ x = -3t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = 3t - 2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{4} \\ x = \frac{11}{4} \\ y = \frac{3}{4} \\ z = -\frac{11}{4} \end{cases}$$

ومنه يقطع (AB) المستوي \mathcal{P} في $I(\frac{11}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{11}{4})$

تَدْرِيْجٌ

نعطي في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

① في الحالات الآتية تحقق من تقاطع المستويين \mathcal{P}_1 و \mathcal{P}_2 وأعط تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك.

$$\mathcal{P}_2 : x + z = 1 \quad \mathcal{P}_1 : x + y = 2 \quad ①$$

$$\mathcal{P}_2 : 2x - y + 2z = 1 \quad \mathcal{P}_1 : -x + y + z = 3 \quad ②$$

في الحالات الآتية، أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d' وبين إذا كان $d' \parallel d$ أو كان d' منطبقاً على d .

$$d': \begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ x - y - 2z = 5 \end{cases} \quad d: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 2 \\ z = t + 1 \end{cases} \quad ② \quad d': \begin{cases} 3x - y - 2z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \quad d: \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t - 1 \end{cases} \quad ①$$

في الحالات الآتية أثبت تقاطع المستقيم d مع المستوي \mathcal{P} وعين إحداثيات نقطة التقاطع.

$$\mathcal{P}: x + y + z = 1 \quad A(-1, 2, 3) \quad B(1, 2, -1) \quad \text{حيث } d = (AB) \quad ①$$

$$\mathcal{P}: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{6} = 1 \quad \vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} \quad \text{ويوجه الشعاع } d \text{ يمر بالنقطة } A(2, -1, 0) \quad ②$$

في الحالات الآتية، ادرس تقاطع المستقيم d والمستوي \mathcal{P} .

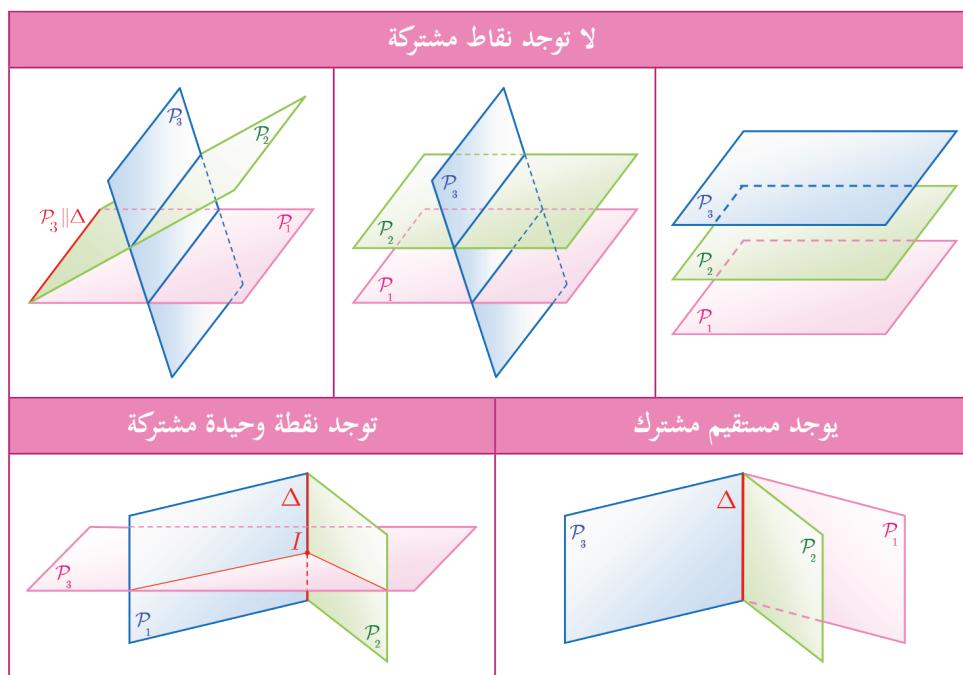
$$\mathcal{P}: 2x + 3y - z = 0, \quad d: \begin{cases} x = s + 1 \\ y = 2s + 1 \\ z = 8s - 3 \end{cases} \quad ② \quad \mathcal{P}: x - y + z = 1, \quad d: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad ①$$

تقاطع ثلاثة مستويات 4

نعطي في هذه الفقرة جملة متجانسة $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1.4. تقاطع ثلاثة مستويات

للحظ أولاً أنه في حالة انبساط اثنين من المستويات الثلاثة تؤول مسألة التقاطع إلى تقاطع مستويين وقد درسناها في الفقرة السابقة. لذلك سنفترض فيما يأتي أن المستويات الثلاثة P_1 و P_2 و P_3 مختلفة P_3 مثى مثى. ولتعيين نقاطها تأتي الفكرة دراسة التقاطع $P_1 \cap P_2$ أولاً، ثم تقاطع $P_1 \cap P_2$ مع P_3 مع $P_1 \cap P_2$ مستقيماً. نبين في ما يأتي الحالات المختلفة:



2.4. الترجمة الجبرية للمسألة

لتكن P_1 و P_2 و P_3 ثلاثة مستويات معادلاتها

$$P_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$P_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$P_3 : a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$$

تؤول دراسة تقاطع هذه المستويات إلى حلّ جملة ثلاث معادلات خطية بثلاثة مجهولين:

$$(S) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{cases}$$

نلخص فيما يأتي الحالات المختلفة:

مجموعة حلول الجملة (S)	تقاطع المستويات P_1 و P_2 و P_3
خالية	لا توجد نقاط مشتركة
حلٌّ وحيد (x, y, z) يمثل إحداثيات النقطة I	نقطة مشتركة واحدة I
جميع الثلاثيات (x, y, z) التي تمثل حلول المعادلات الثلاث اللتين تعرفان Δ .	مستقيم Δ معرف باثنتين من المعادلات الثلاث
جميع الثلاثيات (x, y, z) التي تتحقق إحدى المعادلات.	المستوى (حالة \cdot) $(P_1 = P_2 = P_3)$

تحريساً للفهم

؟ أيُفيد التفسير الهندسي في حل بعض جمل المعادلات؟

نعم، فهو يتيح معرفة سابقة لعدد حلول الجملة، مما يجعل التحقق من صحة الحل الجبري يسيراً.



يؤول حل الجملة

$$\begin{cases} x + y - 2z = -1 \\ 3x + y - z = -1 \\ -2x - 2y + 4z = 1 \end{cases}$$

إلى دراسة تقاطع المستويات الآتية: $P_2 : 3x + y - z + 1 = 0$ و $P_1 : x + y - 2z + 1 = 0$ و $P_3 : -2x - 2y + 4z - 1 = 0$. وهي تقبل بالترتيب الأشعة الناظمة $\vec{n}_1(1, 1, -2)$ و $\vec{n}_2(-2, -2, 4)$ و $\vec{n}_3(3, 1, -1)$. ولكن $\vec{n}_3 = -2\vec{n}_1$ إذن \vec{n}_1 و \vec{n}_3 مرتبطان خطياً والمستويان P_1 و P_3 متوازيان. بالقسمة على -2 تأخذ معادلة المستوى P_3 الصيغة $x + y - 2z = -\frac{1}{2}$ وهذا يبرهن أنَّ المستويين P_1 و P_3 غير منطبقين. إذن تقاطع المستويات P_1 و P_2 و P_3 مجموعة خالية، وليس للجملة المعطاة حلول.

مثال

نتأمل المستويات :

$$\begin{aligned} P_1 &: -x + 2y + 3z - 5 = 0 \\ P_2 &: 3x - y - 4z + 5 = 0 \\ P_3 &: 2x + 3y - 2z + 2 = 0 \end{aligned}$$

أثبت أنَّ هذه المستويات تقاطع في نقطة واحدة يطلب تعين إحداثياتها.

يتعلق الأمر بالبحث عن حل جبري للجملة

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} -x + 2y + 3z = 5 \quad (L_1) \\ 3x - y - 4z = -5 \quad (L_2) \\ 2x + 3y - 2z = -2 \quad (L_3) \end{array} \right.$$

لتتبع طريقة غاوس، لحذف x من المعادلتين الثانية والثالثة نجمع إلى (L_2) ثلاثة أمثال الأولى ونجمع إلى (L_3) مثلي الأولى :

$$(S) \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + 2y + 3z = 5 \quad (L_1) \\ 5y + 5z = 10 \quad (L_2 + 3L_1) \\ 7y + 4z = 8 \quad (L_3 + 2L_1) \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + 2y + 3z = 5 \quad (L_1) \\ y + z = 2 \quad (L'_2) \\ 7y + 4z = 8 \quad (L'_3) \end{array} \right.$$

ثم، لحذف y من المعادلة الأخيرة (L'_3) نطرح منها سبعة أمثال (L'_2) . فنجد

$$(S) \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + 2y + 3z = 5 \quad (L_1) \\ y + z = 2 \quad (L'_2) \\ -3z = -6 \quad (L'_3 - 7L'_2) \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + 2y + 3z = 5 \quad (L_1) \\ y + z = 2 \quad (L'_2) \\ z = 2 \quad (L''_3) \end{array} \right.$$

ومنه $x = 1$ و $y = 0$. فالجملة تقبل حلًّا وحيداً $(x, y, z) = (1, 0, 2)$. والمستويات \mathcal{P}_1 و \mathcal{P}_2 و \mathcal{P}_3 تقاطع في نقطة واحدة هي $I(1, 0, 2)$.



نعطي في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. في كل من الحالات الآتية نعطي معادلات ثلاثة مستويات، حل الجملة الخطية الموقفة وبين إذا كانت هذه المستويات تتشترك في نقطة فقط، أو في مستقيم مشترك، أو لا تتشترك بأية نقطة:

$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_1 : x - 2y - 3z = 3 \\ \mathcal{P}_2 : 2x - y - 4z = 7 \\ \mathcal{P}_3 : 3x - 3y - 5z = 8 \end{array} \right. \quad ②$	$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_1 : 5x + y + z = -5 \\ \mathcal{P}_2 : 2x + 13y - 7z = -1 \\ \mathcal{P}_3 : x - y + z = 1 \end{array} \right. \quad ①$
$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_1 : 2x - y + 3z = 2 \\ \mathcal{P}_2 : x + 2y + z = 1 \\ \mathcal{P}_3 : 3x - 4y + 5z = 3 \end{array} \right. \quad ④$	$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_1 : 2x - y + 3z = 0 \\ \mathcal{P}_2 : x + 2y + z = 0 \\ \mathcal{P}_3 : 3x - 4y + 5z = 0 \end{array} \right. \quad ③$
$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_1 : x + y + z = 1 \\ \mathcal{P}_2 : x - 2y + z = 1 \\ \mathcal{P}_3 : 3x - 4y + 3z = -1 \end{array} \right. \quad ⑥$	$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_1 : 2x - y + 3z = 2 \\ \mathcal{P}_2 : x + 2y + z = 1 \\ \mathcal{P}_3 : 3x - 4y + 5z = 4 \end{array} \right. \quad ⑤$

أفكار يجب تمثيلها



- المستقيم (AB) هو مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاطين A و B ، وبالعكس. وعندما تكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين $(A, 1-t)$ و (B, t) . $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$
- القطعة المستقيمة $[AB]$ هي مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاطين A و B بعد تزويدهما بأمثال موجبة (أو لها الإشارة ذاتها).
- المستوى (ABC) هو مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط A و B و C .
- داخل المثلث ABC هي مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط A و B و C بعد تزويدها بأمثال موجبة تماماً (أو لها الإشارة ذاتها).
- القول إنّ النقطة $M(x, y, z)$ تقع على المستقيم d المارّ بالنقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ والموجه بالشعاع $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ يُكافي القول $\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ عن المساواة $\vec{u}(a, b, c)$ كل قيمة للوسيط t تعين نقطة ونقطة واحدة فقط من المستقيم d .
- بعد تزويدي الفضاء بمعلم متاجنس، تؤول مسألة دراسة تقاطع مستقيم ومستوى، أو تقاطع عدّة مستويات إلى حلّ جملة معادلات خطية.

معكسات يجب امتلاكها.

- لإثبات وقوع ثلاثة نقاط على استقامة واحدة فكر بإثبات أن إحداها مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين الآخرين.
- لإثبات وقوع أربع نقاط في مستوى واحد فكر بإثبات أن إحداها مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الأخرى.
- تذكر أن التمثيل الوسيطي لمستقيم يعطي مباشرة شعاع متاجنس له، وإحداثيات نقطة منه.

أخطاء يجب تجنبها.

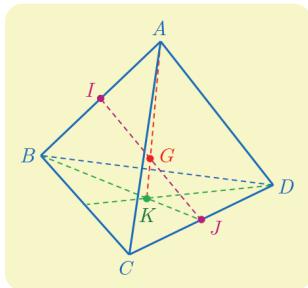


- المعادلة $ax + by + cz + d = 0$ ليست معادلة مستقيم في الفراغ بل هي معادلة مستوى فيه.

أشطر

نشاط 1 مستقيمات متقاطعة في الفراغ

❶ خواص عامة لخواص رباعي الوجه



ليكن $ABCD$ رباعي وجهات ما. ولتكن G مركز الأبعاد المتناسبة لرؤوسه مزدوجة جميعها بالأمثال 1 ذاتها. ولتكن K مركز نقل المثلث BCD . وكذلك ليكن I و J منتصف $[AB]$ و $[CD]$ بالترتيب.

❶ نسمى القطعة المستقيمة التي تصل الرأس بمركز نقل الوجه المقابل **متوسطاً** في رباعي الوجه. نهدف إلى إثبات تلاقي المتواسطات جميعها في نقطة واحدة هي النقطة G . ولهذا نسمى G مركز نقل رباعي الوجه.

a. استعمل الخاصية التجميعية لتثبت أن G تقع على $[AK]$ وأن $AG = \frac{3}{4}AK$.

b. أثبتت بالمثل أن G تقع على المتواسطات الثلاثة الأخرى.

❷ نهدف في هذا السؤال إلى إثبات أن القطع المستقيمة الواسلة بين منتصفات الأحرف المقابلة في رباعي الوجه تلتقي أيضاً في G ، وأن G تقع في منتصف كل منها.

a. أثبتت أن G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين $(I,2)$ و $(J,2)$. واستنتج أن G تقع في منتصف $[IJ]$.

b. أثبتت صحة الخاصية المشار إليها في ❶.

❸ مسألة مستقيمات متقاطعة

ليكن $ABCD$ رباعي وجهات ما. ولنعرف النقاط P و Q و R و S كما يأتي :

$$\overrightarrow{DS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} \quad \overrightarrow{BR} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BA} \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} \quad \overrightarrow{BP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$$

نريد إثبات تلاقي المستقيمين (RS) و (PQ) .

a. ❶ أثبتت أن P هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين $(B,4)$ و $(C,1)$. وأن Q هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين $(A,1)$ و $(D,3)$.

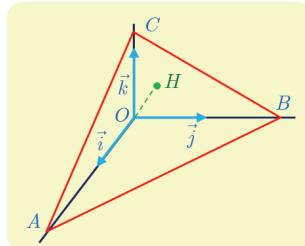
b. ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,4)$ و $(C,1)$ و $(D,3)$. بين أن G تقع على المستقيم (PQ) .

❷ أثبتت بأسلوب مماثل أن G تقع أيضاً على (RS) ، فالمستقيمان (PQ) و (RS) متواسطان.

❸ لتكن I منتصف $[AC]$. أثبت تلاقي المستقيمين (IG) و (BD) ، وعيّن نقطة تقاطعهما.

نشاط 2 بعد نقطة عن مستوى

نتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط $A(a, 0, 0)$ و $B(0, b, 0)$ و $C(0, 0, c)$ حيث a و b و c أعداد موجبة تماماً. نهدف إلى إثبات علاقة بين بُعد O عن المستوى (ABC) والمسافات OA و OB و OC .



. a. أثبت أن $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ معادلة للمستوى (ABC)

. b. استنتج تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار بالنقطة O عمودياً على المستوى (ABC) .

. ② لتكن H نقطة تقاطع المستقيم Δ مع المستوى (ABC) .

. a. احسب إحداثيات H بدلالة a و b و c .

. b. تحقق أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC .

. c. نضع $h = OH$ أثبت أن $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$



مِنْيَاتٍ وَمَسَائِلٍ



ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه. ولتكن α عدداً حقيقياً، و I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$. النقطتان E و F معرفتان بالعلاقتين $\overrightarrow{BF} = \alpha \overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AE} = \alpha \overrightarrow{AD}$. وأخيراً H هي منتصف $[EF]$.

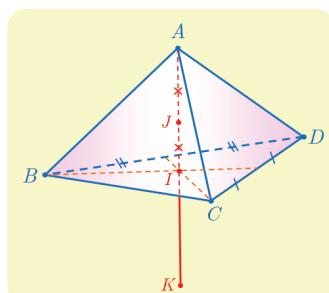
① تتحقق أنّ E هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين $(A, 1 - \alpha)$ و (D, α) ، وكذلك أنّ النقطة F هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين $(B, 1 - \alpha)$ و (C, α) .
أثبتت أنّ النقطة H هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, 1 - \alpha)$ و $(B, 1 - \alpha)$ و (C, α) و (D, α) .

استنتج وقوع النقاط I و J و H على استقامة واحدة.

2 رباعي وجوه. أثبت في كل من الحالتين الآتيتين أنّ النقاط M و B و C و D تقع في مستوى واحد، ثمّ وضع النقطة M .
 $\cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DA}$ ①
 $\cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MC}$ ②

3 نعطي معلماً متجانساً في الفراغ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعطي النقاطين $A(1, 0, 0)$ و $B(4, 3, -3)$.
① أ تكون مجموعة النقاط M مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاطين (B, α) و $(A, 1 - \alpha)$ عندما تتحول α في \mathbb{R} ، هي نفسها المستقيم المارّ بالنقطة A وشعاع توجيهه $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ ؟
② أ تكون مجموعة النقاط M مراكز الأبعاد المتناسبة للنقط (O, y) و (B, x) و $(A, 1 - x - y)$ عندما تتحول x و y في \mathbb{R} ، هي نفسها المستوى المارّ بالنقطة O ويقبل \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} شعاعي توجيه؟

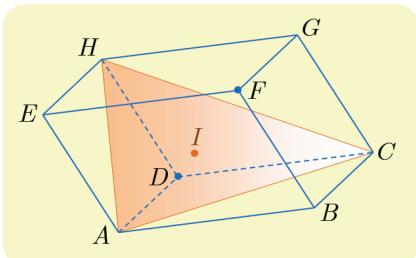
4 ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه. ولتكن I مركز ثقل المثلث BCD ، و J منتصف $[AI]$ و K نظيرة A بالنسبة إلى I . عبر عن J و K بصفتهما مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط A و B و C و D بعد تزويدها بأمثال مناسبة.





لنتعلم البحث معاً

الوقوع على استقامة واحدة 5



ليكن $ABCDEFGH$ متوازي سطوح، ولتكن I مركز ثقل المثلث AHC . أثبت أن النقاط D و I و F تقع على استقامة واحدة. وعيّن موقع I على $[DF]$.

نحو الحل

الفكرة الأولى التي تخطر لنا هي محاولة إيجاد ثابت k يحقق $\overrightarrow{DI} = k\overrightarrow{DF}$ ، يبدو هذا صعباً للوهلة الأولى، ومنه تأتي الفكرة المعتادة القائمة على تحليل أحد هذه الأشعة أو جميعها والاستفادة من علاقة شال. أثبت انتلافاً من تعريف I أن $3\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$.

ولكن $ABCDEF$ متوازي سطوح. استقد من ذلك لتبرهن أن

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DF}$$

أنجز الحل واكتبه بلغة سليمة.

طريقة ثانية :

يمكنا أيضاً التفكير بطريقة تحليلية. لإثبات الوضع على استقامة واحدة لا يحتاج إلى معلم متجانس. لذلك نتأمل المعلم $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

1. أعط تمثيلاً وسيطياً لمستقيم (DF) .
2. احسب إحداثيات النقطة I .

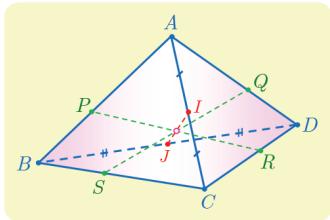
3. تحقق أن I تقع على المستقيم (DF) وعيّن قيمة t التي تتحقق $\overrightarrow{DI} = t\overrightarrow{DF}$

أنجز الحل واكتبه بلغة سليمة.

تعيين نقطة تلاقي مستقيمات 6

نتأمل رباعي وجوه $ABCD$. لتكن x من $[0,1]$ ، ولتكن P و Q و R و S النقاط التي تتحقق $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AQ} = x\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{CR} = x\overrightarrow{CD}$ ، $\overrightarrow{CS} = x\overrightarrow{CB}$

ال نقطتان I و J هما منتصفان الحرفين $[AC]$ و $[BD]$. أثبت تلاقي المستقيمات (PR) و (IJ) و (QS) في نقطة واحدة.



نعرف فعالية الخاصة التجميعية في حل مسائل التلاقي، وفرضيات مثل $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB}$ تعني أن P هي مركز أبعاد متناسبة للنقاطين A و B .

1. بين أن P هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاطين $(A, 1-x)$ و (B, x) .
2. عبر بالمثل عن النقاط Q و R و S .
- تأمل إذن النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(C, 1-x)$ و (B, x) و $(A, 1-x)$ و (D, x) .

1. أثبت استناداً إلى الخاصة التجميعية أن G تقع على كل من القطع المستقيمة $[PR]$ و $[QS]$ و $[IJ]$.
2. ماذا تستنتج؟

أنجز الحل واكتبه بلغة سليمة.



قدماً إلى الأمام

7

تأمل رباعي وجوه $ABCD$. K نقطة من $[AB]$ تتحقق $AK = \frac{1}{3}AB$ ، و L نقطة من القطعة المستقيمة $[CD]$ تتحقق $CL = \frac{2}{3}CD$. وأخيراً I هي منتصف $[AD]$ ، و J هي منتصف $[BC]$. نعرف G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, 2)$ و $(B, 1)$ و $(C, 1)$ و $(D, 2)$.

- a. أثبت أن النقاط G و I و J تقع على استقامة واحدة.
- b. أثبت أن النقاط G و K و L تقع على استقامة واحدة.
- استنتاج وقوع النقاط I و J و K و L في مستوى واحد.

8

تأمل رباعي وجوه $ABCD$. والنقاط P و Q و R هي نقاط تجعل $ABPC$ و $ABQD$ و $ACRD$ متوازيات أضلاع. نهدف إلى إثبات تلاقي المستقيمات (DP) و (CQ) و (BR) .

- a. أثبت أن النقطة P هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, -1)$ و $(B, 1)$ و $(C, 1)$ و $(D, 1)$.
- b. عبر بالمثل عن Q بصفتها مركز أبعاد متناسبة للنقاط A و B و D . وكذلك، عبر عن R بصفتها مركز أبعاد متناسبة للنقاط A و C و D .
- بالاستفادة من نقطة I ، وهي مركز أبعاد متناسبة مُختارة للنقاط A و B و C و D ، ومن الخاصة التجميعية، أثبت تلاقي المستقيمات (DP) و (CQ) و (BR) ، وعيّن موقع I على هذه المستقيمات.

9 نتأمل ثلاثة نقاط A و B و C من الفراغ، وعددًا حقيقيًا k من المجال $[-1, 1]$. ترمز G_k إلى

مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(A, k^2 + 1)$ و (B, k) و $(C, -k)$.

① مثل النقاط A و B و C و I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$ ، وأنشئ نقطتين G_1

و G_{-1} .

$$\cdot \overrightarrow{AG_k} = -\frac{k}{1+k^2} \overrightarrow{BC} \quad \text{أثبت أنه مهما كان العدد } k \text{ من } [-1, 1] \text{ كان}$$

$$\cdot f(x) = -\frac{x}{1+x^2} \quad \text{ادرس تغيرات التابع } f \text{ المعروف على المجال } [-1, 1] \text{ بالصيغة}$$

c. استنتاج مجموعة النقاط G_k عندما تتحول k في المجال $[-1, 1]$.

③ عين المجموعة \mathcal{E} المكونة من النقاط M التي تتحقق

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{2MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

④ عين المجموعة \mathcal{F} المكونة من النقاط M التي تتحقق

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{2MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$$

⑤ نزود الفضاء بعلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. ونفترض أن النقاط A و B و C معطاة كما يأتي:

$A(0, 0, 2)$ و $B(-1, 2, 1)$ و $C(-1, 2, 5)$ ، وأن G_k و \mathcal{E} و \mathcal{F} معرفة كما في السابق.

a. احسب إحداثيات نقطتين G_1 و G_{-1} ، وأثبت أن المجموعتين \mathcal{E} و \mathcal{F} متتقاطعتان.

b. احسب نصف قطر الدائرة Γ الناتجة من تقاطع المجموعتين \mathcal{E} و \mathcal{F} .

10 نتأمل معلماً متجانساً $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$. ليكن G مركز نقل المثلث ABC .

① احسب إحداثيات G ، وتحقق أن (OG) عمودي على (ABC) .

② تعرف النقاط $A'(2, 0, 0)$ و $B'(0, 2, 0)$ و $C'(0, 0, 3)$ المستوى $A'B'C'$.

a. اكتب معادلة المستوى $A'B'C'$.

$$\cdot \begin{cases} x = 1 - k \\ y = 0 \\ z = k \end{cases} \quad \text{أثبت أن } M(x, y, z) \text{ تنتهي إلى المستقيم } (AC) \text{ إذا وجد عدد } k \text{ بحيث}$$

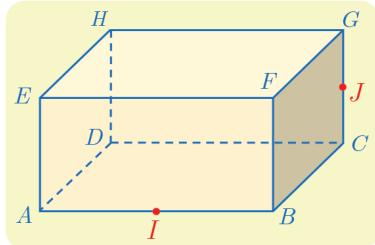
c. احسب إحداثيات النقطة K المشتركة بين المستقيم (AC) والمستوى $(A'B'C')$.

a. احسب إحداثيات النقطة L المشتركة بين المستقيم (BC) والمستوى $(A'B'C')$.

b. أثبت توازي المستقيمات (AB) و $(A'B')$ و (KL) .

④ عين تقاطع المستويين (ABC) و $(A'B'C')$ بدلالة النقاط المعرفة سابقاً.

11



ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = 2$ و $BC = GC = 1$. النقطة I هي منتصف $[AB]$ و J هي منتصف $[CG]$.

نتأمل المعلم المتجانس $(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

احسب المسافتين DJ و IJ .

أثبت أن المستقيمين (IJ) و (DI) متعامدان. واحسب $\cos \widehat{IJD}$

أعط معادلة للمستوى (DIJ) .

احسب بُعد H عن المستوى (DIJ) .

احسب حجم رباعي الوجوه $HDIJ$.

أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطة J عمودياً على المستوى (HDI) .

احسب إحداثيات النقطة J' نقطة تقاطع المستقيم d والمستوى (HDI) .

جد بطريقتين مختلفتين بُعد النقطة J عن المستوى (HDI) .

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نتأمل الهرم $S-OABC$ حيث $\vec{OA} = \vec{i}$ و $\vec{OB} = \vec{i} + \vec{j}$ و $\vec{OC} = \vec{j}$ و $\vec{OS} = \vec{k}$. ولتكن t عدداً يحقق $0 < t < 1$. نهدف إلى تعريف مقطع الهرم بالمستوى \mathcal{P} الذي معادته $x + y = t$ ، وتعيين قيمة t التي تجعل مساحة المقطع أعظمية.

يقطع المستوى \mathcal{P} المستقيمات (OA) و (OC) و (SB) و (SA) في D و E و F و G و H بالترتيب. ارسم شكلًا وبيّن طبيعة هذا المقطع.

أثبت أن الرباعي $DEFH$ مستطيل، وعبر عن مساحته بدلالة t .

احسب إحداثيات النقطة G ، ثم مساحة المثلث FGH بدلالة t .

استنتج عبارة $A(t)$ مساحة المقطع المنشود بدلالة t .

ادرس اطراد \mathcal{A} على المجال $[0,1]$ ، واستنتاج قيمة t التي تجعل مساحة المقطع أعظمية.

استنتاج أن المستوى المار بمركز ثقل المثلث OAC ويقبل \vec{OS} شعاعي توجيه يوافق مقطعاً أعظمي المساحة.

4

الأعداد العقدية

مجموعة الأعداد العقدية 

مرافق عدد عقدي 

الشكل المثلثي لعدد عقدي 

خواص طويلة عدد عقدي ونراوته 

الشكل الأسّي لعدد عقدي 

المعادلة من الدرجة الثانية ذات الأمثل الحقيقة 

في القرن السادس عشر، استطاع رياضياتيو عصر النهضة في أوروبا مثل كارданو Cardano وبوميللي Bombelli، لأول مرة حلّ معادلات من الدرجة الثالثة والدرجة الرابعة. ولكن لتعيين حلول حقيقية مثل هذه المعادلات، كانوا يستعملون أعداداً غريبة ليست كالأعداد المتعارفة. وهكذا برهن بوميللي أنه بالإمكان كتابة الحل $x = 4$ للمعادلة $x^3 = 15x + 4$ ، بالصيغة الآتية

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 4$$

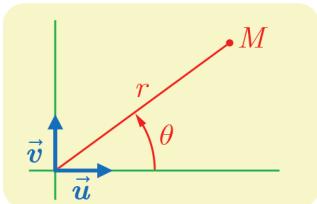
موضحاً بذلك أنه يمكن التعبير عن الأعداد الحقيقة بصيغ تخيلية.

كانت عملية أخذ الجذر التربيعي لعدد سالب عملاً يتطلب الجرأة! كوفئ هذا الإقدام بنتائج إيجابية، مما جعل الناس أكثر ثقة باستعمال هذه الأعداد التخيلية.

وفي منتصف القرن الثامن عشر اقترح أويلر Euler استبدال الرمز i بالكتابية $\sqrt{-1}$ ، فصار $-1 = i^2$ ، وبين دالمير أن جميع الأعداد التخيلية التي جرى اختيارها (والتي أسماها غاووس Gauss الأعداد العقدية) تكتب بالشكل $a + ib$ حيث a و b عددان حقيقيان.

الأعداد العقدية

انطلاقة نشطة

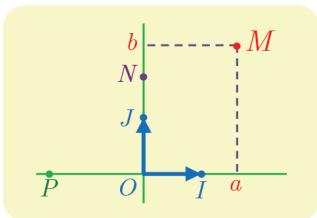


لنتأمل معلماً متجانساً $(O; \vec{u}, \vec{v})$ في المستوى. إذا كانت M نقطة مختلفة عن O يمكننا تعين موقع M بواسطة بُعد M عن O : $r = \overrightarrow{OM}$ والزاوية $\theta = \angle(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$. في حالة نقطة M مختلفة عن O نسمي الزوج (r, θ) الذي يحقق $r = OM$ و $\theta = \angle(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ زوجاً من الإحداثيات القطبية للنقطة M . ونعبر عن ذلك بالكتابة $M(r; \theta)$. وإذا كانت الإحداثيات الديكارتية للنقطة M هي (x, y) كان:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

لن نستعرض إنشاءً دقيقاً من وجهة نظر الرياضيات لمجموعة الأعداد العقدية التي يرمز إليها عادة بالرمز \mathbb{C} . ولكننا سنعتمد مقاربة قريبة من مقاربة غاووس الذي كتب في رسالة تعود إلى عام 1811 ما يأتي : مثلاً يمكننا تمثيل مجموعة الأعداد الحقيقة بواسطة خط مستقيم...، كذلك يمكننا أن تخيل الأعداد الحقيقة والتخيلية ممثلة بواسطة مستوى حيث توافق كل نقطة محددة بفاصلتها a وترتيبها b العدد العقدي $a + ib$...، ويقترن اسم الرياضي السويسري آرغان Argand الذي عاش في الفترة 1768-1822 بهذا التمثيل للأعداد العقدية.

❶ التمثيل



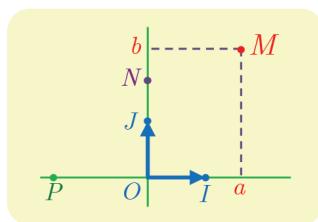
نتأمل معلماً متجانساً $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. نقبل أنَّ محور الفواصل يمثل مجموعة الأعداد الحقيقة \mathbb{R} ، وعليه يُمثل العدد الحقيقي x بالنقطة $P(x, 0)$. ونصطلاح أنَّ كل نقطة أخرى في المستوى هي أيضاً عدد، ولكنه ليس عدداً حقيقياً معتاداً بل **عدد عقدي**.

❶ نصطلاح أنَّ النقطة $J(0, 1)$ تمثل العدد العقدي الذي يرمز إليه بالرمز i . وأنَّ النقطة $N(0, y)$ تمثل العدد iy (أو $i \times y$). لاحظ أنَّ $\overrightarrow{ON} = y\overrightarrow{OJ}$.

■ وضع النقاط N_1 و N_2 و N_3 التي تمثل الأعداد $y_1 = i \times (-1)$ و $y_2 = i \times 3$ و $y_3 = i \times (-3)$. ثم اكتب إحداثيات كل منها.

■ ما هي الأعداد التي تمثلها النقاط $N_4(0, 5)$ و $N_5(-2, 0)$ ؟

② نصطلح أن النقطة $M(a,b)$ تمثل العدد العقدي $a + ib$ ، الذي هو مجموع العدد الحقيقي a والعدد العقدي ib . لاحظ أن $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OI} + b\overrightarrow{OJ}$



■ وضع النقاط M_1 و M_2 و M_3 التي تمثل الأعداد

$$z_3 = 5 + i \times (-2) \quad z_2 = -1 + i \times 4 \quad z_1 = 2 + i \times 3$$

ثم اكتب إحداثيات كل منها.

■ ما هي الأعداد العقدية التي تمثلها النقاط $M_4(1,2)$ و $M_5(-3.2,4)$ ؟

الخلاصة : تمثل كل نقطة $M(a,b)$ العدد العقدي $a + ib$. ويمثل كل عدد عقدي



بنقطة M إحداثياتها (a,b) .

② الحساب باستعمال هذه الأعداد الجديدة

تجري الحسابات على الأعداد العقدية بأسلوب الأعداد الحقيقية ذاته مع إضافة واحدة هي أننا عند حساب i^2 نضع -1 . فمثلاً

$$(3 + 2i) + (5 - 3i) = 8 - i$$

$$\begin{aligned} (3 + 2i) \cdot (5 - 3i) &= 15 - 9i + 10i - 6i^2 \\ &= 15 + i - 6 \times (-1) \\ &= 21 + i \end{aligned}$$

■ احسب المقادير الآتية :

$$B = (-2 + 7i) - (4 - 3i), \quad A = (-2 + 7i) + (4 - 3i)$$

$$D = (3 + 4i)(3 - 4i), \quad C = (-2 + 7i)(4 - 3i)$$

■ احسب أيضاً :

$$B = (1 - i)^2, \quad A = 2i(3 + 4i)$$

$$D = (-1 + \sqrt{3}i)^3, \quad C = i^3$$

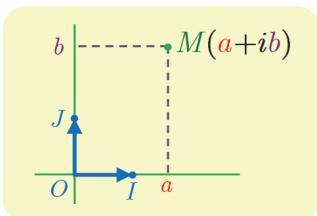
■ احسب بوجه عام $(a + ib)(a' + ib')$ حيث a و b و a' و b' هي أعداد حقيقة.

1 مجموعة الأعداد العقدية

1

نتأمل معلمًا متجانساً $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ في المستوى.

1.1. الشكل الجيري للعدد العقدي



نصلح أن كل نقطة من المستوى تمثل عدداً، نسميه **عدداً عقدياً** واحداً فقط. تمثل النقطة $J(0,1)$ العدد العقدي الذي يرمز إليه i ، وكل نقطة $M(a,b)$ تمثل العدد العقدي $z = a + ib$ ، وعندما نقول إن النقطة M هي **صورة** العدد العقدي z . نرمز إلى مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} بالرمز.

كل عدد حقيقي x هو أيضاً عدد عقدي لأن $x = x + i \times 0$ ، ويسمى كل عدد عقدي من النمط ib (حيث b عدد حقيقي) عدداً تخيلياً بحثاً. وهذا يمثل محور الفواصل مجموعة الأعداد الحقيقية، ويمثل محور التراتيب مجموعة الأعداد التخيلية البعثة.

تعريف 1

- تسمى الكتابة $z = a + ib$ حيث a و b عدوان حقيقيان، **الشكل الجيري** للعدد العقدي z .
- نسمى a **الجزء الحقيقي** للعدد العقدي z ونكتب $a = \operatorname{Re}(z)$.
- ونسمى b **الجزء التخيلي** للعدد العقدي z ونكتب $b = \operatorname{Im}(z)$.
- القول إن z حقيقي يعني أن $\operatorname{Im}(z) = 0$.
- والقول إن z تخيلي بحث يعني أن $\operatorname{Re}(z) = 0$.
- نسمى **طولية العدد العقدي** z المقدار $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ وهو يمثل الطول OM بعد النقطة $M(a,b)$ عن المبدأ O .
- وأخيراً يتساوى عددان عقديان إذا مثلاً النقطة ذاتها في المستوى أي $a + ib = a' + ib'$ إذا $a = a'$ و $b = b'$.

