

Haskell Notes v.0

Ichi Kanaya

2025

0.1 Haskell

TK. Haskell について.

0.2 変数

変数 x に値を代入するには次のようにする.*¹

$$x = 1 \tag{1}$$

変数という呼び名に反して、変数の値は変えられない。そこで変数に値を代入するとは呼ばずに、変数名に値を**束縛**するという。式 (1) の右辺を**リテラル**と呼ぶ。

リテラルや変数には**型**がある。型は数学者の集合と似た意味で、整数全体の集合 \mathbb{Z} に相当する**整数型**や、実数全体の集合 \mathbb{R} に相当する**浮動小数点型**がある。以下、誤解のおそれがない限り整数型を \mathbb{Z} で、浮動小数点型を \mathbb{R} で表す。*²

数学者は変数 x が整数であることを $x \in \mathbb{Z}$ と書くが、本書では $x :: \mathbb{Z}$ と書く。これは記号 \in を別の用途に用いるためである。*³

変数の値がいつでも変化しないことを**参照透過性**と呼ぶ。プログラマーが変数の値を変化させたい理由はユーザー入力、ループ、例外、内部状態、大域ジャンプ、継続を扱いたいからであろう。しかし、後に見

*¹ Haskell では `x = 1` と書く。

*² Haskell ではそれぞれ `Int` および `Double` を用いる。

*³ Haskell では `x :: Int` と書く。

るようにループ，例外，内部状態，大域ジャンプ，継続に変数の破壊的代入は必要ない．ユーザー入力に関しても章を改めて取り上げる．

本書では変数名を原則 1 文字として，イタリック体で表し， w, x, y, z のような n 以降のアルファベットを使う．

0.3 関数

関数 f は次のように定義できる．^{*4}

$$fx = x + 1 \quad (2)$$

ここに x は関数 f の引数である．引数は括弧でくるまない．

本書では関数名を原則 1 文字として，イタリック体で表し， f, g, h のようにアルファベットの f 以降の文字を使う．ただし有名な関数についてはローマン体で表し，文字数も 2 文字以上とする．たとえば \sin などの三角関数や指数関数がそれにあたる．

変数 x に関数 f を適用する場合は次のように書く．^{*5}

$$z = fx \quad (3)$$

関数 f が引数をふたつ取る場合は，次のように書く．^{*6}

$$z = fxy \quad (4)$$

なお fxy は $(fx)y$ と解釈される．前半の (fx) は 1 引数の関数とみなせる．

^{*4} Haskell では `f x = x+1` と書く．

^{*5} Haskell では `z = f x` と書く．

^{*6} Haskell では `z = f x y` と書く．

TK. 有名な関数, 実数編.

0.4 関数合成

関数の合成は次のように書く.*7

$$k = g \bullet f \quad (5)$$

関数合成演算子 \bullet は以下のように左結合する.

$$k = h \bullet g \bullet f \quad (6)$$

$$= (h \bullet g) \bullet f \quad (7)$$

$$(8)$$

関数適用のための特別な演算子 \S があると便利である. 演算子 \S は関数合成演算子よりも優先順位が低い. 例を挙げる.*8

$$z = h \S (g \bullet f) x \quad (9)$$

$$= h ((g \bullet f) x) \quad (10)$$

0.5 IO サバイバルキット 1

プログラムとは合成された関数である. 多くのプログラミング言語では, プログラムそのものに `main` という名前をつける. 本書では「IO モナド」の章で述べる理由によって, `main` 関数をスラント体で `main` と書く.

*7 Haskell では `k = g . f` と書く.

*8 Haskell では `z = h $ (g . f) x` と書く.

実用的なプログラムはユーザからの入力を受け取り、関数を適用し、ユーザへ出力する。Haskell ではユーザからの 1 行の入力を `getLine` で受け取り、変数の値を `print` で書き出せる。ここに `getLine` と `print` は関数（ファンクション）ではあるが、特別に「アクション」とも呼ぶ。関数 `main` もアクションである。

引数 x の 1.5 乗を求める関数 f は次のように定義できる。^{*9}

$$f x = x^{1.5} \quad (11)$$

ユーザからの入力に関数 f を適用してユーザへ出力するプログラムを Haskell で書くと次のようになる。^{*10}

$$main = print \bullet f \bullet read \heartsuit getLine \quad (12)$$

ここに関数 `read` は文字列であるユーザ入力を数に変換する関数である。また演算子 \heartsuit は新たな関数合成演算子で、アクションとアクションを合成するための特別な演算子である。詳細は「モナド」の章で述べる。

