

クォータニオン入門加筆

金谷一朗

2014 年 8 月 13 日

目次

第 0 章	オリジナル版の内容のまとめ	5
0.1	実数・複素数・クォータニオン — 数	5
0.2	行列 — もうひとつの数	7
0.3	行列による 2 次元の回転と内積	9
0.4	複素数による 2 次元の回転	10
0.5	行列による 3 次元の回転と外積	11
0.6	クォータニオンによる 3 次元の回転	13
0.7	テンソルとスピノール	13
第 1 章	群について	15
第 2 章	リー群 (リー代数) について	17
第 3 章	束について	19

第 0 章

オリジナル版の内容のまとめ

0.1 実数・複素数・クォータニオン — 数

0.1.1 実数

C++ 言語では `double` 型に単項プラス，単項マイナス，和，差，積，商の 6 個の演算子が定義されている．これを「`double` 型は**数としてのインタフェース**を持つ」と言う．

数としてのインタフェースは実際には次のリストに集約される．

和の演算子 $a + b$ の $+$ 演算子．

零元（ゼロ，和の単位元） $0 + a = a + 0 = a$ であるような 0 ．

負元（和の逆元） a に対して $-a + a = 0$ となるような $-a$ ．

積の演算子 $a \cdot b$ の \cdot 演算子．普通は省略される．

単位元（イチ） $1a = a1 = a$ であるような 1 ．

逆元 a に対して $a^{-1}a = 1$ であるような a^{-1} ．

C++ 言語の `double` 型の元になっている**実数**は上述のインタフェースを持つ．上述の 6 個のインタフェースは

和 演算子，単位元，逆元

積 演算子，単位元，逆元

という 3 個ずつのインタフェースに分類できる．

和と積にはそれぞれ次の関係がある．

$$abc = (ab)c \quad (1)$$

$$= a(bc) \quad (2)$$

$$a + b + c = (a + b) + c \quad (3)$$

$$= a + (b + c) \quad (4)$$

これを**結合則**と呼ぶ．

和と積が混在した場合は常に積が優先される．

$$ab + c = (ab) + c \quad (5)$$

和と積の間には次の関係が成り立つ.

$$a(b+c) = ab+ac \quad (6)$$

$$(a+b)c = ac+bc \quad (7)$$

これを**分配則**と呼ぶ.

零元 (ゼロ, 和の単位元) と任意の元との積は常に零元である.

$$0a = a0 = 0 \quad (8)$$

0.1.2 複素数

実数に限らず, **複素数**も上述の6個のインタフェース, 結合則, 分配則に従う. 複素数とは実数単位 **1** の時数倍と虚数単位 **i** の実数倍との和である. a, b を実数とすると, $\alpha = 1a + ib$ が複素数の一般形である.

虚数単位は次の性質を持つ.

$$i^2 = -1 \quad (9)$$

複素数は数としてのインタフェースに加えて次のインタフェースを持つ.

共役複素数 ある複素数 α が $\alpha = 1a + ib$ であるとき $\alpha^* \equiv 1a - ib$ なる α^* を α の共役複素数と呼ぶ.

複素数のノルム ある複素数 α について,

$$\|\alpha\| \equiv \sqrt{\alpha^* \alpha} \quad (10)$$

を α のノルムと呼ぶ. ノルムは「大きさ」という概念に近い.

複素数 α の逆数 (逆複素数) α^{-1} は次のように求めることが出来る.

$$\alpha^{-1} = \frac{\alpha^*}{\|\alpha\|^2} \quad (11)$$

0.1.3 クォータニオン

$Q = 1a + ib + jc + kd$ なる数 Q を**クォータニオン** (四元数) と呼ぶ. ただし **i, j, k** はそれぞれクォータニオン単位であって,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j \quad (12)$$

であるとする.

クォータニオンは数としてのインタフェースに加えて次のインタフェースを持つ.

共役クォータニオン あるクォータニオン Q が $Q = 1a + ib + jc + kd$ であるとき $Q^* \equiv 1a - ib - jc - kd$ なる Q^* を Q の共役クォータニオンと呼ぶ.