2.1. قواعد الحساب في \mathbb{C}

- نصلح أن $i \times i = i^2 = -1$.
- نردد مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} بعمليتين : الجمع والضرب، لهما خواص العمليات المماثلة في \mathbb{R} ، فقط نستبدل -1 بالمقدار $i \times i = i^2$ عند ظهوره في الحسابات.

▪ وعليه في حالة عددين عقديين z و z' يكتبهما بالشكل الجبري كما يأتي و $z' = a' + ib'$ لدينا

$$\begin{aligned} z + z' &= (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b') \\ zz' &= (a + ib)(a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + ba') \end{aligned}$$

▪ استناداً إلى قواعد الحساب المشار إليها أعلاه، في حالة عددين حقيقيين a و b يكون

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 - iab + iab - i^2b^2 = a^2 + b^2$$



من المفيد ملاحظة أن

$$\operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z') \quad \text{و} \quad \operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z')$$

ولكن من الخطأ الاعتقاد أنَّ الجزء الحقيقي لجداء ضرب يساوي جداء ضرب الجزأين الحقيقيين مثلاً كما توضح ذلك قاعدة الضرب.

تُحرِّيْسًا لِلْفَهْم



ما الشرط لتكون الكتابة $a + ib$ شكلاً جرياً لعدد عقدي؟

يجب أن يكون a و b عددين حقيقيين. لأنهما في الحقيقة فاصلة وترتيب النقطة M التي يمثلها هذا العدد العقدي.



لماذا نستعمل الرمز $|z|$ للدلالة على طولية العدد العقدي z ؟

لأنَّ هذا المفهوم يعمم مفهوم القيمة المطلقة لعدد حقيقي، فكلَّ عدد حقيقي a يكتب بالشكل $a = a + i \times 0$ ، ومن ثُمَّ تكون طوليته $\sqrt{a^2}$ ، وهي كما نعلم تساوي القيمة المطلقة للعدد a . إذن القيمة المطلقة لعدد حقيقي تساوي طوليته إذا نظرنا إليه بصفته عدداً عقدياً.



ما عكس عدد عقدي؟

إنَّ عكس العدد العقدي $(a + ib) + (-a - ib) = 0$ هو $-z = -a - ib$ لأنَّ $z = a + ib$ هو العدد z و الهندسيًّا النقطة M' الموافقة للعدد $-z$ هي نظيره النقطة M (الموافقة للعدد z) بالنسبة إلى المبدأ O .



ما مقلوب عدد عقدي غير معروف؟

إنَّ مقلوب العدد العقدي $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib}$ حيث $z = a + ib$ هو العدد $z \neq 0$ ولكنَّ هذا العدد ليس موضوعاً بالشكل الجيري المألوف لذلك نضرب البسط والمقام بالعدد $a - ib$ ، مستفيدين من الخاصَّة التي رأيناها سابقاً: $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$. لنجد

$$\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

نضع $z_1 = 3 + 2i$ و $z_2 = 2 - i$. اكتب بالشكل الجبري كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

$$\cdot \frac{1}{z_2} \quad \cdot \frac{1}{z_1} \quad \cdot z_1 z_2 \quad \cdot z_1 + z_2$$

الحل

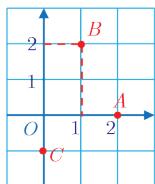
- نلاحظ أولاً أن $z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (2 - i) = 5 + i$
- وكذلك $z_1 z_2 = (3 + 2i)(2 - i) = 6 - 3i + 4i - 2i^2 = 8 + i$
- العدد العقدي z_1 غير معروف إذن له مقلوب ولدينا

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{3 + 2i} = \frac{3 - 2i}{9 + 4} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$$

- ونجد بالمثل أن

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{2 - i} = \frac{2 + i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

تَدْرِّبْهُ



- ① ليكن x عدداً عقدياً تمثله نقطة M في المستوى. ولتكن $z_1 = 2 + xi$ في حالة $M = A$ أو $z_2 = 3 + x + 4i$ في حالة $M = B$ حيث A و B و C مبنية في الشكل المجاور.

- ② في حالة عدد عقدي z نضع $P(z) = z^3 - (1 - i)z^2 - (4 - 5i)z + (4 + 6i)$. احسب كلاً من $P(3 - 2i)$ و $P(-2)$ و $P(i)$.
- بسط العبارتين:

$$\cdot w = (1 + i)^8 \quad ② \quad \text{و} \quad z = \frac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{2} - i} + \frac{\sqrt{2} - i}{\sqrt{2} + i} \quad ①$$

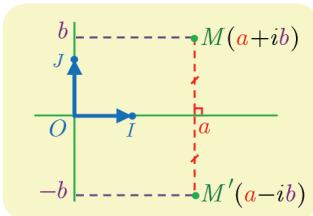
- ④ أعط الشكل الجيري للأعداد العقدية الآتية:

$z_2 = (1 + i)^2$	$z_1 = (2 + i)(3 - 2i)$	①
$z_4 = (1 + 2i)(1 - 2i)$	$z_3 = (1 - i)^2$	③
$z_6 = (4 - 3i)^2$	$z_5 = (3 + i\sqrt{5})(3 - i\sqrt{5})$	⑤
$z_8 = \frac{1}{2 - i}$	$z_7 = \frac{4 - 6i}{3 + 2i}$	⑦
$z_{10} = \left(\frac{4 - 6i}{2 - 3i}\right)\left(\frac{1 + 3i}{3 + 2i}\right)$	$z_9 = \frac{3 - 6i}{3 + i} + \frac{4}{3 - i}$	⑨

مَرْافِقُ عَدْدٍ عَقْدِيٍّ ②

1.2. التعريف

تعريف 2



إن مَرْافِقُ العَدْدِ الْعَقْدِيِّ $z = a + ib$ حيث a و b حقيقيان، هو العَدْدُ الْعَقْدِيُّ $a - ib$ الذي نرمز إليه \bar{z} .

لاحظ أن النقطة M' المُوافقة للعدد العقدي $\bar{z} = a - ib$ هي نظيره النقطة M المُوافقة للعدد العقدي $z = a + ib$ بالنسبة إلى محور الفواصل. ونلاحظ أن $|z| = |\bar{z}|$ لأن $OM = OM'$.

مثلاً في حالة i لدينا $z_1 = 1 + i$ و $z_2 = 3$ و $z_3 = -2i$ و $\bar{z}_1 = 1 - i$ و $\bar{z}_2 = 3$ و $\bar{z}_3 = 2i$.

2.2. تأثير مباشرة

- إن مَرْافِقُ العَدْدِ الْعَقْدِيِّ \bar{z} هو العَدْدُ الْعَقْدِيُّ z ذاته $\bar{z} = z$.
- إذا كان $z - \bar{z} = 2ib$ و a و b عددان حقيقيان كان $z = a + ib$ إذن $z + \bar{z} = 2a$.
- $\text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ و $\text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
- نستنتج مما سبق أن العَدْدُ الْعَقْدِيُّ z يكون حقيقةً إذا وفقط إذا كان $z = \bar{z}$ ، وأنه يكون تخيلياً بحثاً إذا وفقط إذا كان $\bar{z} = -z$.
- وأخيراً لأن $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$ استنتجنا العلاقة الأساسية: $z\bar{z} = |z|^2$

مبرهنة 1

- ➊ إن مَرْافِقُ مَجْمُوعَتَيْ عَدَدَيْ عَقْدِيَّ يُسَاوِي مَجْمُوعَ مَرْافِقِهِما: $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- ➋ إن مَرْافِقُ جَداءِ عَدَدَيْ عَقْدِيَّ يُسَاوِي جَداءِ مَرْافِقِهِما: $\overline{zw} = \bar{z} \times \bar{w}$
- ➌ إن مَرْافِقُ خَارِجِ قَسْمَةِ عَدَدَيْ عَقْدِيَّ يُسَاوِي خَارِجِ قَسْمَةِ مَرْافِقِهِما: $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ ، $w \neq 0$

الإثبات

➊ لفترض أن $z + w = a + c + i(b + d)$ و $w = c + id$ عندئذ $z = a + ib$ ومن ثم

$$\overline{z + w} = a + c - i(b + d) = a - ib + c - id = \bar{z} + \bar{w}$$

ونترك للقارئ إثبات صحة الخاصيتين ② و ③ بالمثل.

ملاحظة : يمكن تعميم الخواص السابقة دون عناء على مجموع n عدداً عقدياً أو جداء ضرب عدداً عقدياً. وبوجه خاص لدينا، في حالة عدد طبيعي غير معادل n :

$$\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$$

تَحْرِيساً لِلْفَهْم

ما الفائدة من استعمال مراافق عدد عقدي ؟

- إيه يفيد في حساب الشكل الجيري لخارج قسمة بسبب كون العدد \bar{z} عدداً حقيقياً.
- ويفيد في إعطاء شرط لازم وكافي ليكون عدد عقدي ما حقيقياً أو تخيلياً بحثاً.

مثال حساب الشكل الجيري لخارج قسمة

اكتب بالشكل الجيري كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

$$z_2 = \frac{1}{2+i} - \frac{1}{3-i} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{2-i}{3+2i}$$

لحساب الشكل الجيري لخارج قسمة نضرب كلاً من البسط والمقام بمراافق المقام.

الحل

▪ لما كان مراافق $3+2i$ يساوي $3-2i$ استنتجنا أن

$$z_1 = \frac{(2-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{4-7i}{9+4} = \frac{4}{13} - \frac{7}{13}i$$

▪ وكذلك في الحالة الثانية :

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} - \frac{3+i}{(3-i)(3+i)} \\ &= \frac{2-i}{4+1} - \frac{3+i}{9+1} = \frac{4-2i}{10} - \frac{3+i}{10} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i \end{aligned}$$

تَجَارِبُهُ

① اكتب بدلالة \bar{z} مراافق كل من الأعداد العقدية Z الآتية:

$$Z = \frac{3z^2 - 2iz + 4}{2z - 3i} \quad ② \quad Z = (z-1)(z+i) \quad ①$$

$$Z = (1+2iz)^3 \quad ④ \quad Z = z^3 + 2iz^2 + 1 - 3i \quad ③$$

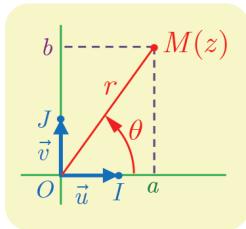
② حل كلاً من المعادلات الآتية بالمجهول z :

$$2iz + \bar{z} = 3 + 3i \quad ② \quad z - 2\bar{z} = 2 \quad ①$$

$$\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = i \quad ④ \quad 2\bar{z} = i - 1 \quad ③$$

الشكل المثلثي لعدد عقدي 3

في هذه الفقرة وفي الفقرات اللاحقة نزود المستوى بعمد متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، حيث $\overrightarrow{OI} = \vec{u}$ و $\overrightarrow{OJ} = \vec{v}$.



سنقرن بكل نقطة $M(a, b)$ العدد العقدي $a + ib = z$. ولكن إذا كانت M مختلفة عن O كان للنقطة M إحداثيات قطبية $(r; \theta)$ ، حيث $\theta = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ و $r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.
نستنتج إذن أن $b = r \sin \theta$ و $a = r \cos \theta$ ، ومن ثم
$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

تعريف 3

ليكن z عدداً عقدياً غير معروف، a و b عددان حقيقيان أحدهما على الأقل غير معروف.

- نسمى زاوية للعدد العقدي z ، ونرمزها $\arg z$ ، أي قياس بالراديان للزاوية $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.
- نسمى الصيغة $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ الشكل المثلثي للعدد العقدي z حيث

$$^1 \arg z = \theta \quad (2\pi) \quad \text{و} \quad r = |z|$$



انطلاقاً من $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ نلاحظ أن $\overline{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta) = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$
 $-z = r(-\cos \theta - i \sin \theta) = r(\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi))$

إذن

$$\cdot \arg(-z) = \pi + \arg z \quad \text{و} \quad \arg \overline{z} = -\arg z$$

نتيجة 3

في حالة عدد عقدي z شكله الجبري $a + ib$ وشكله المثلثي $(r; \theta)$

- عند معرفة r و θ يكون $b = r \sin \theta$ و $a = r \cos \theta$
- عند معرفة a و b يكون $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ و $\theta = \tan^{-1}(b/a)$

$$\sin \theta = \frac{b}{r} \quad \text{و} \quad \cos \theta = \frac{a}{r}$$

¹ تذكر أن الكتابة (2π) تعني أن $\theta = \varphi + 2\pi k$ حيث k عدد من \mathbb{Z}

إذا كان i كان $\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. إذن يمكن أن نختار

$z = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$. إذن $\theta = -\frac{\pi}{4}$

إذا كان $(z = 2 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right))$



إذا تساوى العددان $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$ و $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ وهو مكتوبان بشكلهما المثلثي كان $r = r'$ و $\theta' = \theta + 2\pi$ ، لماذا؟

تُحْرِيسًا لِلْفَهْم

ما فائدة الشكل المثلثي لعدد عقدي؟

تفيد هذه الصيغة بتوضيح الصلة مع المعنى الهندسي للعدد العقدي، عن طريق تفسير الطويلة بدلالة البعد عن المبدأ والزاوية باعتبارها قياساً لزاوية موجهة بين أشعة.

وهي كما سنرى مفيدة في إيجاد طريقة فعالة جداً لحساب جداء ضرب الأعداد العقدية، وقوتها.

متى لا تمثل الكتابة $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ دوماً شكلاً مثلياً لعدد عقدي؟

عندما لا يتحقق الشرط $r > 0$. فمثلاً في حالة $z = -2(\cos \theta + i \sin \theta)$ نكتب

$$z = 2(-\cos \theta - i \sin \theta) = 2(\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi))$$

فنستنتج أن $|z| = 2$ و $\arg z = \theta + \pi + 2\pi$

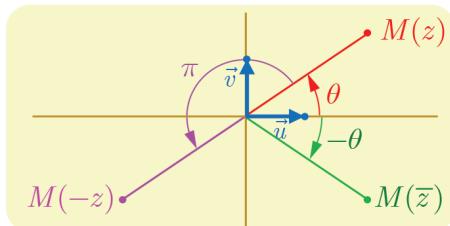
ما الخواص التي يجب معرفتها بشأن زاوية عدد عقدي؟

في حالة عدد عقدي غير معروف z :

• يكون z حقيقياً إذا وفقط إذا كان $\arg z = 0$ أو (2π)

• يكون z تخيلياً بحثاً إذا وفقط إذا كان $\arg z = \frac{\pi}{2}$ أو (2π)

• $\arg(-z) = \arg z + \pi$ و $\arg \bar{z} = -\arg z$



مثال

الانتقال من الشكل الجيري إلى الشكل المثلثي وبالعكس

١٠١ ليكن $i = \sqrt{3} + i$. أعط الشكل المثلثي للعدد z_1 .

١٠٢ ليكن z_2 العدد العقدي الذي طولته 3 وزاويته $-\frac{\pi}{4}$. أعط الشكل الجيري للعدد z_2 .

المعلم

١٠٣ للعدد z_1 الشكل $a + ib$ حيث $a = \sqrt{3}$ و $b = 1$. إذن $a = \sqrt{3}$ و $b = 1$.

بالشروطين $\cdot z_1 = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$. ومنه $\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). إذن $\sin \theta = \frac{1}{2}$ و $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

١٠٤ هنا لدينا $r = 3$ و $\theta = -\frac{\pi}{4}$ إذن : $\theta = -\frac{\pi}{4}$

تجربة

١٠٥ مثل الأعداد الآتية في المستوى العقدي، ثم أعط زاوية لكل منها انطلاقاً من اعتبارات هندسية ودون إجراء حسابات.

$$1 + i, -1 - i, 5, -3, 3i, 4 - 4i, -5i, 3 + 3i$$

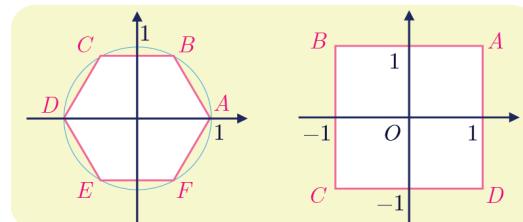
١٠٦ اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

$$z_2 = 2 + 2i\sqrt{3} \quad ② \quad z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad ①$$

$$z_4 = -2i \quad ④ \quad z_3 = 4 - 4i \quad ③$$

$$z_6 = \frac{4}{1-i} \quad ⑥ \quad z_5 = -\frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4} \quad ⑤$$

١٠٧ في الشكل المجاور متلنا في معلم متجانس مربعًا $ABCD$ ومسدساً $ABCDEF$. أعط الأعداد العقدية التي تمثل كلاً من رؤوس كل منها.



١٠٨ في كل من الحالات الآتية، عين مجموعة النقاط M التي يحقق العدد العقدي z الذي يمثلها الشرط المعطى:

$$\arg z = -\frac{2\pi}{3} \quad ② \quad \arg z = \frac{\pi}{3} \quad ①$$

$$|z| = 3 \quad ④ \quad \arg z = \pi \quad ③$$

$$\operatorname{Im}(z) = 1 \quad ⑥ \quad \operatorname{Re}(z) = -2 \quad ⑤$$

خواص طويلة عدد عقدي وزاويته 4

1.4. طولية وزاوية جداء ضرب أعداد عقدية



أياً كان العددان العقديان غير المعدومين z و z' كان

$$\arg(zz') = \arg z + \arg z' (2\pi) \quad \text{و} \quad |zz'| = |z| \times |z'|$$

الإثبات

لفترض أن $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$ و $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$\theta' = \arg z' \quad r' = |z'| \quad \text{و} \quad \theta = \arg z \quad r = |z|$$

عندئذ

$$\begin{aligned} z \times z' &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \times r'(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= rr' \left((\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta') \right) \\ &= rr' \left(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') \right) \end{aligned}$$

ولأن $rr' > 0$ استنتجنا أن $|zz'| = rr'$ وأن $\arg(zz') = \theta + \theta'$



ليكن $z' = 3 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$ و $z = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{5} \right) \right)$ عندئذ

$$\arg(zz') = \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{20} \quad \text{و} \quad |zz'| = 2 \times 3 = 6$$

$$\therefore zz' = 6 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{20} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{20} \right) \right) \quad \text{ومنه}$$

ونثبت بالتدريج على العدد n النتيجة المهمة الآتية:



أياً كان العدد العقدي غير المعدوم z ، وأياً كان العدد الطبيعي n كان

$$\arg(z^n) = n \arg z (2\pi) \quad \text{و} \quad |z^n| = |z|^n$$

وبصياغة أخرى، عند وضع $(z = r(\cos \theta + i \sin \theta))$

$$(r(\cos \theta + i \sin \theta))^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

أما الحالة الخاصة الموافقة لعدد عقدي طوليته تساوي 1 أي $r = 1$ فتعطينا

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad \text{دستور دوماشر :}$$

٤.٢. طولية وزاوية خارج قسمة عددين عقديين

مبرهنة ٦

أياً كان العددان العقديان غير المعدومين z و z' كان

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' (2\pi) \quad \text{و} \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$\cdot w \neq 0$ في حالة $\arg\left(\frac{1}{w}\right) = -\arg w (2\pi)$ و $\left|\frac{1}{w}\right| = \frac{1}{|w|}$ وبوجه خاص

الإثبات

لنسع $w = \frac{z}{z'}$ فيكون $wz' = z$ ، ومن ثم $|z| = |w| \times |z'|$ و $\arg z = \arg w + \arg z' (2\pi)$ ، ومنه

النتيجة المرجوة.

مثال

ليكن $z' = \frac{3}{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$ و $z = 4 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)$. عندئذ

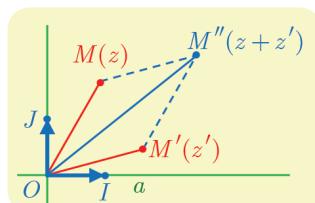
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} \quad \text{و} \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{4}{3/2} = \frac{8}{3}$$

ومنه $\frac{z}{z'} = \frac{8}{3} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right)$

تُحرِّيساً للفهم

؟ ما هي قواعد حساب الطولية ؟

تذكّر أن طولية جداء ضرب عددين عقديين تساوي جداء ضرب الطويلتين، وطولية خارج قسمتهما هي خارج قسمة الطويلتين.



ولكن عموماً طولية مجموع عددين عقديين لا تساوي مجموع الطويلتين؛ تأمل مثلاً $|z+z'| = 0$ و $z \neq 0$ $z' = -z$ عندئذ $|z+z'| \leq |z| + |z'|$ و $0 < |z| + |z'| < |z+z'|$ ، ولكن لدينا **متراجحة المثلث** المبينة في الشكل المجاور $. OM'' \leq OM + OM'$.

مثال

أعطِ الشكل الجيري لكل من العددين : $z = (1 - i\sqrt{3})^5$ و $w = \frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}+i)^3}$

عند حساب القوى يفضل استعمال التمثيل المثلثي.



لنسع ① $|z'| = 2$ ، $\arg z' = -\frac{\pi}{3}$ و $z' = 1 - i\sqrt{3}$ ، إذن

$$z' = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

نستنتج من ذلك أنَّ

$$\begin{aligned} z &= z'^5 = 2^5 \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right) \right) \\ &= 2^5 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = 16 + 16\sqrt{3}i \end{aligned}$$

هنا أيضًا نلاحظ أنَّ ② $1 + i = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$ ومنه

$$(1 + i)^4 = (\sqrt{2})^4 \left(\cos\left(\frac{4\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{4}\right) \right) = -4$$

وكذلك $\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$ ومنه

$$(\sqrt{3} + i)^3 = 2^3 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = 8i$$

$$\cdot w = -4 / (8i) = \frac{i}{2} \text{ إذن}$$



اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد. ①

$$z = \left(\frac{\sqrt{3} - i}{i} \right)^5 \quad ③ \quad z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1+i} \quad ② \quad z = (1 - i)^2 \quad ①$$

نعطي العددين العقديين ② $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ و $z_2 = 1 - i$

اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد z_1 و z_2 و ①

اكتب بالشكل الجبري ② $\frac{z_1}{z_2}$.

$$\cdot \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \text{و} \quad \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad ③$$

استنتج أنَّ ③ اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي $1 + i\sqrt{3}$ واستنتج الشكل المثلثي للعدد $i\sqrt{3} - 1$ ، وأخيراً

احسب العددين:

$$z_2 = (1 + i\sqrt{3})^5 - (1 - i\sqrt{3})^5 \quad ② \quad z_1 = (1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5 \quad ①$$

اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد العقدية الآتية ④

$$\begin{aligned} z &= \left(\sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5} \right)^6 \quad ② \quad z = \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)^6 \quad ① \\ z &= (1 + i)^{2016} \quad ④ \quad z = (1 + i) \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right) \quad ③ \end{aligned}$$

الشكل الأسّي لعدد عقدي

1.5. حالة عدد عقدي طولته تساوي الواحد

يُكتب كلُّ عدد عقدي طولته تساوي الواحد بالصيغة $\cos \theta + i \sin \theta$ ، وبالعكس طولة كل عدد من هذا الشكل تساوي 1 . نرمز عادة إلى مجموعة الأعداد العقدية التي تساوي طولتها الواحد بالرمز \mathbb{U} . أي

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{\cos \theta + i \sin \theta : \theta \in \mathbb{R}\}$$

يجعلنا هذا نفكّر بالتابع $\mathcal{E}(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$ الذي يقرن بكل عدد حقيقي θ العدد من \mathbb{U} . يتحقق التابع \mathcal{E} الخاصة المهمة الآتية :

$$\mathcal{E}(\theta + \theta') = \mathcal{E}(\theta) \cdot \mathcal{E}(\theta')$$

في الحقيقة

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\theta) \cdot \mathcal{E}(\theta') &= (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta') \\ &= \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') \\ &= \mathcal{E}(\theta + \theta') \end{aligned}$$

وعليه نرى أنَّ التابع \mathcal{E} يؤدي دوراً يشبه دور التابع الأسّي، فهو يحول المجموع إلى جداء ضرب، ومنه جاءت فكرة وضع الرمز الجديد $e^{i\theta}$ دلالة على $\mathcal{E}(\theta)$ ومنه التعريف الآتي :



يُرمز إلى العدد عقدي الذي طولته تساوي الواحد وزاويته تساوي θ بالرمز $e^{i\theta}$ فيكون

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

وعلى وجه الخصوص لدينا $e^{i\pi} = -1$ و



لما كان $0 \times i = 0$ صار هناك تعريفان للعدد e^0 تحقق أنهما متفقان.

2.5. الحالة العامة

يُكتب كلُّ عدد عقدي غير معروف z بالصيغة $|z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ ، واستناداً إلى ما سبق يُكتب هذا العدد بالشكل $e^{i\theta} z$. ومنه التعريف الآتي :



الشكل الأسّي لعدد عقدي غير معروف z زاويته θ هو الصيغة

وبالاستفادة مما أثبتناه في الفقرة السابقة المتعلقة بالتمثيل المثلثي نجد :

مبرهنة 7

في حالة عددين موجبين تماماً r و r' و عددين حقيقيين θ و θ' لدينا

$$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')} \quad \textcircled{•} \quad re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')} \quad \textcircled{•}$$

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow (r = r', \theta = \theta' + 2\pi) \quad \textcircled{•} \quad \overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta} \quad \textcircled{•}$$

ونترك للقارئ إثبات النتيجة المهمة ولكن بسيطة الإثبات الآتية:

نتيجة 8

① **دستور دوموافر:** أيًّا كان العدد الحقيقي θ والعدد الصحيح n كان

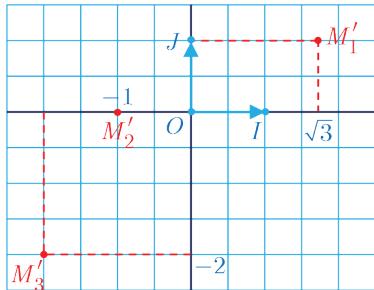
$$\cdot (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

② **علاقتاً أويلر:** أيًّا كان العدد الحقيقي θ كان

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{أو} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

مثال الانتقال من الشكل الجبري إلى الأسني وبالعكس

① وضع النقاط M_1 و M_2 و M_3 صور الأعداد $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $z_2 = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ و $z_3 = \sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ على الأسي وبالعكس.



ثم عين الشكل الجيري لكل من هذه الأعداد العقدية.

وبالعكس، اكتب بالشكل الأسني الأعداد العقدية التي تمثل النقاط M'_1 و M'_2 و M'_3 المرسومة في الشكل.

③ احسب المقادير $z_1 \times z_2$ و $\frac{z_1}{z_2}$ و $(z_3)^5$ بالشكل الأسني.

الحل

① نعرف طولية وزاوية كل من هذه الأعداد. فمثلاً لتعيين M_1 نرسم نصف المستقيم $[OA)$ الذي يصنع زاوية قدرها $\frac{\pi}{4}$ مع \overrightarrow{OI} . ثم نعين عليه M_1 بحيث $OM_1 = 2$. ونعيّن بالمثل M_2 و M_3 . ونحسب $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ و $z_2 = \frac{3}{2}i$ و $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

ونجد بقراءة الشكل

$$\cdot z'_3 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} \quad z'_2 = e^{i\pi} \quad \text{و} \quad z'_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

③ ونجد أخيراً باستعمال قواعد حساب القوى

$$z_1 z_2 = 2 \times \frac{3}{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)} = 3e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3/2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{4}{3} e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \textcircled{2}$$

$$z_3^5 = (\sqrt{3})^5 (e^{-i\frac{2\pi}{3}})^5 = 9\sqrt{3}e^{-i\frac{10\pi}{3}} = 9\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \textcircled{3}$$

مثال

ليكن θ عدداً من المجال $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. أعط الشكل الأسّي للعدد العقدي

الحل

نلاحظ أنَّ

$$\begin{aligned} z &= 1 + \cos 2\theta + i \sin 2\theta = 2 \cos^2 \theta + i(2 \sin \theta \cos \theta) \\ &= 2 \cos \theta (\cos \theta + i \sin \theta) = (2 \cos \theta) e^{i\theta} \end{aligned}$$

ولكن $\cos \theta > 0$ في حالة θ من $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. إذن الشكل الأسّي المطلوب هو



① نضع $z_3 = \sqrt{2} e^{2i\pi/3}$ و $z_2 = 3e^{-i\pi/4}$ و $z_1 = e^{i\pi/3}$

$$z_1 z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}, \quad z_1^3, \quad z_1 z_2 z_3, \quad z_3^4, \quad \frac{z_2}{z_3}$$

② اكتب بالشكل الأسّي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

$$z_2 = (1+i)\sqrt{3}e^{i\pi/3} \quad \textcircled{2} \quad z_1 = 2\sqrt{3} + 6i \quad \textcircled{1}$$

$$z_4 = (1+i\sqrt{3})^4 \quad \textcircled{4} \quad z_3 = (1-\sqrt{2})e^{i\pi/4} \quad \textcircled{3}$$

$$z_6 = (1+i\sqrt{3})^4 e^{4i\pi/3} \quad \textcircled{6} \quad z_5 = \frac{6}{1+i} \quad \textcircled{5}$$

$$z_8 = \frac{(2\sqrt{3}+2i)^5}{(1-i)^4} \quad \textcircled{8} \quad z_7 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i} \right)^5 \quad \textcircled{7}$$

$$z_{10} = 3ie^{i\pi/3} \quad \textcircled{10} \quad z_9 = -12e^{i\pi/4} \quad \textcircled{9}$$

③ نضع $Z = \frac{-\sqrt{2}}{1+i} e^{i\pi/3}$ بين أي الخواص الآتية صحيحة:

$$Z = -(1-i)e^{i\pi/3} \quad \textcircled{2} \quad |Z| = 1 \quad \textcircled{1}$$

$$Z = e^{i\frac{13\pi}{12}} \quad \textcircled{4} \quad \arg Z = -\frac{\pi}{12} \quad \textcircled{3}$$

المعادلة من الدرجة الثانية ذات الأمثل الحقيقة

نذكر أن المعادلة من الدرجة الثانية ذات الأمثل الحقيقة هي كل معادلة من الشكل $aX^2 + bX + c = 0$ ، بالمجهول X حيث a و b و c ثلاثة أعداد حقيقة و $a \neq 0$. وحل هذه المعادلة في \mathbb{C} هو إيجاد جميع الأعداد العقدية w التي تحقق $aw^2 + bw + c = 0$ ، نسمى w حلّاً للمعادلة أو جذراً لها. سنبرهن أن لهذه المعادلة عموماً حلّين في \mathbb{C} يمكن أن يكونا منطبقين.

لحل هذه المعادلة نعمد كما في حالة \mathbb{R} إلى تحليل $az^2 + bz + c$ إلى جداء ضرب عاملين، وللهذا الهدف نسعى إلى كتابته بالشكل القانوني متذكرين أن قواعد الحساب في \mathbb{C} هي نفسها قواعد الحساب في \mathbb{R} . فإذا وضعنا كما جرت العادة $\Delta = b^2 - 4ac$ أمكننا أن نكتب

$$az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

ولأن $a \neq 0$ استتتجنا أن حل المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ يؤول إلى حل

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

حيث نسمي العدد Δ ممیز المعادلة.

⦿ إذا كان $\Delta > 0$ فنحن نعلم أن للمعادلة حلّين حقيقيين وحلّين فقط، وأن \mathbb{R} محتواه في \mathbb{C} استتتجنا أن للمعادلة في \mathbb{C} حلّين هما

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

⦿ إذا كان $\Delta = 0$ فللمعادلة حلّ واحد فقط هو $z = -\frac{b}{2a}$ نسميه جذراً مضاعفاً.

⦿ إذا كان $\Delta < 0$ نستفيد من المساواة $\Delta = (i\sqrt{-\Delta})^2$ لنكتب

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 = \left(z + \frac{b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$

إذن في هذه الحالة يكون للمعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حلان عقديان متراافقان هما

$$z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

مثال

لحل المعادلة $z^2 + 6z + 34 = 0$ نلاحظ هنا أن $a = 1$ و $b = 6$ و $c = 34$. بحساب الممیز $\Delta = b^2 - 4ac = -100 < 0$ ، إذن للمعادلة حلان عقديان:

$$z_2 = \frac{-6 + 10i}{2} = -3 + 5i \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{-6 - 10i}{2} = -3 - 5i$$



بوجه عام إذا كان z_1 و z_2 جذري المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حيث $a \neq 0$ فيمكن تفريغ كثير الحدود من الدرجة الثانية $aX^2 + bX + c$ بالشكل

$$aX^2 + bX + c = a(X - z_1)(X - z_2)$$

وهنا يمكن أن يكون z_1 و z_2 حقيقين مختلفين ($\Delta > 0$) أو عقديين متراافقين ($\Delta = 0$) أو عقديين مترافقين ($\Delta < 0$).



حل في \mathbb{C} كلاً من جمل المعادلات الآتية بالجهولين z و z' : ①

$$\begin{cases} 3z + z' = 2 - 5i \\ z - z' = -2 + i \end{cases} \quad ①$$

$$\begin{cases} 3z + z' = 5 + 2i \\ -z + z' = 1 - 2i \end{cases} \quad ②$$

$$\begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3z - iz' = 1 \end{cases} \quad ③$$

حل في \mathbb{C} كلاً من المعادلات الآتية: ②

$$2z^2 - 6z + 5 = 0 \quad ①$$

$$z^2 - 5z + 9 = 0 \quad ②$$

$$z^2 + z + 1 = 0 \quad ③$$

$$z^2 - 2z + 3 = 0 \quad ④$$

$$z^2 - 2(1 + \sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} + 2) = 0 \quad ⑤$$

$$(\theta \in \mathbb{R}), \quad z^2 - 2(\cos \theta)z + 1 = 0 \quad ⑥$$

جد عددين عقديين p و q كي تقبل المعادلة $z^2 + pz + q = 0$ العدددين $1 + 2i$ و $5 - 3i$ جذرين لها.

احسب جداء الضرب ④ حل في \mathbb{C} المعادلة $(z^2 + 2z - 3)(z^2 + 2z + 5)$

$$z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z - 15 = 0$$

أفكار يجب تمثيلها

- يرتبط الشكل الجبري $z = a + ib$ حيث a و b حقيقيان، بالنقطة $M(z)$ التي إحداثياتها الديكارتية (a, b) . المحور الحقيقي هو محور الفاصل، والمحور التخييلي البحث هو محور التراتيب.
 - ويرتبط الشكل المثلثي لعدد عقدي غير معروف $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ بالإحداثيات القطبية.
 - عندما $r^2 = a^2 + b^2$ و $b = r \sin \theta$ و $a = r \cos \theta$ نجد $z = a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.
 - هندسياً، النقطة $M(\bar{z})$ هي نظيرة $M(z)$ بالنسبة إلى المحور الحقيقي. ومرافق مجموع عددين عقديين، أو جداء ضربهما أو خارج قسمتهما هو مجموع مرافق هذين العددين أو جداء ضرب مرافقهما أو خارج قسمة مرافقهما.
 - بين العددين العقديين z و \bar{z} لدينا العلاقات $z\bar{z} = |z|^2$ ، و $(z\bar{z})' = 2\operatorname{Re}(z)$ فهو إذن حقيقي، و $(z - \bar{z})' = 2i\operatorname{Im}(z)$ وهو إذن تخييلي بحث.
 - لضرب أعداد عقدية غير معدومة نضرب طويلاً لها ونجمع زواياها، ولقسمة عددين عقديين غير معدومين نقسم الطويلتين ونطرح الزاويتين.
 - تجرى الحسابات في \mathbb{C} مثلاً في \mathbb{R} مع $i^2 = -1$.
 - للمعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حيث a و b و c أعداد حقيقة و $0 \neq a \neq c$ دوماً جذران في \mathbb{C} . وهمما يحسبان كما في حالة \mathbb{R} عندما $\Delta > 0$ أو $\Delta = 0$ أو $\Delta < 0$. وعندما يكون $\Delta < 0$ نكتب
- $$z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$
- (الجذران هما: $\Delta = i^2(-\Delta)$)

منعكسات يجب امتلاكها.

- فكر باستعمال المرافق \bar{z} عند البحث عن الشكل الجيري لخارج قسمة.
- لإثبات أن z حقيقي يمكن استعمال واحدة من الخواص الآتية: $\operatorname{Im} z = 0$ أو $z = \bar{z}$ أو $\arg z = \pi$ أو $\arg z = 0$.
- لإثبات أن z تخييلي بحث يمكن استعمال واحدة من الخواص الآتية: $\operatorname{Re} z = 0$ أو $-z = \bar{z}$ أو $\arg z = -\frac{\pi}{2}$ أو $\arg z = \frac{\pi}{2}$.

أخطاء يجب تجنبها.

- لا تستعمل المتراجحات بين أعداد عقدية.

أشطر

نشاط 1 كثیرات الحدود

نعم مفهوم التابع الكثير الحدود ليصبح أي تابع P معروف على \mathbb{C} ويأخذ قيمه في \mathbb{C} من الشكل:

$$z \mapsto a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

- حيث $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ هي أعداد عقدية، وإذا كانت $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ حقيقة فلنا إن P ذو أمثل حقيقة. وإذا كان $a_n \neq 0$ فلنا إن درجة P تساوي n . نقبل صحة الخواص الآتية:
- إذا كان z_0 جذراً لكثير حدود P درجته n (أي $P(z_0) = 0$) وجد كثير حدود Q درجته $n-1$ بحيث $P(z) = (z - z_0)Q(z)$.
 - لكل كثير حدود P درجته n ، عدداً من الجذور يساوي n في \mathbb{C} على أن نكرر كل جذر بقدر درجة مضاعفته.