式 (12) は「`main` とは `getLine` した結果を `read` して f して `print` するものである」とも読める。そのため Haskell はどうしても手続き的に書きたいプログラマのために、以下のようなシンタックスシュガーを用意している。

```
f x = x ** 1.5
main = do
  line <- getLine
```

^{*9} Haskell では `f x = x ** 1.5` と書く。

^{*10} Haskell では `main = print . f . read =<< getLine` と書く。

```
let x = read line
let y = f x
print y
```

このような書き方は「**do 記法**」の章で述べる。

0.6 ラムダ

関数とは、変数名に束縛された**ラムダ式**である。ラムダ式は次のように書く。^{*11}

$$f = \lambda x \mapsto x + 1 \tag{13}$$

本書では無名変数 \diamond を用いた以下の書き方も用いる。^{*12}

$$f = (\diamond + 1) \tag{14}$$

$$= \lambda x \mapsto x + 1 \tag{15}$$

無名変数が2回以上登場した場合は、その都度新しいパラメタを生成する。たとえば次のとおりである。^{*13}

$$f = \diamond + \diamond \tag{16}$$

$$= \lambda x \mapsto (\lambda y \mapsto x + y) \tag{17}$$

^{*11} Haskell では $f = \lambda x \rightarrow x+1$ と書く。

^{*12} 無名変数は Haskell には無いが、代わりに「セクション」という書き方ができる。
式 $(\diamond + 1)$ は Haskell では $(+1)$ と書く。

^{*13} Haskell では $f = (+)$ と書く。

0.7 ローカル変数

関数内でローカル変数を使いたい場合は以下のように行う.^{*14}

$$z = \text{let } \{y = 1\} \text{ in } x + y \quad (18)$$

ローカル変数はラムダ式のシンタックスシュガーである. 式 (18) は次の式と等価である.

$$z = (\backslash y \mapsto x + y)1 \quad (19)$$

ローカル変数の定義は次のように後置できる.^{*15}

$$z = x + y \text{ where } \{y = 1\} \quad (20)$$

0.8 クロージャ

ラムダ式を返す関数は, ラムダ式内部に値を閉じ込めることができる. たとえば

$$fn = \backslash x \mapsto n + x \quad (21)$$

のように関数を定義して良い. 関数 f に引数 n を与えると, 新たな 1 引数関数が得られる. 例を挙げる.

$$n = 3 \quad (22)$$

$$g = fn \quad (23)$$

^{*14} Haskell では $z = \text{let } \{y = 1\} \text{ in } x+y$ と書く. `let` 節内の式がひとつの場合, 中括弧は省略可能である. 式が複数になる場合は ; で区切る.

^{*15} Haskell では $z = x+y \text{ where } \{y = 1\}$ と書く. `where` 節内の式がひとつの場合, 中括弧は省略可能である. 式が複数になる場合は ; で区切る.

この例では、関数 g の中に値 $n = 3$ が閉じ込められているため $g1$ は 4 と評価される。値を閉じ込めたラムダ式をクロージャと呼ぶ。

0.9 型

すべての変数、関数には**型**がある。代表的な型には整数型、浮動小数点型、ブール型、文字型がある。整数型を \mathbb{Z} で、浮動小数点型を \mathbb{R} で表すことはすでに述べたとおりである。

Haskell には 2 種類の整数型がある。ひとつは**固定長整数型**で、もうひとつは**多倍長整数型**である。Haskell では前者を `Int` で、後者を `Integer` で表す。多倍長整数型はメモリの許す限り巨大な整数を扱えるので、整数全体の集合に近いのであるが、本書では \mathbb{Z} と書いて固定長整数型を意味することにする。

浮動小数点型には**単精度浮動小数点型**と**倍精度浮動小数点型**があり、Haskell では前者を `Float` で、後者を `Double` で表現するが、単精度浮動小数点型はめったに用いられないため、今後 \mathbb{R} と書けば倍精度浮動小数点型の意味とする。

ブール型は論理値 `True` または `False` のいずれかしか値をとれない型で、今後 \mathbb{B} と書く。^{*16}

本書では対応する、あるいは近い数学概念がある場合、型名をブロック体 1 文字で書く。文字型のように対応する数学概念がない場合はボールドローマン体を用いる。文字型は **Char** とする。^{*17}

