クォータニオン入門加筆

金谷一朗

2014 年 8 月 13 日

目次

第 0 章

オリジナル版の内容のまとめ

0.1 実数・複素数・クォータニオン — 数

0.1.1 実数

C++ 言語では double 型に単項プラス，単項マイナス，和，差，積，商の 6 個の演算子が定義されている．これを「double 型は**数としてのインタフェース**を持つ」と言う．

数としてのインタフェースは実際には次のリストに集約される．

和の演算子 $a+b$ の $+$ 演算子．
零元（ゼロ，和の単位元） $0+a=a+0=a$ であるような 0.
負元（和の逆元） a に対して $-a+a=0$ となるような $-a$.
積の演算子 $a \cdot b$ の $\cdot$ 演算子．普通は省略される．
単位元（イチ） $1a=a1=a$ であるような 1.
逆元 a に対して $a^{-1}a=1$ であるような a^{-1}.

C++ 言語の double 型の元になっている**実数**は上述のインタフェースを持つ．上述の 6 個のインタフェースは

和 演算子，単位元，逆元
積 演算子，単位元，逆元

という 3 個ずつのインタフェースに分類できる．

和と積にはそれぞれ次の関係がある．

$$
\begin{aligned}
abc &= (ab)c && (1)\\
&= a(bc) && (2)\\
a+b+c &= (a+b)+c && (3)\\
&= a+(b+c) && (4)
\end{aligned}
$$

これを**結合則**と呼ぶ．

和と積が混在した場合は常に積が優先される．

$$ab+c=(ab)+c \tag{5}$$

和と積の間には次の関係が成り立つ．

$$a(b+c) = ab + ac \tag{6}$$
$$(a+b)c = ac + bc \tag{7}$$

これを**分配則**と呼ぶ．

零元（ゼロ，和の単位元）と任意の元との積は常に零元である．

$$0a = a0 = 0 \tag{8}$$

0.1.2　複素数

実数に限らず，**複素数**も上述の 6 個のインタフェース，結合則，分配則に従う．複素数とは実数単位 1 の時数倍と虚数単位 i の実数倍との和である．a, b を実数とすると，$\alpha = 1a + \mathrm{i}b$ が複素数の一般形である．

虚数単位は次の性質を持つ．

$$\mathrm{i}^2 = -1 \tag{9}$$

複素数は数としてのインタフェースに加えて次のインタフェースを持つ．

共役複素数　ある複素数 α が $\alpha = 1a + \mathrm{i}b$ であるとき $\alpha^* \equiv 1a - \mathrm{i}b$ なる α^* を α の共役複素数と呼ぶ．

複素数のノルム　ある複素数 α について，

$$\|\alpha\| \equiv \sqrt{\alpha^* \alpha} \tag{10}$$

を α のノルムと呼ぶ．ノルムは「大きさ」という概念に近い．

複素数 α の逆数（逆複素数）α^{-1} は次のように求めることが出来る．

$$\alpha^{-1} = \frac{\alpha^*}{\|\alpha\|^2} \tag{11}$$

0.1.3　クォータニオン

$Q = 1a + \mathrm{i}b + \mathrm{j}c + \mathrm{k}d$ なる数 Q を**クォータニオン**（四元数）と呼ぶ．ただし $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ はそれぞれクォータニオン単位であって，

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1,\ \mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k},\ \mathrm{jk} = -\mathrm{kj} = \mathrm{i},\ \mathrm{ki} = -\mathrm{ik} = \mathrm{j} \tag{12}$$

であるとする．

クォータニオンは数としてのインタフェースに加えて次のインタフェースを持つ．

共役クォータニオン　あるクォータニオン Q が $Q = 1a + \mathrm{i}b + \mathrm{j}c + \mathrm{k}d$ であるとき $Q^* \equiv 1a - \mathrm{i}b - \mathrm{j}c - \mathrm{k}d$ なる Q^* を Q の共役クォータニオンと呼ぶ．