❶ مثال على كثير حدود من الدرجة الثالثة

نهدف إلى حل المعادلة (1) $z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = 0$

- ① علّ وجود كثير حدود من الدرجة الثانية Q يحقق: $z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = (z + 1)Q(z)$
- ② عين Q ثم حل المعادلة $Q(z) = 0$.

- ③ لتكن A و B و C نقاط المستوى التي تمثل حلول المعادلة (1) أثبت أن ABC مثلث متساوي الأضلاع.

❷ مثال على كثير حدود من الدرجة الرابعة

نهدف إلى حل المعادلة (2) $z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 = 0$

- ① أثبت بوجه عام أنه إذا كانت **أمثال P حقيقة**، وكان z_0 جذراً للمعادلة $P(z) = 0$ كان \bar{z}_0 أيضاً جذراً للمعادلة $P(z) = 0$.
- ② تتحقق أن $i\sqrt{3}$ جذر للمعادلة (2). ماذا تستنتج بالاستفادة من ①؟
- ③ استنتج وجود كثير حدود من الدرجة الثانية Q يجعل المعادلة (2) تكتب $(z^2 + 3)Q(z) = 0$.
- ④ حل المعادلة (2). لتكن A و B و C و D نقاط المستوى التي تمثل حلول المعادلة (2) أثبت أن هذه النقاط تقع على دائرة واحدة. عين مراكزها ونصف قطرها.

نشاط 2 الجذور التربيعية لعدد عقدي

نعطي عدداً عقدياً غير الصفر $w = a + ib$ ونهدف إلى حل المعادلة $z^2 - w = 0$. هناك أسلوبان ممكناً:

- يمكن أن نكتب $w = Re^{i\varphi}$ ثم نبحث عن $z = re^{i\theta}$ تتحقق (*) . تيقّن عندئذ أن $r = \sqrt{R}$ وأن

$$\cdot z_0 = \sqrt{R} e^{i\frac{\varphi}{2}} \text{ ، إذن } z \in \{z_0, -z_0\} \text{ حيث } \theta = \frac{\varphi}{2} + \pi (2\pi) \text{ أو } \theta = \frac{\varphi}{2} (2\pi)$$

- ويمكن أن نبحث عن $z = x + iy$ تتحقق (*) . وهنا علينا حل جملة المعادلتين غير الخطيتين:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \end{cases}$$

هذا يمكننا أيضاً أن نستفيد من المعادلة المساعدة $|z|^2 = |w|$ التي تنتج مباشرة من (*) وتعطي المعادلة (3) الآتية: $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. وهكذا نحل في \mathbb{R} جملة المعادلتين (1) و (3) ثم نختار من مجموعة الحلول الناتجة تلك التي تتحقق المعادلة (2).

❶ تعريف الجذور التربيعية للعدد i

- اكتب i بالشكل الأسي.

❷ تعريف الجذور التربيعية للعدد $i+1$

- أثبت أن حل المعادلة $(x+iy)^2 = i+1$ في \mathbb{R} يؤول إلى تعريف x و y تحققان

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

- حل المعادلة $z^2 = 1+i$ بأسلوب ثان، واستنتاج النسب المثلثية للزاوية $\frac{\pi}{8}$.

نشاط 3 الأعداد العقدية والتوابع المثلثية

عندما يكون z و z' عددين عقديين طولية كل منهما تساوي الواحد وزاويتهما a و b بالترتيب، تكون طولية zz' مساوية الواحد وزاويته $a+b$. بكتابة zz' بطريقتين أثبت أن

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

- ما العلاقات التي تستنتجها عند استبدال b بالمقدار $-b$ ؟ استنتاج أن

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)), \quad \sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)), \quad \cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$$

- ما العلاقات التي تستنتجها عند تعويض $a-b = q$ و $a+b = p$ ؟

$$\cos 3x - \cos 5x = \sin 6x + \sin 2x \quad \text{المعادلة المثلثية :}$$

مُنِيَّاتٍ وَمَسَائِلٍ



1 لتكن النقاط A و B و C و D نقاطاً تمثل بالترتيب الأعداد العقدية $a = 1$ و $b = e^{i\pi/3}$

$$\cdot d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\pi/6} \text{ و } c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

اكتب c بالشكل الأسّي، واكتب d بالشكل الجبري.

وضع النقاط A و B و C و D في مستوى مزود بمعلم متجانس.

أثبت أنَّ الرباعي $OACB$ معين.

2 اكتب بالشكل الأسّي حلول المعادلة :

$$(1) \quad (z^2 + 3\sqrt{3}z + 9)(z^2 - 3\sqrt{3}z + 9) = 0$$

أثبت أنَّ النقاط A و B و C و D التي تمثل جذور المعادلة السابقة هي رؤوس مستطيل.

3 بسط كتابة العدد العقدي

$$Z = \frac{1 + \cos x - i \sin x}{1 + \cos x + i \sin x}$$

موضحاً قيم x التي يكون عندها هذا المقدار موجوداً.

4 ليكن z عدداً عقدياً ما، ولتكن u عدداً عقدياً طولنته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد.

أثبت أنَّ $\frac{z - u\bar{z}}{1 - u}$ عدد حقيقي.

5 نفترض أنَّ $z \neq u$ وأنَّ $\frac{z - u\bar{z}}{1 - u}$ عدد حقيقي أثبت أنَّه إما أن يكون z حقيقياً أو أن يكون $|u| = 1$.

اكتب بالشكل الجبري كلاً من العددين :

$$z_2 = (3 + i)^4 \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x}$$

6 ليكن z و z' عددين عقديين أثبت أنَّ:

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2$$

7 ليكن المثلث ABC . أثبت تكافؤ الخاصَّتين الآتيتين:

المثلث متساوي الساقين ورأسه A .

$$\cdot 2 \sin \hat{B} \cos \hat{C} = \sin \hat{A} \quad (2)$$



لنتعلم البحث معاً

تعيين مجموعة

8

ليكن a عدداً عقدياً معطى. لتكن \mathcal{E} مجموعة الأعداد العقدية z التي تحقق :

$$z^2 - a^2 = \bar{z}^2 - \bar{a}^2$$

عین المجموعة \mathcal{E} ومتلها في مستوى مزود بمعلم.

نحو الحل

الفكرة الأولى التي تخطر لنا هي بوضع $a = \alpha + i\beta$ حيث x و y و α و β هي أعداد حقيقة، ثم نسعى إلى إيجاد معادلة ديكارتية للمجموعة \mathcal{E} .

① أثبت بهذا الأسلوب أن $M(x, y)$ تتنمي إلى \mathcal{E} إذا وفقط إذا كان $xy = \alpha\beta$.

② ناقش الحالتين $\alpha\beta = 0$ و $\alpha\beta \neq 0$ ثم عین \mathcal{E} في هاتين الحالتين.

هناك أسلوب آخر، نلاحظ أن مراافق $z^2 - a^2$ هو $\bar{z}^2 - \bar{a}^2$ أثبت تكافؤ الخواص

▪ z تتنمي إلى \mathcal{E} .

▪ $z^2 - a^2$ حقيقي.

▪ $\text{Im}(z^2) = \text{Im}(a^2)$ يساوي 0 أو $z^2 - a^2$ يساوي 0 أو $\text{Im}(z^2) = \text{Im}(a^2)$ استنتج مجدداً المجموعة \mathcal{E} .

أنجز الحل واكتبه بلغة سليمة.



قدماً إلى الأمام

نتأمل عددين عقديين z و w يحققان $|z| = 1$ و $|w| = 1$ وأثبت أن العدد العقدي

$$Z = \frac{z+w}{1+zw}$$

▪ $P(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$ نتأمل كثير الحدود

▪ $P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$ عین عددين حقيقين a و b يتحققان

▪ $P(z) = 0$ حل في \mathbb{C} المعادلة

▪ حل في \mathbb{C} المعادلة $z^3 - (3+4i)z^2 - 6(3-2i)z + 72i = 0$ إذا علمت أنها تقبل حللاً تخيليأً بحثاً.

12

ليكن $B = \alpha^2 + \alpha^3$ و $A = \alpha + \alpha^4$ و $\alpha = e^{2i\pi/5}$

أثبت أن $A + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$ واستنتج أن A و B هما جذراً للمعادلة من الدرجة

الثانية: $x^2 + x - 1 = 0$

عبر عن A بدلالة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

حل المعادلة (1) واستنتج قيمة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

13

ليكن θ عدداً حقيقياً من المجال $[\pi, \pi]$. نعرف

احسب المقادير $\frac{1+t^2}{1-t^2}$ و $\frac{2t}{1-t^2}$ و $\frac{2t}{1+t^2}$ بدلالة النسب المثلثية للعدد t .

أثبت صحة العلاقات:

$$\tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} \quad \text{و} \quad \cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \quad \text{و} \quad \sin \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

14

حل في \mathbb{C} المعادلات الآتية

$$w = -7 + 24i \quad (3), \quad w = -21 - 20i \quad (2), \quad w = -3 + 4i \quad (1)$$

حل في \mathbb{C} المعادلات الآتية:

$$z^2 + (1+4i)z - 5 - i = 0 \quad (1)$$

$$2iz^2 + (3+7i)z + 4 + 2i = 0 \quad (2)$$

$$z^2 + (1+8i)z - 17 + i = 0 \quad (3)$$

15

في حالة عدد عقدي z نضع $Z = \frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$ ونفترض أن $z \neq -1$

حيث x و y و X و Y هي أعداد حقيقة.

احسب X و Y بدلالة العدددين x و y .

أثبت أن مجموعة النقاط $M(z)$ التي يكون عندها Z حقيقياً هي مستقيم محذف منه نقطة.

أثبت أن مجموعة النقاط $M(z)$ التي يكون عندها Z تخيلياً بحثاً هي دائرة محذف منها نقطة.

16

عين في كل حالة مجموعة الأعداد العقدية z التي تتحقق الشرط المعطى

المقدار $(z+1)(\bar{z}-2)$ حقيقي.

العدد z مختلف عن $4i$ و $\frac{z+2i}{z-4i}$ عدد حقيقي.

5

تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة

1 تمثيل الأشعة بأعداد عقدية

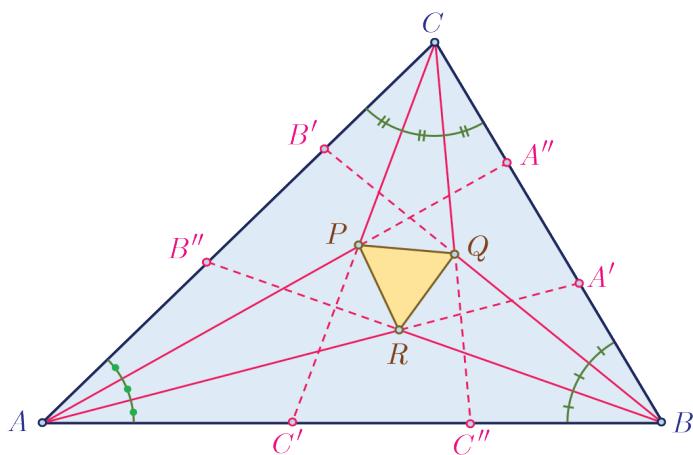
2 استعمال العدد العقدي الممثل لشعاع

3 الكتابة العقدية للتحويلات الهندسية

تعطي الأعداد العقدية أسلوباً سهلاً وجذاباً لدراسة الهندسة المستوية، إذ يمكن للعدد العقدي الواحد أن يحمل في آن معاً معلومات عن كل من مركبته.

لقد كان الدانماركي كاسبر وسيل Casper Wessel، أول من ربط جمع الأعداد العقدية بقاعدة متوازي الأضلاع لجمع الأشعة، وكان جان روبير آرغان أول من ربط بين ضرب الأعداد العقدية والتشابه في الهندسة المستوية، فضرب عدد عقدي $re^{i\theta}$ بالعدد z يؤول إلى دوارن حول المبدأ زاويته θ متبعاً بتحالٍ مرکزه المبدأ ونسبة r .

لعل إحدى مسائل الهندسة الشهيرة التي يجري إثباتها بسهولة باستعمال الأعداد العقدية هي المسألة الآتية المعروفة باسم مبرهنة مورلي Morley :
 خذ مثلثاً كيّفياً ABC ، ثم ثلث الزاوية A إلى ثلاثة أجزاء متساوية برسم المستقيمين (AA') و (AA'') ، وافعل بالمثل مع الزوايا الأخرى. يتقاطع (AA') و (BB'') في R ، ويتقاطع (CC'') و (CC') في P ، ويتقاطع (BB'') و (AA'') في Q ، عندئذ يكون المثلث PQR متساوي الأضلاع.



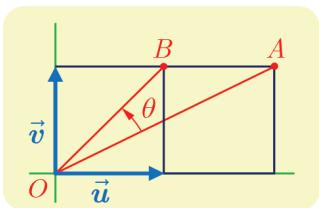
تطبيقات الأعداد العقدية

في الهندسة

انطلاق نشطة



نتأمل معلماً متجانساً $(O; \vec{u}, \vec{v})$ في المستوى.

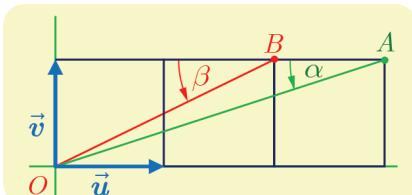


- ❶ يبيّن الشكل المجاور مريعین طول ضلع كل منهما يساوي الواحد.
يُطلب حساب النسبة $r = \frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OA}}$ وتعيين قياس لزاوية $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
- بالطبع يمكن استعمال الطرائق التقليدية، ولكننا هنا سننسى إلى استعمال الأعداد العقدية.

أعط z_A و z_B العددان العقديان اللذان يمثلان A و B .

اشرح العلاقة بين $Z = \frac{z_B}{z_A}$ والعددين المطلوبين r و θ .

احسب Z واستنتج قيم r و $\cos \theta$ و $\sin \theta$.



- ❷ يبيّن الشكل المجاور ثلاثة مربعات طول ضلع كل منهما يساوي الواحد. يُطلب حساب $\alpha + \beta$ مجموع قياسي الزاويتين المبينتين في الشكل.

أعط z_A و z_B العددان العقديان اللذين يمثلان A و B .

اشرح العلاقة بين كل من α و β وزاويتي العددان العقديين z_A و z_B .

يبَّن أنَّ المطلوب هو حساب زاوية العدد العقدي $Z = z_A \cdot z_B$.

احسب Z واستنتج قيمة $\alpha + \beta$.

تمثيل الأشعة بأعداد عقدية ①

في هذه الوحدة، نتأمل معلمًا متجانساً $(O; \vec{u}, \vec{v})$ في المستوى.

1.1. تعريف ونتائج

كما نقرن بكل نقطة $M(x, y)$ العدد العقدي $z_M = x + iy$ ، كذلك نقرن بكل شعاع $\vec{w}(a, b)$ العدد العقدي $z = a + ib$. ومنه التعريف:

تعريف 1

العدد العقدي الممثل للشعاع \vec{w} الذي مركتاه (a, b) ، هو العدد العقدي $z = a + ib$. والعدد العقدي الممثل للشعاع \overrightarrow{AB} هو $z_B - z_A$ حيث z_A و z_B هما العددان العقديان اللذان يمثلان A و B بالترتيب.

في الحقيقة، إذا كان $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ ، وكان $z_B = x_B + iy_B$ و $z_A = x_A + iy_A$ ، ومن ثم كانت $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ هما مركتا الشعاع \overrightarrow{AB} ، وكان، من ثم، العدد الذي يمثله هو العدد العقدي $z = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A) = z_B - z_A$

نتيجة 1

- تساوي شعاعين يكافئ تساوي العدددين العقديين اللذين يمثلانهما.
- إذا كان \vec{w} و \vec{w}' شعاعين يمثلانهما العددان العقديان z و z' ، وكان λ عدداً حقيقياً، مثل العددان $z + \lambda z'$ و λz الشعاعين $\vec{w} + \vec{w}'$ و $\lambda \vec{w}$ بالترتيب.

2.1. العدد العقدي المافق لمركز الأبعاد المتناسبة

مبرهنة 2

لنتأمل عدداً n من النقاط المتنقلة $(A_1; \alpha_1), (A_2; \alpha_2), \dots, (A_n; \alpha_n)$ ، التي تمثلها الأعداد العقدية z_1, z_2, \dots, z_n بالترتيب. نفترض أن $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$. عندئذ يعطى العدد العقدي الممثل للنقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لهذه النقاط بالعلاقة :

$$z_G = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$$

الإثبات

هذه نتيجة مباشرة من المساواة الشعاعية $\cdot \alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n} = (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{OG}$



إذن يعطى العدد العقدي z_I الممثل لمنتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ بالصيغة

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

ويعطى العدد العقدي z_G الممثل لمركز ثقل المثلث $[MNP]$ بالصيغة

$$z_G = \frac{z_M + z_N + z_P}{3}$$

اثبات الوقوع على استقامة واحدة باستعمال الأعداد العقدية

مثال

نتأمل معلماً متجانساً $(O; \vec{u}, \vec{v})$ في المستوى العقدي، والنقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية i $c = -18 + 7i$ $b = -6 + 3i$ $a = 6 - i$ بالترتيب. أثبتت وقوع النقاط A و B و C على استقامة واحدة.

الحل

علينا إثبات وجود عدد حقيقي λ يحقق $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$. ولكن الشاعان $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ يمثلهما العددان العقديان

$$Z_{\overrightarrow{AC}} = c - a = -24 + 8i \quad \text{و} \quad Z_{\overrightarrow{AB}} = b - a = -12 + 4i$$

ونلاحظ أن $Z_{\overrightarrow{AC}} = 2Z_{\overrightarrow{AB}}$ ، إذن $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ ومنه وقوع النقاط A و B و C على استقامة واحدة.

استعمال معلم متجانس

مثال

ليكن MNP مثلثاً ما، والنقاط A و B و C هي منصفات أضلاعه $[MN]$ و $[NP]$ و $[PM]$ بالترتيب. أثبت أن للمثلثين MNP و ABC مركز التقل نفسه.

الحل

نختار معلماً متجانساً كيفياً. ونرمز بالرموز m و n و p و a و b و c إلى الأعداد العقدية التي تمثل النقاط M و N و P و A و B و C بالترتيب. لما كانت A منتصف $[NP]$ استنتجنا أن $c = \frac{n+m}{2}$ ، ونجد بالمثل $a = \frac{n+p}{2}$ و $b = \frac{m+p}{2}$. الآن، لتكن g العدد العقدي الممثل للنقطة G مركز تقل المثلث MNP ، ول يكن g' العدد العقدي الممثل للنقطة G' مركز تقل المثلث ABC .

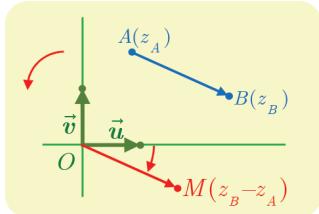
عندئذ من جهة أولى لدينا $g = \frac{1}{3}(m+n+p)$ ، ومن جهة ثانية

$$g' = \frac{1}{3}\left(\frac{n+p}{2} + \frac{p+m}{2} + \frac{m+n}{2}\right) = \frac{1}{3}(m+n+p)$$

إذن $g = g'$ ، فالنقطتان G و G' منطبقتان.

استعمال العدد العقدي الممثل لشعاع

1.2 المسافة والزاوية



ليكن \overrightarrow{AB} شعاعاً، ولتكن M النقطة التي تحقق $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ نستنتج من تساوي هذين الشعاعين أنَّ :

$$z_M = z_B - z_A$$

ولكن $|z_M| = OM = AB$ إذن

$$(1) \quad AB = |z_B - z_A|$$

وكذلك، في حالة $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ يكون $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ يكون $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ يكون $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. أنَّ

$$(2) \quad (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$$

2.2 قياس الزاوية الموجّهة

مبرهنة 3

لتكن A و B و C و D أربع نقاط تمثّلها الأعداد العقدية z_A و z_B و z_C و z_D . نفترض أنَّ $z_C \neq z_D$ و $z_A \neq z_B$.

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

الإثبات

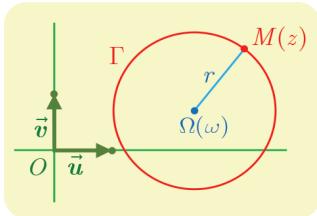
استناداً إلى علاقـة شـال في الزوايا الموجـهة لدينا

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) &= (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) = (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \\ &= \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) \\ &= \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \end{aligned}$$

ملاحظة: في الحالة الخاصة الموافقة لثلاث نقاط متباعدة M و A و B تمثّلها الأعداد العقدية z و a و b بالترتيب لدينا :

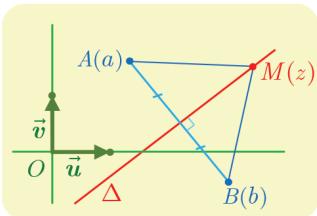
$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \arg\left(\frac{z - b}{z - a}\right)$$

3.2. تمثيل بعض المجموعات الخاصة



ليكن r عدداً حقيقياً موجباً تماماً، ولتكن ω عدداً عقدياً. عندئذ المجموعة Γ المكونة من النقاط $M(z)$ التي يتحقق العدد العقدي z الذي يمتهنها الشرط $|z - \omega| = r$ هي الدائرة التي مركزها النقطة $\Omega(\omega)$ ونصف قطرها r .

في الحقيقة، الشرط $|z - \omega| = r$ يكافيء $\Omega M = r$.



لتكن A و B نقطتان يمتهنما العددان العقديان a و b حيث $(a \neq b)$. عندئذ المجموعة Δ المكونة من النقاط $M(z)$ التي يتحقق العدد العقدي z الذي يمتهنها الشرط $|z - a| = |z - b|$ هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

في الحقيقة، الشرط $|z - a| = |z - b|$ يكافيء $MA = MB$.

تعرضاً للفهم

؟ ما الفائدة من حساب النسبة $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ في حالة $z_B \neq z_A$ ؟

لأن طولية هذا العدد تتمثل نسبة الطولين $\frac{CD}{AB}$.

لأن أي زاوية θ له هي قياس لزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

إذا كان $0 = \theta$ أو $\pi = \theta$ استنتجنا الارتباط الخطّي للشعاعين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{CD} .

إذا كان $\frac{\pi}{2} = \theta$ أو $-\frac{\pi}{2} = \theta$ استنتجنا تعمد الشعاعين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{CD} .

مثال

لتكن A و B و C و D أربع نقاط تمتلها الأعداد العقدية $a = -2$ و $b = 2$ و $c = -1 + i$ و $d = 1 - 3i$. أثبت أن المثلثين ACD و BCD قائمان.



لإثبات تعمد المستقيمين (BC) و (BD) ، يكفي أن نبرهن أن $\arg\left(\frac{d-b}{c-b}\right) = \frac{\pi}{2}$ أو $-\frac{\pi}{2}$.

الحل

لحسب العددين $Z' = \frac{d-a}{c-a}$ و $Z = \frac{d-b}{c-b}$

▪ نجد أولاً أنَّ

$$Z = \frac{-1 - 3i}{-3 + i} = \frac{(-1 - 3i)(-3 - i)}{10} = i$$

ومن ثمَّ $\arg(Z) = \frac{\pi}{2}$ و $|Z| = 1$. هندسياً هذا يعني أنَّ $\widehat{CBD} = \frac{\pi}{2}$ فالمثلث CBD متساوي الساقين وقائم في B .

وكذلك نجد ▪

$$Z' = \frac{3 - 3i}{1 + i} = \frac{3(1 - i)(1 - i)}{2} = -3i$$

ومن ثمَّ $\arg(Z') = -\frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أنَّ المثلث ACD قائم في A .

تَدْرِبْهُ

① لتكن النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية:

$$z_C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \quad z_B = 2 + i \quad z_A = -1 + i$$

١ وضع النقاط A و B و C في شكل.

٢ احسب الأعداد العقدية التي تمثل الأشعة \overrightarrow{BC} و \overrightarrow{AC} و \overrightarrow{AB} .

٣ احسب أطوال أضلاع المثلث ABC وبيّن إذا كان مثلاً قائماً في C .

② لتكن النقاط A و B و C و D التي تمثلها الأعداد العقدية:

$$z_D = -3 - i \quad z_C = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \quad z_B = \frac{7}{2} + i \quad z_A = \frac{3}{2}i$$

١ وضع النقاط A و B و C و D في شكل.

٢ ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

٣ لتكن النقطتان A و B اللتان تمثلهما الأعداد العقدية : $z_B = 2(1 - i\sqrt{3})$ و $z_A = 2(1 + i\sqrt{3})$

٤ أثبت أنَّ A و B تنتسبان إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها يساوي 4.

٥ جد العدد العقدي الممثّل للنقطة C التي تجعل O مركزاً ثالثاً للمثلث ABC .

٦ ما طبيعة المثلث ABC ؟

٧ نتأمل شعاعين \vec{U} و \vec{V} يمثلهما العددان العقديان u و v بالترتيب. نفترض أنَّ $v = iu$ ونضع

أثبت أنَّ المثلث ABC قائم في A و متساوي الساقين.

⑤ المثلثان ABC و $A'B'C'$ معروfan بالأعداد العقدية التي تمثل رؤوسهما:

$$\begin{aligned} c &= 2 + i, & b &= 2 + 3i, & a &= 1 - i, \\ c' &= 4 + i, & b' &= 3 - i, & a' &= -2 + 3i, \end{aligned}$$

١ احسب العدد الممثل للشّعاع $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$.

٢ جد العدد العقدي الممثل للنقطة G مركز تقل المثلث ABC .

٣ أثبت أن G هي مركز تقل المثلث $A'B'C'$.

٦ لتكن النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية:

$$c = 3 + \frac{7}{4}i \text{ و } b = 2 - \frac{5}{4}i \text{ و } a = 1 + \frac{3}{4}i$$

١ وضع النقاط A و B و C في شكل ما العلاقات التي تربط الأعداد العقدية الممثلة للشعاعين \overrightarrow{AC} و \overrightarrow{AB} ؟

٢ استنتج أن ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين.

٣ احسب العدد العقدي الممثل للنقطة A' التي يجعل $ABA'C'$ مربعاً.

٧ لتكن النقاط A و B و C و D التي تمثلها الأعداد العقدية:

$$d = -4 - 2i \text{ و } c = 4 + 2i \text{ و } b = -1 + 7i \text{ و } a = 2 - 2i$$

١ لتكن Ω النقطة التي يمثلها العدد العقدي $\omega = -1 + 2i$. أثبت وقوع النقاط A و B و C على دائرة مركزها Ω ونصف قطرها يساوي 5.

٢ ليكن e العدد الممثل للنقطة E منتصف $[AB]$. احسب e وبرهن أن DEC متساوية الأضلاع.

٣ ماذا يمثل المستقيم (EA) في المثلث DEC ؟

٨ لتكن النقطتان A و B اللتان تمثلهما الأعداد العقدية : $1 + 3i$ و $2i + 3$ بالترتيب. مثل في كل من الحالتين الآتتين مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقق:

$$|z - 1| = |z - 3 - 2i| \quad ①$$

$$|z - 3 - 2i| = 1 \quad ②$$

الكتاب العقدي للتحويلات الهندسية

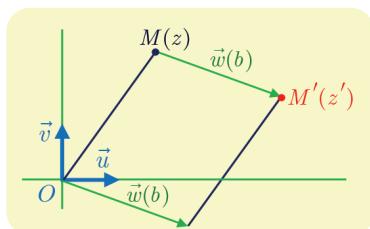
3

في هذه الفقرة نزود المستوى بمعلم متجانس ومبادر $(O; \vec{u}, \vec{v})$. إذا كان \mathcal{U} تحويلاً يقرن بكل نقطة M يمثلها العدد العقدي z نقطة M' يمثلها العدد العقدي z' . عندئذ يمكننا أن نقرن بالتحويل \mathcal{U} تابعاً معرفاً على \mathbb{C} بالصيغة $f : z \rightarrow z' = f(z)$.

وما الكتابة $z' = f(z)$ إلا الصيغة العقدية للتحويل \mathcal{U} .

1.3. الصيغة العقدية للانسحاب

مبرهنة 3



ليكن \vec{w} شعاعاً يمثله العدد العقدي b . عندئذ هناك تكافؤ بين

الخاصتين:

① T هو الانسحاب الذي شعاعه \vec{w} .

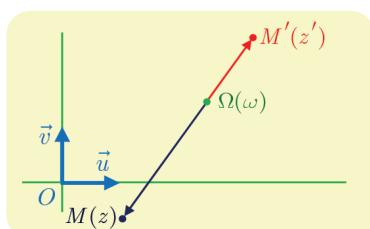
② الصيغة العقدية للتحويل T هي $z' = z + b$.

الإثبات

في الحقيقة، تكافؤ الخاصة ① القول إن $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$ ، وهذا يعني أن $z' - z = b$ أو $z' = z + b$. وهذه هي الخاصة ②.

2.3. الصيغة العقدية للتحاكي

مبرهنة 4



لتكن Ω التي يمثلها العدد العقدي w ، ولتكن k عدداً حقيقياً غير معروف. عندئذ هناك تكافؤ بين

الخاصتين:

① H هو التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k .

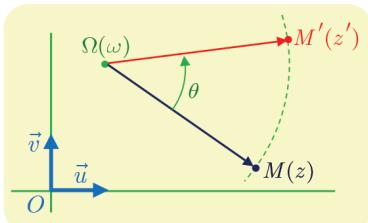
② الصيغة العقدية للتحويل h هي $z' - \omega = k(z - \omega)$.

الإثبات

في الحقيقة، تنص الخاصة ① على أن $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} = M' - \Omega$ وهذا يكافي القول إن $H(M) = M'$ يعني أن $z' - \omega = k(z - \omega)$ ، وهي الخاصة ②.

3.3. الصيغة العقدية للدوران

مبرهنة 5



لتكن Ω التي يمثلها العدد العقدي ω ، ولتكن θ عدداً حقيقياً. عندئذ هناك تكافؤ بين الخصائص:

❶ R هو الدوران الذي مركزه Ω وزاويته θ .

❷ الصيغة العقدية للتحويل R هي $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

الإثبات

في الحقيقة، تنص الخاصية ❶ على أن $R(\Omega) = \Omega'$ وهذا يعني أن R وفي حالة

$M \neq \Omega$ ، يكفي هذا القول إن $\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} = \theta$ و $\Omega M' = \Omega M$

$$\arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta \quad \left|\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1$$

وهذا يعني أن الشكل الأسّي للعدد $\frac{z' - \omega}{z - \omega}$ هو $e^{i\theta}$ ، أي $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ ، وهذه النتيجة تبقى صحيحة في حالة $\omega = z$ لأن هذه تقتضي $\omega = z'$ وتنتفق مع $R(\Omega) = \Omega$. ومنه الخاصية ❷.

وبوجه خاص الصيغة العقدية للدوران الذي مركزه O وزاويته θ هي $z' = e^{i\theta}z$



تعميراً للفهم

؟؟؟ كيف نستعمل الصيغة العقدية لتحويل؟

■ إذا كان U تحويلاً مطعى، ففي حالة كل نقطة $M(z)$ تفيد الصيغة العقدية في حساب العدد العقدي z' الذي يمثل M' صورة M وفق U .

مثال التحويل H هو التحاكي الذي مركزه $(i+1)\Omega$ ونسبة $3 = k$. إذن الصيغة العقدية لهذا

التحاكي هي $z' = 3z - 2 - 2i$ أو $z' = 3(z - (1+i))$. إذن صورة النقطة

A' وفق H هي A' التي يمثلها العدد العقدي $A(2-i) - 2 - 2i = 4 - 5i$

إذا ارتبطت النقطتان $M(z)$ و $M'(z')$ بعلاقات مثل:

• $z' = z + b$ كانت M' صورة M بالاتساحب الذي شاعره ممثلاً بالعدد العقدي b .

• $z' - \omega = k(z - \omega)$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$ كانت M' صورة M وفق التحاكي الذي مركزه ω ونسبة k .

• $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$ كانت M' صورة M وفق الدوران الذي مركزه ω .

وزاويته θ . وإذا كان $z' = e^{i\theta}z$ كان $\Omega = O$.

؟ حول الشكل المفتاحي: مثلث قائم ومتتساوي الساقين.

إذا كانت $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ ثلات نقاط في المستوى، عندئذ يكون ABC قائم الزاوية في A ومتتساوي الساقين إذا وفقط إذا كانت B صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ أو $-\frac{\pi}{2}$. وهذا يعني أن $c - a = -i(b - a)$ أو $c - a = i(b - a)$.

؟ حول الشكل المفتاحي: مثلث متتساوي الأضلاع.

إذا كانت $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ ثلات نقاط في المستوى، عندئذ يكون ABC مثلثاً متتساوياً الأضلاع إذا وفقط إذا كانت B صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$ أو $-\frac{\pi}{3}$ وهذا يعني أن $c - a = e^{-i\pi/3}(b - a)$ أو $c - a = e^{i\pi/3}(b - a)$.

تَدْرِبْ

① لتكن M النقطة التي يمثلها العدد العقدي $i + z$. جد العدد العقدي $/z'$ الممثل للنقطة M' صورة M وفق التحويل الموصوف في كل مما يأتي:

- ١ T الانسحاب الذي شعاعه $\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$. التحاكي الذي مركزه O ونسبة 3.
- ٢ R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$. التناظر الذي مركزه $(1 - 3i)$
- ٣ R الدوران الذي مركزه $(2 - i)$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$. التناظر المحوري الذي محوره (Ox).

② فيما يأتي يرتبط العددين العقديان a و b الممثلان لل نقطتين A و B بالعلاقة المعطاة. عين طبيعة التحويل الهندسي الذي يقرن النقطة B بالنقطة A :

$b = -ia$	٢	$b = a - 1 + 3i$	١
$b = 2a$	٤	$b = \bar{a}$	٣
$b - i = e^{i\pi/3}(a - i)$	٦	$b - 1 = -(a - 1)$	٥
$b + 1 - i = e^{i\pi/4}(a + 1 - i)$	٨	$b = a + 4 - 3i$	٧

③ لتكن النقطتان $G(3 + i\sqrt{3})$ و $H(3 - i\sqrt{3})$. ولتكن R الدوران الذي مركزه O ويحقق . احسب قياس الزاوية $(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH})$ ، واستنتج الصيغة العقدية للدوران R . $R(G) = H$

فيما يأتي نتأمل النقاط A و B و C و D و M و M' التي تمثلها الأعداد العقدية a و b و c و d و z و z' .

أفكار يجب تمثيلها



العدد $b - a$ يمثل الشعاع \overrightarrow{AB} .

تافق كل مساواة شعاعية مساواة بين الأعداد العقدية المواقفة.

العدد العقدي الموافق لمركز الأبعاد المتناسبة لعدد n من النقاط المتقلّلة، هو المتوسط المتقّل للأعداد العقدية التي تمثل هذه النقاط.

$$\cdot (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(b - a) \text{ و } AB = |a - b|$$

في حالة $a \neq b$ و $c \neq d$ تفيد معرفة $\frac{d - c}{b - a}$ في إعطاء معلومتين: أولاً وتعني أن $r = \left| \frac{d - c}{b - a} \right|$

$$\cdot (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \theta = \arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right) \text{ وثانياً ، } CD = rAB$$

منعكسات يجب امتلاكها.



لإثبات وقوع A و B و C على استقامة واحدة، أثبت وجود عدد حقيقي k يحقق المساواة

$$\frac{c - a}{b - a} \text{ أو أن } \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) \in \{0, \pi\} \text{ أو أن } c - a = k(b - a)$$

لإثبات تعمد المستقيمين (AB) و (CD) أثبت أن $\frac{c - d}{b - a} = \arg\left(\frac{c - d}{b - a}\right) \in \left\{\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right\}$

تخيلي بحث.

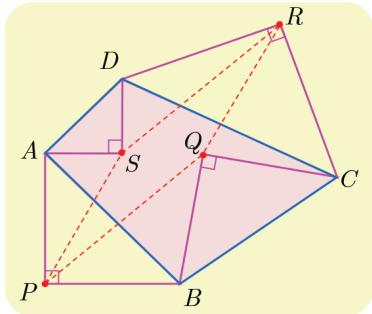
أخطاء يجب تجنبها.



لا تنسَ تزويد المستوى بمعلم متجانس قبل استعمال الأعداد العقدية.

