ベクトル・複素数・クォータニオン

金谷一朗

Digital Signature by the Author

Signature
Not Verified

Ichiroh Kanaya
Grad. School of
Engineering Science,
Osaka Univ., 1-3
Machikaneyamacho,
Toyonaka, Osaka,
Japan

ベクトル・複素数・クォータニオン

金谷一朗

Ver. 1.1.3-β/2003-02-17

概 要

本稿ではクォータニオンについて解説する．ただし，解説といってもクォータニオンとはなかなか味わい深い数であるので，いろいろな数の物語を通じてクォータニオンに到達しようという趣向である．

本稿は，例えば3次元コンピュータグラフィックスに関わっている人で，クォータニオンが使えるけれどもよくわからないという人（つまりは昔の筆者）を対象にしたつもりであるが，本稿を読むにあたってコンピュータグラフィックスの知識は全く必要ない．

また本稿では，クォータニオンの他にベクトルや複素数の本当の意味も解説する．なぜならクォータニオンとは『ベクトルをたっぷりふりかけ，複素数にどっぷり漬け込み，反エルミート行列でこんがりと焼きあげた』数だからである．これらの事柄は全部本稿で説明した．

一方，本稿では次のことを（クォータニオン理解の基礎ではあるが）説明しなかった．

- 数学基礎論
- 線形代数の基礎
- 行列式，単位行列，逆行列の定義
- 2 次元の回転行列
- 複素代数の基礎
- オイラーの定理の証明
- 数学記号の由来，読み方

これらの事柄（大学 1 年生程度）は別の教科書を参考にされたい．

本稿は次のような構成になっている．

1. まず 2 種類の代数方程式を解いてみる．すると，実行列 と 複素数 がそれぞれ登場する．
2. 物理学（といっても力学の初歩）の立場から，2 次元の ベクトル という考え方を導入する．また 2 次元のベクトルを回転させてみる．
3. 少しばかり寄り道をして ブラ と フォーム が何かを知り，ベクトルの本当の姿をみる．
4. 複素数を使うと，2 次元の位置（ベクトル）と回転（行列）が同格になることをみる．
5. オイラー角 による 3 次元のベクトルの回転を考えてみる．
6. 複素行列 を使うと，3 次元の位置（ベクトル）と回転（行列）がやはり同格になることをみる．
7. もうひとつの 3 次元回転，クォータニオン に触れる．

最後に余談として，スピノール という考え方にも触れる．

ところで，本文中でも触れるが，本稿では次の新しい記号を発明する．

$$[\![a, b]\!] \equiv a + \boldsymbol{i}b$$

ここで a と b は実数であり $\boldsymbol{i}$ は虚数単位である．この記号 $[\![a, b]\!]$ は実数部 a と虚数部 b を持つ複素数を作る記号である．

ではさっそくテーブルについて，クォータニオンを賞味しよう．

目 次

図 目 次

表 目 次

1　「数」ひとめぐり

これからクォータニオンについて話したいと思う．クォータニオンは単体では大変理解しがたい「数」である．しかし，一見遠回りに見えるがベクトル，複素数と順を追って見ていくと，ある単純な原理に行き当たるはずである．この章ではまず手始めに身近な「数」として

- **実数 — 線形方程式の解**
- **行列 — 連立線形方程式の解**
- **複素数 — 高次方程式の解**

を見てみる．ついで，我々が普通知っている「数」の拡張としてのクォータニオンに触れる．この章を読めば,「数」とは何かが見えてくるはずである．

1.1　クォータニオンってなに？

3 次元コンピュータグラフィックスを始めるとすぐに奇妙な数学に出会う．回転に使う クォータニオン である．クォータニオンはなんとも浮世離れした「数」である．第一にクォータニオンは 4 個の実数からなる 四元数 である．しかし，クォータニオンは 4 次元ベクトルかというと若干様子が違うらしい．聞くところによるとクォータニオンは「超複素数」であるとか．クォータニオンとは一体何なのであろうか．

クォータニオンについて解説が書いてあるのを読むと，例えばこんな具合である．

— ある点 $\boldsymbol{p}$ を軸 $\boldsymbol{r}$ まわりに θ 回転したいとする．いま,

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix};\ \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$$

としよう．**《... ふむ，ちょっと変だけどベクトルですね.》** 回転を表すクォータニオンは，1 個の実数成分と 3 個の虚数成分からなり，I, J, K をクォータニオン単位とすると

$$\begin{aligned} q &= \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\left(r_x\mathsf{I} + r_y\mathsf{J} + r_z\mathsf{K}\right) \\ &= \left[\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{r}\right] \quad \text{... と書くことにする} \end{aligned}$$

である．クォータニオン単位は虚数単位の一種で,

$$\mathsf{I}^2 = \mathsf{J}^2 = \mathsf{K}^2 = \mathsf{IJK} = -1;\ \ldots$$

という性質を持つ．**《今度は複素数ですか.》** このクォータニオン q を使うと回転は

$$\boldsymbol{p}' = q^*\boldsymbol{p}q; \quad \text{where } q^* = \left[\cos\frac{\theta}{2}, -\sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{r}\right]$$

である．**《えっ，ベクトルと複素数の掛け算ですって？》**

最初はベクトルだったのに，複素数の拡張であるとか言うクォータニオン（しかも $\theta/2$って何だ）が現れ，気が付いたら行列の対角化みたいな方法で回転である．これではわけがわからない．

実はクォータニオンはベクトルと複素数の狭間にあるとても面白い「数」なのである．そこで，クォータニオンに触れる前に「数」の歴史に少し触れておいて,「数」とは何であるかについて簡単におさらいをしておこう．

1.2 実数と線形方程式

次の代数方程式を考えてみよう．

$$3x - 9 = 0$$

解はもちろん $x = 3$ であるが，そんなことはどうでもよろしい．とにかくこの方程式は実数の解を持つ．一般に，

$$ax + b = 0$$

の形をした方程式を 線形方程式 または 1 次方程式と呼ぶ．その解は，

$$x = -\frac{b}{a}$$

であって a および b が実数であれば x もまた実数である．

ここで掛け算が 非可換 すなわち

$$ab \neq ba$$

であったとしてみよう．また，割り算のことはすっかり忘れて，そのかわりに 逆数 を考えることにする．つまり，何がしかの実数 a に対して，左から a^{-1} という実数を掛けると 1 になるとする（a^{-1} は「a のマイナス 1 乗」ではなく,「a インバース」である）．

$$a^{-1}a \equiv 1 \quad \ldots \textbf{定義}$$

これでも線形方程式は次のように解ける．

$$x = -a^{-1}b$$

ともかく掛け算が非可換であっても x の係数 a の逆数さえ求まれば x について解けることがわかった．

実数 a の逆数 a^{-1} は，$a \neq 0$ のときにのみ存在し，

$$a^{-1} = \frac{1}{a}; \quad \text{where } a \in \mathbb{R} \text{ and } a \neq 0$$

