

Haskell Notes v.0

Ichi Kanaya

2025

0.1 変数

変数 x に値を代入するには次のようにする.*¹

$$x = 1 \tag{1}$$

変数という呼び名に反して、変数の値は変えられない。そこで変数に値を代入するとは呼ばずに、変数名に値を**束縛**するという。

変数の値がいつでも変化しないことを**参照透過性**と呼ぶ。プログラマーが変数の値を変化させたい理由はユーザー入力、ループ、例外、内部状態、大域ジャンプ、継続を扱いたいからであろう。しかし、後に見るようにループ、例外、内部状態、大域ジャンプ、継続に変数の破壊的代入は必要ない。ユーザー入力に関しても章を改めて取り上げる。

本書では変数名を原則 1 文字として、イタリック体で表し、 w, x, y, z のような n 以降のアルファベットを使う。

0.2 関数

関数 f は次のように定義できる.*²

$$fx = x + 1 \tag{2}$$

ここに x は関数 f の引数である。引数は括弧でくるまない。

本書では関数名を原則 1 文字として、イタリック体で表し、 f, g, h のようにアルファベットの f 以降の文字を使う。ただし有名な関数につ

*¹ Haskell では `x = 1` と書く。

*² Haskell では `f x = x+1` と書く。

いてはローマン体で表し、文字数も2文字以上とする。たとえば \sin などの三角関数や指数関数がそれにあたる。

変数 x に関数 f を適用する場合は次のように書く。^{*3}

$$z = fx \quad (3)$$

関数 f が引数をふたつ取る場合は、次のように書く。^{*4}

$$z = fxy \quad (4)$$

なお fxy は $(fx)y$ と解釈される。前半の (fx) は1引数の関数とみなせる。

0.3 ラムダ

関数とは、変数名に束縛されたラムダ式である。ラムダ式は次のように書く。^{*5}

$$f = \lambda x \mapsto x + 1 \quad (5)$$

本書では無名変数 \diamond を用いた以下の書き方も用いる。^{*6}

$$f = (\diamond + 1) \quad (6)$$

$$= \lambda x \mapsto x + 1 \quad (7)$$

^{*3} Haskell では $z = f\ x$ と書く。

^{*4} Haskell では $z = f\ x\ y$ と書く。

^{*5} Haskell では $f = \lambda x \rightarrow x+1$ と書く。

^{*6} 無名変数は Haskell には無いが、代わりに「セクション」という書き方ができる。式 $(\diamond + 1)$ は Haskell では $(+1)$ と書く。

0.4 ローカル変数

関数内でローカル変数を使いたい場合は以下のように行う。^{*7}

$$z = \text{let } \{y = 1\} \text{ in } x + y \quad (8)$$

ローカル変数の定義は次のように後置できる。^{*8}

$$z = x + y \text{ where } \{y = 1\} \quad (9)$$

0.5 クロージャ

ラムダ式を返す関数は、ラムダ式内部に値を閉じ込めることができる。

$$f n = \lambda x \mapsto n + x \quad (10)$$

関数 f に引数 n を与えると、新たな 1 引数関数が得られる。例を挙げる。

$$n = 3 \quad (11)$$

$$g = f n \quad (12)$$

この例では、関数 g の中に値 $n = 3$ が閉じ込められているため $g1$ は 4 と評価される。値を閉じ込めたラムダ式をクロージャと呼ぶ。

^{*7} Haskell では $z = \text{let } \{y = 1\} \text{ in } x+y$ と書く。let 節内の式がひとつの場合、中括弧は省略可能である。式が複数になる場合は ; で区切る。

^{*8} Haskell では $z = x+y \text{ where } \{y = 1\}$ と書く。where 節内の式がひとつの場合、中括弧は省略可能である。式が複数になる場合は ; で区切る。

0.6 型

すべての変数、関数には**型**がある。代表的な型にはブール型、整数型、浮動小数点型、文字型がある。以降、ブール型を \mathbb{B} で、整数型を \mathbb{Z} で表す。^{*9}