أشطر

نشاط 1 متوازي الأضلاع وربع الدورة



نتأمل في مستو مزود بمعلم متاجنس رباعياً محدباً $ABCD$ ونُنشئ عليه مثلثات قائمة ومتتساوية الساقين PAB و QBC و SDA و RCD بحيث

$$(\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QC}) = \frac{\pi}{2} \text{ و } (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) = -\frac{\pi}{2}$$

$$(\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{SA}) = \frac{\pi}{2} \text{ و } (\overrightarrow{RC}, \overrightarrow{RD}) = -\frac{\pi}{2}$$

نهدف إلى استعمال الأعداد العقدية في إثبات أن $PQRS$ متوازي الأضلاع.
لنفترض أن الشكل مرسوم في المستوى الموجّه، وقد زوّدناه بمعلم متاجنس مباشر. ولنرّمز a و b و c و d إلى الأعداد العقدية التي تمثل النقاط A و B و C و D ، وكذلك لنرّمز p و q و r و s إلى الأعداد العقدية التي تمثل النقاط P و Q و R و S .

① الدوران الذي مرّزه P وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ينقل A إلى B . استعمل الصيغة العقدية لتثبت أنَّ

$$p = \frac{1}{2}(a(1+i) + b(1-i))$$

② عبر بالمثل عن q و r و s بدلالة a و b و c و d .

③ تيقن أنَّ $p + r = q + s$ ، ثم استنتج المطلوب.

نشاط 2 الجذور التكعيبية للواحد. المثلث المتتساوي الأضلاع

نهدف في هذه الفقرة إلى تعين حلول المعادلة $z^3 = 1$ في \mathbb{C} ، ثم استعمال ذلك لإعطاء خاصية مميزة للمثلث متتساوي الأضلاع.

① في حالة $0 \neq z$ نرمز بالرموز r إلى طولية z وبالرموز θ إلى زاويته من المجال $[0, 2\pi]$.

② تيقن أنَّ الشرط $z^3 = 1$ يقتضي أن يكون $1 = r e^{i\theta}$ حيث k عدد صحيح.

③ تحقق أنَّ الشرط $\theta \in [0, 2\pi]$ يقتضي في الحقيقة أنَّ $k \in \{0, 1, 2\}$.

④ استنتاج أنَّ مجموعة حلول المعادلة $z^3 = 1$ محتواة في $\mathbb{U}_3 = \{1, e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3}\}$.

⑤ وبالعكس تتحقق أنَّ كل عنصر من $\mathbb{U}_3 = \{1, e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3}\}$ هو حل لالمعادلة $z^3 = 1$.

⑥ مثل النقاط $M_0(1)$ و $M_1(e^{2i\pi/3})$ و $M_2(e^{4i\pi/3})$ في المستوى، وتيقن أنَّها تؤلّف رؤوس مثلث متتساوي الأضلاع.



نسمى حلول المعادلة $z^3 = 1$ الجذور التكعيبية للواحد ونرمز إلى مجموعتها بالرمز \mathbb{U}_3 .

وكذلك نرمز إلى $e^{2i\pi/3}$ بالرمز j . لاحظ أن $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$.

$$\text{⑥ تحقق أن } \bar{j} = j^2 = e^{-2i\pi/3}, 1 + j + j^2 = 0.$$

2 نزود المستوى بعلم **متاجنس مباشر** ($O; \vec{u}, \vec{v}$). ونتأمل ثلاثة نقاط متباعدة A و B و C تمثلها الأعداد العقدية a و b و c . نقول إن ABC مثلث متتساوي الأضلاع **مباشر** إذا كان عند قراءة رؤوسه بهذا الترتيب: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ ندور في الاتجاه الموجب. وهذا يكفي القول إن A هي صورة C

وفق الدوران الذي مرکزه B وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

استعمل نتائج الفقرة السابقة لتثبت أن ABC مثلث متتساوي الأضلاع **مباشر** إذا وفقط إذا كان

$$a + bj + cj^2 = 0$$

3 نقرن بكل عدد $z \neq 1$ ، النقاط $R(1)$ و $M(z)$ و $M'(\bar{z})$.

① ما هي قيم z التي تجعل M و M' مختلفتين؟

② نفترض تحقق الشرط السابق. أثبت أن Δ مجموعة النقاط $(M(z))$ التي تجعل المثلث RMM' مثلثاً متتساوي الأضلاع **مباشر**، هي مستقيم محذفة منه نقطة.



مُرئيات ومسائل



1

نتأمل النقاط A و B و C التي تتوافق بالترتيب الأعداد العقدية $a = 8$ و $b = -4 + 4i$ و $c = -4i$

$$\cdot c = -4i$$

$$\cdot b - c = i(a - c) \quad \text{تحقق أن } \text{a.} \quad \textcircled{1}$$

b. استنتج أن المثلث ABC مثلث قائم ومتتساوي الساقين.

$$\cdot z' = e^{i\pi/3}z \quad \text{نقرن بكل نقطة } M(z) \text{ النقطة } M'(z') \text{ الموافقة للعدد العقدي } \text{a.} \quad \textcircled{2}$$

ما التحويل الهندسي الموافق؟

b. احسب الأعداد العقدية a' و b' و c' الموافقة للنقاط A' و B' و C' صور A و B و C وفق هذا التحويل.

لتكن P و Q و R منتصفات القطع المستقيمة $[A'B]$ و $[B'C]$ و $[C'A]$ ، ولتكن p و q و r الأعداد العقدية التي تتوافقها.

$$\cdot r = q - p \quad \text{احسب } \text{a.}$$

$$\cdot r - p = e^{i\pi/3}(q - p) \quad \text{تحقق أن } \text{b.} \quad \textcircled{3}$$

c. استنتاج أن المثلث PQR متتساوي الأضلاع.

نتأمل مثلاً OAB فيه $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha$ حيث $\alpha \in [0, \pi]$. نُنشئ خارج هذا المثلث المربعين

$OAMN$ و $OBPQ$ ومتوازي الأضلاع $NOQR$. نهدف في هذا التمرن إلى إثبات أن المستقيمين (OR) و (AB) متعامدان وأن $OR = AB$ ، وذلك باستعمال الأعداد العقدية.

لنختر معلماً متجانساً مباشراً (O, \vec{u}, \vec{v}) . ولتكن a و b العددان العقديان اللذين يمثلان A و B .

a. ما هي صور النقطتين N و B وفق الدوران ربع دورة مباشرة حول O ؟

b. نرمز n إلى العدد العقدي الممثل للنقطة N ، و q للعدد العقدي الموافق للنقطة Q . أثبت أن $q = ib$ و $n = -ia$.

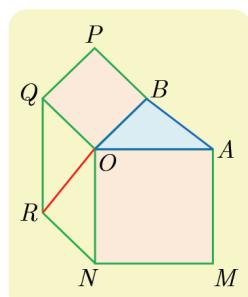
a. ② عَبَّر عن \overrightarrow{OR} بدلالة \overrightarrow{ON} و \overrightarrow{OQ} .

استنتاج العدد العقدي r الذي يمثل النقطة R بدلالة a و b .

c. ما العدد العقدي الممثل للشعاع \overrightarrow{AB} ؟

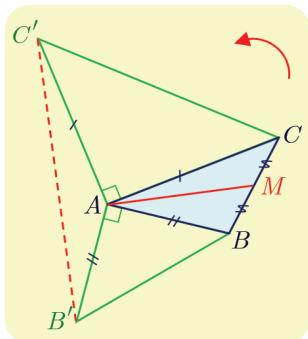
أثبت إذن أن $OR = AB$ وأن $(\vec{u}, \overrightarrow{OR}) = \frac{\pi}{2} + (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$. واستنتاج تعامد المستقيمين (OR) و (AB) .

الصورة المرسومة توضح التحويل الهندسي المطلوب.





لنتعلم البحث معًا



دراسة شكل 3

نتأمل في المستوى ABC مثلاً مباشر التوجيه كييفياً. لتكن M منتصف $[BC]$ ، وليكن $AB'B$ و $ACC'B$ مثليين قائمين في A ومتتساوي الساقين مباشرين. أثبت أنَّ المتوسط (AM) في المثلث $B'C'$ هو ارتفاع في المثلث ABC وأنَّ $B'C' = 2AM$.

نحو الحل

نبدأ باختيار معلم مباشر مناسب. تؤدي النقطة A دوراً أساسياً، لذلك نعتبرها مبدأ لهذا المعلم. ونرمز بالرمزين b و c إلى العددين العقديين اللذين يمثلان النقطتين B و C . احسب بدلالة b و c الأعداد العقدية b' و c' و m الممثلة للنقاط B' و C' و M بالترتيب.

نهدف إلى إثبات أنَّ $\overrightarrow{B'C'}$ عمودي على \overrightarrow{AM} ، الذي يؤول إلى إثبات أنَّ

$$\frac{B'C'}{AM} = 2 \quad \text{وأن} \quad (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{أو} \quad (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}) = +\frac{\pi}{2}$$

ومنه تأتي فكرة حساب النسبة $\frac{c' - b'}{m - a}$ ، التي تعطي مباشرة جميع المعلومات المطلوبة. احسب هذه النسبة واستنتج الخاصة المطلوبة.

أنجز الحل واكتبه بلغةٍ سليمة.



البحث عن مجموعة 4

نزوء المستوى بمعلم متجانس مباشر $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نقرن كل نقطة $M(z)$ حيث $z \neq i$ بالنقطة

$$z' = \frac{z+2}{z-i} \quad \text{حيث} \quad M(z')$$

- عين Δ مجموعة النقاط M التي يكون عندها z' عدداً حقيقياً.
- عين Γ مجموعة النقاط M التي يكون عندها z' عدداً تخيلياً بحثاً.

نحو الحل

التفسير الهندسي: الشرط z' عدد حقيقي يكفي القول $\text{Im}(z') = 0$ أو $\bar{z}' = z'$ ، أو $\{\arg z' \in \{0, \pi\}\}$

(في حالة $0 \neq z'$). ولأنَّ z' من الشكل $\frac{z-a}{z-b}$ وجدنا من المناسب استعمال الخاصة الأخيرة.

لنرمز a و b و z إلى الأعداد العقدية التي تمثل النقاط A و B و M . ما الزاوية بين شعاعين

$$\arg \left(\frac{z-a}{z-b} \right) \quad ? \quad \text{التي يقيسها المقدار}$$

لوضع z' بالشكل $\frac{z - (-2)}{z - i}$ ، نكتب $z' = \frac{z - a}{z - b}$ ، ونعرف النقاطين $A(i)$ و $B(-2)$.

وضع هاتين النقاطين.

تحقق أن z' حقيقي إذا وفقط إذا كان $M = B$ أو $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \in \{0, \pi\}$.

مثل المجموعة Δ وعّين طبيعتها الهندسية. (لا تنس أن $i \neq z$ ومن ثم $M \neq A$).

عّين بالمثل المجموعة Γ ومثلها هندسياً.

أنجز الحل واكتبه بلغة سليمة.



قدماً إلى الأمام

5 خاصية مميزة لمتوازي الأضلاع

تمثّل الأعداد العقدية a و b و c و d أربع نقاط A و B و C و D . أثبت أن الرباعي $ABCD$ يكون متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا كان $a + c = b + d$.

6 حساب النسب المثلثية للزوايا

تأمل النقاطين A و B اللذين يمثلهما العددان 2 و b . ولتكن I منتصف $[AB]$.

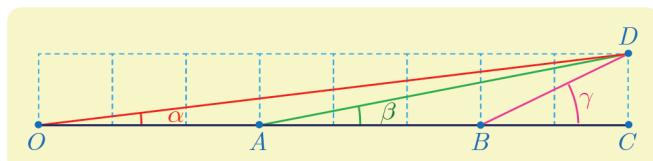
a. ارسم شكلاً مناسباً، وبين طبيعة المثلث OAB .

b. استنتاج قياساً للزاوية $(\vec{u}, \overrightarrow{OI})$.

a. احسب العدد العقدي z_I الممثل للنقطة I بصيغته الجبرية والأسية.

b. استنتاج كلاً من $\sin \frac{3\pi}{8}$ و $\cos \frac{3\pi}{8}$.

تأمل الشكل واحسب المجموع $\alpha + \beta + \gamma$ ، حيث α و β و γ هي القياسات الأساسية للزوايا الموجّهة $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$ ، $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ و $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$ بالترتيب.



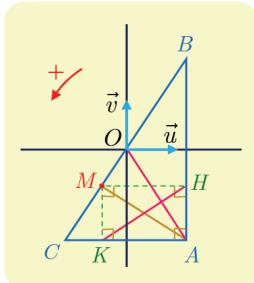
نقرن بكل نقطة $M(z)$ من المستوى حيث $-z \neq -\frac{1}{2}i$ النقطة M' التي يمثلها العدد العقدي

$z' = \frac{z + 2i}{1 - 2iz}$. لتكن Γ الدائرة التي مرکزها O ونصف قطرها 1 . أثبت أنه إذا انتمت M إلى

Γ انتمت M' إلى Γ أيضاً. أيكون العكس صحيحاً؟

8

٩ مسألة تعامد



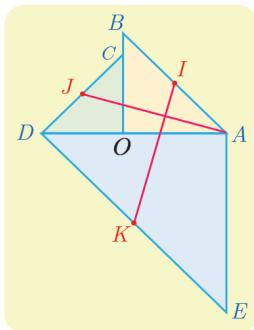
نتأمل في المستوى الموجّه، متّثلاً مباشراً ABC قائماً في A . النقطة M هي المسقط القائم للنقطة A على (BC) بالترتيب، و K و H هما المسقطان القائمان للنقطة M على (AC) وعلى (AB) بالترتيب. نهدف إلى إثبات تعامد المستقيمين (OA) و (HK) .

نختار معلماً متجانساً ومباشراً $O; \vec{u}, \vec{v}$ بحيث تقع O في منتصف $[BC]$ ويكون \vec{u} عمودياً على (AB) و \vec{v} شعاعاً موجّهاً للمستقيم (AB) . ونرمز a, b, c, h, k, m إلى الأعداد العقدية التي تمثل النقاط A, B, C, H, K, M .

$$\cdot a - m = \overline{h - k} \quad \text{و } a = \overline{b} \quad \text{①}$$

$$\cdot \arg\left(\frac{a - m}{b}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{أو} \quad \arg\left(\frac{a - m}{b}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{②}$$

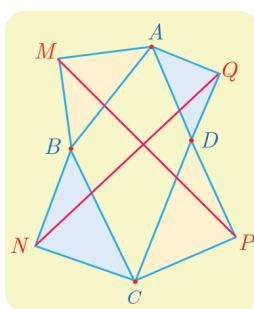
$$\cdot \arg\left(\frac{h - k}{a}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{أو} \quad \arg\left(\frac{h - k}{a}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{بـ استنتاج أنـ} \quad \text{ثم أثبت المطلوب.}$$



نتأمل في المستوى الموجّه الشكل المجاور. المثلثات OCD و OAB و ADE مثلثات قائمة ومتّساوية الساقين ومبشرة. النقط I و J و K هي منتصفات أوتار هذه المثلثات. نهدف إلى إثبات تعامد المستقيمين (AJ) و (IK) وأن $IK = AJ$. نختار معلماً متجانساً مباشراً مبدئاً O . ونرمز a و c إلى العدددين العقديين الممثّلين للنقاطين A و C .

١٠

- a. عبر بدلالة a و c عن الأعداد العقدية التي تمثل النقاط B و D و E .
- b. استنتج الأعداد العقدية z_I و z_J و z_K التي تمثل النقاط I و J و K .
- اثبت أنـ $(AJ) \perp (IK)$. ثم استنتاج الخواص المطلوبة.



نتأمل في المستوى الموجّه رباعياً محذّباً مباشراً $ABCD$. ننشئ خارجه النقاط M و N و P و Q التي يجعل المثلثات NCB و MBA و DQA و PDC قائمة في M و N و P و Q بالترتيب ومتّساوية الساقين ومبشرة. أثبت باستعمال الأعداد العقدية أنـ $MP = NQ$ وأنـ المستقيمين (MP) و (NQ) متّعامدان.

١١

12

نتأمل في المستوى الموجّه مثلاً متساوي الأضلاع مباشراً ABC مركزه النقطة I . D نقطة من داخل القطعة المستقيمة $[BC]$. تُنشئ مثليّن متساوبي الأضلاع مباشرين BED و DFC . ونعرف J و K مركزي المثلثين BED و DFC . نهدف إلى إثبات أن المثلث IJK متساوي الأضلاع. نختار معلماً متجانساً مباشراً $\cdot a = BC = \vec{BC} = a\vec{u}, \vec{v}$ حيث (B, \vec{u}, \vec{v}) بحسب ① احسب، بدالة a ، العددين العقديين z_A و z_I اللذين يمثلان A و I بالترتيب.

نفترض أن ② احسب بدالة $t \in [0, 1]$. احسب بدالة a و t ، العددين العقديين z_J و z_K اللذين يمثلان J و K بالترتيب.

تحقق أن ③ $z_K - z_I = e^{i\pi/3}(z_J - z_I)$ ، واستنتج الخاصّة المرجوّة.

13

نزوّد المستوى العقدي بمعلم متجانس مباشر $(O; \vec{u}, \vec{v})$. النقاط A و A' و B و B' هي النقاط المواقفة للأعداد العقدية 1 و -1 و i و $-i$ بالترتيب.

نقرن كل نقطة $M(z)$ مختلفة عن النقاط O و A و A' و B و B' النقطتين $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ بحيث يكون المثلثان AMM_1 و BMM_2 قائمين ومتساوبي الساقين بحيث

$$(\overrightarrow{M_1B}, \overrightarrow{M_1M}) = (\overrightarrow{M_2M}, \overrightarrow{M_2A}) = \frac{\pi}{2}$$

رسم شكلاً مناسباً.

• ② علّ صحة المساوّتين $1 - z_2 = i(z - z_2)$ و $z - z_1 = i(i - z_1)$.

b. عبر عن z_1 و z_2 بدالة z .

③ نهدف إلى تعين النقاط M التي تجعل المثلث OM_1M_2 مثلاً متساوي الأضلاع.

a. أثبت أن الشرط $OM_1 = OM_2$ يُكافئ $|z + 1| = |z + i|$ واستنتج Δ مجموعة النقاط M التي تجعل $OM_1 = OM_2$ ، ورسم Δ على الشكل نفسه.

b. أثبت أن الشرط $OM_1 = M_1M_2$ يُكافئ $|z + 1|^2 = 2|z|^2$.

c. استنتاج Γ مجموعة النقاط M التي تحقق $OM_1 = M_1M_2$ ، ورسم Γ على الشكل نفسه.

d. استنتاج مما سبق النقاط M التي تجعل OM_1M_2 مثلاً متساوي الأضلاع. وحدّدها على الشكل.

6

التحليل التوافقي

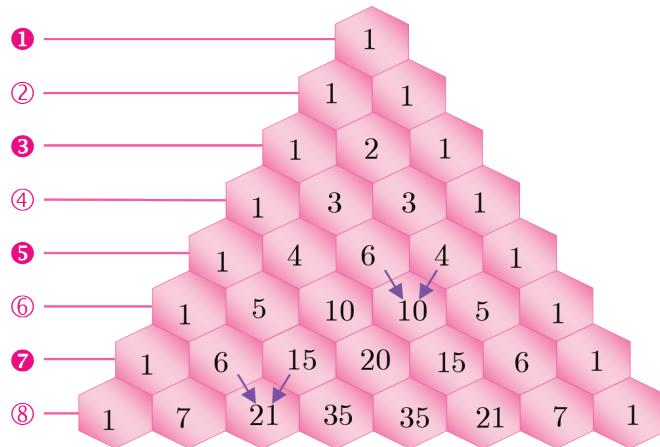
إنشاء قوائم من عناصر مجموعة 

التوافق 

خواص عدد التوافق $\binom{n}{r}$ ، ومنشور ذي الحدين 

الكرجي

هو أبو بكر محمد بن الحسن الكرجي، ويُعرف أيضًا باسم الكرخي، توفي الله عام 1029 مـ، يُعرف القليل عن حياة هذا العالم ولكن من المؤكّد أنه عاش في بغداد حوالي العام 1000 مـ. أهمّ أعماله كتاب يحمل اسم "الفخري" نسبة إلى اسم حاكم بغداد فخر الملك في تلك الفترة. تأتي أهميّة هذا العمل من كونه أول دراسة مفصّلة لجبر كثيرات الحدود. ضمن الكرجي كتابه عدداً من منشورات ذي الحدين.



بعد أن اكتشف الأنماط الظاهرة في نشر كلّ من $(a+b)^2$ و $(a+b)^3$ و $(a+b)^4$ استطاع اكتشاف القاعدة التي تفيد في حساب الأمثل $\binom{n}{k}$ في منشور ذي الحدين $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ ، وتحديداً $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

نظم هذه الأمثل في جدول له شكل مثلث. أسماء الأوربيون في القرن السابع عشر باسم مثلث باسكال. اكتشف الكرجي مجموع مربعات ومجموع مكعبات الأعداد الطبيعية حتى n ، وعبر عن نتائجه بالشكل:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \left\lfloor \frac{2n+1}{3} \right\rfloor (1+2+\dots+n)$$
$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2$$

ويمكن اعتباره أب الإثبات بالتدريج.

التحليل التواصقي

انطلاق نشطة



نشاط 1 تعداد القوائم : الأشجار والخانات.

❶ مسائل التعداد

كثيراً ما يؤول حل بعض مسائل التعداد إلى الإجابة عن السؤال الآتي : لدينا مجموعة E مكونة من n عنصراً. نعطي عدداً طبيعياً p ، ونهتم بعدد القوائم المكونة من p بندأً مأخوذأً من E . لاحظ أنّ القائمة تحترم الترتيب، فهناك أول عنصر في القائمة، وهناك ثاني عنصر في القائمة وهكذا، فالقائمة (a, b, c, \dots) مختلفة عن القائمة (a, c, b, \dots) ، وكذلك يمكن للعنصر نفسه أن يظهر مرات عدّة في بندو القائمة، فمثلاً (a, b, b, \dots) هي أيضاً قائمة.

❶ **إلقاء قطعة نقود.** تلقي قطعة نقود ثلث مرات متتالية، في كلّ مرة يمكن أن يظهر الوجه H أو الفقا T . يمكن تمثيل كل نتيجة للتجربة بكلمة مثل HTT إذا ظهر في المرة الأولى الوجه H ثم ظهر القفا T في المرتين اللاتين.

❷ ما عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة ؟

لاحظ أنه إذا رمنا إلى المجموعة $\{H, T\}$ بالرمز E ، كان المطلوب هو عدد القوائم المكونة من ثلاثة بندو مأخوذة من E . هنا إذن $p = 3$ و $n = 2$.

❸ **الترتيب.** في مباراة للجري يتنافس خمسة متسابقين.

❹ ما هو عدد النتائج المختلفة الممكنة لهذه المباراة مع افتراض عدم وقوع حالات تساوي في الترتيب؟

لنسم المتسابقين A و B و C و D و E ، ولتكن $\{A, B, C, D, E\} = \mathcal{E}$. إنّ عدد النتائج الممكنة هو عدد جميع القوائم المكونة من خمسة بندو مختلفة مأخوذة من \mathcal{E} . هنا إذن $n = 5$ و $p = 5$.

❺ **السحب دون إعادة.** يحوي صندوق خمس كرات مرقّمة ❶ و ❷ و ❸ و ❹ و ❺. نسحب على التتالي ثلاثة كرات ونسجّل وفق ترتيب السحب أرقام هذه الكرات مثلاً $(4, 1, 3)$.

❻ ما عدد النتائج الممكنة لهذه العملية؟

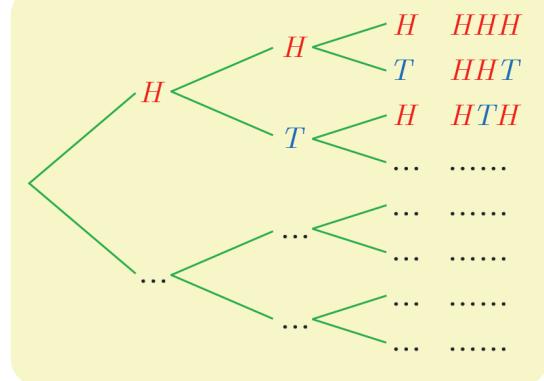
إنّ عدد النتائج الممكنة هو عدد جميع القوائم المكونة من ثلاثة بندو مختلفة - لأنّ الكرة المسحوبة لا تعود إلى الصندوق - مأخوذة من المجموعة $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \mathcal{E}$. هنا إذن $n = 5$ و $p = 3$.

② بعض طائق التعداد

لنرجع إلى المثال الأول أعلاه.

① استعمال التثيل الشجري. لتعيين جميع النتائج الممكنة يمكن الاستعانة بالشجرة في الشكل المجاور التي يطلب منك إتمامها.

◎ ما هي النتائج الممكنة؟ وما عددها؟



من السهل تعداد الفروع النهائية لمثل هذه الشجرة. إذا كان كل فرع في المرحلة i يتفرع إلى العدد ذاته n_i من الفروع، كان عدد الفروع النهائية مساوياً لجداء ضرب هذه الأعداد أي $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$ وهذا ما ينص عليه المبدأ الأساسي في العد.

② استعمال الخانات. بدلاً من استعمال شجرة يمكننا الاستفادة من تقنية ملء الخانات.



فمثلاً يمكننا عند دراسة المثال المتعلق بإلقاء قطعة النقود القول إننا نحصل على جميع النتائج الممكنة عن طريق ملء كل واحدة من الخانات المرقمة 1 و 2 و 3 بأحد الحرفين H أو T .

◎ كم خياراً لدينا لملء الخانة الأولى؟ وعند كل واحد من هذه الخيارات، كم خياراً لدينا لملء الخانة الثانية؟ إذن كم خياراً لدينا لملء الخانتين الأولى والثانية؟ وعند كل واحد من هذه الخيارات، كم خياراً لدينا لملء الخانة الثالثة؟ استنتج عدد الإمكانات المختلفة لملء الخانات الثلاث.

المبدأ الأساسي في العد (تذكرة):

♦ نريد إنشاء قائمة مكونة من p بندًا. نفرض أننا يمكن أن نختار البند i من بين n_i إمكانية معطاة. عندئذ يكون عدد القوائم المختلفة التي يمكننا إنشاءها $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$.

♦ لنفترض أن إنجاز مهمة يمر بعدد p من المراحل. يمكن إنجاز المرحلة i وفق n_i طريقة مختلفة. عندئذ يساوي عدد الأساليب المختلفة لإنجاز المهمة كاملة $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$.

◎ بالاستفادة مما سبق أجب عن الأسئلة الواردة في الفقرة ①.

◎ لتكن U مجموعة الأرقام من 0 إلى 9. ما عدد الأعداد المؤلفة من 4 خانات التي يمكنك تكوينها من أرقام المجموعة U ، والتي خانة مئاتها زوجية؟

إنشاء قوائم من عناصر مجموعة 1

في هذه الفقرة نتأمل مجموعة غير خالية E مكونة من n عنصراً.

1.1 التباديل على مجموعة

نسمى تبادلاً على المجموعة E ، كل قائمة مكونة من n بندًا تضم جميع عناصر E .

مثال لنفترض أن $E = \{a, b, c, d\}$. عندئذ يكون كُلّ من (a, b, c, d) و (a, c, b, d) تبادلاً على E . لاحظ أنَّ مفهوم القائمة يضم فكرة الترتيب في طياته، فهناك **أول** بندٍ، **ثاني** بندٍ وهكذا...). يُؤول إنشاء تبديل على E إلى ملء أربع خانات مرقمة، بحيث تحوي كل خانة حرفاً واحداً من E ، وتكون الحروف الواردة في الخانات مختلفة مترتبة متتلى.

هناك أربعة خيارات ممكنة لملء الخلقة 1، ويوافق كُلّ منها ثلاثة خيارات ممكنة لملء الخلقة 2. إذن هناك 3×4 خياراً ممكناً لملء الخلقتين 1 و 2، ويوافق كُلّ منها خياران لملء الخلقة 3. عليه نرى أنه يوجد $3 \times 2 \times 1$ خياراً لملء الخلقات 1 و 2 و 3، وبالطبع يوافق كُلّ من هذه الخيارات خياراً واحداً لملء الخلقة 4. إذن عدد تباديل المجموعة E يساوي $4 \times 3 \times 2 \times 1$.

الحالة العامة

تجري معالجة الحالة العامة بالأسلوب نفسه: هناك n خياراً لملء الخلقة 1، و $(n - 1)$ خياراً لملء الخلقة 2، وهكذا... حتى نصل إلى خيار واحد لملء الخلقة n . إذن هناك

$$n \times (n - 1) \times \dots \times 2 \times 1$$

تبادلاً على المجموعة E .

تعريف 1

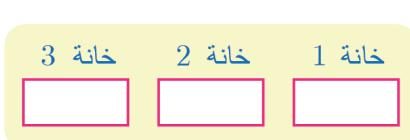
يعطى عدد تباديل مجموعة مكونة من n عنصراً ($n \geq 1$) بالصيغة

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$$

نرمز إلى هذا العدد بالرمز $n!$ ونقرؤه « n عامل»، ونصطلح أن $0! = 1$.

2.1. التراتيب: القوائم دون تكرار

نسمى ترتيباً طوله r من المجموعة E ، كل قائمة دون تكرار طولها r من المجموعة E ، أي كل قائمة مكونة من r بندًا مأخوذًا من عناصر E ، وبنودها مختلفة متشاً متعددة، $(1 \leq r \leq n)$.



مثال

لفترض أن $E = \{a, b, c, d, e\}$. عندئذ يكون كل من (a, b, d) و (b, d, e) ترتيباً طوله 3 من المجموعة E . يقول إنشاء ترتيب طوله 3 من المجموعة E إلى ملء ثلاثة خانات مرقمة، بحيث تحوي كل خانة حرفًا واحدًا من E ، وتكون الحروف الواردة في الخانات مختلفة متشاً متعددة. بإجراء مناقشة مماثلة لما أجريناه في المثال السابق نجد أن عدد القوائم دون تكرار التي طولها 3 مأخوذة من E يساوي $5 \times 4 \times 3$.

الحالة العامة

تجري معالجة الحالة العامة بالأسلوب نفسه. إذا كانت E مجموعة عدد عناصرها يساوي n . فإن عدد التراتيب التي طول كل منها r من عناصر E ، يساوي

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times (n - r + 1)$$

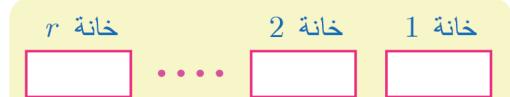


يعطى عدد التراتيب التي طول كل منها r من مجموعة مكونة من n عنصرًا $(n \geq r \geq 1)$ بالصيغة

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times (n - r + 1)$$

نرمز إلى هذا العدد بالرمز P_n^r .

3.1. القوائم مع تكرار



لأننا نسمح بتكرار عناصر المجموعة E في بنود القائمة، فعند إنشاء قائمة مكونة من r بندًا، لدينا n خيارًا للبند الأول، وكذلك n خيارًا للبند الثاني، ...، و n خيارًا للبند r . إذن عدد هذه القوائم يساوي n^r . إن n^r هو عدد القوائم مع تكرار التي طولها r ويمكن إنشاؤها من مجموعة عدد عناصرها يساوي n .

تحريساً للفهم

كيف نفسّر $n!$ في مسائل التعداد؟

- إن $n!$ هو عدد الطرق المختلفة لترتيب عناصر مجموعة مكونة من n عنصراً، أو إنّه عدد القوائم المرتبة المؤلّفة من n عنصراً.

مثال ما عدد النتائج المختلفة الممكنة لسباق يضم ستة أحصنة، بافتراض عدم وصول حصانين أو أكثر إلى خط النهاية في اللحظة ذاتها؟ إنّ أيّة نتيجة للسباق هي تبديل على مجموعة الأحصنة الستة. إذن هناك $720 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6!$ نتيجة مختلفة.

كيف نجري الحسابات باستعمال العامل؟

- لاحظ أنَّ

$$5! = 5 \times (4!) = 5 \times 4 \times (3!) = 5 \times 4 \times 3 \times (2!)$$

وبوجه عام في حالة $1 \leq r \leq n$

$$\begin{aligned} n! &= n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - r + 1) \times (n - r)! \\ &= P_n^r \times (n - r)! \end{aligned}$$

وعليه

$$\frac{n!}{(n - r)!} = n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - r + 1) = P_n^r$$

$$\text{فمثلاً } \frac{12!}{9!} = 12 \times 11 \times 10 = 1320 \quad \frac{10!}{8!} = 10 \times 9 = 90$$

السحب دون إعادة لأربع كرات من صندوق يضم تسعة كرات

يحتوي صندوق على تسعة كرات مرقّمة من 1 إلى 9. نسحب على التالي أربع كرات دون إعادة ونسجل بالترتيب أرقام الكرات المسحوبة. ما عدد الأعداد المكونة من أربع خانات التي يمكننا تشكيلها بهذه الطريقة؟

الحل

هناك 9 خيارات لآحاد العدد الناتج، وبعد سحب الكرة التي تحمل هذا الخيار يبقى 8 خيارات لعشeras هذا العدد نحددها بسحب الكرة الثانية، ثم نسحب الكرة الثالثة من بين 7 كرات متبقية لتحديد خانة المئات، وأخيراً نختار خانة الألوف بسحب الكرة الرابعة من بين الكرات الست المتبقية. نستنتج إذن أنه بالإمكان تشكيل $9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$ عدد مختلف بهذا الأسلوب.

مثال عدد القوائم مع تكرار

كم كلمة من ثلاثة حروف يمكننا تكوينها انتلأقاً من حروف كلمة SYRIA .

الحل

نتخيل ثلاث خانات علينا ملؤها بحروف كلمة SYRIA التي فيها خمسة حروف مختلفة. لملء الخانة الأولى لدينا خمسة خيارات، ولما كان لا يوجد ما يمنع من تكرار الحروف في الكلمة، فهناك أيضاً خمسة خيارات لملء الخانة الثانية وكذلك هناك خمسة خيارات لملء الخانة الثالثة. في المحسنة هناك $5 \times 5 \times 5 = 125$ كلمة من ثلاثة حروف حروفها مأخوذة من حروف كلمة SYRIA .

تَدْرِّبْ

اختزل المقادير الآتية دون استعمال الآلة الحاسبة: ①

$$\begin{array}{ccccccccc} \frac{7! \times 5!}{10!} & ⑤ & \frac{6 \times 4!}{5!} & ④ & \frac{6! - 5!}{5!} & ③ & \frac{17!}{15!} & ② & \frac{21!}{20!} & ① \\ \frac{6! + 7!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} & ⑩ & \frac{9!}{6! \times 3!} & ⑨ & \frac{9!}{5! \times 4!} & ⑧ & \frac{6!}{(3!)^2} & ⑦ & \frac{1}{5!} - \frac{42}{7!} & ⑥ \end{array}$$

اختزل المقادير الآتية: ②

$$\begin{array}{cccccc} \frac{(2n)! - (2n-1)!}{2(n!) - (n-1)!} & ③ & \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} & ② & \frac{(n+1)!}{(n-1)!} & ① \\ \frac{(2n)!}{1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2n-1)} & ⑥ & \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} & ⑤ & \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!} & ④ \end{array}$$

اكتب جميع تباديل المجموعة . $E = \{a, b, c, d\}$ ③

لتكن المجموعة . $S = \{1, 2, 5, 8, 9\}$ ④

① كم عدداً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S ؟

② كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S ؟

③ كم عدداً زوجياً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S ؟

في أحد مراكز الهاتف مهندسان، وأربعة عمال، كم لجنة مختلفة قوامها مهندس واحد وعامل واحد يمكننا تأليفها لمتابعة أعمال الصيانة في المركز؟ ⑤

يتتألف مجلس إدارة نادي رياضي من سبعة أعضاء، بكم طريقة يمكن اختيار رئيس، ونائب للرئيس، وأمين سرٌ للنادي؟ ⑥

اشترك مئة متسابق في سباق للدرجات، يجري فيه توزيع ثلاث ميداليات (ذهبية، فضية، برونزية) كم نتيجة ممكنة لهذا السباق؟ (لا توجد حالات تساوي). ⑦

التوافقية 2

1.2. تعريف التوافقية

تعريفه 3

لتكن E مجموعة مكونة من n عنصراً ولتكن r عدداً طبيعياً يتحقق $0 \leq r \leq n$. نسمى **توفيقاً** يضم r عنصراً من E ، كل مجموعة جزئية مؤلفة من r عنصراً من E .

ملاحظة : إن ترتيب العناصر في المجموعة الجزئية غير مهم، فمثلاً $\{0,1\}$ و $\{1,0\}$ تمثلان المجموعة نفسها.

في حالة $E = \{a,b,c\}$ التوافقية التي تضم عنصرين ($p=2$) من E هي $\{a,b\}$ و $\{a,c\}$ و $\{b,c\}$.

ترميز

نرمز إلى عدد التوافقية التي تضم r عنصراً من مجموعة مكونة من n عنصراً ($0 \leq r \leq n$) بالرمز n_r . فمثلاً استناداً إلى المثال السابق ${}^3_2 = 3$.