である．ただし $\mathbb{R}$ は実数全体の集合である．

少しだけ深い話 線形方程式は定数項を許すが，ベクトルの 線形変換（線形写像）とは

$$P : \boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$$

のことであり，定数項を含む

$$P_A : \boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y};\ \boldsymbol{y} = (\text{定数})$$

は非線形変換である．変換 P_A は特別にアフィン (Affine) 変換と呼ばれる． ■

1.3 行列と連立線形方程式

線形方程式をちょっとだけ高度にしてみよう．方法は二通りあって，ひとつは未知数を増やす方法であり，いまひとつは未知数の次数を上げる方法である．ここでは未知数を増やすことを考えてみよう．次の例は 2 元の 連立線形方程式 である．

$$\begin{cases} 3x_{(1)} + 4x_{(2)} - 17 = 0 \\ 2x_{(1)} + 5x_{(2)} - 16 = 0 \end{cases}$$

たかだか未知数 2 個であるから，変数消去でやりくりすれば何とかなるであろうが，未知数が 100 個とかになるとやはり機械的に解ける方法がほしくなる．

そこで 線形代数 の登場である．前出の 2 元連立方程式を次のように書いてみる．

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{(1)} \\ x_{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -17 \\ -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

もちろん書き方を変えただけで，意味は連立方程式と同じである．というより，意味が連立方程式と同じになるように $\begin{bmatrix} \ddots \end{bmatrix}$ 同士の演算を決定したと言ったほうが正しい．この演算規則こそが線形代数と呼ばれるものである.（念のため，

$$\begin{bmatrix} a_{(1,1)} & a_{(1,2)} \\ a_{(2,1)} & a_{(2,2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{(1)} \\ x_{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{(1,1)}x_{(1)} + a_{(1,2)}x_{(2)} \\ a_{(2,1)}x_{(1)} + a_{(2,2)}x_{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{(1)} \\ x_{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{(1)} \\ y_{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{(1)} + y_{(1)} \\ x_{(2)} + y_{(2)} \end{bmatrix}$$

であったことを思い出しておこう.）

上式に登場する $\begin{bmatrix}\ddots\end{bmatrix}$ で囲まれた部分を 行列 と呼ぶ．行列は正方形だろうが，縦長だろうが全部行列である．ただし，正方形の行列は特別に美しいので 正方行列 と呼んで区別する．一点だけ注意を促しておくと，行列の掛け算は非可換である．

ところで式 (1) [p.8] はよく見ると

$$AX + B = 0$$

の形をしているではないか．というのは，

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} -17 \\ -16 \end{bmatrix};\ X = \begin{bmatrix} x_{(1)} \\ x_{(2)} \end{bmatrix}$$

というふうに考えたからであるが，このように行列も数だと思えば，A の逆数 A^{-1} を求めて

$$X = -A^{-1}B$$

として解くことができるはずである（というより，解けると嬉しいのでそのように努力するのである）．ただし，逆数はこの場合 逆行列 であるので，単位行列 を $\mathbf{1}$ として

$$A^{-1}A \equiv \mathbf{1};\ \mathbf{1} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \ldots \textbf{定義}$$

であるとする．逆行列の求め方の解説は線形代数の教科書にゆずる．逆行列の存在する行列のことを 正則行列 と呼ぶ．

掛け算の話をしたので，ついでに正則行列の足し算についても話しておこう．正則行列に限らず行列の和は行列の各成分の和である．そこで，

$$A + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O} + A = A;\ \boldsymbol{O} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots \textbf{定義}$$

なる 零行列 $\boldsymbol{O}$ が定義できる．零行列も単位行列と並んで基本的な行列である（零行列は単に 0 とも書く）．

このように正則行列には

- 積（掛け算，ただし非可換）
- 和（足し算）
- 単位元（単位行列と零行列）
- 逆元（逆行列）

が定義されたので，正則行列は「数」として充分な性質を備えていると言える．一般に上記 4 個の性質を備えた量を「数」と呼ぶ．つまり，多元連立線形方程式を考えることで

$$（実数）\to（行列）$$

というふうに「数」の概念が拡張されたことになる．

行列を数だと思うのは，今のところ連立線形方程式を解くための数学上のトリックに過ぎないが，これが後に数の本質に迫るツールとなる．

少しだけ深い話　集合 $\mathbf{G}$ の元 $a, b, c \in \mathbf{G}$ について，ある二項関係 “·” があり，

$$\begin{aligned} a \cdot b &\in \mathbf{G} \\ a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c \quad \ldots \text{結合則} \\ \exists E : E \cdot a &= a \cdot E = a \quad \ldots \text{単位元の存在} \\ \exists a^{-1} : a^{-1} \cdot a &= E \quad \ldots \text{逆元の存在} \end{aligned}$$

が成立するとき集合 $\mathbf{G}$ を 群 と呼ぶ．ここで

$$a \cdot b = b \cdot a$$

が成り立つとき，$\mathbf{G}$ を 可換群 と呼ぶ．
群の性質のうち結合則のみを満たすものを 半群 と呼ぶ．群の性質のうち結合則と単位元の存在を満たすものは 単位的半群（モノイド）と呼ぶ．
集合 $\mathbf{R}$ が演算子 “·” について単位的半群を形成し，もうひとつの演算子 “+” について可換群を形成し，なおかつ $a, b, c \in \mathbf{R}$ のとき次の分配法則

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c) \\ (a + b) \cdot c &= (a \cdot c) + (b \cdot c) \end{aligned}$$

が成り立つ場合，集合 $\mathbf{R}$ は 環 である．環は代数とも呼ばれる．
集合 $\mathbf{K}$ が演算 “·” と “+” に関して環でありかつ可換であり，さらに $\mathbf{K}$ から演算 “+” の単位元（演算 “·” の単位元とは異なるとする）を除いた集合の元全てに逆元が存在する場合，集合 $\mathbf{K}$ は 体 である．
本稿では体の元をもって数とする立場をとる．
■

1.4 直交行列と行列の内積（寄り道）

少し寄り道をする．もし正方行列 M の逆行列 M^{-1} が

$$M^{-1} = M^{\mathrm{t}}$$

であるとき，行列 M は直交行列であるという．ここに M^{t} は M の転置行列である．直交行列は正則行列の中でもとりわけユニークな存在で，後で見るとおり回転はいつも直交行列で表すことができる．本稿のメインディッシュであるクォータニオンもまた，回転を表すから，直交行列とクォータニオンは似たもの同士である（直交行列は逆行列を求めやすいという利点もあり，ある行列が直交行列であることがわかると，それだけでありがたいのである）．