^{*16} Haskell ではブール型を `Bool` と書く。

^{*17} Haskell では Unicode 文字型を `Char` と書く。

変数 x の型が \mathbb{Z} のとき、以下のように**型注釈**を書く。^{*18}

$$x :: \mathbb{Z} \tag{24}$$

1 引数関数の型は次のように注釈できる。^{*19}

$$f :: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \tag{25}$$

ここで関数 f は整数型の引数をひとつとり、整数型の値を返す。^{*20}

2 引数関数の方は次のように注釈できる。^{*21}

$$f :: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \tag{26}$$

ここで関数 f は整数型の引数をふたつとり、整数型の値を返す。型 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z} \rightarrow (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z})$ と解釈される。

$(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z})$ 型の関数を受け取り、 $(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z})$ 型の関数を返す関数は次の型を持つ。^{*22}

$$f :: (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}) \tag{27}$$

なお後半の括弧は省略可能なので

$$f :: (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \tag{28}$$

と書いても良い。

^{*18} Haskell では `x :: Int` と書く。

^{*19} Haskell では `f :: Int -> Int` と書く。

^{*20} 正確には `->` は型コンストラクタである。

^{*21} Haskell では `f :: Int -> Int -> Int` と書く。

^{*22} Haskell では以下のように書く。

```
f :: (Int -> Int) -> (Int -> Int)
```

0.10 条件

条件分岐は次のように書く.*²³

$$z = \text{if } x > 0 \text{ then } x \text{ else } -x \quad (29)$$

条件分岐の代わりに以下のようなパターンマッチも使える.*²⁴

$$f = \text{case } x \text{ of } \begin{cases} 1 \rightarrow 1 \\ _ \rightarrow 0 \end{cases} \quad (30)$$

この場合 $x \equiv 1$ ならば f は 1 を, そうでなければ f は 0 を返す. ここに $_$ はすべてのパターンに一致する記号である. パターンマッチは上から順に行われる.

関数定義にもパターンマッチを使える.*²⁵

$$\begin{cases} f 1 = 1 \\ f _ = 0 \end{cases} \quad (31)$$

関数定義には次のようにガードと呼ばれる条件を付与することがで

*²³ Haskell では `z = if x>0 then x else -x` と書く.

*²⁴ Haskell では以下のように書くのが一般的である.

```
f = case x of 1 -> 1
             _ -> 0
```

*²⁵ Haskell では次のように書く.

```
f 1 = 1
f _ = 0
```

きる.*26

$$\begin{cases} f\,x \mid x > 0 = x \\ \quad \mid \text{otherwise} = -x \end{cases} \quad (32)$$

ここに otherwise は `_` の別名である.

0.11 関数の再帰呼び出し

関数は再帰的に呼び出せる. $n \geq 0$ を前提とすると, n 番目のフィボナッチ数を計算する関数 `fib` を次のように定義できる.*27

$$\begin{cases} \text{fib}\,0 = 0 \\ \text{fib}\,1 = 1 \\ \text{fib}\,n = \text{fib}(n-1) + \text{fib}(n-2) \end{cases} \quad (33)$$

0.12 タプル

複数の変数をまとめてひとつの**タプル**にすることができる. 例を挙げる.*28

$$z = (x, y) \quad (34)$$

*26 Haskell では次のように書く.

```
f x | x > 0      = x
    | otherwise = -x
```

*27 Haskell では次のように書く. ただし Haskell には符号なし整数型がないために `n` が正であることを別に担保する必要がある. またこのコードは無駄な再帰呼び出しを行っており実用的ではない.

```
fib 0 = 0
fib 1 = 1
fib n = fib (n-1) + fib (n-2)
```

*28 Haskell では `z = (x, y)` と書く.

タプルの型は、要素の型をタプルにしたものである。例えば \mathbb{Z} が 2 個からなるタプルの型は次のようになる。^{*29}

$$z :: (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \quad (35)$$

要素を含まないタプルを**ユニット**と呼ぶ。ユニットは次のように書く。^{*30}

$$z = () \quad (36)$$

ユニットの型は**ユニット型**で、型注釈を次のように書く。^{*31}

$$z :: () \quad (37)$$

0.13 リスト

任意の型について、その型の要素を並べた列を**リスト**と呼ぶ。

ある変数がリストであるとき、その変数がリストであることを忘れないように x_s と小さく s を付けることにする。

空リストは次のように定義する。^{*32}

$$x_s = [] \quad (38)$$

任意のリストは次のように：演算子を用いて構成する。

$$x_s = x_0 : x_1 : x_2 : \cdots : [] \quad (39)$$

^{*29} In Haskell, $z :: (\text{Int}, \text{Int})$.