2. عدد التوافقية

لنفترض أن $E = \{a,b,c,d,e\}$ هو عدد المجموعات الجزئية من E التي كل مؤلف من ثلاثة عناصر. فإذا وضعنا ${}^5_3 = q$ أمكننا أن نرمز إلى هذه المجموعات E_1, E_2, \dots, E_q . لاحظ أن كل ترتيب لثلاثة عناصر من E هو تبديل على واحدة وواحدة فقط من المجموعات E_1, E_2, \dots, E_q . فمثلاً الترتيب (e,d,c) هو تبديل على المجموعة الجزئية $\{c,d,e\}$ ، ولتكن E_i ، وهو ليس تبديلاً على أية مجموعة E_j ، $(i \neq j)$ ، أخرى. لأن E_j ليست مكونة من عناصر ذاتها. ولكن عدد تباديل كل واحدة من المجموعات E_1, E_2, \dots, E_q يساوي $3!$. نستنتج إذن أنه بالإمكان توزيع تراتيب E التي كل منها مكون من ثلاثة عناصر، في حزمة منفصلة تضم الأولى تباديل E_1 وتضم الثانية تباديل E_2 وتضم الثالثة تباديل E_3 و... وأخيراً تضم الحزمة q تباديل E_q . وعلىه يكون عدد تراتيب ثلاثة عناصر من E مساوياً $3! \times q$ ، وهو في الوقت ذاته يساوي

$$\cdot q = {}^5_3 = \frac{P_5^3}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10. \text{ إذن } P_5^3 = 5 \times 4 \times 3$$

* هناك ترميز سابق ما زال يستعمل في بعض الكتب هو C_n^r ولكننا سنلتزم بالترميز الشائع حالياً.

بوجه عام، لإنشاء ترتيب مكون من r عنصراً مأخوذاً من مجموعة E عدد عناصرها يساوي n ، نبدأ باختيار مجموعة جزئية E' من E عدد عناصرها يساوي r ، وهناك $\binom{n}{r}$ خياراً مختلفاً، ثم نرتب عناصر E' ، وهناك $r!$ ترتيباً (تبديلاً) مختلفاً ممكناً، إذن استناداً إلى المبدأ الأساسي في العد $P_n^r = \binom{n}{r} \times r!$ ، وهكذا تكون قد أثبتنا المبرهنة الآتية:

مبرهنة 1

يعطى عدد توافق r عنصراً من مجموعة مكونة من n عنصراً ($n \geq r \geq 0$)، بالصيغة

$$\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

تحريساً للفهم

؟؟؟ كيف نفسر $\binom{n}{r}$ في مسائل التعداد؟

▪ إن $\binom{n}{r}$ هو عدد الخيارات المختلفة لـ r عنصراً مختلفاً من مجموعة مكونة من n عنصراً.

؟؟؟ كيف نحسب بعض القيم البسيطة للمقدار $\binom{n}{r}$ ؟

▪ إن $\binom{n}{0}$ هو عدد الأجزاء المكونة من 0 عنصراً في مجموعة مكونة من n عنصراً. فقط المجموعة الخالية تحقق هذه الشرط! إذن $\binom{n}{0} = 1$.

▪ إن $\binom{n}{1}$ هو عدد الأجزاء المكونة من عنصر واحد في مجموعة مكونة من n عنصراً. مثلاً في المجموعة $E = \{u, v, w, x\}$ ، هي المجموعات الجزئية $\{u\}$ و $\{v\}$ و $\{w\}$ و $\{x\}$. هناك مجموعات جزئية وحيدة العنصر بقدر عناصر E . إذن $\binom{n}{1} = n$.

▪ إن $\binom{n}{n}$ هو عدد الأجزاء المكونة من n عنصراً في مجموعة مكونة من n عنصراً. فقط المجموعة E بكمالها تتحقق هذه الشرط! إذن $\binom{n}{n} = 1$.

مثال

نتأمل مجموعة من البطاقات عدد عناصرها 32. فيها ثمانى بطاقات حمراء اللون مرقمة من 1 إلى 8، وثمانى بطاقات زرقاء اللون مرقمة من 1 إلى 8، وثمانى بطاقات خضراء اللون مرقمة من 1 إلى 8، وثمانى بطاقات صفراء اللون مرقمة من 1 إلى 8. نسمى سحباً أي مجموعة جزئية مكونة من خمس بطاقات من المجموعة.

① كم سحباً يضم تماماً بطاقتين حمراوين؟

② كم سحباً يضم على الأقل بطاقة واحدة تحمل الرقم 1؟

❶ لاصطناع سحب يضم تماماً بطاقتين حمراوين، نبدأ بسحب بطاقتين من بين البطاقات الحمراء، ثم نسحب ثلاثة بطاقات من بين البطاقات الأربع وعشرين الباقية.

- هناك $\binom{8}{2}$ خياراً مختلفاً للبطاقات الحمراء من بين البطاقات الثمانى المعطاة.
- ويوفق كل واحد من هذه الخيارات $\binom{24}{3}$ خياراً ممكناً لبقية بطاقات السحب.

إذن العدد المطلوب هو

$$\binom{8}{2} \times \binom{24}{3} = \frac{8 \times 7}{2} \cdot \frac{24 \times 23 \times 22}{3 \times 2} = 56672$$

❷ لنرمز بالرمز A إلى مجموعة السحوبات التي يضم كل منها بطاقة واحدة على الأقل تحمل الرقم 1. لحساب $\text{card}(A)$ ، أي عدد عناصر A ، من الأسهل حساب عدد عناصر المتممة A^c أي عدد السحوبات التي لا يضم أي منها بطاقة تحمل العدد 1. نصطنع سجباً من A^c عن طريق اختيار خمس بطاقات من مجموعة البطاقات التي لا يحمل أي منها العدد 1 وعدها $28 - 4 = 28 - 4 = 24$. إذن

$$\text{card}(A^c) = \binom{28}{5}$$

أما عدد جميع السحوبات فيساوي $\binom{32}{5}$. إذن عدد السحوبات التي يضم كل منها بطاقة واحدة على الأقل تحمل الرقم 1 يساوي $\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 103096$.

تَدْرِبْهُ

❶ اخترل المقادير الآتية واكتبها بصيغة أعداد صحيحة أوكسور غير قابلة للاختزال :

$$\frac{\binom{4}{4}}{\binom{10}{1}} \quad \textcircled{6} \quad \frac{\binom{8}{3}}{\binom{9}{3}} \quad \textcircled{5} \quad \frac{\binom{5}{3} \times \binom{6}{4}}{\binom{9}{3}} \quad \textcircled{4} \quad \frac{\binom{7}{5}}{\binom{9}{6}} \quad \textcircled{3} \quad \frac{\binom{12}{8}}{\binom{8}{8}} \quad \textcircled{2} \quad \frac{\binom{6}{2}}{\binom{2}{2}} \quad \textcircled{1}$$

❷ أثبت صحة المساواة $n \binom{n-1}{r-1} = r \binom{n}{r}$ في حالة $n \geq 2$ و $r \leq n$.

❸ عين الأعداد الطبيعية n التي تتحقق الشرط المعطى في الحالات الآتية:

$$\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2} \quad \textcircled{3} \quad 3 \binom{n}{4} = 14 \binom{n}{2} \quad \textcircled{2} \quad \binom{n}{2} = 36 \quad \textcircled{1}$$

❹ نريد تأليف لجنة مكونة من أربعة أشخاص مأخوذين من مجموعة تحوي خمسة عشر رجلاً وأربع عشرة امرأة.

❶ كم لجنة مختلفة يمكننا تأليفها؟

❷ كم لجنة مختلفة مكونة من رجلين وامرأتين يمكننا تأليفها؟

خواص عدد التوافيق $\binom{n}{r}$ ، ومنشور ذي الحدين

3

مبرهنة 2

أياً كان العددان الطبيعيان r و n بحيث $0 \leq r \leq n$ كان

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

أياً كان العددان الطبيعيان r و n بحيث $1 \leq r < n$ كان

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$$

الإثبات

١ هذه نتيجة مباشرة من المبرهنة ١:

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-(n-r))! \cdot (n-r)!} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = \binom{n}{r}$$

٢ هنا أيضاً نستفيد من المبرهنة ١:

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} &= \frac{(n-1)!}{(r-1)! \cdot (n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r! \cdot (n-1-r)!} \\ &= \frac{\cancel{r} \times (n-1)!}{\cancel{r} \cdot (r-1)! \cdot (n-r)!} + \frac{(n-r) \times (n-1)!}{r! \cdot (n-r) \cdot (n-1-r)!} \\ &= \frac{\cancel{r} \times (n-1)!}{r! \cdot (n-r)!} + \frac{(n-r) \times (n-1)!}{r! \cdot (n-r)!} \\ &= \frac{(r+n-r) \times (n-1)!}{r! \cdot (n-r)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{r! \cdot (n-r)!} \\ &= \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = \binom{n}{r} \end{aligned}$$

وبهذا يكتمل الإثبات.

مبرهنة 3 (منشور ذي الحدين)

أياً كان العددان العقديان a و b وأياً كان العدد الطبيعي $n \geq 1$ كان

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

الإثبات (يرتك إلى قراءة ثانية)

لُجِّر الإثبات بالتدريج. المساواة محققة في حالة $n = 1$ لأن $(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$. لنفترض إذن العلاقة صحيحة في حالة $n \geq 1$ ، ولنحسب $(a+b)^{n+1}$. بمحاظة أن

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = a(a+b)^n + (a+b)^n b$$

نستنتج أنَّ

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = a(a+b)^n + (a+b)^n b \\
 &= a\left(\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n\right) \\
 &\quad + \left(\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n\right)b \\
 &= \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{1}a^nb + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r+1}b^r + \cdots + \binom{n}{n}ab^n \\
 &\quad + \binom{n}{0}a^nb + \cdots + \binom{n}{r-1}a^{n-r+1}b^r + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}
 \end{aligned}$$

ولكن في حالة $1 \leq r \leq n$ لدينا $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$ وذلك عملاً بالمبرهنة 2 ، إذن

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^nb + \cdots + \binom{n+1}{r}a^{n+1-r}b^r + \cdots + \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}$$

وأخيراً لأنَّ

$$\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1 \quad \text{و} \quad \binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$$

وجدنا

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^nb + \cdots + \binom{n+1}{r}a^{n+1-r}b^r + \cdots + \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$$

وهو منشور ذي الحدين في حالة $n+1$. وعليه إذا كان منشور ذي الحدين صحيحاً في حالة n كان صحيحاً في حالة $n+1$ ، هو إذن صحيح بوجه عام أيًّا كان العدد الطبيعي الموجب تماماً .

نتيجة (عدد أجزاء مجموعة)

إنَّ عدد المجموعات الجزئية من مجموعة مكونة من n عنصراً يساوي 2^n .

الإثبات

بوضع $a = b = 1$ في منشور ذي الحدين نجد

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{r} + \cdots + \binom{n}{n}$$

ولكن إذا كانت E مجموعة مكونة من n عنصراً، كان $\binom{n}{r}$ عدد أجزاء E التي كلَّ منها مكون من r عنصراً، ومن ثم كان المجموع

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \cdots + \binom{n}{n}$$

مساوياً لعدد جميع أجزاء E .



طريقة ثانية. إذا كُلّفنا بإنشاء مجموعة مجموعه جزئية A من E ، فيمكننا إنجاز هذه المهمة بعدد n من المراحل.

في المرحلة الأولى نقرر أنضع العنصر الأول في A أو لا نضعه فيها، وهناك خياران اثنان. وفي المرحلة الثانية نقرر أنضع العنصر الثاني في A أو لا نضعه فيها، وهناك خياران أيضاً، وهكذا حتى نصل إلى المرحلة n حيث نقرر بشأن العنصر n ، وهذا أيضاً لدينا خياران. واستناداً إلى المبدأ الأساسي في العد، العدد الكلي للخيارات المتاحة لتكوين A يساوي $\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_n = 2^n$.

تَحْرِيساً لِلْفَهْم

؟! **كيف ثبت صحة الخواص في المبرهنة 2 دون حساب؟**

- يؤول اختيار جزء F ذي r عنصراً من E إلى اختيار الجزء المتمم $F' = E \setminus F$ المكون من $n - r$ عنصراً. إذن هناك العدد نفسه من أجزاء E التي كل منها مكون من r عنصراً وأجزاء التي كل منها مكون من $n - r$ عنصراً. أي $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

- ليكن a عنصراً من E . بين أجزاء E التي كل منها مكون من r عنصراً، وعدها $\binom{n}{r}$ جزءاً، هناك نوعان، تلك الأجزاء التي تحوي العنصر a ولتكن عددها x ، وتلك التي لا تحوي العنصر a ولتكن عددها y . من الواضح أن $x + y = \binom{n}{r}$. لحسب x : يتكون كل جزء من r عنصراً بينها العنصر a من $r - 1$ عنصراً مأخوذة من بين عناصر $E \setminus \{a\}$ ، إذن $\binom{n-1}{r-1} = x$. لحسب y : كل جزء مكون من r عنصراً ليس بينها a هو جزء مكون من r عنصراً مأخوذة من المجموعة $E \setminus \{a\}$ التي عدد عناصرها $n - 1$ ، إذن $\binom{n-1}{r} = y$ ، ومنه $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$

؟! **كيف نحسب $\binom{n}{r}$ انطلاقاً من مثلث الكرجي-باسكار؟**

$r \backslash n$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

- يفيد المثلث المبين في الشكل المجاور في حساب $\binom{n}{r}$ تدريجياً إذ نستفيد من العلاقة $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$ في إنشاء الأسطر تدريجياً ثم نقرأ $\binom{n}{r}$ عند تقاطع السطر « n » والعمود « r ».

؟! **ما صيغة الحد ذي الدليل r في منشور ذي الحدين $(a + b)^n$ ؟**

- إنها $T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$ ، والمنشور يساوي مجموع $n + 1$ حدّاً هي T_0 و T_1 و ... و T_n .

مثال استعمال منشور ذي الحدين

انشر كلاً من المقدارين $A = (2x - 1)^5$ و $B = (1 + i)^6$ ، (تدبر أن i هو العدد العقدي الذي يتحقق $i^2 = -1$).

الحل

❶ المقدار $2x - 1$ هو مجموع من الشكل $(a + b)$ حيث $a = 2x$ و $b = -1$. نطبق إذن منشور ذي الحدين بعد ملاحظة أن القوى الزوجية للعدد b تساوي 1 والقوى الفردية للعدد b تساوي -1 .

$$\begin{aligned}(2x - 1)^5 &= 2^5 x^5 - \binom{5}{1} 2^4 x^4 + \binom{5}{2} 2^3 x^3 - \binom{5}{3} 2^2 x^2 + \binom{5}{4} 2x - 1 \\ &= 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1\end{aligned}$$

❷ ونجد بالمثل

$$\begin{aligned}(1 + i)^6 &= 1 + 6i + 15i^2 + 20i^3 + 15i^4 + 6i^5 + i^6 \\ &= 1 + 6i - 15 - 20i + 15 + 6i - 1 = -8i\end{aligned}$$

مثال حساب مجموع

انشر $(1 + 2x)^n$ واستنتج قيمة المجموع

$$S_n = \binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + \cdots + 2^r\binom{n}{r} + \cdots + 2^n\binom{n}{n}$$

الحل

❶ استناداً إلى منشور ذي الحدين لدينا

$$(1 + 2x)^n = 1 + \binom{n}{1}(2x) + \cdots + \binom{n}{r}(2x)^r + \cdots + \binom{n}{n}(2x)^n$$

❷ المجموع S_n المطلوب يوافق الطرف الثاني بعد تعويض $x = 1$ ، ومنه

$$S_n = 1 + 2\binom{n}{1} + \cdots + 2^r\binom{n}{r} + \cdots + 2^n\binom{n}{n} = (1 + 2)^n = 3^n$$

تَدَرِّبْ

❶ انشر كلاً من العبارات الآتية:

$$(2x + 1)^6 \quad \textcircled{3} \quad (1 - x)^5 \quad \textcircled{2} \quad (2 + x)^4 \quad \textcircled{1}$$

$$(2 - i)^4 \quad \textcircled{6} \quad (1 + 2i)^3 \quad \textcircled{5} \quad \left(x + \frac{1}{x} \right)^4 \quad \textcircled{4}$$

❷ عين في منشور $\left(x + \frac{1}{x} \right)^{10}$ الحد الذي يحوي x^2 والحد الثابت المستقل عن x .

❸ ما الشرط على العدد الطبيعي n كي يحتوي منشور $\left(x^2 + \frac{1}{x} \right)^n$ على حد ثابت مستقل عن x .

❹ اخترل منشور المقدار $\cdot (1 + x)^6 + (1 - x)^6$

أفكار يجب تمثيلها



الفكرة الأولى: ترتيب أشياء في قائمة يقول إلى ملء خانات مرقمة.

يمكن ترتيب الشيئين A و B في قائمتين (A, B) و (B, A) .

مثال

تفيد الفكرة الأولى في الإجابة عن أسئلة بسيطة مثل :

بكم أسلوب مختلف يمكن ترتيب n شيئاً مختلفاً؟ الإجابة :

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$$

بكم أسلوب مختلف يمكن ترتيب p عنصراً مختلفاً مأخوذة من بين n عنصراً؟ الإجابة :

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - p + 1)$$

ما عدد القوائم المختلفة المكونة من p بندًا والتي يمكننا ملؤها من عناصر مجموعة مكونة من

n عنصراً عندما يكون التكرار مسموحاً؟ الإجابة : n^p .

بالتعريف: $0! = n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$ و $1! = 1$.

$$\cdot \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n - r)! \cdot r!}$$

متى نستعمل التوافق $\binom{n}{r}$ ؟ عندما يطلب مثلاً اختيار r عنصراً (دفعه واحدة أي دون ترتيب) من مجموعة مكونة من n عنصراً.

عدد الإمكانيات المختلفة لاستعارة خمسة كتب من مكتبة تضم 100 كتاباً يساوي $\binom{100}{5}$.

مثال

يُعمم منشور ذي الحدين المتتابقات الشهيرة:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \text{و} \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

فيكون $(a + b)^n$ مساوياً لمجموع جميع الحدود من النمط $\binom{n}{r}a^rb^{n-r}$ عندما تتحول r من 0 إلى n . لاحظ أنه في جميع الحدود يكون مجموعأسى a و b مساوياً.

منعكسات يجب امتلاكها.



عند حلّ مسألة تتطلب تعداداً.

تخيل طريقة لاصطناع أو إنشاء الأشياء الواجب عدّها.
تبين إذا كان الترتيب ضروريّاً أو مهمّاً في هذا الإنشاء. فإذا كان الترتيب ضروريّاً، فكر بأسلوب ملء الخانات، وإذا لم يكن الترتيب مهمّاً ففكّر بالتوافق، أو بتقنيات أخرى تتفق مع الحالة المدرosaة: أشجار، جداول،مجموعات،... .

أخطاء يجب تجنبها.



تنبه إلى عدم تعداد الشيء نفسه أكثر من مرة.

أشطر

نشاط 1 أنواع السحب المختلفة

نتأمل صندوقاً يحوي أربع كرات تحمل الأرقام 6 و 7 و 8 و 9.

① السحب مع الإعادة

نجري التجربة الآتية:

- نسحب ثلاثة كرات **على التالي مع الإعادة**، أي إننا نعيد الكرة المسحوبة إلى الصندوق بعد كل مرّة.
- **ندون بترتيب السحب** أرقام الكرات الثلاث المسحوبة.

إذن نتيجة التجربة هي ثلاثة أو قائمة من ثلاثة بنود مأخوذة من المجموعة $E = \{6, 7, 8, 9\}$. فمثلاً الثلاثية (9, 7, 7) تمثل سحب الكرة التي تحمل الرقم 9 في السحب الأول والكرة التي تحمل الرقم 7 في السحب الثاني والكرة التي تحمل الرقم 7 في السحب الثالث.

① كم عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة؟

② كم نتيجة ممكنة في كل من الحالات الآتية :

a. الكرة المسحوبة أولاً تحمل الرقم 6 ، والثانية تحمل الرقم 9 والثالثة تحمل الرقم 7 ؟

b. الكرة المسحوبة أولاً تحمل الرقم 8 ، والثانية تحمل الرقم 7 ؟

c. الكرة المسحوبة ثانياً تحمل الرقم 9 ، والمسحوبة ثالثاً تحمل الرقم 8 ؟

d. الكرة المسحوبة ثانياً تحمل الرقم 7 ؟

② السحب دون إعادة

نجري التجربة الآتية:

- نسحب ثلاثة كرات **على التالي دون إعادة**، أي إننا لا نعيد الكرة المسحوبة إلى الصندوق بعد كل مرّة.

▪ **ندون بترتيب السحب** أرقام الكرات الثلاث المسحوبة.

هنا أيضاً تكون نتيجة التجربة ثلاثة أو قائمة من ثلاثة بنود مأخوذة من المجموعة $E = \{6, 7, 8, 9\}$ ، ولكن في هذه المرة يجب أن تكون بنود القائمة مختلفة مثى مثى. فهي إذن **ترتيب** لثلاثة عناصر مأخوذة من E .

① كم عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة؟

② أجب عن فقرات السؤال ② من الفقرة السابقة، ولكن لهذا النوع من التجارب.

③ السحب في آن معاً

ُجري التجربة الآتية:

- نسحب في آن معًا ثلاثة كرات من الصندوق.
- ندون أرقام الكرات الثلاث المسحوبة.

هنا يمكن تمثيل نتيجة التجربة بمجموعة جزئية مكونة من ثلاثة عناصر مأخوذة من $\{6, 7, 8, 9\}$.

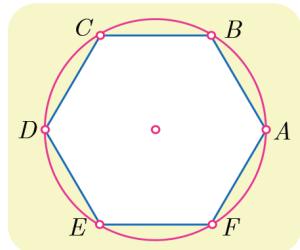
① كم عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة؟

② كم عدد النتائج الممكنة والتي يظهر فيها العدد 7؟

③ كم عدد النتائج الممكنة والتي يظهر فيها العددان 8 و 9؟

نشاط 2 مثلثات في مسدس

في الشكل المرسوم جانباً لدينا ست نقاط A و B و C و D و E و F موزعة على دائرة بحيث تشكل رؤوس مسدس منتظم.



ُجري التجربة الآتية: نصل بين ثلات نقاط منها لنجعل على مثلث.

① ما عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب؟

② ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب؟

③ ما عدد المثلثات المنفرجة الزاوية التي يمكن أن نحصل عليها بهذا

الأسلوب؟

نشاط 3 معاً من السرقة

يوجد لبعض أنواع السيارات مذيع ذو قفل رقمي مضاد للسرقة يفتح عند إدخال رمزاً (كود) مكون من عدد ذي أربع خانات يمكن لأي منها أن يأخذ أيًّا من القيم 0, 1, ..., 9.

① ما هو عدد الرمazات التي تصلح للقفـل؟

ينطلق الإنذار في السيارة إذا لم يجرِ إدخال أي خانة صحيحة في مكانها. ما عدد الرمazات التي تسبـب انطلاق الإنذار.

② ما هو عدد الرمazات التي تصلح للقفـل والمكونة من خانات مختلفة مثلث؟

عند فصل التغذية الكهربائية عن المذيع، يجب على مالك السيارة أن يعيد إدخال الرمـاز الصحيح مجدداً ليتمكن من استعمال المذيع. يتذكر المالك أن الرمـاز الصحيح مكون من الأرقـام 1 و 5 و 9 ولكنـه نسي ترتيبـها.

كم رمـازاً مختلفاً يمكن للمالك أن يكون من هذه الأرقـام؟

نشاط 4 تحويل العبارات المثلثية

١ ما هي المهمة المنشودة؟

نهدف إلى التعبير عن مقادير مثل $\cos^n x \sin^m x$ أو $\sin^n x$ ، أو حتى $\cos^n x \sin^m x$ بصيغة مجموع حدود من الصيغة $a \cos(qx)$ أو $b \sin(qx)$ حيث a و b أعداد حقيقة و q و m و n أعداد طبيعية. فمثلاً

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

تظهر أهمية هذه التحويلات خصوصاً عند حساب التوابع الأصلية، فإذا تمكناً من كتابة التابع $x \mapsto \cos^n x \sin^m x$ بصيغة عبارة خطية للتتابع من النمط $x \mapsto \cos(qx)$ أو $x \mapsto \sin(qx)$ ، صار بإمكاننا حساب تابع أصلي لهذا التابع.

٢ شرح الطريقة في مثال

لنسع إلى تحويل عبارة $\sin^4 x$ إلى مجموع حدود من الصيغة

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4 = \frac{1}{16} (e^{ix} - e^{-ix})^4$$

ثم ننشر $(e^{ix} - e^{-ix})^4$ باستعمال **منشور ذي الحدين**:

$$\sin^4 x = \frac{1}{16} (e^{4ix} - 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} - 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix})$$

نختزل هذه الصيغة باستعمال **منشور ذي الحدين** و $e^{ipx} - e^{-ipx}$ ثم نجمع كل حدين معًا لنجد

$$\sin^4 x = \frac{1}{16} ((e^{4ix} + e^{-4ix}) - 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6)$$

نستعمل علاقتي أويلر بالشكل **لنجد** $e^{ipx} - e^{-ipx} = 2i \sin px$ أو $e^{ipx} + e^{-ipx} = 2 \cos px$

$$\sin^4 x = \frac{1}{16} (2 \cos 4x - 8 \cos 2x + 6) = \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}$$

فمثلاً لحساب نكتب $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx = \left[\frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8} x \right]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{16}$$

(تتطلب هذا الفقرة دراسة ببحث التكامل.)

٣ تطبيق

حوال كل عبارة مما يأتي إلى مجموع نسب مثلثية لمضاعفات x :

$$\sin^5 x \quad ③ \quad \cos^2 x \sin^2 x \quad ② \quad \cos^4 x \quad ①$$

مِنَاتٍ وَمَسَائِلٍ



أثبت صحة العلاقات

1

$$\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{r+1} \quad \text{و} \quad \frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{n+1-r}$$

احسب قيمة كل من n و r إذا علمت :

2

$$2 \cdot \binom{n+1}{r+1} = 5 \cdot \binom{n+1}{r} \quad \text{و} \quad 3 \cdot \binom{n}{r} = 8 \cdot \binom{n}{r-1}$$

عين n في كل من الحالات الآتية:

3

$$\begin{aligned} P_n^5 &= 18P_{n-2}^4 & ② \quad P_{n+2}^4 &= 14P_n^3 & ① \\ P_n^6 &= 12P_{n-1}^5 & ④ \quad P_n^4 &= 10P_{n-1}^3 & ③ \\ P_{n+2}^3 &= 6P_{n+2}^1 & ⑥ \quad P_{n+1}^3 &= 2P_{n+2}^2 & ⑤ \\ P_n^2 &= 5P_{n-1}^1 & ⑧ \quad P_{n+2}^3 &= 4P_{n+1}^2 & ⑦ \end{aligned}$$

يلتقي عشرة أصدقاء في حفل، يصافح كل منهم الأشخاص التسعة الآخرين مرة واحدة فقط ، فكم

4

عدد المصافحات التي جرت في الحفل ؟ عمّ النتيجة السابقة إلى حالة n صديقاً.

5

في أحد الامتحانات يُطلب من الطالب الإجابة عن سبعة أسئلة من عشرة.

① بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة ؟

② بكم طريقة يمكنه الاختيار إذا كانت الأسئلة الأربع الأولى إجبارية ؟

أراد صف فيه إثنا عشر طالباً وشأنى طالبات تأليف لجنة نشاط للصف مؤلفة من خمسة

6

أشخاص. بكم لجنة مختلفة يمكن تأليفها في كل من الحالات الآتية:

① اللجنة مؤلفة من ثلاثة طلاب وطالبتين.

② في اللجنة طالبان على الأكثر.

③ في اللجنة طالبتان على الأقل.

7

احسب أمثال x^3 في منشور $\cdot (2 + 3x)^{15}$.

8

ما آحاد وعشرات العدد 11^{11} ؟

9

ما الحد الثابت (الذي لا يتعلّق بالمتحوّل x) في منشور $(x + \frac{1}{x^3})^{12}$ ؟



لنتعلم البحث معاً

10 عدد أقطار مضلع محدب

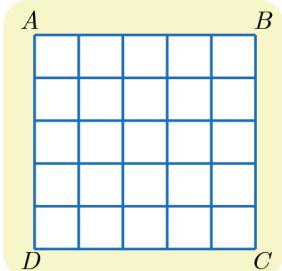
أثبت أن عدد أقطار مضلع محدب عدد رؤوسه n حيث $n \geq 4$ ، يعطى بالعلاقة $\frac{n(n-3)}{2}$.

نحو الحل

نعلم أن القطر في المضلع هو قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير متلاصبين. فكم قطعة مستقيمة تصل بين رأسين مختلفين من رؤوس المضلع يمكن أن نرسم؟ ومن بين هذه القطع كم ضلعاً للمضلع تجد؟

اشرح لماذا يمثل المقدار $n - \binom{n}{2}$ عدد الأقطار المطلوب.

أنجز الحل واكتبه بلغةٍ سليمة.



11 التعداد على شبكة

في الشكل المجاور نتأمل شبكة منتظمة مرسومة في مربع $ABCD$. ونرغب بحساب عدد المستويات المرسومة في الشكل. علماً أن المربع مستطيل خاصٌ.

نحو الحل

غالباً ما يكون مفيداً، عند حلّ مسائل التعداد، إيجاد أسلوب عملي يتتيح الحصول على الأشياء التي نريد تعدادها، وهذا واحد من هذه الأساليب: تحقق أنه عندما يتقاطع مستقيمان شاقولييان مع مستقيمين أفقين نحصل على مستطيل.

يجب أن نتيقن من تعداد جميع الأشياء المطلوبة دون استثناء ودون تكرار. لنرمز إذن إلى المستقيمات الشاقولية $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ بحيث ينطبق (AD) على v_0 و (BC) على v_5 . ولنرمز أيضاً إلى المستقيمات الأفقية $(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5)$ بحيث ينطبق (AB) على h_0 و (DC) على h_5 .

وعلى هذا يمكن تمثيل كل مستطيل بالشكل $(\{h_i, h_j\}, \{v_k, v_\ell\})$ مع $(\{h_i, h_j\}, \{v_k, v_\ell\})$ مع $(k \neq \ell \text{ و } i \neq j)$. لاحظ أن الترتيب غير مهم أي إن المستطيل المخالف لـ $(\{h_i, h_j\}, \{v_k, v_\ell\})$ هو نفسه المستطيل المخالف لـ $(\{h_j, h_i\}, \{v_\ell, v_k\})$ أو $(\{h_j, h_i\}, \{v_k, v_\ell\})$ استنتج أن عدد المستويات المنشود يساوي عدد أساليب اختيار مستقيمين شاقولييين، ومستقيمين أفقين.

أنجز الحل واكتبه بلغةٍ سليمة.

في حالة عدد طبيعي n . ادرس كيف تتغير الحدود المتالية $\binom{n}{r}_{0 \leq r \leq n}$ ، واستنتج أن المساواة

$$\cdot p + q = n \quad \text{أو} \quad p = q \quad \text{كافي} \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{q}$$

نحو الحل

لننظر إلى الحدود المتالية $\binom{n}{r}_{0 \leq r \leq n}$ عند بعض القيم الصغيرة للعدد n . في حالة $n = 4$

نجد $(1, 4, 6, 4, 1)$ وفي حالة $n = 5$ نجد $(1, 5, 10, 10, 5, 1)$. في الحالتين: تزايد الحدود في البداية ثم تتناقص.

لمقارنة حدين متتاليين نحسب نسبتهما ونقارن هذه النسبة مع الواحد.

$$\frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n-r}{r+1} \quad \text{أثبت أن} \quad ①$$

a. نفترض أن $n = 2m$. أثبت أن

$$\cdot m \leq r \quad \text{في حالة} \quad \binom{n}{r+1} < \binom{n}{r} \quad \text{و} \quad m > r \quad \text{في حالة} \quad \binom{n}{r+1} > \binom{n}{r}$$

استنتاج أن $\binom{2m}{r}_{0 \leq r \leq 2m}$ هو أكبر أعداد التوافيق

b. نفترض أن $n = 2m + 1$. أثبت أن

$$\cdot m < r \quad \text{في حالة} \quad \binom{n}{r+1} < \binom{n}{r} \quad \text{و} \quad m > r \quad \text{في حالة} \quad \binom{n}{r+1} > \binom{n}{r}$$

استنتاج أن $\binom{2m+1}{r}_{0 \leq r \leq 2m+1}$ بما أكبر أعداد التوافيق

لاحظ أن المساواة $\binom{n}{p} = \binom{n}{q} = \binom{n}{n-p} = \binom{n}{n-q} = \binom{n}{p}$ ، وأنه

في هذه الحالة يكون إثنان من الأعداد $p, q, n - p, n - q$ أصغر من $\frac{n}{2}$ أو يساويانه. ويكونان

من ثم متساوين استناداً إلى الفقرة السابقة.

أنجز الحل واكتبه بلغة سليمة



قدمًا إلى الأئمَّة

ليكن كثير الحدود $F(x) = (1 + ax)^5(1 + bx)^4$ حيث a و b عدوان طبيعيان، فإذا علمت أن

أمثال x تساوي 62، فما هي القيم الممكنة للمجموع $a + b$ ؟

يريد معلم توزيع $n + 1$ جائزة مختلفة على n تلميذًا وبحيث يحصل كل تلميذ على مكافأة واحدة

على الأقل. ما عدد النتائج المختلفة لهذه العملية؟



15 لتكن المجموعة $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ولدينا مجموعة H من الأعداد التي تتميز بالخصائص التالية: أرقامها مختلفة و مأخوذة من S ، لا يوجد أي عدد منها من مضاعفات العدد 5 ، كل عدد منها أكبر من 20000 . فما هو عدد عناصر H ؟

16 صندوق يحوي 10 كرات، 6 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء و كرة واحدة سوداء. نسحب من الصندوق ثلاثة كرات على التالى مع إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة.

- ① كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب ؟
- ② كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنين فقط من اللون نفسه ؟
- ③ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاثة كرات مختلفة الألوان ؟
- ④ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاثة كرات ليست جميعها من لون واحد ؟
- ⑤ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة حمراء واحدة على الأقل ؟
- ⑥ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة سوداء واحدة على الأقل ؟

17 صندوق يحوي 10 كرات، 6 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء و كرة واحدة سوداء. نسحب من الصندوق ثلاثة كرات على التالى دون إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة.

- ① كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب ؟
- ② كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنين فقط من اللون نفسه ؟
- ③ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاثة كرات مختلفة الألوان ؟
- ④ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاثة كرات ليست جميعها من لون واحد ؟
- ⑤ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة حمراء واحدة على الأقل ؟
- ⑥ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة سوداء واحدة على الأقل ؟

18 لتكن $\{S = \{1, 2, 3, \dots, 29, 30\}\}$. كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر من S مجموعها من مضاعفات العدد 3 ؟

19 ليكن A_n العدد المعروف بالصيغة : $A_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$.

- ① تحقق أن A_3 و A_4 هما عددان طبيعيان.
- ② أثبت أن A_n عدد طبيعي أيًّا كانت قيمة العدد الطبيعي n .

20

نتأمل مضلعًا محدبًا مؤلفًا من n ضلعاً ($n > 4$). نسمى **قطولاً** في المضلعل كل قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير متاليين في المضلعل. نفترض أننا في الحالة العامة حيث لا تتلاقى أي ثلاثة أقطار في نقطة واحدة إلا إذا كانت هذه النقطة أحد رؤوس المضلعل. احسب عدد نقاط تقاطع أقطار المضلعل بدلالة n . يمكن البدء بتعيين D_4 و D_5 .

مساعدة: الجواب $\binom{n}{4} + n$.

21

اكتب المقادير الآتية بصيغة عبارات خطية في النسب المثلثية لمضاعفات الزاوية x ، ثم أجب عن السؤال الموافق.

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \, dx \text{ ، واستنتج قيمة } \cos^3 x \quad ①$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{\tan^3 x} \text{ ، واستنتاج قيمة } \sin^3 x \quad ②$$

$$\cdot \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx \text{ ، واستنتاج قيمة } \sin^4 x \quad ③$$

$$F(x) = \int_0^x \cos t \sin^4 t \, dt \text{ ، واحسب } \cos x \sin^4 x \text{ بطريقتين.} \quad ④$$

7

الاحتمالات

1 الاحتمالات المشروطة (تذكرة)

2 المتحوالات العشوائية

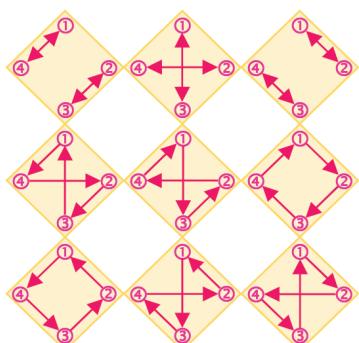
3 الاستقلال الاحتمالي لمتحوالين عشوائيين

4 المتحوالات العشوائية الحدانية

التباديل التامة أو التخالفيات Derangements

أراد مدرس أن يُخضع طلاب صفه، وعدهم n ، لاختبار، ولكنه أراد أيضاً أن يستفيد من إجابات الطلاب تربوياً ففكّر أن يجعلهم يصحّحون أوراق إجابة بعضهم البعض. فقام بخلط أوراق الإجابة ثمّ أعاد لكل طالب ورقة إجابة ليصحّحها. فما احتمال ألا يصحّح أي طالب ورقة الإجابة التي تخصه؟

إذا رمنا إلى مجموعة الطلاب $\{1, 2, \dots, n\}$ بالرمز \mathbb{N}_n لاحظنا أن كل توزيع لأوراق الإجابة هو تبديل σ على المجموعة \mathbb{N}_n ، إذ يصحّح الطالب k اختبار الطالب $(k)\sigma$. وعليه فإنّ فضاء العينة هنا هو مجموعة تباديل \mathbb{N}_n وعددتها $n!$. تهمّنا تلك التباديل حيث لا يصحّح أي طالب ورقة الإجابة التي تخصه، أي مجموعة التباديل σ التي تحقق $(k)\sigma \neq k$ أيًّا كان الطالب k من S_n ، تسمى هذه التباديل



تباديل تامة أو تخالفيات، ونرمز عادة إلى عددها بالرمز D_n . فمثلًا مثلنا في الشكل المجاور تخالفيات أربعة طلاب. أمّا احتمال ألا يصحّح أي طالب ورقة اختبار التي تخصه فهو إذن يساوي $p_n = \frac{D_n}{n!}$.