転置行列に関連する行列の性質として，行列 M が

$$M^{\mathrm{t}} = M$$

のとき行列 M を対称行列と呼び，

$$M^{\mathrm{t}} = -M$$

のとき行列 M を反対称行列と呼ぶ．

行列 M が直交行列であるとき，

$$|\det M| = 1$$

である．ただし $\det M$ は行列 M の行列式である．（証明は，行列式の性質

$$\det\left(A^{\mathrm{t}}\right) = \det A$$
$$\det(AB) = \det A \det B$$

より，

$$\begin{aligned}\det\left(M^{\mathrm{t}}M\right) &= \det\left(M^{\mathrm{t}}\right)\det M\\ &= \det M \det M\\ &= (\det M)^2\end{aligned}$$

であり，一方

$$\begin{aligned}\det\left(M^{\mathrm{t}}M\right) &= \det \mathbf{1}\\ &= 1\end{aligned}$$

であるから，

$$(\det M)^2 = 1$$

すなわち，

$$|\det M| = 1$$

である．証明終わり.）

行列式の絶対値ではなく

$$\det M = 1$$

のときは，行列 M を特殊直交行列と呼ぶ．例えば，行列 M が

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix};\ a^2+b^2=1;\ a, b \in \mathbb{R}$$

であるとき，行列 M は特殊直交行列である．

もし行列 M が反対称，すなわち

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix};\ a, b \in \mathbb{R} \tag{2}$$

の形をしているならば，逆行列 M^{-1} は

$$M^{-1} = \frac{M^{\mathrm{t}}}{\det M} \tag{3}$$

と求めることができる．このとき行列 M が式 (2) の形をしているので，

$$\det M = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(M^{\mathrm{t}}M\right)$$

である．ただし，$\mathrm{tr}M$ は行列 M のトレースである．

ところで，我々は行列のノルムをまだ定義していない．行列のノルムは比較的自由に定義できる量である．我々は後々都合がよいように，行列 M のノルム $\|M\|$ を次のように定義する．

$$\|M\| \equiv \sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(M^{\mathrm{t}}M\right)} \quad \ldots \textbf{定義}$$

行列のノルムを使うと，式 (3) は

$$M^{-1} = \frac{M^{\mathrm{t}}}{\|M\|^2}$$

となる．

ついでに行列の内積も定義しておこう．行列 A と行列 B の内積は $\langle A, B\rangle$ で表し，

$$\langle A, B\rangle \equiv \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(A^{\mathrm{t}}B\right) \quad \ldots\textbf{定義}$$

としておく．この関係を使うと，行列のノルムは

$$\|M\| \equiv \sqrt{\langle M, M\rangle}$$

とも書ける．内積 $\langle A, B\rangle = 0$ のとき，行列 A と行列 B は直交しているという．

寄り道終わり．

少しだけ深い話　一般に行列（に限らず）A のノルム $\|A\|$ は次の 4 条件を満たす非負の実数のことである．

条件 1:　$\|A\| \geq 0;\ \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
条件 2:　$\|aA\| = |a| \cdot \|A\|;\ a \in \mathbb{R}$
条件 3:　$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
条件 4:　$\|A + B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

ただし A と B は同じ型（例えば次元の等しい行列）であるとする．例えば，

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$$

なる $\|A\|$ もまた A のノルムである．ここで $\boldsymbol{x}$ は A と同じ型である必要はない．■

1.5　複素数と高次方程式

今度は線形ではない方程式を考えてみよう．非線形な方程式とは線形方程式以外のすべての方程式のことであるが，ここでは x の自然数乗が現れる方程式を考えてみる．例えば

$$x^2 - 9 = 0$$

である．この場合解は実数 $(x = 3)$ である．

ではこれならどうか．

$$x^2 + 9 = 0$$

答えは実数だけ考える場合，存在しない．しかし

$$\boldsymbol{i} \equiv \sqrt{-1} \quad \ldots\textbf{定義}$$

なる虚数単位 $\boldsymbol{i}$ を考えればちゃんと解が存在して，

$$x = \boldsymbol{i}3 \quad \text{および} \quad x = -\boldsymbol{i}3$$

である．虚数すなわち虚数単位の実数倍と，実数とを組み合わせてできる

$$z \equiv a + \boldsymbol{i}b;\ a, b \in \mathbb{R}$$

なる数 z は複素数と呼ばれる．

一般に

$$\sum_{i=0}^{n} a_{(i)} x^i = 0;\ a_{(i)} \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}$$

の形（ただし $\mathbb{N}$ は自然数全体の集合とする）をもつ方程式を高次方程式（または n 次方程式）と呼ぶ．ガウス (Gauss) によると高次方程式の解は複素数さえあればすべて表すことができる．このように，複素数は実数よりも根源的な数なのであるが，その重要さは後にみる「ガウス平面」でより顕著に現れる．

少しだけ深い話　高次方程式の解ではなくガウス平面こそ複素数の本質だと言う人は多いであろう．筆者も全く同意見なのであるが，ガウス平面を基本だとしてしまうと，じゃあもう 1 軸追加して 3 元超複素数を作れないのはどうしてかという当然の疑問にぶつかってしまう．3 元超複素数を仮に作ったとしても，それは環をなさない．従って，(複素数こそが根源的な数であることを強調する意味もこめて）高次方程式から複素数を紹介した．もっとも，4 元超複素数は環を形成するように単位元を選ぶことができ，そのような組合せのうちのひとつがクォータニオンである．■

1.6 複素代数

便利な記号をひとつだけ発明しておこう．それは，

$$[\![a, b]\!] \equiv a + \boldsymbol{i}b;\ a, b \in \mathbb{R} \quad \ldots \textbf{定義}$$

という記号である．この記号を用いて複素数の代数規則をおさらいしておこう．いま複素数 $z_{(i)}$ が

$$z_{(i)} \equiv [\![a_{(i)}, b_{(i)}]\!]$$

であるとしよう．複素数同士の足し算，引き算は

$$z_{(1)} \pm z_{(2)} = [\![a_{(1)} \pm a_{(2)}, b_{(1)} \pm b_{(2)}]\!]$$

（複合同順）である．掛け算は $\boldsymbol{i}^2 = -1$ という性質から

$$z_{(1)}z_{(2)} = [\![a_{(1)}a_{(2)} - b_{(1)}b_{(2)}, a_{(1)}b_{(2)} + a_{(2)}b_{(1)}]\!]$$