浮動小数点型は実数全体を表現できないが、本書では実数全体を意味する \mathbb{R} で表すことにする。^{*10}

本書では対応する、あるいは近い数学概念がある場合、型名をブラックボード体 1 文字で書く。文字型のように対応する数学概念がない場合はボールドローマン体を用いる。文字型は **Char** とする。^{*11}

変数 x の型が \mathbb{Z} のとき、以下のように**型注釈**を書く。^{*12}

$$x :: \mathbb{Z} \tag{13}$$

同じことを数学者は $x \in \mathbb{Z}$ と書くことを好むが、記号 \in は別の用途で使うため $::$ を用いる。

1 引数関数の型は次のように注釈できる。^{*13}

$$f :: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \tag{14}$$

ここで関数 f は整数型の引数をひとつとり、整数型の値を返す。

^{*9} Haskell ではブール型を `Bool`、整数型を `Int`、多倍長整数型を `Integer` と書く。

^{*10} Haskell では単精度浮動小数点型を `Float`、倍精度浮動小数点型を `Double` と書く。

^{*11} Haskell では Unicode 文字型を `Char` と書く。

^{*12} Haskell では `x :: Int` と書く。

^{*13} Haskell では `f :: Int -> Int` と書く。

2 引数関数の方は次のように注釈できる.*¹⁴

$$f :: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad (15)$$

ここで関数 f は整数型の引数をふたつとり、整数型の値を返す。型 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z} \rightarrow (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z})$ と解釈される。

$(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z})$ 型の関数を受け取り、 $(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z})$ 型の関数を返す関数は次の型を持つ.*¹⁵

$$f :: (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}) \quad (16)$$

なお後半の括弧は省略可能なので

$$f :: (\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad (17)$$

と書いても良い。

0.7 リテラル

リテラルは次のように書く.*¹⁶

$$z = 1 \quad (18)$$

*¹⁴ Haskell では `f :: Int -> Int -> Int` と書く。

*¹⁵ Haskell では以下のように書く。

`f :: (Int -> Int) -> (Int -> Int)`

*¹⁶ Haskell では `z = 1` と書く。

0.8 条件

条件分岐は次のように書く.*¹⁷

$$z = \text{if } x > 0 \text{ then } x \text{ else } -x \quad (19)$$

条件分岐の代わりに以下のようなパターンマッチも使える.*¹⁸

$$f = \text{case } x \text{ of } \begin{cases} 1 \rightarrow 1 \\ _ \rightarrow 0 \end{cases} \quad (20)$$

この場合 $x \equiv 1$ ならば f は 1 を, そうでなければ f は 0 を返す. ここに $_$ はすべてのパターンに一致する記号である. パターンマッチは上から順に行われる.

関数定義にもパターンマッチを使える.*¹⁹

$$\begin{cases} f1 = 1 \\ f_ = 0 \end{cases} \quad (21)$$

関数定義には次のようにガードと呼ばれる条件を付与することがで

*¹⁷ Haskell では `z = if x>0 then x else -x` と書く.

*¹⁸ Haskell では以下のように書くのが一般的である.

```
f = case x of 1 -> 1
              _ -> 0
```

*¹⁹ Haskell では次のように書く.

```
f 1 = 1
f _ = 0
```

きる.*²⁰

$$\begin{cases} fx \mid x > 0 = x \\ \mid \text{otherwise} = -x \end{cases} \quad (22)$$

0.9 関数の再帰呼び出し

関数は再帰的に呼び出せる． $n \geq 0$ を前提とすると， n 番目のフィボナッチ数を計算する関数 `fib` を次のように定義できる．*²¹

$$\begin{cases} \text{fib } 0 = 0 \\ \text{fib } 1 = 1 \\ \text{fib } n = \text{fib } (n-1) + \text{fib } (n-2) \end{cases} \quad (23)$$

0.10 関数合成

関数の合成は次のように書く．*²²

$$k = g \bullet f \quad (24)$$

*²⁰ Haskell では次のように書く．

```
f x | x > 0      = x
    | otherwise = -x
```

*²¹ Haskell では次のように書く．ただし Haskell には符号なし整数型がないために `n` が正であることを別に担保する必要がある．またこのコードは無駄な再帰呼び出しを行っており実用的ではない．

```
fib 0 = 0
fib 1 = 1
fib n = fib (n-1) + fib (n-2)
```