^{*30} Haskell では $z = ()$ と書く。

^{*31} Haskell では $z :: ()$ と書く。

^{*32} Haskell では $xs = []$ と書く。

リストの型はその構成要素の型をブラケットで包んで表現する.*³³

$$x_s :: [\mathbb{Z}] \quad (40)$$

リストは次のように構成することもできる.*³⁴

$$x_s = [1, 2, \dots, 100] \quad (41)$$

なお次のような無限リストを構成しても良い.*³⁵

$$x_s = [1, 2, \dots] \quad (42)$$

リストとリストをつなぐ場合はリスト結合演算子 $\#$ を用いる.*³⁶

$$z_s = x_s \# y_s \quad (43)$$

関数はリストを受け取ることができる。次の書き方では、関数 f は整数リストの最初の要素 x と残りの要素 x_s を別々に受け取り、先頭要素だけを返す.*³⁷

$$f :: [\mathbb{Z}] \rightarrow \mathbb{Z} \quad (44)$$

$$f(x : x_s) = x \quad (45)$$

*³³ Haskell では $xs :: [\text{Int}]$ と書く。

*³⁴ Haskell では $xs = [1, 2..100]$ と書く。

*³⁵ Haskell では $xs = [1, 2..]$ と書く。

*³⁶ Haskell では $zs = xs ++ ys$ と書く。

*³⁷ Haskell では $f (x:xs) :: [\text{Int}] \rightarrow \text{Int} = x$ と書く。

0.14 内包表記

リストの構成には内包表記が使える。例を挙げる。^{*38}

$$x_s = [x^2 \mid x \in [1, 2 \dots 100], \text{even } x] \quad (46)$$

この例では数列 $[1, 2 \dots 100]$ のうち偶数だけを2乗したリストを作っている。

0.15 文字列

文字型のリストを文字列型と呼び **String** で表す。String 型は次のように予約語 **type** を用いて、型シノニムとして定義される。

$$\text{type String} = [\text{Char}] \quad (47)$$

文字列型のリテラルは次のように書く。^{*39}

$$x :: \text{String} = \text{"Hello, World!"} \quad (48)$$

0.16 マップと畳み込み

リスト x_s の各要素に関数 f を適用して、その結果をリスト z_s に格納するためには次のようにマップ演算子 \otimes を用いる。^{*40}

$$z_s = f \otimes x_s \quad (49)$$

^{*38} Haskell では次のように書く。

$xs = [x^2 \mid x \leftarrow [1, 2..100], x > 50]$

^{*39} Haskell では $x :: \text{String} = \text{"Hello, World!"}$ と書く。

^{*40} Haskell では $zs = f \text{ 'map' } xs$ と書く。

リスト x_s の各要素を先頭から順番に 2 項演算子を適用して、その結果を得るには畳み込み演算子を用いる。例えば整数リストの和は次のように書ける。^{*41}

$$z = \bigcup_0^{(\diamond + \diamond)} x_s \quad (50)$$

リスト x_s が $[x_0, x_1, \dots, x_n]$ のとき、一般に

$$\bigcup_a^{\boxtimes} x_s = a \boxtimes x_0 \boxtimes x_1 \dots x_{n-1} \boxtimes x_n \quad (51)$$

である。

畳み込み演算子には次の右結合バージョンが存在する。^{*42}

$$\bigsqcup_a^{\boxtimes} x_s = a \boxtimes (x_0 \dots (x_{n-2} \boxtimes (x_{n-1} \boxtimes x_n))) \quad (52)$$

IO survival kit 2.

```
1 2 3
4 5 6
```

```
getContents
```

```
lines
```

```
words(Ⓢ)
```

```
(read(Ⓢ))(Ⓢ)
```

```
f x_s = sqrt • fromIntegral • sum § (\x ↦ x * x) ⊗ x_s
```

```
f(Ⓢ)
```

^{*41} Haskell では `z = foldl 0 (+) xs` と書く。

^{*42} Haskell では `foldr` を用いる。

print

$$f :: [\mathbb{Z}] \rightarrow \mathbb{R} \quad (53)$$

$$f x_s = \text{sqrt} \bullet \text{fromIntegral} \bullet \text{sum} \$ (\backslash x \mapsto x * x) \otimes x_s \quad (54)$$

$$\text{readInt} :: \mathbf{String} \rightarrow \mathbb{Z} \quad (55)$$

$$\text{readInt} = \text{read} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \text{main} = \text{print} \bullet (f \otimes) \bullet ((\text{readInt} \otimes) \otimes) \bullet (\text{words} \otimes) \bullet \text{lines} \\ \quad \heartsuit \text{getContents} \end{aligned} \quad (57)$$

```
f :: [Int] -> Double
```

```
f [] = 0
```

```
f xs = sqrt . fromIntegral . sum $ (\x -> x * x) `map` xs
```

```
readInt :: String -> Int
```

```
readInt = read
```

```
main = print . (f <$>) . ((readInt <$>) <$>) . (words <$>) . lines
```