が容易に導ける．

ところで，複素数 z が $z \equiv [\![a, b]\!]$ であるとき

$$z^* \equiv [\![a, -b]\!] \quad \ldots \textbf{定義}$$

なる複素数は z の 共役複素数 と呼ばれ，重要な役割を演じる．

複素数にも 複素数のノルム という量が定義されている．複素数 $z = [\![a, b]\!]$ のノルムは行列同様 $\|z\|$ と書き，

$$\|z\| \equiv \sqrt{a^2 + b^2} \quad \ldots \textbf{定義}$$

である．共役複素数を使うと，複素数のノルムは次のように簡単に求めることができる．

$$\|z\| = \sqrt{z^* z}$$

複素数のノルムは複素数のいわば「大きさ」のようなものを表す量である．ちなみに 実数のノルム は実数の絶対値と等しいと定義する．すなわち

$$\|x\| \equiv |x|; \quad \text{where } x \in \mathbb{R} \quad \ldots \textbf{定義}$$

である．

複素数 z の逆 z^{-1} は，

$$z^{-1}z \equiv 1 \quad \ldots \textbf{定義}$$

となるような複素数であるから，$\|z\| \neq 0$ のときにのみ存在し，

$$z^{-1} \equiv \frac{z^*}{\|z\|^2} \tag{4}$$

である．

複素数も実数や正則行列と同様，積，和が定義され，単位元（実数の 1 と 0）が存在し，逆元も定義可能であるので「数」である．このようにして，我々は

$$(\text{実数}) \to (\text{複素数})$$

という数の拡張も行ったわけである（さらに続けて連立非線形方程式と複素行列との関係を探りたくなるが，残念ながらこの両者に関連性はない）．

ところで，オイラー (Euler) の定理

$$\exp[\![0, \theta]\!] = [\![\cos\theta, \sin\theta]\!];\ \theta \in \mathbb{R}$$

は他のすべての公式を忘れても是非頭に入れておいてもらいたい．オイラーの定理は今後繰り返し顔を出すことになる．

> **少しだけ深い話** 連立非線形方程式と複素行列との間に関連はないのだが，線形微分方程式と可換群の線形代数方程式，非線形微分方程式と非可換群の線形代数方程式はそれぞれ密接な関連がある．非線形の微分方程式は一般には解けないが，ところどころ解ける方程式があり，数学研究の対象になっている．非可換の代数方程式も然り． ■

1.7 複素数と行列の指数関数

またも若干脇道にそれる．ただし今後議論を進めて行く上で重要な事柄なので，あえてここで指数関数に触れることにする．

実数 x の指数関数 $\exp x$ は

$$\begin{aligned}\exp x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}\end{aligned}$$

のように冪級数にマクローリン (Maclaurin) 展開できる（マクローリン展開とは大雑把に言って

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\phi^{(i)}(0)x^i}{i!}$$

のこと）．そこで，複素数の指数関数 $\exp z$ についても実数の場合と同様

$$\exp z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!} \quad \ldots \textbf{定義}$$

と定義する．行列の指数関数 $\exp M$ も同様に，

$$\exp M = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M^i}{i!} \quad \ldots \textbf{定義}$$

とする．ただし

$$M^0 \equiv \mathbf{1} \quad \ldots \textbf{定義}$$

とする．行列の指数関数は本稿でたびたび顔を出すことになる．

例えば行列 M が対角行列すなわち

$$M = \begin{bmatrix} m_{(1)} & 0 & \cdots \\ 0 & m_{(2)} & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

の形をしているとき，

$$M^i = \begin{bmatrix} \left(m_{(1)}\right)^i & 0 & \cdots \\ 0 & \left(m_{(2)}\right)^i & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

であるので，

$$\begin{aligned}\exp M &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \begin{bmatrix} \left(m_{(1)}\right)^i & 0 & \cdots \\ 0 & \left(m_{(2)}\right)^i & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_i \left(m_{(1)}\right)^i / i! & 0 & \cdots \\ 0 & \sum_i \left(m_{(2)}\right)^i / i! & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \exp m_{(1)} & 0 & \cdots \\ 0 & \exp m_{(2)} & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix}\end{aligned}$$

となる．つまり，対角行列の指数関数は対角成分の指数関数で表される．本稿ではこの性質を後に 3 次元回転の指数関数表示に用いる．

少しだけ深い話　複素数 z の共役複素数を表す記号としては

$$\bar{z} \equiv (z \text{ の共役複素数})$$

の方が一般的である．しかし本稿では行列の転置記号なども含めて一様に変数名の右肩に記号をつけることにした．■

1.8　クォータニオン代数の初歩

ここでクォータニオンのさわりだけ見ておこう．クォータニオンはハミルトン (Hamilton) が発明（発見）した，複素数の自然な拡張である．記録によるとクォータニオンの発明は 1843 年 10 月 16 日だそうである．その後クォータニオンは長らく忘れられる運命にあるが，20 世紀に入りパウリ (Pauli) によって再発明される．クォータニオンがコンピュータグラフィックスへ応用されるのはさらに後のことである．

複素数は実数単位 1 と虚数単位 $\boldsymbol{i}$ の実数倍の和であり，ある複素数 z は 2 個の実数の組合せで

$$z = a + \boldsymbol{i}b;\ a, b \in \mathbb{R}$$

と書けた．クォータニオン q は 4 個の実数の組合せで

$$q = s + \mathsf{I}t + \mathsf{J}u + \mathsf{K}v;\ s, t, u, v \in \mathbb{R}$$

と書ける「数」である．I, J, K はクォータニオン単位であり，

$$\mathsf{IJK} = \mathsf{I}^2 = \mathsf{J}^2 = \mathsf{K}^2 = -1$$
$$\mathsf{IJ} = -\mathsf{JI} = \mathsf{K}$$
$$\mathsf{JK} = -\mathsf{KJ} = \mathsf{I}$$
$$\mathsf{KI} = -\mathsf{IK} = \mathsf{J}$$

の性質を持つと定義する（掛け算が非可換であることに注意しよう）．

クォータニオン単位の性質から，クォータニオンの足し算と引き算は複素数と同様，

$$q_{(1)} \pm q_{(2)} = \left(s_{(1)} \pm s_{(2)}\right) + \mathsf{I}\left(t_{(1)} \pm t_{(2)}\right) + \mathsf{J}\left(u_{(1)} \pm u_{(2)}\right) + \mathsf{K}\left(v_{(1)} \pm v_{(2)}\right)$$

となる．一方クォータニオンの掛け算の結果もクォータニオンで，

$$q_{(1)}q_{(2)} = s' + \mathsf{I}t' + \mathsf{J}u' + \mathsf{K}v'$$

ただし

$$s' = s_{(1)}s_{(2)} - t_{(1)}t_{(2)} - u_{(1)}u_{(2)} - v_{(1)}v_{(2)}$$
$$t' = s_{(1)}t_{(2)} + t_{(1)}s_{(2)} + u_{(1)}v_{(2)} - v_{(1)}u_{(2)}$$
$$u' = s_{(1)}u_{(2)} - t_{(1)}v_{(2)} + u_{(1)}s_{(2)} + v_{(1)}t_{(2)}$$
$$v' = s_{(1)}v_{(2)} + t_{(1)}u_{(2)} - u_{(1)}t_{(2)} + v_{(1)}s_{(2)}$$