يُبرهن أن D_n يساوي أقرب عدد صحيح إلى $\frac{n!}{e}$ ، حيث e هو العدد النيبراني أساس اللوغاريتم الطبيعي، ومن ثم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{e} \approx 0.36788$$

فإذا كانت n كبيرة بقدر كافٍ كان احتمال ألا يصحّح أي طالب ورقة الإجابة التي تخصه حوالي 37%.

الاحتمالات

انطلاقة نشطة



الهدف من هذه الانطلاقة التذكير بما درسناه سابقاً.

- لتكن a_1 أو a_2 أو ... أو a_n النتائج الممكنة لتجربة عشوائية ما، فنكون مجموعه هذه النتائج $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ فضاء العينة الموافق لهذه التجربة. نسمى كل مجموعه جزئية من Ω حدثاً. وكذلك نسمى الحدث المؤلف من جميع النتائج الممكنة للتجربة أي Ω الحدث الأكيد. وأخيراً نسمى الحدث المستحيل الحدث الذي لا يحتوي على أية نتيجة ويفاصله المجموعه الخالية: $\emptyset = \{\}$.

مثال في تجربة إلقاء حجر نرد عادي لدينا $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. الحدث A الموافق للحصول على نتيجة أكبر أو تساوي 4 هو المجموعه $\{4, 5, 6\}$. فالحصول على أية نتيجة من بين 4 و 5 و 6 يعني تحقق الحدث A .

- ونسمى كل مجموعه جزئية مكونة من عنصر واحد (مثل $\{a_1\}$) حدثاً بسيطاً. نقرن بكل نتيجة $\{a_i\}$ (حدث بسيط) من نتائج التجربة عدداً p_i ، يتحقق $0 \leq p_i \leq 1$ يمثل احتمال الحصول على هذه النتيجة. ونكتب $p_i = \mathbb{P}(a_i)$. فنعرف بذلك ما يسمى قانون احتمال التجربة العشوائية. ويكون لدينا: $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$
- وهذا، في تجربة عشوائية، يكون احتمال وقوع حدث A ، الذي نرمز إليه $\mathbb{P}(A)$ مساوياً لمجموع احتمالات وقوع كل الأحداث البسيطة التي يتألف منها. ففي المثال السابق $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. فيكون $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(4) + \mathbb{P}(5) + \mathbb{P}(6)$ فاحتمال وقوعه يساوي 0.

- نقول إن الأحداث البسيطة متساوية الاحتمال، أو إن نتائج التجربة متساوية الاحتمال، إذا كان $\mathbb{P}(a_i) = \mathbb{P}(a_j)$ أيًّا كان i و j . وإذا كان العدد الكلي لهذه الأحداث البسيطة مساوياً n كان $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{n}$ ، وكان احتمال الحدث A مساوياً عدد عناصر A مقسوماً على عدد عناصر Ω .

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

- أن تكون نتائج تجربة متساوية الاحتمال هو افتراض، يُملّيه علينا النص انطلاقاً من عبارات مثل إلقاء حجر نرد **مثالي**، أو **غير منحاز**، أو إلقاء قطعة نقود **متوازنة**، أو أن **نختار عشوائياً** شيئاً من بين عدد n من الأشياء، لأن هذا يعني أننا لا نفضل أحد هذه الأشياء على الأشياء الأخرى. ولكن في هذه الحالة يجب أن نأخذ فضاء العينة مكوناً من هذه الأشياء التي عددها n .

مثال لنتأمل صندوقاً يحتوي على خمس كرات، اثنان بيضاوان وثلاث سود. نسحب عشوائياً كرة ونسجل لونها. فإذا أخذنا الفضاء العينة $\Omega = \{W_1, W_2, B_1, B_2, B_3\}$ كان احتمال أي حدث بسيط مساوياً $\frac{1}{5}$. ولكن إذا أخذنا فضاء العينة $\Omega' = \{W, B\}$ دلالة على اللونين فقط، فعندئذ لا تعود الأحداث البسيطة متساوية الاحتمال : $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{5}$ و $\mathbb{P}(W) = \frac{3}{5}$

- الحدث المعاكس A'** هو الحدث الذي يقع عندما لا يقع الحدث A ، أي مجموعة نتائج التجربة التي لا تتنتمي إلى المجموعة A . ويكون $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A') = 1$.

الحدث A و B هو الحدث الذي يقع عندما يقع الحدثان A و B في آن معاً. وهذا الحدث يوافق المجموعة الجزئية $A \cap B$ ، أي مجموعة نتائج التجربة التي تتنتمي إلى كل من المجموعتين A و B . وعندما يكون $A \cap B = \emptyset$ نقول إن الحدثان A و B منفصلان.

أما الحدث A أو B فهو الحدث الذي يقع عندما يقع أحد الحدين A أو B على الأقل. وهذا الحدث يوافق المجموعة الجزئية $A \cup B$ ، أي مجموعة نتائج التجربة التي تتنتمي إلى أيٍ من المجموعتين A أو B أو إلى كليهما.

ترتبط احتمالات الأحداث A و B و $A \cap B$ و $A \cup B$ بالعلاقة المهمة الآتية:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

مثال يدرس 30% من طلاب صف اللغة الفرنسية (F)، ويدرس 40% منهم اللغة الروسية (R)، ويدرس 60% منهم دروس إحدى هاتين اللغتين على الأقل. فما احتمال أن يتبع طالب دروس اللغتين في آن معاً؟ هنا $\mathbb{P}(F \cup R) = 0.6$ و $\mathbb{P}(R) = 0.4$ و $\mathbb{P}(F) = 0.3$ ، إذن

$$\mathbb{P}(F \cap R) = 0.3 + 0.4 - 0.6 = 0.1$$

- نقول إن الحدثان A و B متنافيان إذا كانا منفصلين وعندما

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \quad \text{و} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = 0$$

الاحتمالات المشروطة (تذكرة)



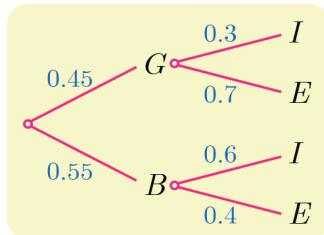
1.1. الاحتمال المشروط

مثال في مدرسة 45% من التلاميذ إثاث (G)، و 55% منهم ذكور (B). ومن بين التلاميذات هناك 30% مقيمات في المدينة السكنية في المدرسة (I)، و 70% خارجيات مقيمات في منازلهن مع عائلاتهن (E). أما بين التلاميذ الذكور فهناك 60% منهم مقيمون في المدينة السكنية (I) و 40% خارجيون (E). نختار عشوائياً بطاقة تعريف أحد تلاميذ المدرسة ونسجل النتيجة التي نحصل عليها والتي يمكن أن تكون واحدة مما يأتي:

« تلميذة مقيمة في المدينة السكنية » و « تلميذة غير مقيمة في المدينة السكنية »

« تلميذ مقيم في المدينة السكنية » و « تلميذ غير مقيم في المدينة السكنية ».

يمكنا تمثيل هذا الوضع تمثيلاً بيانيًّا كما في الشكل الآتي الذي نسميه تمثيلاً شجرياً:



لاحظ أنَّ مجموع الاحتمالات المكتوبة على الفروع الصادرة من العقدة نفسها يساوي 1، وهي خاصة صحيحة عموماً، وتُعرف باسم قانون العقد.

يمثل الطريق $E \cap G$ الحدث « تعود البطاقة المسحوبة إلى تلميذة غير مقيمة في المدينة السكنية » وهو الحدث $G \cap E$ مما هو احتمال هذا الحدث؟

إذا كان N عدد تلاميذ المدرسة، كان عدد التلاميذات $N \times 0.45$ ولأنَّ 70% من هؤلاء غير مقيمات في المدينة السكنية كان عدد هؤلاء التلاميذات $0.45 \times N \times 0.7$ ، ولما كان سحب البطاقة يجري عشوائياً (أي إنَّ احتمال سحب إحداها يساوي احتمال سحب الأخرى) استنتجنا أنَّ احتمال $G \cap E$ يساوي 0.45×0.7 . لاحظ أنَّ هذا الاحتمال يساوي جداء ضرب الأعداد المكتوبة على كل فرع من الطريق.

إنَّ العدد المكتوب على الفرع G يساوي احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة عائدَة لتلميذة $\mathbb{P}(G)$ ، أمَّا العدد المكتوب على الفرع E فيمثل احتمال أن تكون البطاقة عائدَة لغير مقيم في المدينة السكنية علمًا أنها تعود لتلميذة أي احتمال وقوع E علمًا أنَّ G قد وقع، وهو الاحتمال المشروط $\mathbb{P}(E|G)$ ، الذي درسناه سابقاً. إذن $\mathbb{P}(G \cap E) = \mathbb{P}(G) \times \mathbb{P}(E|G) = 0.45 \times 0.7$. لنتذكر معاً:

تعريف 1

ليكن B حدثاً يتحقق $\neq 0$ ، ولنفترض أننا نعلم أنه قد وقع، عندئذ نعرف الاحتمال المشروط لوقوع حدث A علماً أن B قد وقع، (أو احتمال A مشروطاً بالحدث B) ، بالصيغة

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)$ أيضاً

2.1. الاستقلال الاحتمالي لحدثين

تعريف 2

إذا كان A و B حدثين في تجربة احتمالية، عندئذ نقول إن A و B مستقلان احتمالياً إذا وفقط . $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

3.1. التمثيل الشجري للتجارب الاحتمالية المركبة

نعلم أنه إذا كان A_1 و A_2 حدثين منفصلين أو متنافيين (أي $A_1 \cap A_2 = \emptyset$) كان

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$$

يمكن تعليم هذه الخاصية بسهولة إلى اجتماع n من الأحداث المتنافية مثنى مثنى كما يأتي:

مبرهنة 1

ليكن A حدثاً ولنفترض أنه يساوي اجتماع أحداث منفصلة مثنى مثنى A_1 و A_2 و ... و A_n ، عندئذ

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots + \mathbb{P}(A_n)$$

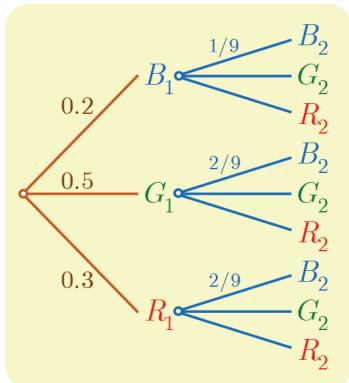
مثال

نتأمل صندوقاً يحتوي على عشر كرات : كرتان زرقاء (B) وخمس كرات خضراء (G) وثلاث كرات حمراء (R). نسحب عشوائياً وعلى التتالي كرتين دون إعادة، ونسجل النتيجة التي نحصل عليها. نهدف إلى حساب احتمال الحدث B_2 الموافق لسحب كرة زرقاء في المرة الثانية.

نلاحظ أن التجربة تجري على مرحلتين:

المرحلة الأولى ممثلة بالفروع البنية الثلاثة في الشجرة، وهي توافق الأحداث B_1 « سحب كرة زرقاء في المرة الأولى » و G_1 « سحب كرة خضراء في المرة الأولى » و R_1 « سحب كرة حمراء في المرة الأولى ». ولدينا

$$\mathbb{P}(R_1) = 0.3 \quad \text{و} \quad \mathbb{P}(G_1) = 0.5 \quad \text{و} \quad \mathbb{P}(B_1) = 0.2$$



المرحلة الثانية ممثلة بالفروع الزرقاء اللون في الشجرة وهي تبيّن جميع الإمكانيات. لنضع أنفسنا عند العقدة B_1 . إن الاحتمال الواجب كتابته على الفرع B_2 هو احتمال أن نسحب كرة زرقاء في المرة الثانية علماً بأننا سحبنا كرة زرقاء في المرة الأولى، أي $\mathbb{P}(B_2|B_1)$. ويجرى حساب الاحتمالات على بقية الفروع بالمثل.

لنتأمل المسار $B_1 \rightarrow B_2$ إنه يقود إلى الحدث

ونجد إذن $B_1 \cap B_2$

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(B_2|B_1) = 0.2 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$$

ونجد بالالماثلة أن

$$\mathbb{P}(G_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(G_1) \times \mathbb{P}(B_2|G_1) = 0.5 \times \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$$

$$\mathbb{P}(R_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}(B_2|R_1) = 0.3 \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

ولتكنا نحصل على الحدث B_2 عن طريق اتّباع المسارات $G_1 \rightarrow B_2$ و $B_1 \rightarrow B_2$ و $R_1 \rightarrow B_2$ ، وهي توافق أحداثاً متنافية، إذن

$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(G_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(R_1 \cap B_2) = \frac{1}{45} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} = \frac{1}{5}$$

4.1. القواعد العامة في حالة التمثيل الشجري لتجربة

- توافق كل عقدة حالة من حالات التجربة.
- قانون العقد: مجموع جميع الاحتمالات المكتوبة على الفروع الصادرة من العقدة يساوي 1.
- يمثل مسار تام بدءاً من جذر الشجرة إلى نهاية طرفهائي فيها، الحدث الموافق لنقاطع جميع الأحداث التي يمر بها المسار، وعادةً تطابق بين المسار والحدث الذي يمثله.

- إن احتمال مسار يساوي جداء ضرب الاحتمالات المسجلة على الفروع التي تكون هذا المسار.
- احتمال حدث B يساوي مجموع احتمالات المسارات التي تقود إلى B .
- الصياغة الرياضياتية لهذه الخاصة الأخيرة هي كما يأتي:

مبرهنة 2

لفترض أن فضاء العينة Ω هو اجتماع أحداث A_1 و A_2 و ... و A_n مترافقية متى متى. عندئذ يمكن حساب احتمال أي حدث B بالصيغة

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B|A_n)$$

الإثبات

في الحقيقة، هذا ناتج من كون الأحداث $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \dots, A_n \cap B$ مترافقية واجتماعها يساوي B ، إذن

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \cdots + \mathbb{P}(A_n \cap B)$$

ولكن $\mathbb{P}(A_k \cap B) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B|A_k)$ وذلك مهما كان العدد k من المجموعة $\{1, 2, \dots, n\}$. إذن احتمال الحدث B يساوي مجموع احتمالات المسارات $A_k \rightarrow B$ التي تؤدي إلى B . وهو المطلوب إثباته.

تُحرِّيساً للمهم

؟! كيف ننشي مخططاً شجرياً لتجربة عشوائية؟

▪ كما فعلنا في حالة المثال الذي درسناه سابقاً. تمثل كل عقدة حالة من حالات التجربة، وعند كل منها نعرف احتمالات الانتقال إلى الحالات اللاحقة. على فرع A منطق من الجذر نسجل $\mathbb{P}(A)$ احتمال وقوع A ، وعلى فرع AB صادر من A ، B ، نسجل $\mathbb{P}(B|A)$ ، نسجل $\mathbb{P}(C|A \cap B)$ وعلى فرع BC صادر من B ، C ، وهكذا.

▪ ليس من الضروري دوماً إنشاء الشجرة كاملة، ففي الكثير من الحالات تكون لدينا معرفة سابقة بالمسارات التي تقود إلى الحدث الذي نرغب بحساب احتمال وقوعه. ففي المثال السابق كنا نعرف أننا نحصل على كرة زرقاء في السحب الثاني بعد اتباع أحد المسارات الثلاثة الآتية

$$R_1 \rightarrow B_2 \quad \text{أو} \quad G_1 \rightarrow B_2 \quad \text{أو} \quad B_1 \rightarrow B_2$$

مثال

يحتوي صندوق U_1 على كرة سوداء وكرتين بيضاوين، ويحتوي صندوق U_2 على كرتين سوداويين وكرتين بيضاوين وكرة حمراء واحدة. نختار عشوائياً أحد الصندوقين، ونسحب منه عشوائياً كرة. نسمى الحدث الموفق لسحب كرة سوداء.

$$\text{١ احسب } \mathbb{P}(B)$$

٢ لقد سحنا كرة سوداء اللون. ما احتمال أن تكون قد سحناها من الصندوق U_1 ؟

الحل

١ هذه تجربة مركبة، نختار أولاً صندوقاً، ثم نختار منه كرة. يمكننا إنشاء تمثيل شجري لهذه التجربة، ولكن من غير الضروري إنشاء هذا التمثيل بالكامل، إذ ينتج الحدث B من المسارين



ولكن $\mathbb{P}(B|U_1) = \frac{1}{3}$ و $\mathbb{P}(U_1) = \mathbb{P}(U_2) = \frac{1}{2}$ لأن الصندوق الأول يحوي ثلات كرات واحدة منها فقط سوداء، و $\mathbb{P}(B|U_2) = \frac{2}{5}$.

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{11}{30}$$

٢ لقد جرى فعلاً سحب كرة سوداء، إذن وقع الحدث B ، ويمكننا صياغة السؤال المطروح كما يأتي: ما احتمال أن يكون U_1 قد اختير علماً أن B قد وقع؟ فالاحتمال المطلوب هو إذن $\mathbb{P}(U_1|B)$. تعريفاً لدينا

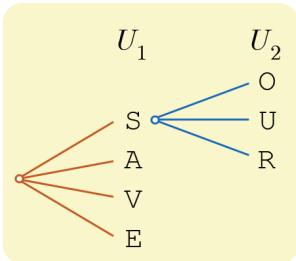
$$\mathbb{P}(U_1|B) = \frac{\mathbb{P}(U_1 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}(B|U_1)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{11}{30}} = \frac{5}{11}$$

٥.١. التمثيل الشجري والتجارب المستقلة احتمالياً

مثال

لنتأمل التجربة المركبة الآتية: يحتوي الصندوق U_1 على حروف كلمة SAVE ويحتوي الصندوق U_2 على حروف كلمة OUR وأخيراً يحتوي الصندوق U_3 على حروف كلمة SOULS. نسحب عشوائياً حرفاً من الصندوق U_1 ، ثم نسحب كذلك عشوائياً حرفاً من الصندوق U_2 ثم حرفاً من الصندوق U_3 . نسجل الحروف التي نحصل عليها بالترتيب، ونقبل (هذا إذن افتراض) أن سحب حرف من صندوق مستقل عن كل نتائج السحب السابقة.

ما احتمال وقوع الحدث : «الحصول على كلمة SOS» ؟



- يمكن البدء بإنشاء المخطط الشجري. الفرع S يمثل الحدث S الموافق لسحب الحرف S من الصندوق U_1 . وانطلاقاً من العقدة S هناك ثلاثة فروع لاحقة ممكنة وكذلك الأمر بالنسبة إلى بقية العقد A و V و E .
- وانطلاقاً من العقدة O الموافقة لسحب الحرف O من U_2 , هناك أربعة فروع ممكنة تואلف سحب أحد الحروف S و O و L من U_3 , وكذلك الأمر بالنسبة إلى العقدتين الأخريين U و R .
- يجب أن نسجل على الفرع S احتمال الحدث «سحب الحرف O من U_2 علماً أنّ S قد وقع». واستناداً إلى الفرض لا يتعلّق هذا الاحتمال بالحدث S , فاحتمال وقوعه هو نفسه احتمال «سحب الحرف O من U_2 » وذلك بقطع النظر عن وقوع الحدث S , وهذا الاحتمال يساوي $\frac{1}{3}$.
- تطبق هذه المناقشة على جميع فروع الشجرة، ولكن من غير الضروري إنشاءها، فالحدث «الحصول على كلمة SOS» يوافق المسار الوحد $S \rightarrow O \rightarrow S$ ومن ثم احتمال هذا الحدث يساوي $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{30}$.
- يمكنا النظر إلى نتيجة هذه التجربة المركبة بصفتها ناجمة عن توالي ثلاثة تجارب بسيطة: الأولى هي سحب حرف من U_1 والثانية هي سحب حرف من U_2 والثالثة هي سحب حرف من U_3 . ولقد افترضنا أنّ هذه التجارب الثلاث مستقلة احتمالياً، أي إنّ نتيجة السحب في أحدها لا تتأثر ولا تؤثّر في نتائج التجارب الأخرى. في مثل هذه الحالة تأخذ نتيجة التجربة المركبة الشكل (A_1, A_2, A_3) حيث A_1 هي نتيجة التجربة الأولى و A_2 هي نتيجة التجربة الثانية و A_3 هي نتيجة التجربة الثالثة ويكون

$$\mathbb{P}(A_1, A_2, A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$$

وقد رمزاً $\mathbb{P}(A_k)$ إلى احتمال الحصول على النتيجة A_k في التجربة رقم k . وبالطبع يمكن تعليم هذه المناقشة على أي عدد منه من التجارب المستقلة احتمالياً.

 لعل أبسط مثال على تجارب مركبة مكونة من عدد من التجارب البسيطة المستقلة احتمالياً هي تلك التجارب المركبة القائمة على **تكرار تجارب بسيطة مت垮لة** عدداً من المرات، مثل تجربة **تكرار إلقاء قطعة نقود** عدداً p من المرات، أو تجربة **تكرار إلقاء حجر نرد** عدداً من المرات، وهكذا.

تحريساً للفهم

كيف نعرف بوجود استقلال احتمالي؟

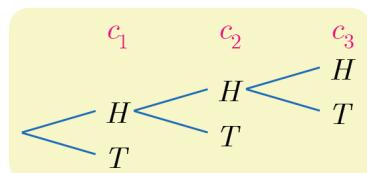
تعلم أن دراسة التجارب العشوائية الحقيقية تجري انطلاقاً من نماذج نظرية معدّة سابقاً. وعندئذ يكون الاستقلال الاحتمالي لبعض الأحداث من ضمن **افتراضات هذا النموذج**، ويجب أن يُنصّ عليه صراحة عند طرح السؤال. ولكن هناك بعض الحالات المرجعية التي جرت العادة أن يكون فيها هذا الافتراض ضمنياً. مثلاً

- تكرار إلقاء حجر نرد أو قطعة نقود عدداً من المرات. نتيجة كل مرّة لا تتأثر بنتائج المرات الأخرى.
- إلقاء عدد من قطع النقود أو أحجار النرد.
- السحب من صناديق مختلفة.
- تكرار السحب من الصندوق نفسه مع الإعادة.

مثال إلقاء ثلات قطع من النقود

نتأمل ثلاثة قطع من النقود نرمز إليها c_1 و c_2 و c_3 . القطعة c_1 متوازنة أمّا c_2 و c_3 فهما متماثلتان ولكنهما غير متوازنتين. كلّ من احتمال ظهور H أو احتمال ظهور T في حالة القطعة c_1 يساوي $\frac{1}{2}$. أمّا في حالة القطعتين c_2 و c_3 فإنّ احتمال ظهور H يساوي $\frac{3}{5}$ واحتمال ظهور T يساوي $\frac{2}{5}$. تلقي قطع النقود الثلاث ونسجّل النتائج التي نحصل عليها بصيغة ثلاثيات (c_1, c_2, c_3) . نقبل أنّ النتيجة التي تظهرها إحدى القطع مستقلة عن نتائج القطع الأخرى. ما احتمال وقوع الحدث A : «الحصول على H مرة واحدة فقط».

الحل



يمكّنا إنشاء التمثيل الشجري المُوافق للتجربة، وقد بدأنا به في الشكل المجاور، ولكن من غير المفيد إنشاءه كاملاً.
من الواضح أنّ هناك ثلاثة مسارات وفقط ثلاثة تحقق الحدث A . هي

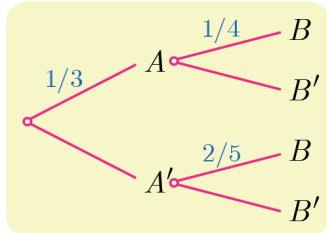
$$\circ \text{--- } T \text{--- } T \text{--- } H \text{--- } T \text{--- } H \text{--- } T \text{--- } H \text{--- } T \text{--- } T$$

ولمّا كانت الأحداث : «ظهور H على c_1 » و «ظهور T على c_2 » و «ظهور T على c_3 » مستقلة احتمالياً، استنتجنا أنّ $\mathbb{P}(THT) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{25}$ ، $\mathbb{P}(HTT) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{25}$ ، ونجد بالمثل أنّ $\mathbb{P}(A) = \frac{8}{25}$ ، إذن $\mathbb{P}(TTH) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{25}$

تَدْرِيْجٌ

① يحتوي صندوق على عشرين كرة سبع منها بيضاوات اللون. نسحب منه ثلات كرات دفعة واحدة.
ما احتمال أن تكون الكرات الثلاث بيضاوات؟

② نملاً عشوائياً كل خانة من الخانات الأربع الآتية  بأحد العدددين 1 أو 1-.
احسب احتمال أن يكون المجموع مساوياً الصفر. وكذلك احتمال ألا يظهر العدد ذاته في خانتين متتاليتين.



③ استناداً إلى التمثيل الشجري المبين في الشكل المجاور. عين الاحتمالات $\mathbb{P}(B'|A')$ و $\mathbb{P}(B'|A)$ و $\mathbb{P}(A'|B)$. واستنتج قيمة كل من $\mathbb{P}(A' \cap B')$ و $\mathbb{P}(A' \cap B)$ و $\mathbb{P}(A \cap B')$ و $\mathbb{P}(A \cap B)$

أجب عن الأسئلة الآتية: ④

- إذا كان $\mathbb{P}(A|B) = \frac{1}{2}$ و $\mathbb{P}(B|A) = \frac{1}{10}$ و $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$ فاحسب $\mathbb{P}(A \cap B)$.
- إذا كان $\mathbb{P}(A|B) = \frac{1}{2}$ و $\mathbb{P}(B|A) = \frac{2}{3}$ و $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$ فاحسب $\mathbb{P}(A \cup B)$.
- إذا كان $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$ و $\mathbb{P}(B|A') = \frac{4}{5}$ فاحسب $\mathbb{P}(B|A)$.
- إذا كان $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ و $\mathbb{P}(B|A) = \frac{2}{5}$ و $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}$ فاحسب $\mathbb{P}(A \cap B)$. واحسب أيضاً $\mathbb{P}(B'|A')$ واستنتج $\mathbb{P}(A' \cap B')$.

⑤ يضمّ مصنع ورشتين A و B لتصنيع المصايبخ الكهربائية. عندما ورد طلب لعدد من المصايبخ قدره 2000 مصباح، صنعت الورشة A منها 1200 مصباحاً وصنعت البقية الورشة B . هناك نسبة 4% من المصايبخ الورشة A معطوبة، في حين تكون نسبة 3% من المصايبخ الورشة B معطوبة. نسحب عشوائياً مصباحاً من الطلب. نرمز بالرمز A إلى الحدث «المصباح مصنوع في الورشة A » وبالرمز B إلى الحدث «المصباح مصنوع في الورشة B » وبالرمز D إلى الحدث «المصباح معطوب».

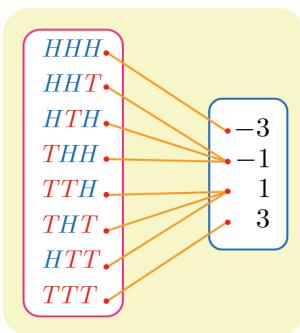
① أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة.
② احسب احتمال أن يكون المصباح معطوباً.
③ إذا كان المصباح معطوباً فما احتمال أن يكون مصنوعاً في الورشة A .
في مدرستنا يمارس 30% من الطلاب لعبة كرة المضرب. ونعلم أن مدرستنا تضم نسبة 60% من الذكور، وأن 55% من هؤلاء لا يلعبون لعبة كرة المضرب. ما احتمال أن تكون طالبة مختارة عشوائياً من بين طالبات المدرسة من بين اللاتي لا يمارسن لعبة كرة المضرب؟ ⑥

المتحولات العشوائية (2)

1.2. تعريف

من الشائع ربط كل نتيجة في تجربة عشوائية بعدد حقيقي. ومفهوم المتحول العشوائي هو الصياغة الاحتمالية لهذه الحالة.

مثال



نلقي ثلاثة قطع نقود متوازنة مرّقمة 1 و 2 و 3. ونسجل الوجه الظاهر لكل قطعة. نختار مجموعة النتائج الممكنة Ω فضاء العينة لهذه التجربة. لتخيل لعبة تقضي بربح ليرة واحدة كلما ظهر الوجه T وبخسارة ليرة كلما ظهر الوجه H . يُسمى التابع X الذي يقترن بكل نتيجةٍ الربح (موجباً كان أو سالباً)، متحولاً عشوائياً على Ω .

تعريف 3

ليكن Ω فضاء العينة لتجربة عشوائية. يُسمى **متحولاً عشوائياً** كلَّتابع معرف على Ω ويأخذ قيمه في \mathbb{R} .

2.2. قانون الاحتمال، التوقع، التباین

مثال

لترجع إلى المثال السابق، ولنبحث عن احتمال الحدث «ربح ليرة واحدة» الذي نرمز إليه بالرمز $H\bar{T}T$ ($X = 1$). يقع هذا الحدث عندما تكون نتيجة التجربة واحدة من النتائج TTH أو THT أو HTT (إذن $(X = 1)$ هو الحدث $\{HTT, THT, TTH\}$). ومنه $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}$. إذن احتمال $(X = 1)$ ، الذي نرمز إليه بالرمز $\mathbb{P}(X = 1)$ ، يساوي $\frac{3}{8}$. يمثل الجدول الآتي قانون احتمال X .

x	-3	-1	1	3
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

المتحول العشوائي ليس متحولاً بل هو تابع! وفي نظرية الاحتمالات تكون قيم هذا التابع أعداداً.



نستخدم عادةً الرموز X, Y, Z, \dots للدلالة على المتحولات العشوائية.

بوجه عام، إذا كان X متحولاً عشوائياً معرفاً على فضاء العينة Ω لتجربة عشوائية. وإذا رمنا بالرمز I إلى مجموعة قيم $X : I = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ وبالرمز p'_i إلى احتمال الحدث «يأخذ X القيمة x_i » الذي نعبر عنه بالصيغة $(X = x_i)$. ويبرهن أن $p'_1 + p'_2 + \dots + p'_m = 1$.

تعريف 4

ليكن X متحولاً عشوائياً مجموعه قيمه $I = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ، **قانون احتمال المتحوّل العشوائي** X هو التابع المعرف على I ويقرن بكل x_i من I العدد $\mathbb{P}(X = x_i) = p'_i$ ويمثل هذا القانون بجدول من الشكل الآتي :

x	x_1	x_2	\dots	x_m
$\mathbb{P}(X = x)$	p'_1	p'_2	\dots	p'_m

تعريف 5

• $\mathbb{P}(X = x_i) = p'_i$ ، ولتكن $I = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ، **التوقع الرياضي للمتحول العشوائي** X هو

$$\mathbb{E}(X) = x_1 p'_1 + \dots + x_m p'_m = \sum_{i=1}^m x_i p'_i$$

▪ **تباین المتحوّل العشوائي** X هو

$$\mathbb{V}(X) = (x_1 - \mathbb{E}(X))^2 p'_1 + \dots + (x_m - \mathbb{E}(X))^2 p'_m = \sum_{i=1}^m (x_i - \mathbb{E}(X))^2 p'_i$$

▪ **الانحراف المعياري للمتحول العشوائي** X هو $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$

خاصة

يُحسب تباين المتحوّل العشوائي X أيضاً بالصيغة المكافئة

$$\mathbb{V}(X) = (x_1^2 p'_1 + \dots + x_m^2 p'_m) - (\mathbb{E}(X))^2 = \sum_{i=1}^m x_i^2 p'_i - (\mathbb{E}(X))^2$$

في الحقيقة، يكفي أن ننشر التربيع :

$$(x_i - \mathbb{E}(X))^2 = x_i^2 - 2x_i \mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2$$

ثم نضرب الطرفين بالاحتمال p'_i ونجمع جميع المساويات الناتجة.

تحريساً للفهم



ليكن X متحوّلاً عشوائياً.

كيف نحسب $\mathbb{P}(X = x_i)$ ؟

- الصيغة $(X = x_i)$ لا تعبر عن مساواة، ولكنها رمز يستعمل في الاحتمالات الدلالية على الحدث: «قيمة X تساوي x_i ».
- لحساب $\mathbb{P}(X = x_i)$ نبحث عن المجموعة الجزئية A من Ω ، (فضاء العينة للتجربة العشوائية)، التي تحتوي على النتائج التي صورتها وفق X هي x_i . فالحدث A هو $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X = x_i)$.

لتكن $\{\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ Ω ولتكن X المتحوّل العشوائي المعروف على Ω كما يأتي :

$$X(a_5) = 1 \quad X(a_4) = 0 \quad X(a_3) = -3 \quad X(a_2) = 0 \quad X(a_1) = -3$$

إذن مجموعة قيم X هي $\{0, 1, -3\}$. لحساب $\mathbb{P}(X = 0)$. نلاحظ أن النتائج التي صورة كل منها وفق X تساوي 0 هي a_2 و a_4 . إذن $\{X = 0\} = \{a_2, a_4\}$. فإذا كانت نتائج Ω متساوية الاحتمال كان $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{2}{5}$.

أتوجد علاقة بين التوقع الرياضي وأمل الربح في لعبة ما؟

- إن التوقع الرياضي كائنٌ رياضي وليس مقدار الربح المتوقع في لعبة ما. يمكننا تخيل لاعبين يلعبان بحظوظ متساوية ولكن الأول يربح والثاني يخسر إذا لعبا مرة واحدة. ما يمكن قوله هو أنه إذا تكررت اللعبة عدداً كبيراً من المرات، فإن أمل الربح يصبح قريباً من التوقع الرياضي.

حساب توقع متحوّل عشوائي



تقضي لعبة إلقاء حجر نرد مثالياً بربح ليرتين إذا أظهر النرد الرقم 1، وبربح ليرة واحدة إذا أظهر الرقم 2، وبخسارة ليرة واحدة في الحالات الأخرى. ما هو التوقع الرياضي للمتحوّل العشوائي الموافق لهذه اللعبة؟

الحل

مجموعة النتائج الممكنة في اللعبة هي $\{\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، وهذه النتائج متساوية الاحتمال لأن النرد مثالياً. المتحوّل العشوائي X معروف على Ω وفق:

$$X(3) = X(4) = X(5) = X(6) = -1 \quad X(2) = 1 \quad X(1) = 2$$

لحساب توقع X علينا تعين قانونه الاحتمالي. الحدث $(X = 1)$ ليس إلا المجموعة الجزئية $\{2\}$ من Ω وهي حدث بسيط «ظهور 2»، وعليه $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{6}$. كذلك $\mathbb{P}(X = -1) = \frac{4}{6}$ يمثل المجموعة الجزئية $\{X = -1\}$ من Ω ، إذن $B = \{3, 4, 5, 6\}$. ومنه

x	1	2	-1
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$

ومنه

$$\mathbb{E}(X) = 2 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + (-1) \times \frac{4}{6} = -\frac{1}{6}$$

ولما كان التوقع سالباً. نخمن أنه إذا لعب اللاعب عدداً كبيراً من المرات فهو سيخسر.

تَدْرِيْجٌ

➊ نلقي حجر نرد متوازن وجوهه مرقمة من 1 إلى 6. نحصل على درجة واحدة إذا ظهر الوجه 1، ونحصل على ست درجات إذا ظهر الوجه 6، ونخسر درجتين في بقية الحالات. ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثل الدرجة التي نحصل عليها. اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X ، واحسب كلاً من $\mathbb{E}(X)$ و $\mathbb{V}(X)$.

➋ يحتوي صندوق على خمس كرات: ثلاثة كرات سوداء اللون، وكرتان بيضوان. نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من الصندوق. ونسمي X المتحوّل العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة. عين مجموعة قيم X ، واكتب قانونه الاحتمالي، واحسب توقعه وتباهيه.

➌ أعد السؤال السابق بافتراض أن السحب يجري على التتالي دون إعادة.

➍ يحتوي صندوق على خمس كرات: اثنان تحملان الرقم 1 واثنان تحملان الرقم 2 وواحدة تحمل الرقم 3. نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من الصندوق. ونسمي X المتحوّل العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب مجموع أرقام الكرتين المسحوبتين. عين مجموعة قيم X ، واكتب قانونه الاحتمالي، واحسب توقعه وتباهيه.

➎ أعد السؤال السابق بافتراض أن السحب يجري على التتالي دون إعادة.

➏ نلقي حجر نرد متوازن مرتين ونسجل رقمي الوجهين الظاهرين. ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يقرن بكل نتائج التجربة مجموع رقمي الوجهين الظاهرين. اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه وتباهيه وانحرافه المعياري.