クォータニオンのノルム　あるクォータニオン Q について，

$$\|Q\| \equiv \sqrt{Q^* Q} \tag{13}$$

を Q のノルムと呼ぶ．ノルムは「大きさ」という概念に近い．

クォータニオン Q の逆数（逆クォータニオン）Q^{-1} は次のように求めることが出来る．

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{\|Q\|^2} \tag{14}$$

0.2　行列 — もうひとつの数

0.2.1　連立線形方程式と行列

未知数 x に関する線形方程式

$$ax + b = 0 \tag{15}$$

の解は $x = -a^{-1}b$ である．

未知数 x_1, x_2 に関する連立線形方程式

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + b_1 = 0 \tag{16}$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + b_2 = 0 \tag{17}$$

の解について，新たな記号を発明して

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

と書き直し，

$$A \equiv \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix},\ X \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\ B \equiv \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},\ \mathrm{O} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

とすると，未知数 x_1, x_2 に関する連立線形方程式は

$$AX + B = \mathrm{O} \tag{20}$$

と書け，シンプルで美しく見える．演算規則をうまく調整すると，上述の連立線形方程式の解は $X = -A^{-1}B$ と書ける．このようにして作った A, B, X, O を**行列**と呼ぶ．

0.2.2　正方行列

各要素が実数からなり，行と列の大きさが等しい行列を**実正方行列**と呼ぶ．実正方行列を A とすると次のように書ける．

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ a_{i1} & & & a_{ij} & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ a_{n1} & & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{21}$$

そこで実正方行列 A は，その要素と添字を使って $[a_{ij}]$ と書くこともある．

実正方行列には

- 和
- 零元

- 負元

が定義されている．行列 $[a_{ij}]$ と行列 $[b_{ij}]$ の和は

$$[a_{ij}]+[b_{ij}]\equiv[a_{ij}+b_{ij}] \tag{22}$$

であり，行列の零元（ゼロ行列）O はすべての要素が 0 であるような行列である．

行列 $[a_{ij}]$ と行列 $[b_{ij}]$ の積も定義されており

$$[a_{ij}][b_{ij}]\equiv\sum_{k=1}^{n}[a_{ik}b_{kj}] \tag{23}$$

である．この定義から，積の単位元（単位行列）I は

$$\mathrm{I}\equiv\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots\\ 0 & 1 & \\ \vdots & & \ddots\end{bmatrix} \tag{24}$$

でなければならないことがわかる．単位行列 I は $[\delta_{ij}]$ とも書く．デルタ記号を使うのは歴史的理由である．

0.2.3　直交行列とユニタリ行列

行列 $[a_{ij}]$ に対して，行と列を入れ替えた $[a_{ji}]$ は元の行列の**転置行列**と呼ばれる．転置行列は

$$[a_{ij}]^t\equiv[a_{ji}] \tag{25}$$

のような記号を使って表す．もし

$$[a_{ij}]^t=[a_{ij}] \tag{26}$$

であるならば，行列 $[a_{ij}]$ は**対称行列**である．もし

$$[a_{ij}]^t=-[a_{ij}] \tag{27}$$

であるならば，行列 $[a_{ij}]$ は**反対称行列**である．

実数の代わりに複素数を用いた正方行列を**複素正方行列**と呼ぶ．いま複素正方行列を $[\alpha_{ij}]$ で表すとき，その共役と転置を行った $[\alpha^*_{ji}]$ を**共役転置行列**と呼ぶ．共役転置行列を作る操作には特別な記号が割り当てられており，次のように表す．

$$[\alpha_{ij}]^\dagger\equiv[\alpha^*_{ji}] \tag{28}$$

もし

$$[a_{ij}]^\dagger=[a_{ij}] \tag{29}$$

であるならば，行列 $[\alpha_{ij}]$ は**エルミート行列**である．もし

$$[a_{ij}]^\dagger=-[a_{ij}] \tag{30}$$

であるならば，行列 $[\alpha_{ij}]$ は**反エルミート行列**である．

実正方行列 A について，もし

$$A^tA=\mathrm{I} \tag{31}$$

であるならば，行列 A は**直交行列**である．複素正方行列 A について，もし

$$A^\dagger A = \mathrm{I} \tag{32}$$

であるならば，行列 A は**ユニタリ行列**である．

0.3　行列による 2 次元の回転と内積

0.3.1　ベクトル

ベクトルには

- 和
- 零元（ゼロベクトル）
- 負元（逆ベクトル）

がある．またベクトルは実数倍が出来る．

ベクトル $\boldsymbol{p}$ のノルム $\|\boldsymbol{p}\|$ という量を定義できる．ノルムの定義は複数あるが，最もよく用いられているものは，ベクトルをユークリッド空間における位置とみなし，その位置の原点からの距離とする定義である．