0.17 Maybe

計算は失敗する可能性がある。例えば

$$z = y/x \quad (58)$$

のときに $x \equiv 0$ であったとしたら、この計算は失敗する。プログラムが計算を失敗した場合、たいていのプログラマは大域ジャンプを試みる。

しかし大域ジャンプは変数の書き換えを行うことであるから、別の方法が望まれる。Haskell では失敗する可能性がある場合には Maybe という機構が使える。

いま関数 f が引数 x と y を取り、 $x \neq 0$ であるならば y/x を返すとする。もし $x \equiv 0$ であれば失敗を意味する \emptyset (ナッシング) を返すとする。すると関数 f の定義は次のようになる。

$$f y x = \text{if } x \neq 0 \text{ then } y/x \text{ else } \emptyset \dots (\text{不完全}) \quad (59)$$

残念ながら上式は不完全である。なぜならば $x \neq 0$ のときの戻り値は数であるのに対して、 $x \equiv 0$ のときの戻り値は数ではないからである。そこで

$$f^{\dagger} y x = \text{if } x \neq 0 \text{ then } \text{Just } \langle y/x \rangle \text{ else } \emptyset \quad (60)$$

とする。ここに $\text{Just } \langle y/x \rangle$ は数 y/x から作られる、Maybe で包まれた数である。

整数型 \mathbb{Z} を Maybe で包む場合は $? \langle \mathbb{Z} \rangle$ と書く。Maybe で包まれた型を持つ変数は $x_?$ のように小さく $?$ をつける。例を挙げる。^{*43}

$$x_? :: ? \langle \mathbb{Z} \rangle \quad (61)$$

Maybe で包まれた型を持つ変数は、値を持つか \emptyset (ナッシング) であるかのいずれかである。値をもつ場合は

$$x_? = \text{Just } \langle 1 \rangle \quad (62)$$

のように書く。^{*44}

^{*43} Haskell では `xm :: Maybe Int` と書く。

^{*44} Haskell では `xm = Just 1` と書く。

Maybe 変数が値を持たない場合は

$$x? = \emptyset \quad (63)$$

と書く.*45

0.18 Maybe に対する計算

Maybe 変数に、非 Maybe 変数を受け取る関数を適用することは出来ない。そこで特別な演算子 \textcircled{S} を用いる.*46

$$z? = (\diamond + 1) \textcircled{S} x? \quad (64)$$

ここに演算子 \textcircled{S} は

$$\text{Just } \langle fx \rangle = f \textcircled{S} \text{Just } \langle x \rangle \quad (65)$$

$$\emptyset = f \textcircled{S} \emptyset \quad (66)$$

と定義される。

0.19 Maybe の中のリスト

リストが Maybe の中に入っている場合は、リストの各要素に関数を適用することができる。例を挙げる。

$$x? = \text{Just } \langle [1, 2, \dots, 100] \rangle \quad (67)$$

*45 Haskell では `xm = Nothing` と書く。

*46 Haskell では `zm = (+1) <$> xm` と書く。

のとき、リストの各要素に関数 $f :: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ を適用するには次のように書く。^{*47}

$$z? = (f \otimes) \textcircled{S} x? \quad (68)$$

0.20 型パラメタ

型をパラメタとして扱うことができる。任意の型を **a** と、ボールド体小文字で書く。ある型 **a** の引数を取り、同じ型を返す関数の型は次のように書ける。^{*48}

$$f :: \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a} \quad (69)$$

型パラメタには制約をつけることができる。型の集合を**型クラス**と呼び、フラクチュール体で書く。たとえば数を表す型クラスは \mathcal{Num} である。型パラメタ **a** が型クラス \mathcal{Num} に属するとき、上述の関数 f の型注釈は次のようになる。^{*49}

$$f :: \mathcal{Num} \supset \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a} \quad (70)$$