*²² Haskell では `k = g.f` と書く．

関数合成演算子 \bullet は以下のように右結合する.

$$f = f_3 \bullet f_2 \bullet f_1 \quad (25)$$

$$= (f_3 \bullet f_2) \bullet f_1 \quad (26)$$

$$(27)$$

優先順位の低い関数合成演算子もあると便利である. そのために演算子 $\$$ を導入する. 例を挙げる.*²³

$$k = h \$ g \bullet f \quad (28)$$

$$= h \bullet (g \bullet f) \quad (29)$$

いま任意の関数 f に対して

$$\text{id} f = f \quad (30)$$

なる関数 id があり, かつ任意の関数 f, g, h に対して

$$(h \bullet g) \bullet f = h \bullet (g \bullet f) \quad (31)$$

が成り立つとする. このとき関数は**モノイド**であるという.

0.11 タプル

複数の変数をまとめてひとつの**タプル**にすることができる. 例を挙げる.*²⁴

$$z = (x, y) \quad (32)$$

*²³ Haskell では $k = h \$ g.f$ と書く.

*²⁴ Haskell では $z = (x, y)$ と書く.

タプルの型は、要素の型をタプルにしたものである。例えば \mathbb{Z} が 2 個からなるタプルの型は次のようになる。^{*25}

$$z :: (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \quad (33)$$

要素を含まないタプルを**ユニット**と呼ぶ。ユニットは次のように書く。^{*26}

$$z = () \quad (34)$$

ユニットの型は**ユニット型**で、型注釈を次のように書く。^{*27}

$$z :: () \quad (35)$$

0.12 リストと内包表記

ある変数がリストであるとき、その変数がリストであることを忘れないように x_s と小さく s を付けることにする。

空リストは次のように定義する。^{*28}

$$x_s = [] \quad (36)$$

任意のリストは次のように構成する。

$$x_s = x_0 : x_1 : x_2 : \cdots : [] \quad (37)$$

^{*25} In Haskell, $z :: (\text{Int}, \text{Int})$.

^{*26} Haskell では $z = ()$ と書く。

^{*27} Haskell では $z :: ()$ と書く。

^{*28} Haskell では $xs = []$ と書く。

リストの型はその構成要素の型をブラケットで包んで表現する.*29

$$x_s :: [\mathbb{Z}] \quad (38)$$

リストは次のように構成することもできる.*30

$$x_s = [1, 2, \dots, 100] \quad (39)$$

リストの構成には**内包表記**が使える。例を挙げる.*31

$$x_s = [x^2 \mid x \in [1, 2 \dots 100], x > 50] \quad (40)$$

リストとリストをつなぐ場合は**リスト結合演算子 #**を用いる.*32

$$z_s = x_s \# y_s \quad (41)$$

0.13 マップと畳み込み

リスト x_s の各要素に関数 f を適用して、その結果をリスト z_s に格納するためには次のように**マップ演算子 \otimes** を用いる.*33

$$z_s = f \otimes x_s \quad (42)$$

リスト x_s の各要素を先頭から順番に 2 項演算子を適用して、その結果を得るには**畳み込み演算子**を用いる。例えば整数リストの和は次の

*29 Haskell では `xs :: [Int]` と書く。

*30 Haskell では `xs = [1, 2..100]` と書く。

*31 Haskell では次のように書く。

```
xs = [x^2 | x <- [1, 2..100], x>50]
```

*32 Haskell では `zs = xs ++ ys` と書く。

*33 Haskell では `zs = f `map` xs` と書く。

ように書ける.*³⁴

$$z = \bigcup_{\diamond}^{(\diamond+\diamond)} x_s \quad (43)$$

リスト x_s が $[x_0, x_1, \dots, x_n]$ のとき、一般に

$$\bigcup_a^{\star} x_s = a \star x_0 \star x_1 \dots x_{n-1} \star x_n \quad (44)$$

である.