クォータニオンのノルム あるクォータニオン Q について,

$$\|Q\| \equiv \sqrt{Q^* Q} \quad (13)$$

を Q のノルムと呼ぶ. ノルムは「大きさ」という概念に近い.

クォータニオン Q の逆数 (逆クォータニオン) Q^{-1} は次のように求めることができる.

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{\|Q\|^2} \quad (14)$$

0.2 行列 — もうひとつの数

0.2.1 連立線形方程式と行列

未知数 x に関する線形方程式

$$ax + b = \mathbf{0} \quad (15)$$

の解は $x = -a^{-1}b$ である.

未知数 x_1, x_2 に関する連立線形方程式

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + b_1 = \mathbf{0} \quad (16)$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + b_2 = \mathbf{0} \quad (17)$$

の解について, 新たな記号を発明して

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (18)$$

と書き直し,

$$A \equiv \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}, X \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, B \equiv \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \mathbf{O} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (19)$$

とすると, 未知数 x_1, x_2 に関する連立線形方程式は

$$AX + B = \mathbf{O} \quad (20)$$

と書け, シンプルで美しく見える. 演算規則をうまく調整すると, 上述の連立線形方程式の解は $X = -A^{-1}B$ と書ける. このようにして作った A, B, X, \mathbf{O} を**行列**と呼ぶ.

0.2.2 正方行列

各要素が実数からなり, 行と列の大きさが等しい行列を**実正方行列**と呼ぶ. 実正方行列を A とすると次のように書ける.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ a_{i1} & & & a_{ij} & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ a_{n1} & & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (21)$$

そこで実正方行列 A は, その要素と添字を使って $[a_{ij}]$ と書くこともある.

実正方行列には

- 和
- 零元

- 負元

が定義されている。行列 $[a_{ij}]$ と行列 $[b_{ij}]$ の和は

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] \equiv [a_{ij} + b_{ij}] \quad (22)$$

であり、行列の零元（ゼロ行列） \mathbf{O} はすべての要素が $\mathbf{0}$ であるような行列である。

行列 $[a_{ij}]$ と行列 $[b_{ij}]$ の積も定義されており

$$[a_{ij}][b_{ij}] \equiv \sum_{k=1}^n [a_{ik}b_{kj}] \quad (23)$$

である。この定義から、積の単位元（単位行列） $\mathbf{1}$ は

$$\mathbf{1} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \quad (24)$$

でなければならないことがわかる。単位行列 $\mathbf{1}$ は $[\delta_{ij}]$ とも書く。デルタ記号を使うのは歴史的理由である。

0.2.3 直交行列とユニタリ行列

行列 $[a_{ij}]$ に対して、行と列を入れ替えた $[a_{ji}]$ は元の行列の**転置行列**と呼ばれる。転置行列は

$$[a_{ij}]^t \equiv [a_{ji}] \quad (25)$$

のような記号を使って表す。もし

$$[a_{ij}]^t = [a_{ij}] \quad (26)$$

であるならば、行列 $[a_{ij}]$ は**対称行列**である。もし

$$[a_{ij}]^t = -[a_{ij}] \quad (27)$$

であるならば、行列 $[a_{ij}]$ は**反対称行列**である。

実数の代わりに複素数を用いた正方行列を**複素正方行列**と呼ぶ。いま複素正方行列を $[\alpha_{ij}]$ で表すとき、その共役と転置を行った $[\alpha_{ji}^*]$ を**共役転置行列**と呼ぶ。共役転置行列を作る操作には特別な記号が割り当てられており、次のように表す。

$$[\alpha_{ij}]^\dagger \equiv [\alpha_{ji}^*] \quad (28)$$

もし

$$[\alpha_{ij}]^\dagger = [\alpha_{ij}] \quad (29)$$

であるならば、行列 $[\alpha_{ij}]$ は**エルミート行列**である。もし

$$[\alpha_{ij}]^\dagger = -[\alpha_{ij}] \quad (30)$$

であるならば、行列 $[\alpha_{ij}]$ は**反エルミート行列**である。

実正方行列 A について、もし

$$A^t A = \mathbf{1} \quad (31)$$

であるならば、行列 A は**直交行列**である。複素正方行列 A について、もし

$$A^\dagger A = \mathbf{1} \quad (32)$$

であるならば、行列 A は**ユニタリ行列**である。

0.3 行列による 2 次元の回転と内積

0.3.1 ベクトル

ベクトルには

- 和
- 零元 (ゼロベクトル)
- 負元 (逆ベクトル)