الاستقلال الاحتمالي لمتحوّلين عشوائيين

1.3. تعريف القانون الاحتمالي لزوج من المتحوّلات العشوائية

مثال

لتأمّل التجربة الآتية: لدينا صندوق يحتوي على ثلاثة كرات واحدة حمراء تحمل الرقم 1 واثنتان زرقاء تحملان الرقمين 2 و 3. نسحب من الصندوق عشوائياً كرتين على التالي مع الإعادة. ولتكن Ω مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة.

- نعرف على Ω المتحوّل العشوائي X الذي يقرن بكلّ نتيجة للتجربة عدد الكرات الزرقاء المسحوبة. إذن يأخذ X قيمه في المجموعة $I = \{0, 1, 2\}$.

- ونعرف على Ω أيضاً المتحوّل العشوائي Y الذي يقرن بكلّ نتيجة للتجربة مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين. يأخذ Y قيمه في المجموعة $J = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. فمثلاً، إذا كانت نتيجة السحب أي سحبنا في المرة الأولى الكرة التي تحمل الرقم 2 وفي المرة الثانية الكرة التي تحمل الرقم 1 أخذ X القيمة $x_1 = 1$ وأخذ Y القيمة $y_3 = 1 + 2 = 3$.

إنّ تعريف قانون الزوج (X, Y) يعني إعطاء احتمالات جميع الأحداث $(X = x_i) \cap (Y = y_j)$ ، حيث x_i من I و y_j من J ، أي $p_{i,j} = \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$. عادة نعرض هذه الاحتمالات في جدول ذي مدخلين: فنكتب في العمود القيم x_i التي يأخذها X ، وفي السطر القيم y_j التي يأخذها Y ، ونضع في الخانة الواقعية عند تقاطع السطر x_i والعمود y_j العدد $p_{i,j}$ الذي يمثل احتمال وقوع الحدث $(X = x_i) \cap (Y = y_j)$.

فمثلاً الحدث $(Y = 2)$ يقع فقط، وفقط إذا، جرى سحب الكرة التي تحمل الرقم 1 في المرة الأولى والكرة ذاتها في المرة الثانية، إذن

$$(X = 0) \cap (Y = 2) = \{(1, 1)\}, \quad (X = 1) \cap (Y = 2) = \emptyset, \quad (X = 2) \cap (Y = 2) = \emptyset$$

$$\text{وعليه } p_{2,2} = 0 \text{ و } p_{0,2} = 0 \text{ و } p_{1,2} = \frac{1}{9}$$

أما الحدث $(X = 2) \cap (Y = 4)$ فهو يوافق سحب كرتين زرقاءين مجموع رقميهما يساوي 4 فهو إذن الحدث $\{(2, 2)\}$ واحتمال وقوعه يساوي $p_{2,4} = \frac{1}{9}$. وإذا تأمّلنا الحدث $(X = 1) \cap (Y = 4)$ فهو يوافق سحب كرتين إحداهما زرقاء اللون والثانية حمراء اللون ومجموع رقميهما يساوي 4 إذن $\{(1, 3), (3, 1)\}$ ، وعليه $p_{1,4} = \frac{2}{9}$. وهكذا نحصل على قانون الزوج (X, Y) ممثلاً في الجدول المجاور.

$X \backslash Y$	2	3	4	5	6
0	$\frac{1}{9}$	0	0	0	0
1	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	0
2	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

تعريف 6

ليكن X و Y متحولين عشوائيين معرفتين على فضاء العينة ذاته Ω . يأخذ X القيم x_1 و x_2 و ... و x_n ، ويأخذ Y القيم y_1 و y_2 و ... و y_m . إن تعريف قانون الزوج (X, Y) هو إعطاء الاحتمال $\cdot \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$ ، لكل حدث

2.3. الاستقلال الاحتمالي لمتحولين X و Y

تعريف 7

نقول إن المتحولين العشوائيين X و Y مستقلان احتمالياً إذا كان الحدثان $(X = x_i)$ و $(Y = y_j)$ مستقلين احتمالياً أيًّا كان i و j . هذا يعني أنه مهما كان i و j كان

$$\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \mathbb{P}(X = x_i) \times \mathbb{P}(Y = y_j)$$

$$\cdot p'_j = \mathbb{P}(Y = y_j) \text{ و } p_i = \mathbb{P}(X = x_i) \text{ حيث } p_{i,j} = p_i \times p'_j \text{ أي}$$

تعرِيزاً للفهم

كيف يمكننا الحصول على قانون كل من X و Y انطلاقاً من قانون الزوج (X, Y) ؟

- لتأمل المثال السابق، عند جمع عناصر السطر الثاني مثلاً نحصل على $\frac{4}{9}$ وهو احتمال $(X = 1)$ لأن هذا المجموع يساوي، في الحقيقة، مجموع احتمالات الأحداث

$$((X = 1) \cap B_2, (X = 1) \cap B_3, \dots, (X = 1) \cap B_6)$$

حيث $B_k = (Y = k)$ ولكن الأحداث B_2, B_3, \dots, B_6 تؤلف تجزئة للفضاء Ω بأحداث منفصلة متشابهة، ومن ثم إذا استخدمنا المبرهنة 1 استنتجنا أن $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{4}{9}$ يساوي مجموع احتمالات الأحداث $\mathbb{P}((X = 1) \cap B_k)$. وهكذا نحصل على قيم $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ عن طريق جمع عناصر الأحداث. ونحصل على قيم $p'_j = \mathbb{P}(Y = y_j)$ بجمع عناصر الأعمدة. ويمكننا أن نكتب هذين القانونين على هامش الجدول السابق. لذلك نسميهما القانونين الهاشميين.

$X \backslash Y$	$y_2 = 2$	$y_3 = 3$	$y_4 = 4$	$y_5 = 5$	$y_6 = 6$	$\mathbb{P}(X = x_i)$
$x_0 = 0$	$\frac{1}{9}$	0	0	0	0	$\frac{1}{9}$
$x_1 = 1$	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	0	$\frac{4}{9}$
$x_2 = 2$	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
$\mathbb{P}(Y = y_j)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1
	p'_2	p'_3	p'_4	p'_5	p'_6	

- ولكن عموماً، لا يمكننا استنتاج قانون الزوج (X, Y) انطلاقاً من قانوني X و Y . هذا ممكن فقط في حالة كون X و Y مستقلين.

كيف يمكننا معرفة إذا كان متحولان عشوائيان مستقلين احتمالياً؟

بمقارنة الجداء $p_i' \times p_j'$ بالمقدار $p_{i,j}$. فبعد إنشاء الجدول الذي يعطي قانون الاحتمال للزوج (X, Y) ، نتّممه بإضافة العمود الذي يعطي قانون X والسطر الذي يعطي قانون Y ، ثم نتبين أيساوي العدد المسجل في خانة (x_i, y_j) جداء الضرب $p_i' \times p_j'$ أو لا يساويه.

- فإذا تحقّقت المساواة عند كل i و j ، كان المتحولان X و Y مستقلين احتمالياً.
- وإذا لم تتحقّق المساواة عند واحد على الأقل من الأزواج (i, j) كان المتحولان X و Y غير مستقلين احتمالياً.

فمثلاً في حالة المثال السابق $p_0 \times p_2 = \frac{1}{81} \neq \frac{1}{9} = p_{0,2}$ فالمحولان X و Y ليسا مستقلين احتمالياً.

تَدْرِيبٌ

$X \setminus Y$	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	
قانون Y				

① نجد في الجدول المجاور القانون الاحتمالي لزوج (X, Y) من المتحولات العشوائية، أكمله وبين إذا كان المتحولان العشوائيان X و Y مستقلين احتمالياً.

$X \setminus Y$	0	1	2	قانون X
0				0.4
1			0.04	
2				0.4
قانون Y	0.3			

② أكمل الجدول المجاور الذي يمثل القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية (X, Y) ، علماً أن المتحولين العشوائيين X و Y مستقلان احتمالياً.

③ ثُلقي حجري نرد متوازنين. ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل مجموع رقمي الوجهين الظاهرين، ولتكن Y المتحول العشوائي الذي يمثل أصغر هذين الرقمين. اكتب الجدول الذي يمثل القانون الاحتمالي لزوج (X, Y) ، واستنتج القانون الاحتمالي لكل من X و Y ، واحسب توقع وتبالين كل من X و Y . أيكون X و Y مستقلين احتمالياً؟

المتحولات العشوائية الحدانية ٤

١.٤ التجارب البرنولية

عندما نهتم في تجربة عشوائية ما فقط بوقوع حدث محدد بعينه S نطلق على هذه التجربة اسم اختبار برنولي (نسبة إلى يعقوب برنولي Jacob Bernoulli).

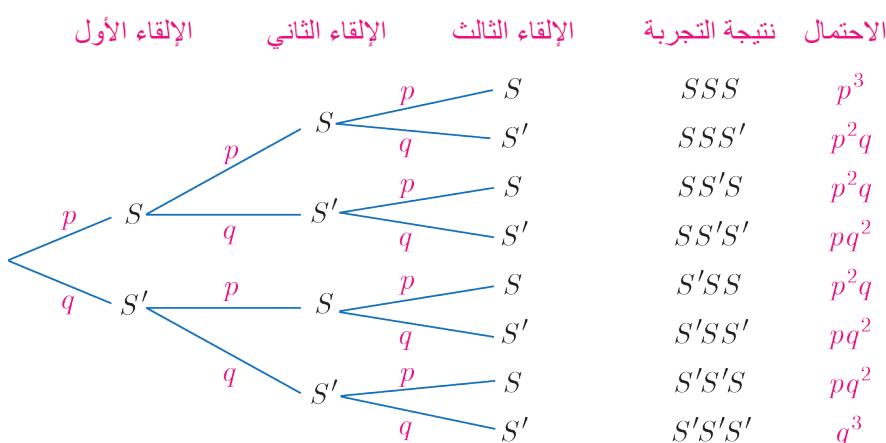
مثال

نلقي حجر نرد ونهتم فقط بوقوع الحدث S الآتي «ظهور العدد 6». نختار إذن المجموعة $\Omega = \{S, S'\}$ فضاءً للعينة، حيث S' هو الحدث «عدم ظهر العدد 6».

وعندما نجري عدداً n من الاختبارات البرنولية، كلُّ واحد منها يجري في الشروط نفسها وبحيث لا تتأثر نتيجة أحدها سواء كانت S أو S' بنتائج الاختبارات التي سبقت، نقول إننا أمام **تجربة برنولي**.

مثال

نلقي حجر نرد متوازن ثلاط مرات على التالى ونهتم في كل مرة فقط بوقوع الحدث S الآتي «ظهور العدد 6». إذن $p = \frac{1}{6}$ و $q = \frac{5}{6}$. ولنتأمل التمثيل الشجري الموافق لهذه التجربة.



نتائج التجربة كلمات مكونة من ثلاثة حروف مأخوذة من المجموعة $\{S, S'\}$. وقد وضعنا احتمال الحصول على أي منها باتباع قواعد التمثيل الشجري. لاحظ أنَّ لجميع هذه الاحتمالات صيغة من الشكل $p^k q^{3-k}$ حيث يمثل العدد k عدد الحروف S في كل كلمة تمثل نتيجة التجربة.

- لنرمز بالرمز X إلى المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة عدد الحروف S في الكلمة التي تمثل هذه النتيجة. لحسب مثلاً إن $\{X = 2\}$ هو الحدث $\{SS', SS'S, S'SS\}$ ومنه

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(SS') + \mathbb{P}(SS'S) + \mathbb{P}(S'SS) = 3p^2q$$

لاحظ أن 3 هو عدد النتائج التي تحقق $(X = 2)$ وأن $\binom{3}{2} = 3$. يمكن تعليل ذلك بلاحظة أن نتيجة تتحقق $(X = 2)$ هي كلمة تحتوي على الحرف S في موقعين وعلى S' في الموقع الثالث. وللحصول على كلمة بهذه علينا ملء ثلاثة خانات مرقمة فنختار اثنين منها لوضع الحرف S فيما فكم خياراً ممكناً لمجموعة جزئية ذات عنصرين يمكننا أن نختار من مجموعة تحتوي ثلاثة عناصر؟ لدينا تحديداً $\binom{3}{2} = 3$ خياراً ممكناً. إذن $\mathbb{P}(X = 2) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ حيث $n = 3$ و $k = 2$.

2.4. القانون الحداني

- لتأمل تجربة برنولية مؤلفة من تكرار n اختبار برنولي. يمكن تمثيل نتيجة هذه التجربة بكلمة مؤلفة من n حرفًا مأخوذ كل منها من المجموعة $\{S, S'\}$. لنرمز p إلى احتمال وقوع الحدث S ، و q إلى احتمال الحدث المتمم S' . إذن $p = 1 - q$.

إذا احتوت الكلمة (القائمة) على k حرف S ، ومن ثم على $n - k$ حرف S' ، فإن احتمال النتيجة الممثلة بهذه الكلمة يساوي $\cdot p^k q^{n-k}$.

- لنرمز بالرمز X إلى المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة عدد الحروف S في الكلمة التي تمثل هذه النتيجة. يأخذ X قيمة في المجموعة $\{0, 1, 2, \dots, n\}$.

لحسب احتمال الحدث $(X = k)$. إن نتائج التجربة التي تتحقق هذا الحدث هي النتائج التي يمكن تمثيل كل منها بكلمة تحتوي k حرف S و $n - k$ حرف S' . للحصول على كلمة من هذا النوع يمكننا ترقيم n خانة ثم نختار منها k خانة لوضع الحرف S فيها، (ووضع S' في بقية الخانات). هناك $\binom{n}{k}$ كلمة ممكنة، وهناك إذن $\binom{n}{k}$ نتيجة ممكنة في الحدث $(X = k)$. واحتمال كل واحد من هذه الأحداث البسيطة يساوي $\cdot p^k q^{n-k}$. إذن

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

تعريف 8

نقول إن المتحول العشوائي X يتبع قانوناً حدانياً ب وسيطين n و p عندما يتحقق الشرطان الآتيان:

- X يأخذ قيمه في المجموعة $\{0, 1, \dots, n\}$.
- وأياً كان العدد الطبيعي k حيث $0 \leq k \leq n$ كان $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

نرمز عادة إلى هذا القانون بالرمز $\mathcal{B}(n, p)$.

تثبت لنا المناقشة التي سبقت التعريف السابق صحة المبرهنة الآتية :

مبرهنة 3

في تجربة برنولية مؤلفة من تكرار عدد n من الاختبارات البرنولية المستقلة احتمالياً والمتماثلة، يتبع المتحول العشوائي، الذي يحصي عدد المرات التي يقع فيها حدث مُستهدف S احتمال وقوعه p على مدى n اختبار، قانوناً حدانياً وسيطاه n و p أي $\mathcal{B}(n, p)$.

مبرهنة 4

ليكن X متحولاً عشوائياً يتبع قانوناً حدانياً وسيطيه n و p ، عندئذ يعطى توقع X و تباينه بالصيغتين :

$$\mathbb{V}(X) = np(1 - p) \quad \text{و} \quad \mathbb{E}(X) = np$$

الإثبات (ترك لقراءة ثانية)

لاحظ أولاً أنه إذا وضعنا كالعادة $q = 1 - p$ كان لدينا

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) + \dots + k \times \mathbb{P}(X = k) + \dots + n \times \mathbb{P}(X = n) \\ &= 0 + \binom{n}{1} p q^{n-1} + \dots + k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \dots + n \binom{n}{n} p^n \end{aligned}$$

ولكن في حالة $1 \leq k \leq n$ لدينا

$$k \binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}$$

إذن

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= n \binom{n-1}{0} p q^{n-1} + \dots + n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} + \dots + n \binom{n-1}{n-1} p^n \\ &= np \left(\binom{n-1}{0} p^0 q^{n-1} + \dots + \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} + \dots + \binom{n-1}{n-1} p^{n-1} q^0 \right) \\ &= np \times (p + q)^{n-1} = np \end{aligned}$$

ويمكن بالمثل إثبات الجزء المتعلق بالتبابين.

تحريساً للفهم



؟ أمثلة على تجارب برنولي ؟

- تجربة إلقاء حجر نرد، أو قطعة نقود عدداً من المرات.
- السحب المتتالي مع الإعادة. لنتأمل مثلاً صندوقاً يحتوي على مئة كرة؛ عشر كرات بيضاء، وثلاثين كرة خضراء، وأربعين كرة حمراء، وعشرين كرة صفراء. تجري ثلاثة عمليات سحب لكرة من الصندوق مع الإعادة. ونهم فقط بالحدث S : «سحب كرة بيضاء».
- النموذج النظري لهذه التجربة هو تجربة برنولي، فهي تكرار لثلاث اختبارات برنولية مستقلة احتمالياً ومتماثلة. يتمثل الاختبار الواحد بسحب كرة وتبين كونها بيضاء اللون.
- إلقاء عدد من قطع النقود (أو أحجار النرد) المرقمة المتماثلة في آن معاً. النموذج النظري هنا أيضاً تجربة برنولي، إذ نقبل أنه يمكن الحصول عند الإلقاء في آن معاً على النتيجة ذاتها التي نحصل عليها بتكرار اختبارات برنولية مستقلة احتمالياً ومتماثلة. الاختبار البرنولي في هذه الحالة هو إلقاء قطعة واحدة.

؟ متى نستعمل القانون الحداني ؟

- في كل مرّة نواجه فيها مسألة حساب احتمال تحقق حدث S عدداً k من المرات، عند تكرار اختبار عشوائي على نحو مستقل احتمالياً عدداً n من المرات.

مثال

نلقى خمس قطع نقود متوازنة في آن معاً. ما احتمال الحصول على الوجه H ثلاثة مرات فقط ؟

الحل

كما ذكرنا سابقاً، تكفي هذه التجربة إلقاء قطعة النقود ذاتها خمس مرات متتالية، ولما كانت قطع النقود متوازنة كان احتمال الحصول على الوجه H مساوياً $\frac{1}{2}$ وعليه فإن احتمال الحصول على الوجه H

$$\cdot p = \frac{1}{2} \quad k = 3 \quad n = 5 \quad \text{هنا} \quad \left(\begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^3 \left(1 - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{5}{16}$$

مثال

نلقى ست مرات حجر نرد مثالي. وليكن A الحدث «الحصول مرتين على الأقل على 5 أو 6».

فما احتمال وقوع الحدث A ؟

هنا أيضاً لدينا نموذج تجربة برنولي، الاختبار البرنولي هو إلقاء حجر نرد، إذ يتحقق "النجاح" S عند ظهور 5 أو 6. ولأنَّ حجر النرد مثالي لدينا $\mathbb{P}(S) = p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. أمّا المتحول العشوائي X الذي يعطي عدد النجاحات في هذه التجربة فهو يتبع قانوناً برنوليًّا وسيطاه $n = 6$ و $p = \frac{1}{3}$.

عندما يحتوي تعريف حدث A على صيغة من النمط "على الأقل"، فغالباً ما يكون من المفضل حساب احتمال الحدث المتمم A' . هنا الحدث A' هو اجتماع الأحداث «عدم الحصول على 5 أو 6» و «الحصول على 5 أو 6 مرة واحدة فقط» فهو إذن اجتماع الحدين المنفصلين $(X = 0)$ و $(X = 1)$.

ولكن

$$\mathbb{P}(X = 0) = \binom{6}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \binom{6}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 6 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

إذن

$$\mathbb{P}(A') = \left(\frac{2}{3}\right)^6 + 2 \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(2 + \frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{256}{729}$$

$$\text{وعليه } \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A') = \frac{473}{729}$$



① يحتوي صندوق على كرات حمراء وكرات بيضاء. عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء.

❶ نسحب عشوائياً كرة. ما احتمال أن تكون حمراء اللون؟

❷ نسحب من الصندوق ثلاثة كرات على التبالي ومع الإعادة. ونعرف X المتحول العشوائي الذي يدلّ على عدد الكرات الحمراء المسحوبة أثناء عمليات السحب الثلاث. ما القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X .

❸ ثُلقي حجر نرد متوازن ست مرات متتالية. ما احتمال الحصول على العدد 6 ثلاثة مرات فقط ثلاثة مرات؟

❹ ثُلقي حجر نرد متوازن ثمانية مرات متتالية. ليكن A الحدث: «الحصول على عدد زوجي ثلاثة مرات على الأقل». ما احتمال A ؟

❺ يتواجه لاعبان A و B في لعبة كرة المضرب في مباراة مكونة من تسعة أدوار. يكسب A الدور الواحد باحتمال يساوي 0.6. يربح المباراة اللاعب الذي يكسب أكبر عدد من الأدوار. ما احتمال أن يربح B المباراة؟

أفكار يجب تمثيلها



- في حالة $0 \neq \mathbb{P}(B)$ ، يرتبط الاحتمال المشروط A علماً B ، الذي نرمز إليه $\mathbb{P}(A|B)$ والاحتمالين $\mathbb{P}(A \cap B)$ و $\mathbb{P}(A \cup B)$ بالعلاقة: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B)$.
- يعبر عن الاستقلال الاحتمالي لحدثين A و B بالعلاقة $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.
- في حالة تمثيل شجري لتجربة عشوائية:

 - يعبر مسار كامل عن تقاطع جميع الأحداث التي يمر بها المسار.
 - يعطي جداء ضرب الاحتمالات المكتوبة على مسار احتمال الحدث الذي يمثل المسار.
 - إذا حفظت عدة مسارات الحدث A كان مجموع احتمالاتها مساوياً احتمال الحدث A .
 - إذا كانت التجربة مؤلفة من تتبع تجارب بسيطة مستقلة، يكفي أن نكتب على الفرع B — C احتمال وقوع C أي $\mathbb{P}(C)$.

■ يؤول الاستقلال الاحتمالي لمتحولين عشوائيين X و Y إلى الاستقلال الاحتمالي لجميع الأحداث (X, Y) و $(Y = y_j | X = x_i)$. ولتحديد ذلك ننشئ جدول القانون الاحتمالي للزوج (X, Y) .

معكسات يجب امتلاكها

- عند حساب احتمال حدث من النمط A و B يمكن استعمال عدد من الصيغ:
 - $\mathbb{P}(B) \neq 0$ في حالة $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B)$.
 - $\mathbb{P}(A) \neq 0$ في حالة $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A)$.
 - $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ في حالة كون الحدين A و B مستقلين احتمالياً.
- ليس من الضروري دوماً إنشاء كامل التمثيل الشجري لتجربة احتمالية مركبة، يمكننا الالتفاء بإنشاء المسارات التي تهمنا.
- تتحقق من حساباتك، ففي حالة التمثيل الشجري، مجموع الاحتمالات على جميع الفروع الصادرة من عقدة يساوي الواحد.

أخطاء يجب تجنبها



- لا تكتب $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ ، قبل أن تتيقن أنَّ الحدين A و B متنافيان أو منفصلان أي $A \cap B = \emptyset$.
- إنَّ المساواة $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ صحيحة فقط إذا كان الحدثان A و B مستقلين احتمالياً. ومن ثم لا يمكن استعمالها إلا بعد التيقُّن من كون الحدين A و B مستقلين احتمالياً.

أشطر

نشاط 1 إنشاء واستعمال التمثيل الشجري

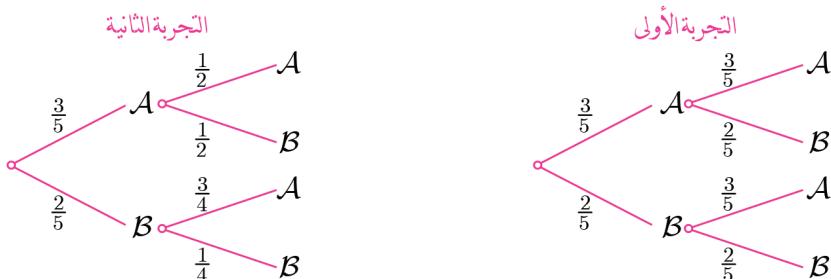
١ السحب مع الإعادة وبدونها

يحتوي صندوق على ثلاثة حروف A وحروفين اثنين B .

التجربة الأولى. نسحب عشوائياً حرفًا من الصندوق ونسجل النتيجة ثم نعيده إلى الصندوق ونسحب حرفًا ثانيةً ونسجل النتيجة.

التجربة الثانية. نسحب عشوائياً وعلى التالي حرفين من الصندوق واحداً إثر الآخر دون إعادة ونسجل النتيجة بترتيب السحب.

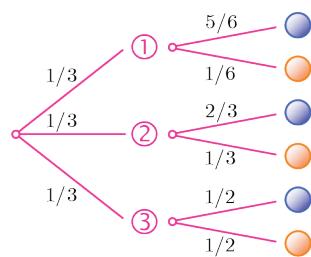
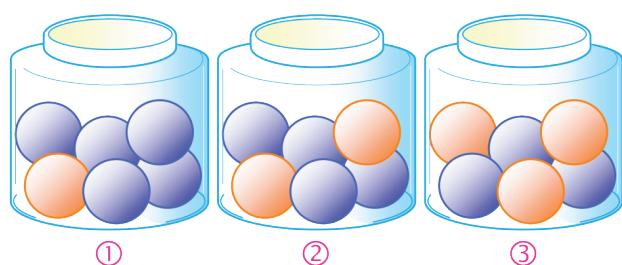
اشرح التمثيلين الشجريين الآتيين:



ما احتمال الحصول على AA في التجربة الأولى؟ وماذا يساوي احتمال هذا الحدث في التجربة الثانية؟

٢ اختيار صندوق ثم سحب كرة

تتألف التجربة من مرحلتين، نختار عشوائياً واحداً من الصناديق الثلاثة المبينة في الشكل، ثم نختار منه كرة. ولقد أنشأنا التمثيل الشجري الموفق لهذه التجربة. اشرح هذا الإنشاء ثم أعطِ احتمال الحدث: «سحب كرة زرقاء اللون». وإذا كانت نتيجة السحب كرة زرقاء فما احتمال أن تكون مسحوبة من الصندوق ②؟



نشاط 2 فحص الأمراض

يُصيب مرضٌ نسبة 10% من السكان. يتيح اختبار اكتشاف إذا كان شخص مصاباً بهذا المرض. يجب أن تكون نتيجة الاختبار إيجابية في حال كون الشخص مصاباً. ولكن احتمال أن تكون النتيجة إيجابية مع كون الشخص الخاضع للاختبار غير مصاب بالمرض يساوي 0.008. أمّا احتمال أن تكون نتيجة الاختبار سلبية على الرغم من كون الشخص الخاضع للاختبار مصاباً فيساوي 0.02.

لنرمز بالرمز M إلى الحدث «الشخص مصاب بالمرض»، وبالرمز T إلى الحدث «نتيجة الاختبار إيجابية». نختار شخصاً عشوائياً.

- ① أنشئ تمثيلاً شجرياً محدداً عليه الاحتمالات المعطاة في النص.
- ② احسب احتمال أن يكون الشخص غير مصاب بالمرض ومع ذلك نتيجة اختباره إيجابية.
- ③ احسب احتمال أن تكون نتيجة الاختبار سلبية ومع ذلك الشخص مصاب بالمرض.
- ④ استنتج احتمال أن يكون الاختبار **موثوقاً**، أي احتمال أن يعطي الاختبار نتيجة إيجابية في حالة شخص مصاب بالمرض ونتيجة سلبية في حالة شخص غير مصاب بالمرض.
- ⑤ أجب عن الأسئلة السابقة ذاتها بافتراض أن المرض يصيب نسبة 30% من السكان.
- ⑥ عمّم النتائج السابقة بافتراض أن احتمال الإصابة بالمرض يساوي p .

نشاط 3 متحولات عشوائية واحتمالات مشروطة

ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد زبائن محطة لتوزيع الوقود في فترة خمس دقائق. نفترض أن عدد الزبائن هذا لا يتجاوز 2. أمّا القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X فهو كما يأتي:

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X = k)$	0.1	0.5	0.4

يشتري كل زبون إما البنزين أو المازوت. احتمال أن يشتري الزبون البنزين يساوي 0.4 واحتمال أن يشتري المازوت 0.6. إن ما يشتريه الزبون مستقلٌ عمّا يشتريه الزبائن الآخرون وعن عدد الزبائن. لنرمز بالرمز C_k إلى الحدث ($X = k$) تسهيلاً للكتابة، ولنرمز بالرمز E إلى الحدث «في خمس دقائق يشتري زبون، وزبون واحد فقط، البنزين». استعن بتمثيل شجري أو بأي أسلوب آخر في الإجابة عن الأسئلة الآتية:

- a. احسب $\mathbb{P}(C_1 \cap E)$ ①
- b. علل لماذا $\mathbb{P}(C_2 \cap E) = 0.48$ ، واستنتاج $\mathbb{P}(E|C_2)$
- c. استنتاج مما سبق قيمة $\mathbb{P}(E)$

لـ Y المـتحـول العـشوـائـي الـذـي يـعـطـي عـدـد الـزـيـانـين الـذـين يـشـتـرون الـبـنـزين فـي خـمـس دقـائق.

- a. ما هي القيمة التي يأخذها Y ؟
- b. اكتب القانون الاحتمالي للمـتحـول العـشوـائـي Y .
- c. اكتب في جدول القانون الاحتمالي للزوج (X, Y) .
- d. أيـكون المـتحـولـان العـشوـائـيان X و Y مستقلـين احتمـالـياً ؟

نشاط 4 التوازن الصبغـي

نـتأـمل مـورـثـة تـحملـ الـأـيلـيـن A و a . نـقـول إنـ نـبـتـة مـتـمـاثـلة الـأـلـاـلـيـن عـنـدـمـا تـحتـوي عـلـى الـأـلـيـلـيـن ذاتـهـما عـلـى زـوـجـيـن منـ الصـبـغـيـاتـ المـتـوـافـقـةـ، فـتـكـونـ صـيـغـتـهاـ الـوـرـاثـيـةـ عـنـدـهـاـ AA أوـ aa ، وـنـقـولـ إنـ النـبـتـةـ مـتـخـالـفـةـ الـأـلـاـلـيـلـيـنـ عـنـدـمـاـ تـكـونـ صـيـغـتـهاـ الـوـرـاثـيـةـ Aa . تـكـاثـرـ بـعـضـ النـبـاتـاتـ (ـالـتـرـمـسـ مـثـلاًـ)ـ بـالـإـلـاقـاحـ الـذـاتـيـ، يـحـدـثـ الـأـمـرـ بـالـنـسـبـةـ إـلـىـ الـخـلـفـ وـكـأنـ إـلـاقـاحـ جـرـىـ بـيـنـ نـبـتـيـنـ مـنـ الصـيـغـةـ الـوـرـاثـيـةـ ذاتـهـاـ حـيـثـ يـجـريـ اـخـتـيـارـ الـأـلـاـلـيـلـيـنـ عـشـوـائـيـاًـ. نـهـدـفـ إـلـىـ درـاسـةـ خـلـفـ نـبـتـةـ مـتـخـالـفـةـ الـأـلـاـلـيـلـيـنـ بـالـإـلـاقـاحـ الـذـاتـيـ.

❶ الجـيلـ الأول

بـالـإـلـاقـاحـ الـذـاتـيـ تـعـطـيـ نـبـتـةـ مـنـ الصـيـغـةـ AA نـبـتـةـ مـنـ الصـيـغـةـ aa بـالـإـلـاقـاحـ الـذـاتـيـ تـعـطـيـ نـبـتـةـ مـنـ الصـيـغـةـ Aa .
اـكـتـبـ اـحـتمـالـاتـ أـنـ يـكـونـ الجـيلـ الأولـ لـنـبـتـةـ صـيـغـتـهاـ الـوـرـاثـيـةـ Aa نـبـتـةـ صـيـغـتـهاـ الـوـرـاثـيـةـ AA أوـ aa .

❷ أـجيـالـ متـلـاحـقةـ

نـبدأـ مـنـ نـبـتـةـ مـتـخـالـفـةـ الـأـلـاـلـيـلـيـنـ (ـمـنـ النـمـطـ Aa ـ فـيـ الجـيلـ 0ـ)، وـنـكـونـ أـجيـالـاًـ لـاحـقـةـ بـالـتـكـاثـرـ الـذـاتـيـ. سـنـسـتـعملـ الرـمـوزـ الآـتـيـةـ:

- الحـدـثـ $(AA)_n$: «ـلـنـبـتـةـ فـيـ الجـيلـ رقمـ n ـ الصـيـغـةـ الـجـينـيـةـ AA ـ»ـ.
- الحـدـثـ $(Aa)_n$: «ـلـنـبـتـةـ فـيـ الجـيلـ رقمـ n ـ الصـيـغـةـ الـجـينـيـةـ Aa ـ»ـ.
- الحـدـثـ $(aa)_n$: «ـلـنـبـتـةـ فـيـ الجـيلـ رقمـ n ـ الصـيـغـةـ الـجـينـيـةـ aa ـ»ـ.

ثـمـ لـنـرـمـ x_n ـ وـ y_n ـ وـ z_n ـ إـلـىـ اـحـتمـالـاتـ الـأـحـادـاثـ $(AA)_n$ ـ وـ $(Aa)_n$ ـ وـ $(aa)_n$ ـ بـالـتـرتـيـبـ.

ما قيمة كل من x_0 و y_0 و z_0 ؟ ①

احسب كلاً من x_1 و y_1 و z_1 ②

اكتب قيمة كل من $\mathbb{P}((\text{Aa})_{n+1}|(\text{Aa})_n)$ و $\mathbb{P}((\text{AA})_{n+1}|(\text{AA})_n)$ و $\mathbb{P}((\text{AA})_{n+1}|(\text{Aa})_n)$. ثم ③

استعمل هذه النتائج لثبت أنّه مهما كانت قيمة n كان

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n \quad \text{و} \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}y_n$$

وأعطي عبارة z_{n+1} .

٣ دراسة المتتاليات

احسب قيم x_n و y_n و z_n في حالة $10 \leq n \leq 0$ ، يمكن استعمال الآلة الحاسبة. ماذا يمكنك القول بشأن المتتاليات الثلاث ؟

ما طبيعة المتتالية $(y_n)_{n \geq 0}$ ؟ عبر عن y_n بدلالة n . ②

نعرف $t_n = x_n + \frac{1}{2}y_n$ ، احسب t_n بدلالة t_{n+1} . ما طبيعة المتتالية $(t_n)_{n \geq 0}$ ؟ عبر عن t_n بدلالة n . ③

احسب نهاية كل من المتتاليات $(x_n)_{n \geq 0}$ و $(y_n)_{n \geq 0}$ و $(z_n)_{n \geq 0}$. ④



مُرئيات ومسائل



يحتوي صندوق على خمس كرات. ثلاثة كرات سوداء اللون وتحمل الأرقام 1 و 2 و 3 وكرتان حمراوان تحملن الأرقام 1 و 2. نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من هذا الصندوق. يتكون فضاء العينة إذن من مجموعة المجموعات الجزئية المؤلفة من عنصرين والمأخوذة من بين خمسة عناصر.

1

ما احتمال الحدث A : «للكرتين المسحبتين اللون ذاته»؟

ما احتمال الحدث B : «مجموع رقمي الكرتين المسحبتين يساوي 3»؟

ما احتمال الحدث B علمًا أن A قد وقع؟

2

نلقى حجر نرد متوازن مرة واحدة، ونتأمل الحدث A : «العدد الظاهر زوجي» والحدث B : «العدد الظاهر أولي». أيكون هذان الحدثان مستقلين احتمالياً؟

3

تتألف عائلة من أربعة أطفال. نقبل أنه عند كل ولادة احتمال ولادة طفل ذكر يساوي احتمال ولادة طفلة أنثى. ونفترض أن الولادات المتتالية هي أحداث مستقلة احتمالياً. نرمز A و B و C إلى الأحداث:

A : «للأطفال الأربعه الجنس نفسه»،

B : «هناك طفلان ذكران وطفلتان»،

C : «الطفل الثالث أنثى»،

احسب احتمال وقوع كل من الأحداث A و B و C .

احسب $\mathbb{P}(C|A)$. أيكون الحدثان A و C مستقلين احتمالياً؟

احسب $\mathbb{P}(C|B)$. أيكون الحدثان B و C مستقلين احتمالياً؟

4

يحتوي صندوق على أربع كرات زرقاء، وثلاث كرات خضراء وواحدة صفراء. نسحب عشوائياً وفي آن معاً ثلاثة كرات من الصندوق. ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة.

ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X ؟

احسب كلاً من $\mathbb{P}(X = 1)$ و $\mathbb{P}(X = 3)$.

استنتج قيمة $\mathbb{P}(X = 2)$.

احسب توقع X وانحرافه المعياري.



لنتعلم البحث معاً

احتمال مشروط 5

تبين دراسة إحصائية أجريت على جماعة من الرياضيين أنه أثناء فترة المسابقة يكون احتمال أن يعطي اختبار تعاطي المنشطات نتيجة إيجابية عند إخضاع أحد الرياضيين له مساوياً 0.02. ويمكن لتناول بعض أدوية الرشح أن يؤثر في نتيجة الاختبار السابق. يتناول 25% من الرياضيين في الجماعة أدوية الرشح في الشتاء. وبين هؤلاء يكون احتمال أن يعطي اختبار تعاطي المنشطات نتيجة إيجابية مساوياً 0.05. ليكن M الحدث: «الرياضي يستعمل دواء الرشح»، ولتكن D الحدث: «نتيجة اختبار تعاطي المنشطات إيجابية». يجري اختيار أحد الرياضيين من الجماعة عشوائياً احسب احتمال كل من الحدين:

- «الرياضي يستعمل دواء الرشح ونتيجة اختبار تعاطيه المنشطات إيجابية»،
- «الرياضي يعطي عند اختبار تعاطيه المنشطات نتيجة إيجابية علمًا أنه لا يستعمل دواء الرشح».