0.3.2　内積

二つのベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ の間に**内積**という演算が定義できる．内積は $\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \rangle$ で表す．ベクトルをユークリッド空間における位置 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ とみなしたとき，二つのベクトルのなす角度を θ として，

$$\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \rangle \equiv \|\boldsymbol{p}\| \|\boldsymbol{q}\| \cos\theta \tag{33}$$

と定義するのが，最も一般的な内積の定義である．この定義に従えば，ベクトル $\boldsymbol{p}$ のノルム $\|\boldsymbol{p}\|$ は

$$\|\boldsymbol{p}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p} \rangle} \tag{34}$$

である．

幾何学的な座標系を導入すると便利なことが多々ある．座標系を表すベクトルを**基底ベクトル**と呼ぶ．基底ベクトルとしていま $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2$ があるとする．

ベクトル $\boldsymbol{p}$ の**成分**を p_1, p_2 で表すと，

$$p_i = \langle \boldsymbol{p}, \mathrm{e}_i \rangle \tag{35}$$

である．ただし i は $1, 2$ である．ベクトルは成分と基底ベクトルから次のように合成できる．

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{2} p_i \mathrm{e}_i \tag{36}$$

基底ベクトルの組として**正規直交系**を選ぶとは

$$\|\mathrm{e}_1\| = \|\mathrm{e}_2\| = 1 \tag{37}$$

$$\langle \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2 \rangle = 0 \tag{38}$$

を満たすような $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2$ を選ぶということである．一般には

$$\langle \mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j \rangle = \delta_{ij} \tag{39}$$

と書くことが多い．

0.3.3　ベクトルの回転

ベクトル $\boldsymbol{p}$ の正規直交系での成分 p_1, p_2 を行列風に

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \tag{40}$$

と書くと便利なことがある．ベクトル $\boldsymbol{p}$ で表される位置（これを今後 $\overrightarrow{OP}$ としよう）を原点まわりに θ 回転させた位置（これは $\overrightarrow{OP'}$ とする）のベクトル $\boldsymbol{p}'$ の成分は次のように計算出来る．

$$\begin{bmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \tag{41}$$

証明はオリジナル版を参照．

ここで行列

$$T(\theta) \equiv \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{42}$$

を導入し，ベクトルと行列を意図的に混同すると

$$\boldsymbol{p}' = T(\theta)\boldsymbol{p} \tag{43}$$

という簡潔な式が得られる．ここで行列だとか成分だとかを一切忘れて，ベクトル $\boldsymbol{p}$ に作用するものとして $T(\theta)$ を捉える．この $T(\theta)$ は**作用素**と呼ばれる．

0.4　複素数による 2 次元の回転

0.4.1　複素数で表す２次元ベクトル

正規直交系の基底ベクトルとは

$$\langle \mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j \rangle = \delta_{ij} \tag{44}$$

を満たしてさえいればよい．もし内積の定義を都合よく選べば

$$\mathrm{e}_1 = 1,\ \mathrm{e}_2 = \mathrm{i} \tag{45}$$

なる座標系を作ることが出来る．実際この座標系は**複素座標系**またはガウス座標系と呼ばれる．

0.4.2　回転

複素座標系では，内積 $\langle \alpha, \beta \rangle$ を次のように定義する．

$$\langle \alpha, \beta \rangle \equiv \alpha^* \beta \tag{46}$$

複素座標系における回転の作用素 $U(\theta)$ は次の形を取る．

$$U(\theta) = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \tag{47}$$

…

$$\boldsymbol{p}' = U(\theta)\boldsymbol{p} \tag{48}$$

オイラーの公式

$$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \tag{49}$$

を用いると，回転 $T(\theta)$ は

$$U(\theta) = e^{\mathrm{i}\theta} \tag{50}$$

とさらに簡潔に書ける．

0.4.3　ベクトルと行列と複素数の関係

２次元ベクトルが行列でも複素数でも書けるのは，基底ベクトルの取り方次第だからである．基底ベクトルに正規直交系を選ぶと便利であった．正規直交系とは基底ベクトル $\boldsymbol{p}_i$ が

$$\langle \mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j \rangle = \delta_{ij} \tag{51}$$