とともかく計算できる（計算結果よりも計算できるという事実の方が重要である）．また，今は信じてもらうしかないが，クォータニオンには逆クォータニオンが存在する．

$$\exists q^{-1} : q^{-1}q = 1 \quad \text{iff} \quad q \neq 0$$

というわけで，積，和，単位元，逆元がそろったので，クォータニオンは「数」なのである．

複素数は高次方程式の解に表れるので考える意味があったが，いまのところクォータニオンはただの数遊びである．ハミルトンはクォータニオンの虚数成分が 3 次元 ユークリッド (Euclid) 空間 の位置を表すことを知っていたようであるが，我々はもう少しゆっくりと先へ進もう．

少しだけ深い話 クォータニオンがどのくらい自然な虚数の拡張かと言うと，クォータニオン単位 I, J, K に対してオイラーの定理

$$\exp(\mathsf{X}\theta) = \cos\theta + \mathsf{X}\sin\theta;\ \mathsf{X} \in \{\mathsf{I}, \mathsf{J}, \mathsf{K}\}$$

が成り立つぐらい自然である．実は複素数の拡張は *hyper complex* （超複素数）と呼ばれ複数あり，クォータニオンはそのうちのひとつである．他の *hyper complex* には オクタニオン（ケイリー (Cayley) 数）や *the hyper complex*（狭義超複素数）がある．オクタニオンはその名のとおり 8 元数で，

$$q_{\mathrm{oct}} = s + \mathsf{I}_1 t + \mathsf{I}_2 u + \mathsf{I}_3 v + \mathsf{I}_4 w + \mathsf{I}_5 x + \mathsf{I}_6 y + \mathsf{I}_7 z$$

と書ける数である．ただし，オクタニオン単位の組み合わせ $(\mathsf{I}_1, \mathsf{I}_2, \mathsf{I}_3)$，$(\mathsf{I}_2, \mathsf{I}_3, \mathsf{I}_5)$，$(\mathsf{I}_3, \mathsf{I}_4, \mathsf{I}_6)$，$(\mathsf{I}_4, \mathsf{I}_5, \mathsf{I}_7)$，$(\mathsf{I}_5, \mathsf{I}_6, \mathsf{I}_1)$，$(\mathsf{I}_6, \mathsf{I}_7, \mathsf{I}_2)$，$(\mathsf{I}_7, \mathsf{I}_1, \mathsf{I}_3)$ はそれぞれクォータニオン単位の組み合わせ (I, J, K) と同じように振舞う．もうひとつの *the hyper complex* の説明は第 7 章にする． ■

1.9 余談：複素数の行列表示

ところで，複素数は実数のみからなる行列，すなわち 実行列 でも表すこともできる．まず

$$\boldsymbol{I}^2 = -\mathbf{1}$$

となる行列 $\boldsymbol{I}$ を考える．我々は行列 $\boldsymbol{I}$ として，次の定義を用いる．

$$\boldsymbol{I} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots \textbf{定義} \tag{5}$$

次の行列

$$[\![a, b]\!]_M \equiv \mathbf{1}a + \boldsymbol{I}b;\ a, b \in \mathbb{R} \quad \ldots \textbf{定義}$$

を考える．我々は普通実数単位 1 を省略するので，それにならって単位行列 $\mathbf{1}$ も省略してしまおう．

$$[\![a, b]\!]_M \equiv a + \boldsymbol{I}b;\ a, b \in \mathbb{R}$$

単位行列が省略されていることは，式の次元を調べればすぐにわかるので問題ない．

さて，行列 $[\![a, b]\!]_M$ の演算規則（つまり線形代数）は複素数

$$[\![a, b]\!] = a + \boldsymbol{i}b$$

と全く同じ演算規則となる．そこで $[\![a, b]\!]_M$ と $[\![a, b]\!]$ は同じものだと見ることもできる．$[\![a, b]\!]_M$ と $[\![a, b]\!]$ は代数規則が同一なので，オイラーの定理もそのまま成り立つ．行列 $\boldsymbol{I}$ の定義より

$$\boldsymbol{I}^{2i} = (-1)^i\mathbf{1};\ \boldsymbol{I}^{2i+1} = (-1)^i\boldsymbol{I};\ i \in \mathbb{N}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\exp(\boldsymbol{I}\theta) &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{I}\theta)^{2i}}{(2i)!} + \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{I}\theta)^{2i+1}}{(2i+1)!}\\ &= \mathbf{1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\theta^{2i}}{(2i)!} + \boldsymbol{I}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\theta^{2i+1}}{(2i+1)!}\\ &= \cos\theta + \boldsymbol{I}\sin\theta \qquad (6)\end{aligned}$$

となり（最後の式で単位行列 $\mathbf{1}$ を省略した），オイラーの定理が成り立つ（もちろん，三角関数のマクローリン展開

$$\cos\theta = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\theta^{2i}}{(2i)!};\ \sin\theta = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\theta^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

の関係を利用している）．

ところで，行列 $Z = [\![a, b]\!]_M$ は式 (2) [p.10] の形であるから，

$$Z^{-1} = \frac{Z^{\mathrm{t}}}{\|Z\|^2}$$

である．上式を式 (4) [p.12] と比べてみるとほのかに似ていることがわかる．特に，$z = [\![a, b]\!]$ および $Z = [\![a, b]\!]_M$ において，

$$z^* = [\![a, -b]\!];\ Z^{\mathrm{t}} = [\![a, -b]\!]_M$$

であるところが面白い．

少しだけ深い話　複素数が 2×2 実行列で表示できるのであれば，クォータニオンも行列表示できると思うだろう．まったくそのとおり，クォータニオンは 2×2 複素行列で表示できる．クォータニオン q は次のように分解できる．

$$\begin{aligned}q &= s + \mathsf{I}t + \mathsf{J}u + \mathsf{K}v\\ &= \begin{bmatrix}[\![s, v]\!] & [\![u, t]\!]\\ [\![-u, t]\!] & [\![s, -v]\!]\end{bmatrix}\end{aligned}$$

詳しいことは第 7 章を参照されたい．　■

✓この章のまとめ

1. 線形方程式とは

$$ax+b=0;\ a,b\in\mathbb{R}$$

のことであり，その解は

$$x=-a^{-1}b$$

である．ただし $\mathbb{R}$ は実数全体の集合である．

2. 連立線形方程式とは

$$\begin{cases} a_{(1,1)}x_{(1)}+a_{(1,2)}x_{(2)}+\cdots+b_{(1)}=0 \\ a_{(2,1)}x_{(1)}+a_{(2,2)}x_{(2)}+\cdots+b_{(2)}=0 \\ \vdots \end{cases}$$