がある。またベクトルは実数倍が出来る。

ベクトル \mathbf{p} のノルム $\|\mathbf{p}\|$ という量を定義できる。ノルムの定義は複数あるが、最もよく用いられているものは、ベクトルをユークリッド空間における位置とみなし、その位置の原点からの距離とする定義である。

0.3.2 内積

二つのベクトル \mathbf{p}, \mathbf{q} の間に**内積**という演算が定義できる。内積は $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ で表す。ベクトルをユークリッド空間における位置 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ とみなしたとき、二つのベクトルのなす角度を θ として、

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle \equiv \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\| \cos \theta \quad (33)$$

と定義するのが、最も一般的な内積の定義である。この定義に従えば、ベクトル \mathbf{p} のノルム $\|\mathbf{p}\|$ は

$$\|\mathbf{p}\| = \sqrt{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle} \quad (34)$$

である。

幾何学的な座標系を導入すると便利なのが多々ある。座標系を表すベクトルを**基底ベクトル**と呼ぶ。基底ベクトルとして $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ があるとする。

ベクトル \mathbf{p} の**成分**を p_1, p_2 で表すと、

$$p_\mu = \langle \mathbf{p}, \mathbf{e}_\mu \rangle \quad (35)$$

である。ただし μ は 1, 2 である。ベクトルは成分と基底ベクトルから次のように合成できる。

$$\mathbf{p} = \sum_{\mu=1}^2 p_\mu \mathbf{e}_\mu \quad (36)$$

基底ベクトルの組として**正規直交系**を選ぶとは

$$\|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\| = 1 \quad (37)$$

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 0 \quad (38)$$

を満たすような $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を選ぶということである。一般には

$$\langle \mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu \rangle = \delta_{\mu\nu} \quad (39)$$

と書くことが多い。

0.3.3 ベクトルの回転

ベクトル \mathbf{p} の正規直交系での成分 p_1, p_2 を行列風に

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

と書くことが便利である。ベクトル \mathbf{p} で表される位置（これを今後 \overrightarrow{OP} としよう）を原点まわりに θ 回転させた位置（これは $\overrightarrow{OP'}$ とする）のベクトル \mathbf{p}' の成分は次のように計算出来る。

$$\begin{bmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

証明はオリジナル版を参照。

ここで行列

$$T(\theta) \equiv \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (42)$$

を導入し、ベクトルと行列を意図的に混同すると

$$\mathbf{p}' = T(\theta)\mathbf{p} \quad (43)$$

という簡潔な式が得られる。ここで行列だとか成分だとかを一切忘れて、ベクトル \mathbf{p} に作用するものとして $T(\theta)$ を捉える。この $T(\theta)$ は**作用素**と呼ばれる。

0.4 複素数による2次元の回転

0.4.1 複素数で表す2次元ベクトル

正規直交系の基底ベクトルとは

$$\langle \mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu \rangle = \delta_{\mu\nu} \quad (44)$$

を満たしてさえいればよい。もし内積の定義を都合よく選べば

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{1}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{i} \quad (45)$$

なる座標系を作ることが出来る。実際この座標系は**複素座標系**または**ガウス座標系**と呼ばれる。

0.4.2 回転

複素座標系では、内積 $\langle \alpha, \beta \rangle$ を次のように定義する。

$$\langle \alpha, \beta \rangle \equiv \alpha^* \beta \quad (46)$$

複素座標系における回転の作用素 $T(\theta)$ は次の形を取る.

$$T(\theta) = \cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta \quad (47)$$

オイラーの公式

$$e^{\mathbf{i}\theta} = \cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta \quad (48)$$

を用いると, 回転 $T(\theta)$ は

$$T(\theta) = e^{\mathbf{i}\theta} \quad (49)$$

とさらに簡潔に書ける.