畳み込み演算子には次の右結合バージョンが存在する.*³⁵

$$\bigcup_a^{\star} x_s = a \star (x_0 \dots (x_{n-2} \star (x_{n-1} \star x_n))) \quad (45)$$

0.14 Maybe

計算は失敗する可能性がある. 例えば

$$z = y/x \quad (46)$$

のときに $x \equiv 0$ であったとしたら、この計算は失敗する. プログラムが計算を失敗した場合、たいていのプログラマは大域ジャンプを試みる. しかし大域ジャンプは変数の書き換えを行うことであるから、別の方法が望まれる. Haskell では失敗する可能性がある場合には Maybe という機構が使える.

いま関数 f が引数 x と y を取り、 $x \neq 0$ であるならば y/x を返すとする. もし $x \equiv 0$ であれば失敗を意味する \emptyset (ナッシング) を返すとす

*³⁴ Haskell では $z = \text{foldl1 } 0 \ (+) \ xs$ と書く.

*³⁵ Haskell では foldr を用いる.

る．すると関数 f の定義は次のようになる．

$$f y x = \text{if } x \neq 0 \text{ then } y/x \text{ else } \emptyset \dots (\text{不完全}) \quad (47)$$

残念ながら上式は不完全である．なぜならば $x \neq 0$ のときの戻り値は数であるのに対して、 $x \equiv 0$ のときの戻り値は数ではないからである．そこで

$$\tilde{f} y x = \text{if } x \neq 0 \text{ then } \text{Just } \langle y/x \rangle \text{ else } \emptyset \quad (48)$$

とする．ここに $\text{Just } \langle y/x \rangle$ は数 y/x から作られる、Maybe で包まれた数である．

整数型 \mathbb{Z} を Maybe で包む場合は $?\langle\mathbb{Z}\rangle$ と書く．Maybe で包まれた型を持つ変数は $x_?$ のように小さく $?$ をつける．例を挙げる．^{*36}

$$x_? :: ?\langle\mathbb{Z}\rangle \quad (49)$$

Maybe で包まれた型を持つ変数は、値を持つか \emptyset (ナッシング) であるかのいずれかである．値をもつ場合は

$$x_? = \text{Just } \langle 1 \rangle \quad (50)$$

のように書く．^{*37}

Maybe 変数が値を持たない場合は

$$x_? = \emptyset \quad (51)$$

と書く．^{*38}

^{*36} Haskell では `xm :: Maybe Int` と書く．

^{*37} Haskell では `xm = Just 1` と書く．

^{*38} Haskell では `xm = Nothing` と書く．

0.15 Maybe に対する計算

Maybe 変数に、非 Maybe 変数を受け取る関数を適用することは出来ない。そこで特別な演算子 \textcircled{S} を用いる。^{*39}

$$z? = (\diamond + 1) \textcircled{S} x? \quad (52)$$

ここに演算子 \textcircled{S} は

$$\text{Just } \langle fx \rangle = f \textcircled{S} \text{Just } \langle x \rangle \quad (53)$$

$$\emptyset = f \textcircled{S} \emptyset \quad (54)$$

と定義される。

0.16 型パラメタ

型をパラメタとして扱うことができる。任意の型を \mathbf{a} と、ボールド体小文字で書く。ある型 \mathbf{a} の引数を取り、同じ型を返す関数の型は次のように書ける。^{*40}

$$f :: \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a} \quad (55)$$

型パラメタには制約をつけることができる。型の集合を**型クラス**と呼び、フラクチュール体で書く。たとえば数を表す型クラスは \mathfrak{Num} である。型パラメタ \mathbf{a} が型クラス \mathfrak{Num} に属するとき、上述の関数 f の型注釈は次のようになる。^{*41}

$$f :: \mathfrak{Num} \supset \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a} \quad (56)$$

^{*39} Haskell では $zm = (+1) \text{<\$>} xm$ と書く。

^{*40} Haskell では $f :: \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}$ と書く。

^{*41} Haskell では $f :: \mathfrak{Num} \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}$ と書く。

型クラスは型に制約を与える.