型クラスは型に制約を与える。

TK. $\mathcal{Num} \ a \Rightarrow x :: a$ ならば x が持つべき演算子。

TK. 型クラスの例。

^{*47} Haskell では $zm = (f \ \<\$>) \ \<\$> \ xm$ と書く。最初の $\<\$>$ はリストの各要素に関数 f を適用する演算子、2 番目の $\<\$>$ は Maybe の中のリストの各要素に関数 f を適用する演算子である。

^{*48} Haskell では $f :: a \rightarrow a$ と書く。

^{*49} Haskell では $f :: \mathcal{Num} \ a \Rightarrow a \rightarrow a$ と書く。

0.21 関手

型 \mathbf{a} のリストの変数は

$$x_s :: [\mathbf{a}] \quad (71)$$

という型注釈を持つ．これは

$$x_s :: \square \langle \mathbf{a} \rangle \quad (72)$$

のシンタックスシュガーである．

型 \mathbf{a} 型の Maybe の変数は

$$x_? :: ? \langle \mathbf{a} \rangle \quad (73)$$

という型注釈を持つ．

普段遣いの関数

$$f :: \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a} \quad (74)$$

をリスト変数 x_s に適用する場合は

$$z_s = f \otimes x_s \quad (75)$$

とする．同じく関数 f を Maybe 変数 $x_?$ に適用する場合は

$$z_? = f \circledcirc x_? \quad (76)$$

とする．

リストも Maybe も元の型 \mathbf{a} から派生しており，関数適用のための特別な演算子を持つことになる．そこで，リストや Maybe は**関手**という型クラスに属する，型パラメタを伴う型であるとする．関手の型クラス

を $\mathfrak{F}\text{unctor}$ で表す. 関手型クラスの \mathbf{a} 型の変数を次のように型注釈する.*⁵⁰

$$x_* :: \mathfrak{F}\text{unctor} \supset \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{f} \langle \langle \mathbf{a} \rangle \rangle \quad (77)$$

型クラス $\mathfrak{F}\text{unctor}$ に属する型は $\textcircled{\text{S}}$ 演算子を持たねばならない. 演算子 $\textcircled{\text{S}}$ は次の形を持つ.*⁵¹

$$z_* = f \textcircled{\text{S}} x_* \quad (78)$$

演算子 $\textcircled{\text{S}}$ の型は次のとおりである.

$$\diamond \textcircled{\text{S}} \diamond :: (\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{f} \langle \langle \mathbf{a} \rangle \rangle \rightarrow \mathbf{f} \langle \langle \mathbf{b} \rangle \rangle \quad (79)$$

もし変数 x_* の型がリストであれば

$$\textcircled{\text{S}} = \otimes \quad (80)$$

であると解釈する.

Function of parametric type with functor class:.*⁵²

$$f :: \mathfrak{F}\text{unctor} \supset \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{f} \langle \langle \mathbf{a} \rangle \rangle \quad (81)$$

Example function application:.*⁵³

$$z_* = (\diamond + 1) \textcircled{\text{S}} \text{Just} \langle x \rangle \quad (82)$$

*⁵⁰ Haskell では $xm :: \text{Functor } f \Rightarrow f \ a$ と書く.

*⁵¹ In Haskell, $zm = f \ \langle \$ \rangle \ xm$.

*⁵² In Haskell, $f :: \text{Functor } f \Rightarrow a \rightarrow f \ a$.

*⁵³ In Haskell, $zm = (+1) \ \langle \$ \rangle \ \text{Just } x$.

0.22 関手としての関数

$$f :: \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r} \quad (83)$$

Function as a functor:^{*54}

$$f :: (\blacklozenge \rightarrow \mathbf{r}) \mathbf{q} = (\blacklozenge \rightarrow \mathbf{r}) \llbracket \mathbf{q} \rrbracket \quad (84)$$

Thus,

$$f_2 \bullet f_1 \equiv f_2 \textcircled{\mathbb{S}} f_1 \quad (85)$$

$$\text{id} \bullet f = \text{id} f = f \quad (86)$$

$$(h \bullet g) \bullet f = ((h \bullet) \bullet (g \bullet)) f \quad (87)$$

$$= h \bullet (g \bullet f) \quad (88)$$

0.23 アプリカティブ関手

Pure:^{*55}

$$z_\star = \star \langle x \rangle \quad (89)$$

Applicative map:^{*56}

$$z_\star = f_\star \otimes x_\star \quad (90)$$

^{*54} In Haskell, `f :: ((->) r) q`.

^{*55} In Haskell, `zm = pure x`.