のことであり，その解はまず

$$A=\begin{bmatrix} a_{(1,1)} & a_{(1,2)} & \cdots \\ a_{(2,1)} & a_{(2,2)} & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix};$$

$$B=\begin{bmatrix} b_{(1)} \\ b_{(2)} \\ \vdots \end{bmatrix};\ X=\begin{bmatrix} x_{(1)} \\ x_{(2)} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

とすると

$$AX+B=0$$

の形になるので，

$$X=-A^{-1}B$$

で求められる．X や A や B のことを行列と呼ぶ．

3. 行列のうち逆行列の存在する行列のことを正則行列と呼ぶ．正則行列は数の仲間である（ただし積は非可換であることに注意せねばならない）．

4. 高次方程式とは

$$\sum_{i=0}^{n} a_{(i)}x^i=0;\ a_{(i)}\in\mathbb{R};\ n\in\mathbb{N}$$

のことであり，一般解はない．解は一般に複素数であり，

$$x=[\![a,b]\!];\ a,b\in\mathbb{R}$$

のように実数 2 個で書くことができる．ただし

$$[\![a,b]\!]\equiv a+\boldsymbol{i}b;\ \boldsymbol{i}\equiv\sqrt{-1}$$

である．複素数も数の仲間である．

5. オイラーの定理：

$$\exp[\![0,\theta]\!]=[\![\cos\theta,\sin\theta]\!]$$

6. 数 Z が複素数であろうと行列であろうと，その指数関数 $\exp Z$ は

$$\exp Z=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{Z^i}{i!}$$

である．

7. 複素代数が実数 2 個の組み合わせに対する四則演算を与えたのに対し，クォータニオン代数は実数 4 個の組み合わせに対する四則演算を与える．クォータニオンもまた数の仲間である．

2　ベクトル

ベクトルはよく知られているとおりある種の向きと大きさをもつ「量」を表す手段である．量といってもいろいろあるが，ここでは物理量に限定しておこう．ベクトルはある種の物理量を表す手段である．では，ベクトルが表すのはどのような種類の物理量なのかという疑問がわいてくる．この章では

- **座標系**
- **内積**
- **スカラ**
- **ベクトル**
- **回転行列**

について見る．この章を読めば，ベクトルと回転とは何かが見えてくるはずである．

2.1　ベクトルの意味

ある物理量を計る（計量する）とは，モノサシと比較するということである．例えばあるリンゴの（最大の）直径は，そのリンゴに固有な量であるから，同じモノサシを使っている限り宇宙のどこで計っても同じであろう．このような量をスカラと呼ぶ．モノサシは座標系と呼ばれる．

次に図 1(a) [p.18] のように，あるリンゴを日本国内のある場所 A から場所 B に運ぶことを考えよう．場所 A から場所 B へはコンパス（方位磁針）を使って「北へ〇〇 [km]，東へ×× [km]」と指定することができるはずである．ところがある日，図 1(b) [p.18] のように地球の磁極が逆転して北極が N 極，南極が S 極になったと仮定しよう（太陽は「西」から昇ることになる）．そうすると場所 A から場所 B への行き方は「南へ〇〇 [km]，西へ×× [km]」と変わってしまう．変わってしまうが，変わり方はわかるはずである（北と南，東と西を入れ替えればよい）．このように，東西南北を回転させたら変わってしまうが，変わり方が一義に決まる量をベクトルと呼ぶ．

いま場所 A から場所 B へ向かうベクトルを $\boldsymbol{x}$ と書き表すとしよう．ベクトル $\boldsymbol{x}$ は「北へ〇〇 [km]，東へ×× [km]」であったから，たまたま行列風に次のように書ける．

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x^{北} \\ x^{東} \end{pmatrix};\ x^i \in \mathbb{R};\ i \in \{\,北, 東\,\}$$

しかし，ここで本質を見失ってはならない．大切なのは左辺の $\boldsymbol{x}$ なのであって，右辺は座標系のとり方によって変化してしまう，どちらかといえば，つまらない量である（「ベクトルは行列の一種である」という人もいるが，これは誤解を招きやすい．Java 言語用語で言えば，ベクトルという純粋仮想クラスに行列という実装クラスが対応する）．

生真面目な話をすると，座標系の回転に対して成

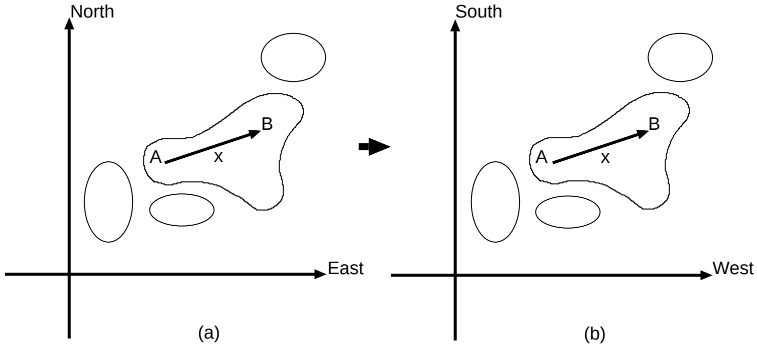


図 1: 座標系の取り替え

分が不変な量がスカラ，ある法則にしたがって成分が変化する量がベクトルである．わざわざ「成分が」と断ったのは，ベクトルそのものは座標系の回転に対しては不変（正しくは 共変 と言う）であるからである．

スカラがたまたま 1 個の実数で書き表すことができ，ベクトルがたまたま細長い行列で書き表すことができたわけだが，だからといって全ての実数がスカラであるわけではないし，全ての細長い行列がベクトルであるわけではないことに注意しよう．

ちなみにベクトルの長さはスカラである．ベクトルの長さは ベクトルのノルム と呼び，行列，複素数の場合と同様 $\|\boldsymbol{x}\|$ で表す．

少しだけ深い話 数学者は 線形変換 を受ける量をベクトルと呼ぶ．ある量 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が

$$P(a\boldsymbol{x}) = aP(\boldsymbol{x});\ a \in \mathbb{R}$$
$$P(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = P(\boldsymbol{x}) + P(\boldsymbol{y})$$