TK. $\text{Num } a \Rightarrow x :: a$ ならば x が持つべき演算子.

TK. 型クラスの例.

0.17 関手

型 \mathbf{a} のリストの変数は

$$x_s :: [\mathbf{a}] \quad (57)$$

という型注釈を持つ. 型 \mathbf{a} 型の Maybe の変数は

$$x_? :: ? \llbracket \mathbf{a} \rrbracket \quad (58)$$

という型注釈を持つ.

普段遣いの関数

$$f :: \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a} \quad (59)$$

をリスト変数 x_s に適用する場合は

$$z_s = f \otimes x_s \quad (60)$$

とする. 同じく関数 f を Maybe 変数 $x_?$ に適用する場合は

$$z_? = f \circledcirc x_? \quad (61)$$

とする.

リストも Maybe も元の型 \mathbf{a} から派生しており, 関数適用のための特別な演算子を持つことになる. そこで, リストや Maybe は**関手**という

型クラスに属する，型パラメタを伴う型であるとする．関手の型クラスを $\mathfrak{F}\text{unctor}$ で表す．関手型クラスの \mathbf{a} 型の変数を次のように型注釈する．^{*42}

$$x_* :: \mathfrak{F}\text{unctor} \supset \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{f} \langle \mathbf{a} \rangle \quad (62)$$

型クラス $\mathfrak{F}\text{unctor}$ に属する型は $\textcircled{\mathbf{S}}$ 演算子を持たねばならない．演算子 $\textcircled{\mathbf{S}}$ は次の形を持つ．^{*43}

$$z_* = f \textcircled{\mathbf{S}} x_* \quad (63)$$

演算子 $\textcircled{\mathbf{S}}$ の型は次のとおりである．

$$\diamond \textcircled{\mathbf{S}} \diamond :: (\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{f} \langle \mathbf{a} \rangle \rightarrow \mathbf{f} \langle \mathbf{b} \rangle \quad (64)$$

もし変数 x_* の型がリストであれば

$$\textcircled{\mathbf{S}} = \otimes \quad (65)$$

であると解釈する．

Function of parametric type with functor class:^{*44}

$$f :: \mathfrak{F}\text{unctor} \supset \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{f} \langle \mathbf{a} \rangle \quad (66)$$

Example function application:^{*45}

$$z_* = (\diamond + 1) \textcircled{\mathbf{S}}^{\text{Just}} \langle x \rangle \quad (67)$$

^{*42} Haskell では $xm :: \text{Functor } f \Rightarrow f \ a$ と書く．

^{*43} In Haskell, $zm = f \ \<\$> \ xm$.

^{*44} In Haskell, $f :: \text{Functor } f \Rightarrow a \rightarrow f \ a$.

^{*45} In Haskell, $zm = (+1) \ \<\$> \ \text{Just } x$.

0.18 関手としての関数

$$f :: \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r} \quad (68)$$

Function as a functor:^{*46}

$$f :: (\blacklozenge \rightarrow \mathbf{r}) \mathbf{q} = (\blacklozenge \rightarrow \mathbf{r}) \llbracket \mathbf{q} \rrbracket \quad (69)$$

Thus,

$$f_2 \bullet f_1 \equiv f_2 \circledcirc f_1 \quad (70)$$

$$\text{id} \bullet f = \text{id} f = f \quad (71)$$

$$(h \bullet g) \bullet f = ((h \bullet) \bullet (g \bullet)) f \quad (72)$$

$$= h \bullet (g \bullet f) \quad (73)$$

0.19 アプリカティブ関手

Pure:^{*47}

$$z_\star = \star \langle x \rangle \quad (74)$$

Applicative map:^{*48}

$$z_\star = f_\star \otimes x_\star \quad (75)$$

^{*46} In Haskell, `f :: ((->) r) q`.

^{*47} In Haskell, `zm = pure x`.