0.4.3 ベクトルと行列と複素数の関係

2次元ベクトルが行列でも複素数でも書けるのは, 基底ベクトルの取り方次第だからである. 基底ベクトルに正規直交系を選ぶと便利であった. 正規直交系とは基底ベクトル \mathbf{p}_μ が

$$\langle \mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu \rangle = \delta_{\mu\nu} \quad (50)$$

でありさえすればよく, 内積をうまく定義してやれば自由に基底ベクトルを選べる.

行列スタイルを採用して

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (51)$$

としても良かったし, 複素数スタイルを採用して

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{1}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{i} \quad (52)$$

としても良かった. どちらかと言えば複素数スタイルのほうが数としてのインタフェースを使えるので優れていると言える. そこで数としてのインタフェースを保ちつつ行列も使えないかと考えると

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

という基底ベクトルも良いことに気づくだろう. この場合 \mathbf{e}_1 のほうは単位行列 $\mathbf{1}$ と同じであるので, もうひとつの \mathbf{e}_2 のほうを虚数単位 \mathbf{i} に対応させて

$$\mathbf{I} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

と名づけても構わない.

0.5 行列による 3 次元の回転と外積

0.5.1 外積

2次元のユークリッド空間を 3次元に拡張するのはわけないことだ. とりわけ行列スタイルであればほとんど自動的に

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (55)$$

を採用すれば良いことがわかる。

ここで、3次元空間で非常にうまくいくトリックを導入する。次に述べる**外積**という演算を3次元ベクトル同士に定義する。

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad (56)$$

ここにベクトル \mathbf{r} はベクトル \mathbf{p} および \mathbf{q} に直交し、そのノルムがベクトル \mathbf{p} とベクトル \mathbf{q} の張る平行四辺形に等しいとする。ベクトル \mathbf{r} の向きは、右手で直交座標系を作り、ベクトル \mathbf{p} を右手親指、ベクトル \mathbf{q} を右手人差し指とした場合、右手中指の方向である。定義から、ベクトル \mathbf{p} とベクトル \mathbf{q} の角度を θ としたときに

$$\|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\| \sin \theta \quad (57)$$

である。

外積は成分ごとに計算すると手っ取り早い。

$$\mathbf{p} \times \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_2 q_3 - p_3 q_2 \\ p_3 q_1 - p_1 q_3 \\ p_1 q_2 - p_2 q_1 \end{bmatrix} \quad (58)$$

少しでもスタイリッシュにしたいければ行列式を使うことは出来る。

$$\mathbf{p} \times \mathbf{q} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & p_1 & q_1 \\ \mathbf{e}_2 & p_2 & q_2 \\ \mathbf{e}_3 & p_3 & q_3 \end{bmatrix} \quad (59)$$

三重積

$$\mathbf{p} \times \mathbf{q} \times \mathbf{r} = \mathbf{q} \langle \mathbf{p}, \mathbf{r} \rangle - \mathbf{r} \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle \quad (60)$$

は大切な関係である。

0.5.2 回転

3次元ユークリッド空間の回転を考える。いま3軸まわりの回転だけを考えると、それは2次元の回転と変わらない。3軸まわりの θ 回転を $T_3(\theta)$ とすると

$$T_3(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (61)$$

である。同じく2軸まわりは

$$T_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (62)$$

であり、1軸まわりは

$$T_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (63)$$

である。

これらの回転行列のうち、ふたつを組み合わせれば3次元の回転は全て表現できる。

0.5.3 もう一つの回転

回転の計算に外積を使うことも出来る．ベクトル \boldsymbol{p} をベクトル \boldsymbol{r} まわりに θ 回転させたベクトル \boldsymbol{p}' は

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} \cos \theta + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \sin \theta + \boldsymbol{r} \langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p} \rangle (1 - \cos \theta) \quad (64)$$

である．ただし $\|\boldsymbol{r}\| = 1$ を仮定した．証明はオリジナル版を参照．

0.6 クォータニオンによる 3 次元の回転

0.7 テンソルとスピノール

1. 実数・複素数・クォータニオン — 数
2. 行列 — もうひとつの数
3. 行列による 2 次元の回転と内積
4. 複素数による 2 次元の回転
5. 行列による 3 次元の回転と外積
6. クォータニオンによる 3 次元の回転
7. テンソルとスピノール

第 1 章

群について

第 2 章

リー群（リー代数）について

第 3 章

束について