クォータニオン入門加筆

金谷一朗

2014 年 8 月 13 日

目次

第 0 章

オリジナル版の内容のまとめ

0.1　実数・複素数・クォータニオン — 数

0.1.1　実数

C++ 言語では double 型に単項プラス，単項マイナス，和，差，積，商の 6 個の演算子が定義されている．これを「double 型は**数としてのインタフェース**を持つ」と言う．

数としてのインタフェースは実際には次のリストに集約される．

和の演算子　$a + b$ の $+$ 演算子．

零元（ゼロ，和の単位元）　$\mathbf{0} + a = a + \mathbf{0} = a$ であるような $\mathbf{0}$.

負元（和の逆元）　a に対して $-a + a = \mathbf{0}$ となるような $-a$.

積の演算子　$a \cdot b$ の $\cdot$ 演算子．普通は省略される．

単位元（イチ）　$\mathbf{1}a = a\mathbf{1} = a$ であるような $\mathbf{1}$.

逆元　a に対して $a^{-1}a = 1$ であるような a^{-1}.

C++ 言語の double 型の元になっている**実数**は上述のインタフェースを持つ．上述の 6 個のインタフェースは

和　演算子，単位元，逆元

積　演算子，単位元，逆元

という 3 個ずつのインタフェースに分類できる．

和と積にはそれぞれ次の関係がある．

$$\begin{align} abc &= (ab)c \tag{1} \\ &= a(bc) \tag{2} \\ a + b + c &= (a + b) + c \tag{3} \\ &= a + (b + c) \tag{4} \end{align}$$

これを**結合則**と呼ぶ．

和と積が混在した場合は常に積が優先される．

$$ab + c = (ab) + c \tag{5}$$

和と積の間には次の関係が成り立つ．

$$a(b+c) = ab + ac \tag{6}$$

$$(a+b)c = ac + bc \tag{7}$$

これを**分配則**と呼ぶ．

零元（ゼロ，和の単位元）と任意の元との積は常に零元である．

$$\mathbf{0}a = a\mathbf{0} = \mathbf{0} \tag{8}$$

0.1.2　複素数

実数に限らず，**複素数**も上述の 6 個のインタフェース，結合則，分配則に従う．複素数とは実数単位 $\mathbf{1}$ の時数倍と虚数単位 $\mathbf{i}$ の実数倍との和である．a, b を実数とすると，$\alpha = \mathbf{1}a + \mathbf{i}b$ が複素数の一般形である．

虚数単位は次の性質を持つ．

$$\mathbf{i}^2 = -\mathbf{1} \tag{9}$$

複素数は数としてのインタフェースに加えて次のインタフェースを持つ．

共役複素数　ある複素数 α が $\alpha = \mathbf{1}a + \mathbf{i}b$ であるとき $\alpha^* \equiv \mathbf{1}a - \mathbf{i}b$ なる α^* を α の共役複素数と呼ぶ．

複素数のノルム　ある複素数 α について，

$$\|\alpha\| \equiv \sqrt{\alpha^* \alpha} \tag{10}$$

を α のノルムと呼ぶ．ノルムは「大きさ」という概念に近い．

複素数 α の逆数（逆複素数）α^{-1} は次のように求めることが出来る．

$$\alpha^{-1} = \frac{\alpha^*}{\|\alpha\|^2} \tag{11}$$

0.1.3　クォータニオン

$Q = \mathbf{1}a + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d$ なる数 Q を**クォータニオン**（四元数）と呼ぶ．ただし $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ はそれぞれクォータニオン単位であって，

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1},\ \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k},\ \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i},\ \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j} \tag{12}$$

であるとする．

クォータニオンは数としてのインタフェースに加えて次のインタフェースを持つ．

共役クォータニオン　あるクォータニオン Q が $Q = \mathbf{1}a + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d$ であるとき $Q^* \equiv \mathbf{1}a - \mathbf{i}b - \mathbf{j}c - \mathbf{k}d$ なる Q^* を Q の共役クォータニオンと呼ぶ．