^{*48} In Haskell, `zm = f <*> xm`.

where

$$f_{\star} :: \mathbf{f} \llbracket \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b} \rrbracket \quad (76)$$

Applicative style:^{*49}

$$z_{\star} = \star \langle f \rangle \otimes x_{\star} \otimes y_{\star} \quad (77)$$

or^{*50}

$$z_{\star} = f \textcircled{\otimes} x_{\star} \otimes y_{\star} \quad (78)$$

or^{*51}

$$z_{\star} = \llbracket f \ x_{\star} \ y_{\star} \rrbracket \quad (79)$$

0.20 モナド

Returning *List*.

$$\cdot \quad (80)$$

Returning *Maybe*:^{*52}

$$f :: \mathbb{Z} \rightarrow ? \llbracket \mathbb{Z} \rrbracket \quad (81)$$

$$fx = \text{Just} \langle x \rangle \quad (82)$$

^{*49} In Haskell, `zm = pure (+) <*> xm <*> ym`.

^{*50} In Haskell, `zm = f <$> xm <*> ym`.

^{*51} In Haskell, `zm = liftA2 f xm ym`.

^{*52} In Haskell, `f :: Int -> Maybe Int` and `f x = Just x`.

Returning *monad*:

$$f :: \mathbb{Z} \rightarrow^{\mathbf{m}} \langle \mathbf{a} \rangle \quad (83)$$

$$fx = {}^* \langle x \rangle \quad (84)$$

Returning monadic value:^{*53}

$$f :: \mathsf{Monad} \supset \mathbf{m} \Rightarrow \mathbf{a} \rightarrow^{\mathbf{m}} \langle \mathbf{a} \rangle \quad (85)$$

Monadic function binding:^{*54}

$$z_* = x_* \multimap f_1 \multimap f_2 \quad (86)$$

where

$$f_1 :: \mathbb{Z} \rightarrow^? \langle \mathbb{Z} \rangle \quad (87)$$

$$f_2 :: \mathbb{Z} \rightarrow^? \langle \mathbb{Z} \rangle. \quad (88)$$

Function binding of monadic function and non-monadic function:^{*55}

$$z_* = x_* \multimap f \multimap g' \quad \text{where } \{g'w = {}^* \langle gw \rangle\} \quad (89)$$

where

$$f :: \mathbb{Z} \rightarrow^? \langle \mathbb{Z} \rangle \quad (90)$$

$$g :: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}. \quad (91)$$

^{*53} In Haskell, `f :: Monad m => a -> m a`.

^{*54} In Haskell, `zm = xm >>= f1 >>= f2`.

^{*55} In Haskell,

```
zm = xm >>= f >>= g'
  where g' w = pure (g w)
```

Another solution is:

$$z_{\star} = (g^{\star} \bullet f) \dashv\!\!\!\rightarrow x_{\star} \quad (92)$$

where g^{\star} means `liftM g` in Haskell.^{*56}

0.21 種

$$\star \rightarrow \star \quad (93)$$

0.22 Data

Data:^{*57}

$$\text{dataSuit} = \text{Spade} \vee \text{Heart} \vee \text{Club} \vee \text{Diamond} \quad (94)$$

Data with parameters:^{*58}

$$\text{dataV}^2 = V^2 \{x :: \mathbb{Z}, y :: \mathbb{Z}\} \quad (95)$$

^{*56} In Haskell, `zm = (liftM g . f) xm`.

^{*57} In Haskell,

```
data Suit = Spade | Heart | Club | Diamond
```

^{*58} In Haskell,

```
data V2 = V2 { x :: Int, y :: Int}
```

```
or data V2 = V2 Int Int.
```

0.23 型クラスとインスタンス

0.24 IO

IO example:^{*59}

$$\text{main} = \text{getLine} \multimap \text{print} \gg * \langle 0 \rangle \quad (96)$$

0.25 Do 構文

Do notation:^{*60}

$$z_* = \text{do} \{x' \leftarrow x_*; y' \leftarrow y_*; f x'; g y'\} \quad (97)$$


0.26 モノイド則

型 \mathbf{a} の変数 $x, y, z :: \mathbf{a}$ について、特別な変数 $i :: \mathbf{a}$ および二項演算子 \circ ただし $x \circ y :: \mathbf{a}$ があり,

$$i \circ x = x \quad (98)$$

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \quad (99)$$

であるとき、組み合わせ (\mathbf{a}, \circ, i) をモノイドと呼ぶ.