を満たすとき，かつそのときに限り，量 $\boldsymbol{x}$ と量 $\boldsymbol{y}$ はベクトルであり，変換 P は線形変換である．物理学的に見ればベクトルは テンソル の一種（実際 線テンソル ともいう）であるが，数学的に見ればテンソルはベクトルの一種であるとも言える．一方，計算機科学者は各々がメモリ上で同一サイズを占めるオブジェクトの 配列（ホモジニアスな配列）をもってベクトル（ベクタ）と呼ぶことが多い（例外として CPU に対するペリフェラルからのポインタ指定割り込みをベクタ割り込みと呼ぶ）．さらに生物学者は . . .
■

2.2 内積の意味

図 2 [p.19] のようなトロッコ列車を考えてもらいたい．いまレールが O 地点から A 地点に向かってまっすぐに引かれているとする．レールの上にトロッコがあって，紐で引っ張ることができるようになっている．ある人がトロッコを O 地点から A 地点まで引っ張っていくわけだが，なぜかこの人はトロッコをレールに沿ってまっすぐ引っ張らずに，B 地点に向かって $\boldsymbol{b}$ の力で引っ張ったとしよう．トロッコに加わる「正味の」力の量（実数）はいかほどか．

トロッコに加わる正味の力の分量は，ベクトル $\boldsymbol{b}$ をレールに投影したものであり，この投影こそが 内積 である．いま O から A へのベクトル $\boldsymbol{a}$ があり，なおかつベクトル $\boldsymbol{a}$ が 規格化 されている，すなわちノルムが 1 になっているとすると，トロッコに加わる正味の力の量 F は，

$$F = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$$

である．ここで $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を表す．もちろん，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ としておくと，

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \equiv \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\| \cos\theta \quad \ldots \textbf{定義} \tag{7}$$

である．なお θ が直角すなわち内積が 0 である場合，ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は 直交 していると言う．

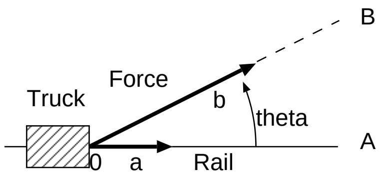


図 2: トロッコとレール

内積はまた面白い性格を持っている．式 (7) よりただちにわかることだが，あるベクトルの自分自身との内積はそのベクトルのノルムの自乗を表すのである．そこで，これからは自分自身との内積をもってベクトルのノルムを定義しておこう．

$$\|\boldsymbol{x}\| \equiv \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle} \quad \ldots \textbf{定義}$$

ところで，ベクトルとベクトルの内積は常にスカラである．(この証明はやさしいが，本稿では省略する．ただし，後にふたつの スピノール の内積がスカラであることは証明する．同じ論法がベクトルについても成り立つ．) そこで内積を スカラ積 とも言う．

以下余談．我々は内積を

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \quad \text{または} \quad \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}\rangle$$

で表すが（2 番目の記号は後述），内積ほど人によって違う記号を使う演算も珍しい．例えば次の例は全て内積記号として使われたことのある記号である．

$$(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$$

逆に，異なった数学分野では同じ記号を別な意味に再利用することが多々ある．もし読者が新しい数学を発明して，新しい数学記号を創造すれば数学史に足跡を残すことができるだろう．

少しだけ深い話　座標変換に対して成分が変化しない量をスカラ量，関数形が変化しない量を不変量と呼び区別する．■

2.3　座標系の意味

空間に原点 O があるとすると，すべての 位置 は原点を中心とする基本的な何本かのベクトル（北，東など）の線形和で表されることになる．この基本的なベクトルのことを 基底ベクトル と呼ぶ．基底ベクトルが何本必要かが，すなわち空間の次元である．例えば，図 3 [p.20] で $\boldsymbol{x}$ は 1 軸方向に x^1 行き，2 軸方向に x^2 行ったところ（つまり和をとったところ）に相当する．

ここで便利な記号を覚えておこう．第 1 の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_1$ で表す．同様に第 2 の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_2$ で表す．そうすると，ベクトル $\boldsymbol{x}$ は第 1 の方向へ $\|\boldsymbol{e}_1\|$ の x^1 倍，第 2 の方向へ $\|\boldsymbol{e}_2\|$ の x^2 倍であるから，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{e}_1 x^1 + \boldsymbol{e}_2 x^2 \\ &= \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{e}_i x^i\end{aligned}$$

である．上式をアインシュタイン (Einstein) は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i x^i$$

と表した．同じ添え字が 2 回以上登場した場合は，その添え字について和をとると約束するのである（これを「アインシュタインの規約」と言う）．和の範囲は「常識」で判断する．本稿でもアインシュタインにならって和記号を省略することにする．実数 x^i のことをベクトルの 反変成分 と呼ぶ（理由は後述）．

いま，基底ベクトルを行列風に

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{8}$$

と記述することにしたとしよう（第 3 章で見るように，本来基底ベクトルは 線形独立（1 次独立）であ

れば何でもよい）．ここで $\left(\vdots\right)$ を行列だと思えば，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}x^1 + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}x^2\\ &= \begin{pmatrix}x^1\\x^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

である．式 (8) [p.19] のように基底をとると，

$$\|\boldsymbol{e}_1\| = \|\boldsymbol{e}_2\| = 1 \text{ and } \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\rangle = 0$$

となるので，基底ベクトルが規格化されており，各基底ベクトルが直交しているから，この場合 $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ の組を 正規直交基底 と呼ぶ．正規直交基底で決められる座標系を 正規直交座標系 と呼ぶ．正規直交座標系で定められた空間を ユークリッド空間 と言う．

歴史的な理由および線形代数との一貫性保持のため，ベクトルの反変成分は常に 縦 に並べて書き，その成分番号は 上付き添え字 として書く．

少しだけ深い話 第 3 章で触れるが，数学では縦に書くベクトル

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

と，横に書くベクトル

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

は，それぞれ違う量（正しくは同じ量の違う側面）を表していると約束するのである．縦に書くベクトルは ケットベクトル の具象であり，その成分は 反変成分 と呼ばれ，横に書くベクトルは ブラベクトル の具象であり，その成分は反変成分に対して 共変成分 と呼ばれる．（ある空間内の位置についてブラとケットの両方が定義できれば同時に内積が定義できる．内積が定義できる空間は 内積空間 と呼ぶ.）ベクトルの反変成分の添字は上付きにし，共変成分の添字は下付きにする．

ところで，論文などで印刷スペースを節約するためにケットベクトルを便宜上

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$$

と書くのは常套手段である．転置記号にもバリエーションがあり，

$${}^{\mathrm{T}}M,\ {}^{\mathrm{t}}M,\ M^{\mathrm{T}},\ M^{\mathrm{t}}$$

は全て転置記号である可能性がある． ■

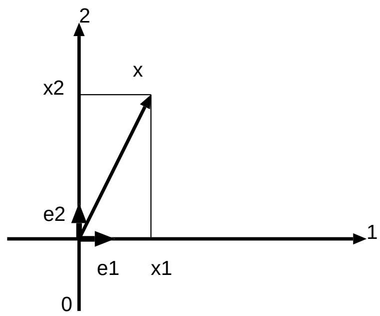


図 3: ベクトルと正規直交座標系

2.4 内積の計算方法

あるベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ の内積 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$ は，