クォータニオンのノルム　あるクォータニオン Q について，

$$\|Q\| \equiv \sqrt{Q^* Q} \tag{13}$$

を Q のノルムと呼ぶ．ノルムは「大きさ」という概念に近い．

クォータニオン Q の逆数（逆クォータニオン）Q^{-1} は次のように求めることが出来る．

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{\|Q\|^2} \tag{14}$$

0.2　行列 — もうひとつの数

0.2.1　連立線形方程式と行列

未知数 x に関する線形方程式

$$ax + b = \mathbf{0} \tag{15}$$

の解は $x = -a^{-1}b$ である．

未知数 x_1, x_2 に関する連立線形方程式

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + b_1 = \mathbf{0} \tag{16}$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + b_2 = \mathbf{0} \tag{17}$$

の解について，新たな記号を発明して

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{18}$$

と書き直し，

$$A \equiv \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix},\ X \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\ B \equiv \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},\ \mathbf{O} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{19}$$

とすると，未知数 x_1, x_2 に関する連立線形方程式は

$$AX + B = \mathbf{O} \tag{20}$$

と書け，シンプルで美しく見える．演算規則をうまく調整すると，上述の連立線形方程式の解は $X = -A^{-1}B$ と書ける．このようにして作った $A, B, X, \mathbf{O}$ を**行列**と呼ぶ．

0.2.2　正方行列

各要素が実数からなり，行と列の大きさが等しい行列を**実正方行列**と呼ぶ．実正方行列を A とすると次のように書ける．

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ a_{i1} & & & a_{ij} & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ a_{n1} & & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{21}$$

そこで実正方行列 A は，その要素と添字を使って $[a_{ij}]$ と書くこともある．

実正方行列には

- 和
- 零元

- 負元

が定義されている．行列 $[a_{ij}]$ と行列 $[b_{ij}]$ の和は

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] \equiv [a_{ij} + b_{ij}] \tag{22}$$

であり，行列の零元（ゼロ行列）$\mathbf{O}$ はすべての要素が $\mathbf{0}$ であるような行列である．

行列 $[a_{ij}]$ と行列 $[b_{ij}]$ の積も定義されており

$$[a_{ij}][b_{ij}] \equiv \sum_{k=1}^{n} [a_{ik} b_{kj}] \tag{23}$$

である．この定義から，積の単位元（単位行列）$\mathbf{I}$ は

$$\mathbf{I} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \tag{24}$$

でなければならないことがわかる．単位行列 $\mathbf{I}$ は $[\delta_{ij}]$ とも書く．デルタ記号を使うのは歴史的理由である．

0.2.3　直交行列とユニタリ行列

行列 $[a_{ij}]$ に対して，行と列を入れ替えた $[a_{ji}]$ は元の行列の**転置行列**と呼ばれる．転置行列は

$$[a_{ij}]^t \equiv [a_{ji}] \tag{25}$$

のような記号を使って表す．もし

$$[a_{ij}]^t = [a_{ij}] \tag{26}$$

であるならば，行列 $[a_{ij}]$ は**対称行列**である．もし

$$[a_{ij}]^t = -[a_{ij}] \tag{27}$$

であるならば，行列 $[a_{ij}]$ は**反対称行列**である．

実数の代わりに複素数を用いた正方行列を**複素正方行列**と呼ぶ．いま複素正方行列を $[\alpha_{ij}]$ で表すとき，その共役と転置を行った $[\alpha^*_{ji}]$ を**共役転置行列**と呼ぶ．共役転置行列を作る操作には特別な記号が割り当てられており，次のように表す．

$$[\alpha_{ij}]^\dagger \equiv [\alpha^*_{ji}] \tag{28}$$

もし

$$[a_{ij}]^\dagger = [a_{ij}] \tag{29}$$

であるならば，行列 $[\alpha_{ij}]$ は**エルミート行列**である．もし

$$[a_{ij}]^\dagger = -[a_{ij}] \tag{30}$$

であるならば，行列 $[\alpha_{ij}]$ は**反エルミート行列**である．

実正方行列 A について，もし

$$A^t A = \mathbf{I} \tag{31}$$

であるならば，行列 A は**直交行列**である．複素正方行列 A について，もし

$$A^\dagger A = \mathbf{I} \tag{32}$$

であるならば，行列 A は**ユニタリ行列**である．

0.3　行列による 2 次元の回転と内積

0.3.1　ベクトル

ベクトルには

- 和
- 零元（ゼロベクトル）
- 負元（逆ベクトル）

がある．またベクトルは実数倍が出来る．

ベクトル $\boldsymbol{p}$ のノルム $\|\boldsymbol{p}\|$ という量を定義できる．ノルムの定義は複数あるが，最もよく用いられているものは，ベクトルをユークリッド空間における位置とみなし，その位置の原点からの距離とする定義である．

二つのベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ の間に**内積**という演算が定義できる．内積は $\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \rangle$ で表す．ベクトルをユークリッド空間における位置とみなしたとき，二つのベクトルのなす角度を θ として，

$$\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \rangle \equiv \|\boldsymbol{p}\| \|\boldsymbol{q}\| \cos\theta \tag{33}$$

と定義するのが，最も一般的な内積の定義である．この定義に従えば，ベクトル $\boldsymbol{p}$ のノルム $\|\boldsymbol{p}\|$ は

$$\|\boldsymbol{p}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p} \rangle} \tag{34}$$

である．

幾何学的な座標系を導入すると便利なことが多々ある．座標系を表すベクトルを**基底ベクトル**と呼ぶ．基底ベクトルとしていま $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ があるとする．

ベクトル $\boldsymbol{p}$ の**成分**を p_1, p_2 で表すと，

$$p_\mu = \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}_\mu \rangle \tag{35}$$

である．ただし μ は $1, 2$ である．ベクトルは成分と基底ベクトルから次のように合成できる．

$$\boldsymbol{p} = \sum_{\mu=1}^{2} p_\mu \boldsymbol{e}_\mu \tag{36}$$

基底ベクトルの組として**正規直交系**を選ぶとは

$$\|\boldsymbol{e}_1\| = \|\boldsymbol{e}_2\| = 1 \tag{37}$$

$$\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle = 0 \tag{38}$$

を満たすような $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を選ぶということである．一般には

$$\langle \boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}_\nu \rangle = \delta_{\mu\nu} \tag{39}$$

と書くことが多い．

0.3.2　ベクトルの回転

ベクトル $\boldsymbol{p}$ の正規直交系での成分 p_1, p_2 を行列風に

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \tag{40}$$

と書くと便利なことがある．ベクトル $\boldsymbol{p}$ で表される位置（これを今後 $\vec{P}$ としよう）を原点まわりに θ 回転させた位置（これは $\vec{P'}$ とする）のベクトル $\boldsymbol{p}'$ の成分は次のように計算出来る．

$$\begin{bmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \tag{41}$$

ここで行列

$$T(\theta) \equiv \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{42}$$

を導入し，ベクトルと行列を意図的に混同すると

$$\boldsymbol{p}' = T(\theta)\boldsymbol{p} \tag{43}$$

という簡潔な式が得られる．ここで行列だとか成分だとかを一切忘れて，ベクトル $\boldsymbol{p}$ に作用するものとして $T(\theta)$ を捉える．この $T(\theta)$ は**作用素**と呼ばれる．

0.4　複素数による 2 次元の回転

正規直交系の基底ベクトルとは

$$\langle \boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}_\nu \rangle = \delta_{\mu\nu} \tag{44}$$

を満たしてさえいればよい．もし内積の定義を都合よく選べば

$$\boldsymbol{e}_1 = \mathbf{1},\ \boldsymbol{e}_2 = \mathbf{i} \tag{45}$$

なる座標系を作ることが出来る．実際この座標系は**複素座標系**またはガウス座標系と呼ばれる．

複素座標系では，内積 $\langle \alpha, \beta \rangle$ を次のように定義する．

$$\langle \alpha, \beta \rangle \equiv \alpha^* \beta \tag{46}$$

複素座標系における回転の作用素 $T(\theta)$ は次の形を取る．

$$T(\theta) = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta \tag{47}$$

オイラーの公式

$$e^{\mathbf{i}\theta} = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta \tag{48}$$

を用いると，回転 $T(\theta)$ は

$$T(\theta) = e^{\mathbf{i}\theta} \tag{49}$$

とさらに簡潔に書ける．

0.5　行列による 3 次元の回転と外積

0.6　クォータニオンによる 3 次元の回転

0.7　テンソルとスピノール

1. 実数・複素数・クォータニオン — 数
2. 行列 — もうひとつの数
3. 行列による 2 次元の回転と内積
4. 複素数による 2 次元の回転
5. 行列による 3 次元の回転と外積
6. クォータニオンによる 3 次元の回転
7. テンソルとスピノール

第 1 章

群について

第 2 章

リー群（リー代数）について

第 3 章

束について