^{*56} In Haskell, `zm = f <*> xm`.

where

$$f_{\star} :: \mathbf{f} \ll \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b} \gg \quad (91)$$

Applicative style:^{*57}

$$z_{\star} = \star \langle f \rangle \otimes x_{\star} \otimes y_{\star} \quad (92)$$

or^{*58}

$$z_{\star} = f \textcircled{\text{S}} x_{\star} \otimes y_{\star} \quad (93)$$

or^{*59}

$$z_{\star} = \llbracket f \ x_{\star} \ y_{\star} \rrbracket \quad (94)$$

0.24 モナド

Returning *List*.

$$\cdot \quad (95)$$

Returning *Maybe*:^{*60}

$$f :: \mathbb{Z} \rightarrow ? \ll \mathbb{Z} \gg \quad (96)$$

$$f x = \text{Just} \langle x \rangle \quad (97)$$

^{*57} In Haskell, `zm = pure (+) <*> xm <*> ym`.

^{*58} In Haskell, `zm = f <$> xm <*> ym`.

^{*59} In Haskell, `zm = liftA2 f xm ym`.

^{*60} In Haskell, `f :: Int -> Maybe Int` and `f x = Just x`.

Returning *monad*:

$$f :: \mathbb{Z} \rightarrow {}^{\mathbf{m}}\langle\mathbf{a}\rangle \quad (98)$$

$$fx = {}^*\langle x \rangle \quad (99)$$

Returning monadic value:^{*61}

$$f :: \mathsf{Monad} \supset \mathbf{m} \Rightarrow \mathbf{a} \rightarrow {}^{\mathbf{m}}\langle\mathbf{a}\rangle \quad (100)$$

Monadic function binding:^{*62}

$$z_{\star} = x_{\star} \multimap f_1 \multimap f_2 \quad (101)$$

where

$$f_1 :: \mathbb{Z} \rightarrow {}^?\langle\mathbb{Z}\rangle \quad (102)$$

$$f_2 :: \mathbb{Z} \rightarrow {}^?\langle\mathbb{Z}\rangle. \quad (103)$$

Function binding of monadic function and non-monadic function:^{*63}

$$z_{\star} = x_{\star} \multimap f \multimap g' \text{ where } \{g'w = {}^*\langle gw \rangle\} \quad (104)$$

or

$$z_{\star} = x_{\star} \multimap (f \multimap g') \text{ where } \{g'w = {}^*\langle gw \rangle\} \quad (105)$$

^{*61} In Haskell, `f :: Monad m => a -> m a`.

^{*62} In Haskell, `zm = xm >>= f1 >>= f2`.

^{*63} In Haskell,

```
zm = xm >>= f >>= g'
  where g' w = pure (g w)
```


where

$$f :: \mathbb{Z} \rightarrow ? \langle \mathbb{Z} \rangle \quad (106)$$

$$g :: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}. \quad (107)$$

Another solution is:

$$z_* = (g^* \bullet f) \heartsuit x_* \quad (108)$$

where g^* means `liftM g` in Haskell.*⁶⁴

0.25 種

$$\star \rightarrow \star \quad (109)$$

0.26 Data

Data:.*⁶⁵

$$\mathbf{data\ Suit} = \mathbf{Spade} \vee \mathbf{Heart} \vee \mathbf{Club} \vee \mathbf{Diamond} \quad (110)$$

Data with parameters:.*⁶⁶

$$\mathbf{data\ V^2} = \mathbf{V^2} \{x :: \mathbb{Z}, y :: \mathbb{Z}\} \quad (111)$$

*⁶⁴ In Haskell, `zm = (liftM g . f) xm`.

*⁶⁵ In Haskell,

`data Suit = Spade | Heart | Club | Diamond`

*⁶⁶ In Haskell,

`data V2 = V2 { x :: Int, y :: Int}`

or `data V2 = V2 Int Int`.

0.27 型クラスとインスタンス

0.28 IO モナド

IO example:^{*67}

$$\text{main} = \text{getLine} \rightsquigarrow \text{print} \gg * \langle 0 \rangle \quad (112)$$

0.29 Do 構文

Do notation:^{*68}

$$z_* = \text{do} \{x' \leftarrow x_*; y' \leftarrow y_*; f x'; g y'\} \quad (113)$$



0.30 モノイド

任意の関数 f に対して

$$\text{id} f = f \quad (114)$$

なる関数 id があり、かつ任意の関数 f, g, h に対して

$$(h \bullet g) \bullet f = h \bullet (g \bullet f) \quad (115)$$

が成り立つとする。このとき関数は**モノイド**であるという。

^{*67} In Haskell, `main = getLine >>= print >> return 0`.