でありさえすればよく，内積をうまく定義してやれば自由に基底ベクトルを選べる．

行列スタイルを採用して

$$\mathrm{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathrm{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{52}$$

としても良かったし，複素数スタイルを採用して

$$\mathrm{e}_1 = 1, \mathrm{e}_2 = \mathrm{i} \tag{53}$$

としても良かった．どちらかと言えば複素数スタイルのほうが数としてのインタフェースを使えるので優れているとは言える．そこで数としてのインタフェースを保ちつつ行列も使えないかと考えると

$$\mathrm{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{54}$$

という基底ベクトルも良いことに気づくだろう．この場合 e_1 のほうは単位行列 I と同じであるので，もうひとつの e_2 のほうを虚数単位 i に対応させて

$$\mathrm{I} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{55}$$

と名づけても構わない．

0.5　行列による 3 次元の回転と外積

0.5.1　外積

2 次元のユークリッド空間を 3 次元に拡張するのはわけないことだ．とりわけ行列スタイルであればほとんど自動的に

$$\mathrm{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathrm{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathrm{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{56}$$

を採用すれば良いことがわかる．

ここで，3 次元空間で非常にうまくいくトリックを導入する．次に述べる**外積**という演算を 3 次元ベクトル同士に定義する．

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q} \tag{57}$$

ここにベクトル $\boldsymbol{r}$ はベクトル $\boldsymbol{p}$ および $\boldsymbol{q}$ に直交し，そのノルムがベクトル $\boldsymbol{p}$ とベクトル $\boldsymbol{q}$ の張る平行四辺形に等しいとする．ベクトル $\boldsymbol{r}$ の向きは，右手で直交座標系を作り，ベクトル $\boldsymbol{p}$ を右手親指，ベクトル $\boldsymbol{q}$ を右手人差し指とした場合，右手中指の方向である．定義から，ベクトル $\boldsymbol{p}$ とベクトル $\boldsymbol{q}$ の角度を θ としたときに

$$\|\boldsymbol{r}\| = \|\boldsymbol{p}\|\|\boldsymbol{q}\| \sin\theta \tag{58}$$

である．

外積は成分ごとに計算すると手っ取り早い．

$$\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} p_2q_3 - p_3q_2 \\ p_3q_1 - p_1q_3 \\ p_1q_2 - p_2q_1 \end{bmatrix} \tag{59}$$

少しでもスタイリッシュにしたければ行列式を使うことは出来る．

$$\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q} = \det \begin{bmatrix} \mathrm{e}_1 & p_1 & q_1 \\ \mathrm{e}_2 & p_2 & q_2 \\ \mathrm{e}_3 & p_3 & q_3 \end{bmatrix} \tag{60}$$

三重積

$$\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{q}\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}\rangle - \boldsymbol{r}\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}\rangle \tag{61}$$

は大切な関係である．

0.5.2 回転

3 次元ユークリッド空間の回転を考える．いま 3 軸まわりの回転だけを考えると，それは 2 次元の回転と変わらない．3 軸まわりの θ 回転を $T_3(\theta)$ とすると

$$T_3(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{62}$$

である．同じく 2 軸まわりは

$$T_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{63}$$

であり，1 軸まわりは

$$T_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{64}$$

である．

これらの回転行列のうち，ふたつを組み合わせれば 3 次元の回転は全て表現できる．

0.5.3　もう一つの回転

回転の計算に外積を使うことも出来る．ベクトル $\boldsymbol{p}$ をベクトル $\boldsymbol{r}$ まわりに θ 回転させたベクトル $\boldsymbol{p}'$ は

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}\cos\theta + \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}\sin\theta + \boldsymbol{r}\langle\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}\rangle(1-\cos\theta) \tag{65}$$

である．ただし $\|\boldsymbol{r}\| = 1$ を仮定した．証明はオリジナル版を参照．

0.6　クォータニオンによる 3 次元の回転

0.6.1　パウリ行列

2 次元の場合，正規直交系の基底ベクトルとして行列と複素数のどちらも選べた．3 次元の場合の複素数に相当する基底ベクトルはあるだろうか．次の複素行列は 3 次元の正規直交基底であることが知られている．