組み合わせ $(\mathbb{Z}, +, 0)$ や $(\mathbb{Z}, \times, 1)$ はモノイドである.

^{*59} In Haskell, `main = getLine >>= print >> return 0.`

^{*60} In Haskell, `z = do {x' <- x; y' <- y; f x'; g y'}.`

同じ型から同じ型への 1 引数関数を改めて $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}$ で表し, 特別な変数 i を関数 id , 二項演算子を \bullet とすると以下の関係が成り立つ.

$$\text{id} \bullet f = f \quad (100)$$

$$(h \bullet g) \bullet f = h \bullet (g \bullet f) \quad (101)$$

そこで組み合わせ $(\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}, \bullet, \text{id})$ はモノイドであると言える.

0.27 関手則

関手のマップ演算子 $\textcircled{\$}$ は以下の関手則に従う.

$$\text{id} \textcircled{\$} x_* = \text{id} x_* \quad (102)$$

$$(g \bullet f) \textcircled{\$} x_* = ((g \textcircled{\$}) \bullet (f \textcircled{\$})) x_* \quad (103)$$

$$= g \textcircled{\$} (f \textcircled{\$} x_*) \quad (104)$$

関手則は関手 (数学) に由来する.

圏 \mathcal{C} の対象を X とする. 圏 \mathcal{D} の対象は関手 (数学) \mathfrak{F} によって対象 X と関係づけられる. 圏 \mathcal{C} における射 $f: X \rightarrow Y$ が $\mathfrak{F}f: \mathfrak{F}X \rightarrow \mathfrak{F}Y$ に対応し, 次の関係を満たす.

- $X \in \mathcal{C}$ に対して $\mathfrak{F}\text{id}_X = \text{id}_{\mathfrak{F}X}$
- $f: X \rightarrow Y$ および $g: Y \rightarrow Z$ に対して $\mathfrak{F}(g \bullet f) = (\mathfrak{F}g) \bullet (\mathfrak{F}f)$

いま

$$\text{id}_X, \text{id}_{\mathfrak{F}X} \rightarrow \text{id} \quad (105)$$

$$f \textcircled{\$} \rightarrow \mathfrak{F}f \quad (106)$$

と対応付けると, 関手 (数学) が満たす法則と関手則は一致する.

0.28 アプリカティブ関手則

アプリカティブ関手のマップ演算子 \otimes は以下の規則に従う.

$$^* \langle \text{id} \rangle \otimes x_* = x_* \quad (107)$$

$$^* \langle f \rangle \otimes ^* \langle x \rangle = ^* \langle fx \rangle \quad (108)$$

$$f_* \otimes ^* \langle x \rangle = ^* \langle \diamond \$ x \rangle \otimes f_* \quad (109)$$

$$^* \langle \diamond \bullet \diamond \rangle \otimes h_* \otimes g_* \otimes f_* = h_* \otimes (g_* \otimes f_*) \quad (110)$$

0.29 モナド則

モナドのマップ演算子 \heartsuit は以下の規則に従う.

$$\tilde{f} \heartsuit ^* \langle x \rangle = \tilde{f}x \quad (111)$$

$$^* \langle \diamond \rangle \heartsuit x_* = x_* \quad (112)$$

$$(\tilde{g} \heartsuit \tilde{f}) \heartsuit x_* = \tilde{g} \heartsuit (\tilde{f} \heartsuit x_*) \quad (113)$$

次のクライスリスターすなわち

$$\tilde{f}^\star = (\tilde{f} \heartsuit \diamond) \quad (114)$$

を用いると, モナド則は次のように書き換えられる.

$$(\tilde{f}^\star)^* \langle x \rangle = \tilde{f}x \quad (115)$$

$$(^* \langle \diamond \rangle)^\star x_* = x_* \quad (116)$$

$$(\tilde{g}^\star \tilde{f})^\star x_* = \tilde{g}^\star (\tilde{f}^\star x_*) \quad (117)$$

0.30 関手（数学）