^{*68} In Haskell, `z = do {x' <- x; y' <- y; f x'; g y'}`.

TK. 一般のモノイド.

0.31 モノイド則

型 \mathbf{a} の変数 $x, y, z :: \mathbf{a}$ について, 特別な変数 $i :: \mathbf{a}$ および二項演算子 \circ ただし $x \circ y :: \mathbf{a}$ があり,

$$i \circ x = x \dots (\text{単位元の存在}) \quad (116)$$

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \dots (\text{結合律}) \quad (117)$$

であるとき, 組み合わせ (\mathbf{a}, \circ, i) をモノイドと呼ぶ.

組み合わせ $(\mathbb{Z}, +, 0)$ や $(\mathbb{Z}, \times, 1)$ はモノイドである.

同じ型から同じ型への 1 引数関数を改めて $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}$ で表し, 特別な変数 i を関数 id , 二項演算子を \bullet とすると以下の関係が成り立つ.

$$\text{id} \bullet f = f \dots (\text{単位元の存在}) \quad (118)$$

$$(h \bullet g) \bullet f = h \bullet (g \bullet f) \dots (\text{結合律}) \quad (119)$$

そこで組み合わせ $(\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}, \bullet, \text{id})$ はモノイドであると言える.

0.32 関手則

関手のマップ演算子 \textcircled{S} は以下の関手則に従う.

$$\text{id} \textcircled{S} x_* = \text{id} x_* \quad (120)$$

$$(g \bullet f) \textcircled{S} x_* = ((g \textcircled{S}) \bullet (f \textcircled{S})) x_* \quad (121)$$

$$= g \textcircled{S} (f \textcircled{S} x_*) \quad (122)$$

関手則は関手 (数学) に由来する.

圏 \mathcal{C} の対象を X とする．圏 \mathcal{D} の対象は関手（数学） \mathfrak{F} によって対象 X と関係づけられる．圏 \mathcal{C} における射 $f: X \rightarrow Y$ が $\mathfrak{F}f: \mathfrak{F}X \rightarrow \mathfrak{F}Y$ に対応し，次の関係を満たす．

- $X \in \mathcal{C}$ に対して $\mathfrak{F}\text{id}_X = \text{id}_{\mathfrak{F}X}$
- $f: X \rightarrow Y$ および $g: Y \rightarrow Z$ に対して $\mathfrak{F}(g \bullet f) = (\mathfrak{F}g) \bullet (\mathfrak{F}f)$

いま

$$\text{id}_X, \text{id}_{\mathfrak{F}X} \rightarrow \text{id} \quad (123)$$

$$f \circledcirc \rightarrow \mathfrak{F}f \quad (124)$$

と対応付けると，関手（数学）が満たす法則と関手則は一致する．

0.33 アプリカティブ関手則

アプリカティブ関手のマップ演算子 \otimes は以下の規則に従う．

$$^* \langle \text{id} \rangle \otimes x_* = x_* \quad (125)$$

$$^* \langle f \rangle \otimes ^* \langle x \rangle = ^* \langle fx \rangle \quad (126)$$

$$f_* \otimes ^* \langle x \rangle = ^* \langle \diamond \S x \rangle \otimes f_* \quad (127)$$

$$^* \langle \diamond \bullet \diamond \rangle \otimes h_* \otimes g_* \otimes f_* = h_* \otimes (g_* \otimes f_*) \quad (128)$$

0.34 モナド則

モナドのマップ演算子 \heartsuit は以下の規則に従う．

$$f^\dagger \heartsuit ^* \langle x \rangle = f^\dagger x \quad (129)$$

$$^* \langle \diamond \rangle \heartsuit x_* = x_* \quad (130)$$

$$(g^\dagger \heartsuit f^\dagger) \heartsuit x_* = g^\dagger \heartsuit (f^\dagger \heartsuit x_*) \quad (131)$$

次のクライスリスターすなわち

$$f^{\star} = (f^{\dagger} \heartsuit \diamond) \quad (132)$$

を用いると、モナド則は次のように書き換えられる.

$$(f^{\star})^{\star} \langle x \rangle = f^{\dagger} x \quad (133)$$

$$({}^{\star} \langle \diamond \rangle)^{\star} x_{\star} = x_{\star} \quad (134)$$

$$(g^{\star} f^{\dagger})^{\star} x_{\star} = g^{\star} (f^{\star} x_{\star}) \quad (135)$$