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix},\ \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{66}$$

これらの行列は**パウリ行列**と呼ばれている．

パウリ行列は様々な良い性質を持つ．各々の行列の自乗は単位行列になる．

$${\sigma_1}^2 = \mathrm{I},\ {\sigma_2}^2 = \mathrm{I},\ {\sigma_3}^2 = \mathrm{I} \tag{67}$$

各々の行列の積は，残りの行列になる．

$$\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3,\ \sigma_2\sigma_3 = \sigma_1,\ \sigma_3\sigma_1 = \sigma_2 \tag{68}$$

この性質は，すなわち通常の行列積がベクトルの外積として使えることを示す．

内積...

0.6.2　クォータニオン

パウリ行列に一工夫を加えると，クォータニオンが得られる．

$$Q = \mathrm{I}a + \mathrm{i}\sigma_3 b + \mathrm{i}\sigma_2 c + \mathrm{i}\sigma_1 d \tag{69}$$

なる量 Q はクォータニオンとしての性質をすべて持つ．また $\mathrm{i}\sigma_3, \mathrm{i}\sigma_2, \mathrm{i}\sigma_1$ はクォータニオン単位の性質を持つ．そこで

$$\mathrm{e}_1 = \mathrm{i}\sigma_3,\ \mathrm{e}_2 = \mathrm{i}\sigma_2,\ \mathrm{e}_3 = \mathrm{i}\sigma_1 \tag{70}$$

を基底ベクトルとして採用しよう．

ベクトル $\boldsymbol{p}$ をベクトル $\boldsymbol{r}$ まわりに θ 回転させる演算子を $U(\boldsymbol{r},\theta)$ とする．回転後のベクトル $\boldsymbol{p}'$ は演算子 $U(\boldsymbol{r},\theta)$ を用いて

$$\boldsymbol{p}' = U^*(\boldsymbol{r},\theta)\boldsymbol{p}U(\boldsymbol{r},\theta) \tag{71}$$

のように計算できる．ここに

$$U(\theta) = \mathrm{I}\cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{r}\sin\frac{\theta}{2} \tag{72}$$

である．証明はオリジナル版にある．

0.7　テンソルとスピノール

ベクトル $\boldsymbol{p}$ を成分で p_μ と書いてみる．回転の演算子 T も成分で $T_{\mu\nu}$ と書いてみる．ベクトルの回転は

$$p'_\nu = \sum_{\mu=1}^{N} T_{\mu\nu} p_\mu \tag{73}$$

である．行列の書き方を用いると次のように書き直せる．

$$[p'_i] = [T_{ij}][p_i] \tag{74}$$

または

$$\boldsymbol{p}' = T\boldsymbol{p} \tag{75}$$

このように変換される p_μ を 1 階の**テンソル**と呼ぶ．次のように変換されるテンソルもあり，これを 2 階テンソルと呼ぶ．

$$P'_{\kappa\lambda} = \sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} T_{\mu\kappa} T_{\nu\lambda} P_{\mu\nu} \tag{76}$$

この式を行列を用いて書くと，行列の演算の非対称性から若干の工夫が必要になる．結局

$$[P'_{ij}] = [T_{ij}]^t [P_{ij}][T_{ij}] \tag{77}$$

または

$$\boldsymbol{P}' = T^t \boldsymbol{P} T \tag{78}$$

となる．

繰り返すと 1 階テンソルとは

$$\boldsymbol{p}' = T\boldsymbol{p} \tag{79}$$

と変換される量である．2 階テンソルとは

$$\boldsymbol{P}' = T^t \boldsymbol{P} T \tag{80}$$

と変換される量である．

ここで 1 階テンソルはクォータニオンを使えば

$$\boldsymbol{p}' = U^* \boldsymbol{p} U \tag{81}$$

と書けたことを思い出そう．では

$$\boldsymbol{\psi}' = U\boldsymbol{\psi} \tag{82}$$

なる量 $\boldsymbol{\psi}$ はあるだろうか．

第 1 章

群について

第 2 章

リー群（リー代数）について

第 3 章

束について