نحو الحل

لنبدأ بترجمة معطيات المسألة وأسئلتها إلى لغة الأحداث والاحتمالات. فضاء العينة هو جماعة الرياضيين والأحداث البسيطة (اختيار أحد الرياضيين) متساوية الاحتمال. نص المسألة يعطي $\mathbb{P}(M)$ و $\mathbb{P}(D|M)$ فما هما؟ يعطي النص أيضاً الاحتمال المشروط $\mathbb{P}(D|M)$ فما هو؟ أما الاحتمالان المطلوبان فهما $\mathbb{P}(M \cap D)$ و $\mathbb{P}(M' \cap D)$.

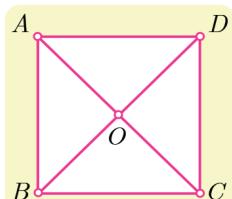
نستطيع حساب $\mathbb{P}(M \cap D)$ بسهولة لأننا نعرف كلاً من $\mathbb{P}(M)$ و $\mathbb{P}(D|M)$ ، لنفعل ذلك.

لحساب $\mathbb{P}(D|M')$ نرجع إلى التعريف.

① احسب $\mathbb{P}(M' \cap D)$ انطلاقاً من $\mathbb{P}(M \cap D)$ و $\mathbb{P}(D)$.

② احسب $\mathbb{P}(M')$ واستنتج المطلوب.

أنجز الحل واكتبه بلغة سليمة.



حوال عشوائي 6

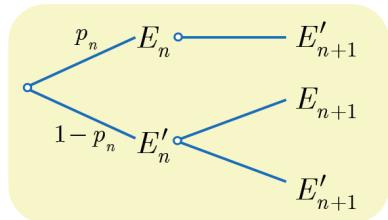
نتأمل مربعاً $ABCD$ مرکزه O . تفترق جزئية بأسلوب عشوائي من إحدى هذه النقاط الخمس إلى نقطة أخرى وفق القواعد الآتية :

- إذا كانت الجزئية عند أحد رؤوس المربع فإنها تفترق إلى أحد الرأسين المجاورين أو إلى مركز المربع باحتمال يساوي $\frac{1}{3}$. (فمثلاً من A يمكنها أن تنتقل إلى B أو D أو O).
- وإذا كانت الجزئية في O فإنها تفترق إلى أيٍّ من الرؤوس A ، B ، C ، D باحتمال يساوي $\frac{1}{4}$.

في البدء كانت الجزئية في A . في حالة $n \geq 1$ ، نرمز بالرمز E_n إلى الحدث: «الجزئية في O بعد القفزة رقم n »، وليكن $p_n = \mathbb{P}(E_n)$ ، (إذن $p_1 = \frac{1}{3}$). يطلب إيجاد علاقة تفيد في حساب p_{n+1} انطلاقاً من p_n ، ثم حساب p_n بدلالة n .

نحو الحل

الاحتمال p_{n+1} هو احتمال أن تقفز الجزئية إلى O في القفزة رقم $n+1$. أتوجد صلة بين الحدين E_n و E_{n+1} ؟ إذا كانت الجزئية في O بعد القفزة رقم n فهل يمكنها أن تقفز إلى O بعد القفزة رقم $n+1$ ؟



إذن وقوع E_{n+1} مشروط بـ **عدم** وقوع الحدث E_n ، (أي بوقوع (E'_n) ، إذن يمكننا إنشاء التمثيل الشجري المبين جانباً :

① علّ الاحتمالات المكتوبة.

② لماذا لا يوجد إلا فرع واحد بعد E_n ؟

③ ما الاحتمال الذي يجب كتابته على الفرع $? E'_n \rightarrow E_{n+1}$ ؟

④ أثبت أن $\cdot p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$

ليكن α حل المعادلة $(t_n)_{n \geq 1}$ ، نضع $x = \frac{1}{3}(1 - x)$. أثبت أن المتالية $(t_n)_{n \geq 1}$ ممتalaة هندسية، عين أساسها وحدتها الأولى، ثم استنتج p_n بدلالة n واحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$

أنجز الحل واكتبه بلغةٍ سليمة.

7

استعمال متحولين عشوائيين

يتطلب إنجاز مهمة مرحلتين A و B على التوالي. تستغرق المرحلة الأولى عدداً عشوائياً من الأيام X_A يعطي قانونه الاحتمالي بالجدول الآتي:

x	1	2	3
$\mathbb{P}(X_A = x)$	0.2	0.5	0.3

وستستغرق المرحلة الثانية عدداً عشوائياً من الأيام X_B يعطي قانونه الاحتمالي بالجدول الآتي:

x	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X_B = x)$	0.2	0.3	0.4	0.1

المتحولان العشوائيان X_A و X_B مستقلان احتمالياً. نرمز بالرمز E إلى الحدث: «يستغرق إنجاز المهمة ثلاثة أيام أو أقل».

٤ يستغرق إنجاز المهمة زمناً عشوائياً يساوي $X_A + X_B$. والمطلوب هو حساب احتمال الحدث $E = (X_A + X_B \leq 3)$

١ اكتب الحدث E بصيغة اجتماع احداث منفصلة من النمط $(X_A = p) \cap (X_B = q)$

٢ بين كيف يفيد الاستقلال الاحتمالي في حساب احتمال كل من الأحداث السابقة.

٣ استنتج احتمال الحدث E .

أنجز الحل واكتبه بلغة سليمة.



قدماً إلى الأمام

٥ يضم ناد رياضي 80 سباحاً، و 95 لاعب قوى، و 125 لاعب جمباز. يمارس كل رياضي لعبة واحدة فقط.

١ نطلب من ثلاثة لاعبين نختارهم عشوائياً ملء استبانة. احسب احتمال وقوع الحدفين الآتيين:

a. الحدث A : «يمارسلاعبون الثلاثة ألعاب القوى».

b. الحدث B : «يمارسلاعبون الثلاثة الرياضة ذاتها».

٢ نسبة الفتيات بين الذين يمارسون السباحة تساوي 45% وبين الذين يمارسون ألعاب القوى 20%， وهي تساوي 68% بين الذين يمارسون لعبة الجمباز.

a. نختار عشوائياً أحد أعضاء النادي. احسب p_1 : احتمال أن يكون فتاة تمارس إحدى ألعاب القوى. احسب أيضاً p_2 : احتمال أن يكون فتاة.

b. نختار عشوائياً فتاة من أعضاء النادي. احسب p_3 احتمال أن تكون لاعبة جمباز.

٩ يحتوي صندوق على خمس كرات حمراء وخمس كرات خضراء. نسحب عشوائياً وفي آن معاً ثلاثة كرات. نتأمل المتحول العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب: ثلاثة كرات حمراء (الحدث R_3)، ويأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب: كرتان حمراوان وكرة خضراء (الحدث R_2)، وأخيراً يأخذ القيمة 0 في بقية الحالات.

١ احسب $\mathbb{P}(R_2)$ و $\mathbb{P}(R_3)$.

٢ عين القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه الرياضي وتبينه.

١٠ لدينا صندوق يحتوي على كرتين حمراوين وثلاث كرات زرقاء. نكرر عملية سحب عشوائي لكرة من الصندوق دون إعادة حتى لا يتبقى في الصندوق إلا كرات من اللون ذاته. ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرات السحب اللازمة. عين مجموعة القيم التي يأخذها X ، وعين قانون X ، واحسب توقعه الرياضي.

11

لُقِي حجري نرد متوازيين ونرمز بالرمز S إلى مجموع النقاط التي نحصل عليها. ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل باقي قسمة S على 2، ول يكن Y المتحول العشوائي الذي يمثل باقي قسمة S على 4.

① عين القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي S .

② عين القانونين الاحتماليين للمتحولين العشوائين X و Y .

③ عين القانون الاحتمالي للزوج (X, Y) .

④ أيُكون المتحولان العشوائيان X و Y مستقلين احتمالياً؟

12

طائرات ذات محركين وأخرى ذات أربعة محركات

يجري تزويد طائرات ذات محركين وطائرات ذات أربعة محركات بال النوع ذاته من المحركات. إن احتمال حدوث عطل في أحد هذه المحركات يساوي p وهو عدد موجب وأصغر تماماً من 1. نفترض أن الأعطال التي يمكن أن تصيب المحركات مستقلة عن بعضها. ليكن X المتحول العشوائي الذي يساوي عدد المحركات التي يصيبها عطل على طائرة ذات محركين، ول يكن Y المتحول العشوائي الذي يساوي عدد المحركات التي يصيبها عطل على طائرة ذات أربعة محركات.

① عين القيم التي يأخذها X ، وقانونه الاحتمالي.

② عين القيم التي يأخذها Y ، وقانونه الاحتمالي.

③ يمكن لطائرة أن تتتابع طيرانها إلى نقطة الوصول إذا كان نصف عدد محركاتها على الأقل غير معطل. احسب p_2 احتمال أن تتتابع طائرة ثنائية المحرك طيرانها، واحسب p_4 احتمال أن تتتابع طائرة رباعية المحرك طيرانها.

④ تحقق أن $p_2 - p_4 = p^2(1-p)(3p-1)$ ، وبين تبعاً لقيمة p أي نوع من الطائرات يعطي وثوقية أكبر.

13

متتاليات واحتمالات

① ليكن a عدداً حقيقياً. نتأمل المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بشرط البدء $u_1 = a$ والعلقة

$$u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10} u_n$$

.a. لتكن $(v_n)_{n \geq 1}$ المتتالية المعرفة بالصيغة $v_n = 13u_n - 4$. أثبت أن $(v_n)_{n \geq 1}$ متتالية هندسية، وعين أساسها، ثم عبر عن v_n بدلالة n .

.b. استنتج صيغة u_n بدلالة n و a . ثم احسب

غالباً ما ينسى مدرس الرياضيات مفتاح غرفة الصف. أياً كان العدد n ، نرمز ②

بالرمز E_n إلى الحدث: «نسي المدرس مفتاح غرفة الصف في اليوم n ». لنضع

$$q_n = \mathbb{P}(E'_n) \quad p_n = \mathbb{P}(E_n)$$

نفترض أنه إذا نسي المدرس المفتاح في اليوم n ، فإن احتمال أن ينساه في اليوم التالي يساوي $\frac{1}{10}$ ، وإذا لم ينس المدرس المفتاح في اليوم n ، فإن احتمال أن ينساه في اليوم التالي يساوي $\frac{4}{10}$.

a. أثبت أنه في حالة $n \geq 1$ لدينا $p_{n+1} = \frac{1}{10} p_n + \frac{4}{10} q_n$

b. استنتج صيغة p_{n+1} بدلالة p_n ، ثم استقد من ① لتحسب p_n بدلالة n و p_1 . أتعلق نهاية المتتالية $(p_n)_{n \geq 1}$ بقيمة p_1 ؟

14

تكرر عشر مرات تجربة إلقاء قطعتي نقود متوازنتين، ونسجل في كل مرة الوجهين الظاهرين. احسب احتمال كل من الحدين A : «الحصول على وجهين H » و B : «الحصول على وجهين H مرة على الأقل».

15

نتأمل حجر نرد متوازن فيه أربعة وجوه ملونة بالأسود، ووجهان ملونان بالأحمر. نلقي هذا الحجر خمس مرات على التوالي.

① ما احتمال أن يظهر وجه أحمر مرة على الأقل عند آخر إلقاء لحجر النرد؟

② ما احتمال أن يظهر وجه أحمر أول مرة على الأقل؟

③ ما قانون المتحول العشوائي X الذي يعدّ عدد الوجوه السوداء اللون التي تحصل عليها؟

16

نتأمل صندوقاً يحتوي على ثلاثة كرات سوداء وأربع كرات حمراء. نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجل لونها ونعيدها إلى الصندوق ثم نضاعف عدد الكرات من لونها في الصندوق. وبعدئذ نسحب مجدداً كرة من الصندوق. لنرمز بالرمز R_2 إلى الحدث: «الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون»، ولتكن R_1 الحدث : «الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء اللون».

① أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة.

② احسب احتمال الحدث R_2 .

③ إذا كانت الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون فما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء اللون؟

17

التجربة الأولى. نتأمل صندوقاً يحتوي على كرتين سوداويين وأربع كرات حمراء. نسحب عشوائياً من

الصندوق ثلاثة كرات في آن معاً. ليكن Y عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

① ما هي مجموعة القيم التي يأخذها Y ؟

② احسب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي Y .

③ احسب التوقع الرياضي للمتحول العشوائي Y وتبينه.

التجربة الثانية. نتأمل صندوقاً يحتوي على كرتين سوداويين وأربع كرات حمراء. نسحب عشوائياً كرة

من الصندوق نسجل لونها ونعيدها إلى الصندوق ثم نضاعف عدد الكرات من لونها في الصندوق.

وبعدئذ نسحب من الصندوق ثلاثة كرات في آن معاً. ليكن X عدد الكرات الحمراء المسحوبة في

المرة الثانية. نرمز بالرمز R_1 إلى الحدث: «الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء اللون».

① ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X ؟

② احسب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X .

③ احسب التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X وتبينه.

18



تحاول سعاد إدخال الوردة في حلقات ثقيقها، تكرر سعاد التجربة عدداً من

المرات. عندما تنجح سعاد في إدخال حلقة يصبح احتمال نجاحها في

إدخال الحلقة اللاحقة $\frac{1}{3}$ ، وعندما تفشل في إدخال حلقة يصبح احتمال

فشلها في إدخال الحلقة اللاحقة $\frac{4}{5}$. نفترض أن احتمال نجاح سعاد في إدخال الحلقة في المرة

الأولى يساوي احتمال فشلها. نتأمل، أيّاً كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n ، الحدين الآتيين:

A_n : «نجحت سعاد في إدخال الحلقة عند الرمية n ».

B_n : «فشلت سعاد في إدخال الحلقة عند الرمية n ».

ونعرف

$$\cdot p_n = \mathbb{P}(A_n) \quad \text{• عين } p_1 \text{ وبرهن أن } \cdot p_2 = \frac{4}{15} \quad ①$$

$$\cdot p_n = \frac{2}{15} p_{n-1} + \frac{1}{5} \quad ②$$

$$(u_n)_{n \geq 1} \quad ③$$

أثبتت أنه أيّاً كانت $n \geq 2$ كان $u_n = p_n - \frac{3}{13}$ أثبتت أن المتالية

متالية هندسية وعين حدّها الأول u_1 وأساسها q .

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} p_n \quad ④$$

استنتج قيمة u_n ثم بدلالة n ، ثم احسب

اختبارات عامة



اختبار ١

(30) درجة لكل سؤال

أولاً أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول. احسب كلاً ما يأتي :

$$\int_0^{\ln 2} e^x (1 - e^x)^3 dx \quad \textcircled{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) \quad \textcircled{1}$$

السؤال الثاني. حل في \mathbb{R} المعادلة :

السؤال الثالث. رباعي وجوه، مركز تقله G ، I منتصف $[AD]$ ، J منتصف $[BC]$. أثبت أن النقاط I و J و G تقع على استقامة واحدة .

السؤال الرابع. في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطة $A(2, -1, 0)$ ، والمستوي \mathcal{P} الذي معادلته $2x + y - 2z + 9 = 0$ ، اكتب معادلة الكرة التي مرکزها A ، وتمس المستوي \mathcal{P} .

ثانياً حل التمرينات الآتية:

التمرين الأول. أثبت أن $\ln x \leq x - 1$ ، أيًّا يكن $x > 0$. باختيار $x = e^{-1/3}$ و $x = e^{1/3}$ ، احص e .

التمرين الثاني. أثبت أن المتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة تدريجيًّا بالعلاقات: $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$ متزايدة تماماً.

التمرين الثالث. احسب قيمة r إذا علمت أن $\frac{1}{\binom{4}{r}} = \frac{1}{\binom{5}{r}} + \frac{1}{\binom{6}{r}}$.

التمرين الرابع. حل في \mathbb{C} المعادلة:

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى. ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $[0, +\infty)$ وفق

$$f(x) = 2x - 1 + \ln \left(\frac{x}{1+x} \right)$$

1. أثبت أن المستقيم $y = 2x - 1$ مقاًرب لـ C ، وادرس الوضع النسبي لـ C و Δ .

2. ادرس التابع f ، وعين المقارب الشاقولي لـ C ، وارسم كل مقارب وجنته ، ثم ارسم C .

3. أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلًّا وحيداً α ، واحصره في مجال طوله 0.5.

المسألة الثانية. يحوي صندوق 6 بطاقات مرقمة بالأرقام 1, 2, 3, 4, 5, 6 ، نسحب منه عشوائياً بطاقيتين على التالي دون إعادة، ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على أصغر رقمي البطاقتين المسحبتين.

1. عَيِّن مجموعـة قيم المتحول العشوائي X ، واكتب جدول قانونه الإحتمالي.

2. احسب التوقع الرياضي $(\mathbb{E}(X))$ ، والتباين $(\mathbb{V}(X))$.

اختبار 2

(30) درجة لكل سؤال)

أولاً أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول. ليكن (\mathcal{C}) الخط البياني للتابع f المعريف على $[0, +\infty]$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^3 + 4 - 4 \cos x}{x^2}$$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ أوجد ①

② أثبت أن المستقيم $y = x$ مقارب للخط (\mathcal{C}) .

السؤال الثاني. نعرف المتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ كما يأتي: $u_0 = 1$

① أثبت أن $0 \leq u_n \leq 4$ أيًّا كان العدد الطبيعي n .

② أثبت أن المتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة.

السؤال الثالث. ليكن A و B حدثن مرتبطين بتجربة عشوائية معروضة بالمخطط الشجري المجاور. كيف نختار قيمة p حتى يكون الحدثان A و B مستقلان احتمالياً؟

السؤال الرابع. نتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقاط $A(1, 5, 4)$ ، $B(10, 4, 3)$ و $C(4, 3, 5)$.

① بين أن النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

② بين أن النقاط A و B و C و D تقع في مستوى واحد.

③ استنتج أن النقطة D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثلثة (A, α) و (B, β) و (C, γ) حيث α و β و γ أعداداً حقيقة يطلب تعينها.

(70) درجة لكل تمرين)

ثانياً حل التمرينات الآتية:

التمرين الأول. أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x) = \frac{3x + 4}{x + 1}$ عند $+\infty$ ، ثم أعطِ عدداً حقيقياً

• يحقق الشرط: إذا كان $x > \alpha$

التمرين الثاني. أثبت أنه أيًّا كانت x من $] -1, +\infty [$ كان $\frac{x}{1+x} \leq \ln(x+1)$

التمرين الثالث.

① حل في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$(1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3} : z^2 - 2(1 - \sqrt{3})z + 8 = 0$$

❷ في المستوى المنسوب إلى معلم متاجنس $(\vec{O}; \vec{i}, \vec{j})$ لتكن النقطتان A و B الممثلتان بالعديدين

$$\frac{z_A}{z_B} = e^{\frac{\pi}{6}i} \quad z_B = \overline{z_A} \quad z_A = (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i$$

وستنتج زاوية العدد العقدي z_A ثم استنتاج العددين العقديين

التمرين الرابع. نريد تأليف لجنة مكونة من (مدير و نائب مدير و أمين سر) من مجموعة تضم خمسة أشخاص. بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة علمًا بأن في المجموعة شخصين متخصصين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها.

١٠٠ درجة لكل مسألة)

ثالثاً حل المسألتين الآتتين:

المأسلة الأولى. ليكن (\mathcal{C}) الخط البياني للتابع f المعروف على \mathbb{R} وفق

١ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولًا بها، واستنتاج المقارب الموازي لمحور الفواصل وادرس وضع (\mathcal{C}) بالنسبة إليه.

٢ ارسم كل مقارب وجنته، ثم ارسم (\mathcal{C}) .

٣ بين أن للمعادلة $f(x) = 2$ حلّ وحيد α وأنّ هذه الحل ينتمي إلى المجال $[-2, 1]$ واستنتاج

$$\alpha = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$$

٤ احسب مساحة السطح المحصور بين (\mathcal{C}) ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 0$ و $x = 1$.

٥ استنتاج مجموعة تعريف التابع $x \mapsto g(x) = \ln(f(x))$ ثم حلّ المعادلة $g(x) = -x$

المأسلة الثانية. لدينا n صندوقاً u_1, u_2, \dots, u_n حيث يحوي ثلات كرات زرقاء وكمة واحدة حمراء. وكل صندوق من الصناديق الباقيه يحوي كرتين زرقاء وكمة واحدة حمراء. نسحب كرة من الصندوق u_1 ثم نضعها في الصندوق u_2 ثم نسحب كرة من الصندوق u_2 ونضعها في الصندوق u_3 وهكذا ...، نسحب كرة من الصندوق u_{n-1} ونضعها في الصندوق u_n . يرمز R_k إلى الحدث (الكرة المسحوبة من الصندوق u_k حمراء).

١. احسب $\mathbb{P}(R_1)$.

$$2. \text{ أثبت أن } \mathbb{P}(R_2) = \frac{1}{4} \mathbb{P}(R_1) + \frac{1}{4}$$

$$3. \text{ أثبت أن } \mathbb{P}(R_k) = \frac{1}{4} \mathbb{P}(R_{k-1}) + \frac{1}{4} \quad 2 \leq k \leq n$$

$$4. \text{ نعرف } x_k = \mathbb{P}(R_k) - \frac{1}{3}$$

١ أثبت أن المتالية $(x_k)_{k \geq 1}$ هندسية. عين أساسها وحدتها الأول.

٢ اكتب x_k بدلالة k واستنتاج $\mathbb{P}(R_k)$ بدلالة k .

اختبار 3

(30) درجة لكل سؤال

أولاً أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول. أثبت أن للمعادلة $x^3 + x + 1 = 0$ حلّاً وحيداً α في \mathbb{R} ثم بين أن $\alpha \in]-1, 0[$.

السؤال الثاني. حل المعادلة التفاضلية $y' + y = 2$, ثم عين حلها f الذي يحقق $f(-1) = 2$

السؤال الثالث. ليكن التابع f المعرف بالصيغة $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - |x|$. احسب النهايتين:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \textcircled{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \textcircled{1}$$

السؤال الرابع. يحوي صندوق ثلات كرات سوداء وخمس كرات بيضاء، عند سحب كرة سوداء يخسر اللاعب نقطة واحدة، وعند سحب كرة بيضاء ينال نقطتين. يسحب اللاعب كرتين على التالي دون إعادة. ما احتمال أن يحصل اللاعب نقطة واحدة فقط؟

ثانياً حل التمرينات الآتية:

التمرين الأول. لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n \geq 1}$ و $(v_n)_{n \geq 1}$ المعرفتان كما يأتي

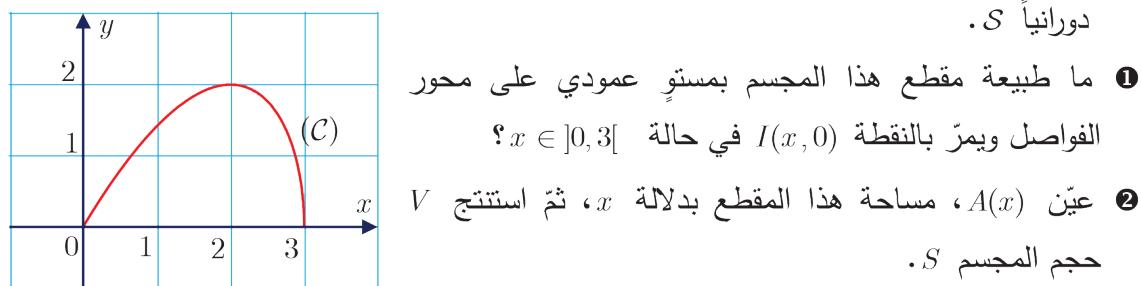
$$v_n = u_n + \frac{1}{4n} \quad \text{و} \quad u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

أثبت أن هاتين المتتاليتين متجاوستان.

التمرين الثاني. في الشكل المجاور (C) هو الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[0, 3]$

بالصيغة: $f(x) = x\sqrt{3-x}$. عندما يدور (C) دورة كاملة حول محور الفواصل يولّد مجسمًا

دورانياً S .



١ ما طبيعة مقطع هذا المجسم بمستوى عمودي على محور الفواصل ويمر بالنقطة $I(x, 0)$ في حالة $x \in [0, 3]$.

٢ عين $A(x)$ مساحة هذا المقطع بدلالة x ، ثم استنتج V حجم المجسم S .

التمرين الثالث. في المستوى المنسوب إلى معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$, لدينا النقاط A و B و C التي

تمثلها الأعداد العقدية: $z_C = 3\sqrt{3} + i$ و $z_B = \sqrt{3} - i$ و $z_A = \sqrt{3} + i$

١ اكتب العدد العقدي $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي واستنتج طبيعة المثلث ABC .

٢ عين (\mathcal{E}) مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ تخيلياً بحثاً.

٣ عين (\mathcal{F}) مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ حقيقياً.

التمرين الرابع. في الفضاء المنسوب إلى معلم متاجنس لدينا النقاط $A(1, 0, -1)$, $O(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ و $D(-4, 2, 1)$ و $B(2, 2, 3)$ و $C(3, 1, -2)$.

① أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته.

② أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2, -3, 1)$ ناظم على المستوى (ABC) واستنتج معادلة المستوى (ABC) .

③ احسب بعد النقطة D عن المستوى (ABC) ثم احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$.

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين: 100 درجة لكل مسألة

المأسأة الأولى. ليكن (\mathcal{C}) الخط البياني للتابع f المعريف على $[e, +\infty) \cup [e, 0]$ وفق

$$f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$$

① ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولأً بها واستنتاج ما للخط (\mathcal{C}) من مقايرات موازية للمحورين الإحداثيين. وعيّن قيمته الحدية مبيناً نوعها.

② ارسم ما وجدته من مستقيمات مقايرية ثم ارسم (\mathcal{C}) .

③ احسب مساحة السطح المحصور بين (\mathcal{C}) ومحور الفواصل والمستقيمين $x = \frac{1}{e^2}$ و $x = \frac{1}{e}$.

المأسأة الثانية. يواجه حارس مرمى عدداً من ضربات الجزاء. إذا صد ضربة الجزاء n فإن احتمال أن يصد ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.8، وإذا لم يصد ضربة الجزاء n فإن احتمال أن يصد ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.6. نفترض أن احتمال أن يصد أول ضربة جزاء يساوي 0.7. ليكن A_n الحدث « يصد حارس المرمى ضربة الجزاء n ».

1. احسب $\mathbb{P}(A_2 | A'_1)$ و $\mathbb{P}(A_2 | A_1)$.

2. استنتاج أن $\mathbb{P}(A_2) = 0.74$

3. نعرف $p_n = \mathbb{P}(A_n)$

برهن أن ① $p_{n+1} = (0.2)p_n + 0.6$

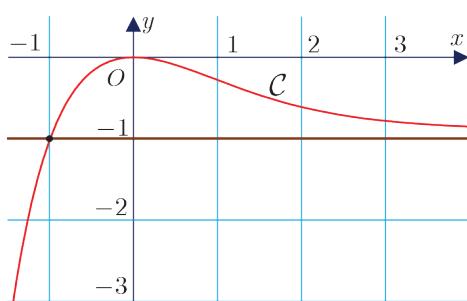
2. لنعرف المتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ بالصيغة $u_n = p_n - 0.75$ بين أن متالية هندسية

أساسها 0.2. استنتاج عبارة p_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

اختبار 4

(40) درجة لكل سؤال

أولاً أجب عن الأسئلة الآتية:



السؤال الأول. في الشكل المجاور خطٌ بياني C لدالة f ، ومن خلال قراءة بيانه للشكل أجب عن الأسئلة التالية:

❶ ما معادلة المستقيم المقارب للخط C ؟ وما الوضع النسبي للخط C مع هذا المقارب؟

❷ يقبل f قيمًا حدية محلية. عينها وعيّن نوعها.

❸ في حالة عدد حقيقي k ، عين بدلالة k عدد حلول المعادلة .

السؤال الثاني. لتكن المجموعة $S = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$

❶ ما عدد الأعداد المكونة من ثلاثة خانات مختلفة مثنى وأرقامها مأخوذة من S ؟

❷ ما عدد الأعداد المكونة من ثلاثة خانات مختلفة وأرقامها مأخوذة من S وكل عدد منها من مضاعفات العدد 5 وأصغر من 500 ؟

السؤال الثالث. في لمعلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط : $A(3, -2, 2)$ و $B(6, 1, 5)$ و $C(6, -2, -1)$ و $D(0, 4, -1)$. بين مع التعلييل صحة أو خطأ كل من المقولات الآتية:

❶ المثلث ABC قائم

❷ المستقيم (AD) عمودي على المستوى (ABC) .

❸ حجم رباعي الوجوه $DABC$ يساوي $V = 81$.

ثانياً حل التمرينات الآتية:

التمرين الأول. ليكن التابع f المعروف على \mathbb{R} وفق $f(x) = x \cdot e^{-x}$ والمطلوب :

$$\text{❶ احسب } \int_0^{\ln 3} f(x) dx$$

❷ أثبت أن التابع $y = f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y' + y = e^{-x}$

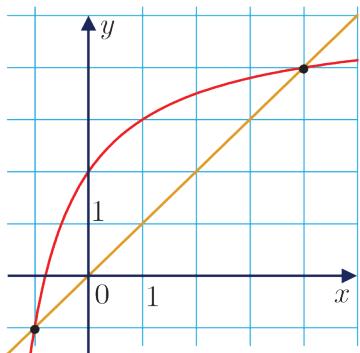
التمرين الثاني. المستقيمان L و L' معروfan وسيطياً وفق

$$L': \begin{cases} x = 4 - 5s \\ y = 3 - 2s \\ z = -1 + 2s \end{cases} : s \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad L: \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$

❶ أثبت أن L و L' متلقاطعان في نقطة يطلب تعين إحداثياتها.

❷ أوجد معادلة المستوى المحدد بالمستقيمين L و L'

التمرين الثالث.



نعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ كما يأتي $u_0 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$

❶ باستعمال الرسم ، مثل على محور الفواصل دون حساب الحدود

$$\cdot u_0, u_1, u_2, u_3$$

❷ ضع تخميناً حول اطراد المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ وتقاربها.

❸ نعرف المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ بالعلاقة $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n + 1}$

1. بين أن $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية، وعين أساسها وحدتها الأول.

2. اكتب عبارة v_n بدالة n ثم استنتج عبارة u_n بدالة n ، وعين نهاية المتتالية $\cdot u_n$.

التمرين الرابع. نتأمل النقاط A و B و C و D الممثلة للأعداد العقدية: $a = -1$ و $b = 2 + i\sqrt{3}$ و $c = 2 - i\sqrt{3}$ و $d = 3$ بالترتيب. والمطلوب :

❶ ارسم النقاط A و B و C و D ، ثم احسب AB و BC و AC واستنتج طبيعة المثلث $.ABC$.

❷ عين $\arg \frac{a - c}{d - c}$ واستنتج طبيعة المثلث $.DAC$.

❸ أثبت أن D هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, -1)$ و $(B, 2)$ و $(C, 2)$ و $(-1, 2)$.

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين: 100 درجة لكل مسألة

المأسأة الأولى. أولاً : ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعروف على $[0, +\infty]$ وفق :

$$f(x) = x(\ln x)^2$$

❶ أثبت $f(x)$ يكتب بالشكل :

❷ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولأً بها.

ثانياً : ليكن C_g الخط البياني للتابع g المعروف على $[0, +\infty]$ وفق : $g(x) = -2x \ln x$. أثبت أنه

عند $x > 0$ يكون $f(x) - g(x) = xf'(x)$ واستنتاج الوضع النسبي للخطين C_f و C_g .

ثالثاً : ليكن x_0 من $[0, +\infty]$.

❶ بين أن معادلة المماس T للمنحني C_f في النقطة التي فاصلتها x_0 هي $y = xf'(x_0) + g(x_0)$

❷ ادرس تقاطع المماس T مع محور الترتيب، ثم استنتاج طريقة لإنشاء المماس للمنحني C_f عند

النقطة التي فاصلتها x_0 .

المسألة الثانية. نتأمل صندوقين. يحتوي الصندوق الأول على (3) كرات مرقطة بالأعداد 1 ، 2 ، 3 ، ويحتوي الصندوق الثاني (4) كرات مرقطة بالأعداد 2 ، 3 ، 4 ، 5 . نسحب عشوائياً كرة من الصندوق الأول ثم نسحب كرة من الصندوق الثاني والمطلوب:

- ① اكتب فضاء العينة المرتبط بهذا الاختبار.
- ② ليكن A الحدث «إحدى الكرتين المسحوبتين على الألف تحمل رقم (3)»
وليكن B الحدث «مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين أكبر تماماً من (5)»
هل الحدثان A و B مستقلان احتمالياً؟ علل إجابتك.
- ③ نعرف متاحاً عشوائياً X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين. اكتب مجموعة قيم X واكتب جدول قانونه الاحتمالي ثم احسب توقعه الرياضي وتبينه.

مسرد المصطلحات العلمية

الإنكليزية	العربية
Conditional probability	الاحتمال المشروط
Independent events	أحداث مستقلة احتمالياً
Polar coordinates	إحداثيات قطبية
Height	ارتفاع (مثلث)
Complex numbers	أعداد عقدية (مركبة)
Binomial coefficients	أمثال ذي الحدين
Standard deviation	الانحراف المعياري
Translation	انسحاب
Variance	التباين
Permutation	تبديل (على مجموعة)
Derangement	تبديل تام (تختالي)
Random experiment	تجربة عشوائية
Bernoulli random experiment	تجربة عشوائية برنولية
Dilation-Homothety	تحاكي
Combinatorics	تحليل توافقى
Arrangement	ترتيب (على مجموعة)
Similarity	تشابه
Covariance	التعابر
Frequency	تكرار
Parametric representation	تمثيل وسيطي
Axial symmetry	تناظر محوري
Central symmetry	تناظر مركزي
Combinations	التوافق
Expectation	التوقع الرياضي
Scalar product	الجداء السلمي
Imaginary part	الجزء التخيّلي
Real part	الجزء الحقيقي
System of linear equations	جملة معادلات خطية
Sine	جيب

الإنكليزية	العربية
Cosine	جيب تمام (تجيب)
Event	حدث
Simple event	حدث بسيط
Circle	دائرة
Rotation	دوران
Tetrahedron (regular)	رباعي الوجوه (المنتظم)
Argument (of a complex number)	زاوية (عدد عقدي)
Acute angle	زاوية حادة
Right angle	زاوية قائمة
Obtuse angle	زاوية منفرجة
Oriented angle	زاوية موجهة
Vector	شعاع
Collinear vectors	شعاعان مرتبطان خطياً
Exponential form	الشكل الأسوي لعدد عقدي
Trigonometric form	الشكل المثلثي لعدد عقدي
Module (of a complex number)	طويلة (عدد عقدي)
Factorial	عامل
Affix of a point or a vector in the plane	عدد عقدي ممثل لنقطة أو شعاع في المستوى
Sample space	فضاء العينة
Probability law	قانون احتمال
Measure	قياس (زاوية)
Principal measure	قياس أساسى (زاوى)
Sphere	كرة
Random variable	متحوّل (متغير) عشوائي
Binomial random variable	متحوّل عشوائي حداني
Independent random variables	متحوّلات عشوائية مستقلة احتمالياً
Equilateral triangle	متساوي الأضلاع (مثلث)
Isosceles triangle	متساوي الساقين (مثلث)
Orthogonal	متعامدان (مستقيمان، مستويان، مستقيم ومستو)
Concurrent	متتقاطعان (مستقيمان، مستويان، مستقيم ومستو)
Concurrent	متلاقيه (مستقيمات)

الإنكليزية	العربية
Parallelogram	متوازي الأضلاع
Parallelepiped	متوازي السطوح
Parallel	متوازيان (مستقيمان، مستويان، مستقيم ومستو)
Median	متوسّط (مثلث)
Mean value	المتوسّط الحسابي
Triangle	مثلث
Axis of symmetry	محور تناظر
Cone	مخروط
Conjugate (of a complex number)	مرافق (عدد عقدي)
Square	مربيع
Barycenter	مركز الأبعاد المتناسبة
Centroid-Center of gravity	مركز التّقل
Center of symmetry	مركز تناظر
Area	مساحة
Line	مستقيم
Plane	مستو
Orthogonal projection	مسقط قائم
Coordinate system	מעلم
Cube	مكعب
Midpoint	منتصف (قطعة مستقيمة)
Biased, unbiased	منحاز، غير منحاز
Ratio	نسبة (التحاكي)
Symmetric	نظيرة (نقطة)
Norm	نظمي، طول (شعاع)
Weighted points	نقاط مُتّكلة
Orthocenter	نقطة تلاقي الارتفاعات