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| \cos\theta$$

であったが，このままではベクトルの成分から直接計算できない．実は内積を計算するにはうまい方法があって，正規直交座標系ではピタゴラス (Pythagoras) の定理から，

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \sum_i x^i y^i$$

である．

いま，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x^1\\x^2\end{pmatrix};\ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}y^1\\y^2\end{pmatrix}$$

だとすると，ベクトル $\boldsymbol{x}$ を行列風に転置してみて

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix}x^1 & x^2\end{pmatrix}$$

を作ることができるだろう．そうすると，行列の演算規則（つまり線形代数）から

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y} = \sum_i x^i y^i$$

となって，

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y} \tag{9}$$

とベクトル代数の教科書でおなじみの式に到達する．第 3 章で見るが，式 (9) は厳密には正しくない．

少しだけ深い話　ベクトルの同じ成分の和こそ内積の定義だと言う人もいる．そのとおりである（添え字の等しい各成分の積の和は自然内積と呼ばれる）．しかし，内積は「ただベクトルの適当な成分を掛け合わせて足したもの」ではなく，トロッコ列車をひく人の例のように物理的に意味のあるものであることを示したかったのである．■

2.5　座標系の回転

ベクトルの本質は回転してもその性質を変えないことである（もちろん成分は変化するが，その変化の仕方はわかっている）．例えば，ニュートン (Newton) の運動方程式を考えてみよう．運動方程式は，

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{p} = \sum_i \boldsymbol{F}_{(i)}$$

であった．この式は「運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$ の時間微分は，加えられた力ベクトル $\boldsymbol{F}_{(i)}$ の総和に等しい」と読める．しかもそれ以上に，この方程式がベクトル方程式であることから，自動的に次の 2 点がわかるのである．

- 運動方程式は座標系の平行移動に対して不変である（実際には $\boldsymbol{p}$ の時間微分は位置の 2 階微分なので等速度運動系に対しても不変である）．
- 運動方程式は座標系の回転に対して共変（方程式は形を変えない）である．

この原理は発見者にちなんでガリレイ (Galilei) の相対性原理と呼ばれる．

座標系の回転とはどういうことであろうか．図 4 を見ながら考えてみよう．まず 1–2 座標系を原点まわりに θ 回転させた $1'$–$2'$ 座標系を考えてみる．1–2 座標系の基底ベクトルを

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

としておこう．1–2 座標系から見た $1'$–$2'$ 座標系の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}'_i$ で表すとする．

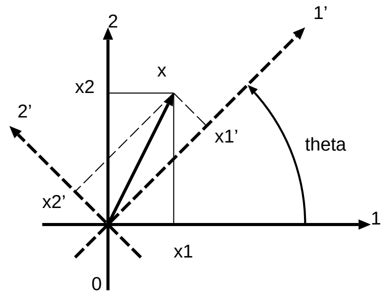


図 4: 座標系の回転

あるベクトル $\boldsymbol{x}$ は 1–2 座標系から見たら

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i x^i = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

であった．$1'$–$2'$ 座標系から見た場合は，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}'_i\,(x')^i = \begin{pmatrix} (x')^1 \\ (x')^2 \end{pmatrix}$$

と書けるであろう．この 2 式をつなぎ合わせると，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i x^i = \boldsymbol{e}'_i\,(x')^i$$

となる．そこで x^i と $(x')^i$ の関係を無理やり考えると

$$(x')^i = T^i_j(\theta) x^j;\ \boldsymbol{e}_j \equiv T^i_j(\theta)\boldsymbol{e}'_i \tag{10}$$

である．この $T^i_j(\theta)$ こそが回転行列なのである．なぜ「行列」という名がついているかはこの後述べる．ちなみに式 (10) で第 1 式と第 2 式のプライム記号の位置が逆になっているので，x^i を $\boldsymbol{x}$ の反変成分と呼ぶのである．

少しだけ深い話　T の添え字が上下になっている理由は省略するが，一言で言えば T 自身が回転に対しては共変でなければならないという理由による．第 3 章で見るブラケット記号を使うと，回転行列の各成分は

$$\langle j \mid T \mid i \rangle$$

と書けることを指摘しておく．■

2.6 回転行列

ここで別な角度から，ベクトルを回転したときにおこる成分の変化の規則を調べることで，先ほど登場した $T^i_j(\theta)$ の成分について調べてみよう．座標系を原点まわりに θ 回転させたとき，ベクトル $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x}'$ に見えたとすると，

$$\begin{cases} (x')^1 = \cos(\theta)x^1 + \sin(\theta)x^2 \\ (x')^2 = -\sin(\theta)x^1 + \cos(\theta)x^2 \end{cases}$$

である（図 4 [p.21] をよく見れば上式は容易に導ける）．線形代数の表記法を借りれば，

$$\begin{bmatrix} (x')^1 \\ (x')^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

である．記号を置き換えて，

$$X' = T(\theta)X \tag{11}$$

としておく．ただし，

$$X = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix};\ X' = \begin{bmatrix} (x')^1 \\ (x')^2 \end{bmatrix};$$
$$T(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

である．式 (11) は，

$$(x')^i = T^i_j(\theta)x^j$$

とそっくりではないか．実際

$$X = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix};\ X' = \begin{bmatrix} (x')^1 \\ (x')^2 \end{bmatrix}$$

はただの行列ではなく，基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_i$ と定めた場合のベクトルの成分を成分とする行列である（つまりベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{x}'$ である）．であるので，やはり特別な括弧でくくり，

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x};\ X' = \begin{pmatrix} (x')^1 \\ (x')^2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}'$$

とするべきである．であれば，行列 $T(\theta)$ も何か特別なものであるはずである（実際，回転行列である）．そこで

$$T(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とやはり特別な括弧でくくっておく．ベクトル解析の教科書では回転行列の特別扱いはここで終わることが多い．つまり，ベクトルも回転行列も同じように特別な行列であるのに，ベクトルはベクトルと呼び，回転行列はただ行列に「回転」をつけるだけである．

回転行列によって $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x}'$ に <u>変換</u> されることを <u>回転変換</u> という．回転行列は特殊直交行列である．（自明ではあるが，証明するには

$$T^{\mathrm{t}}(\theta) = T^{-1}(\theta)$$

かつ

$$\det T = 1$$

であることを確認すればよい．第 1 式は

$$T(-\theta) = T^{-1}(\theta)$$

の関係を利用すると容易に導ける．第 2 式は行列式を展開すればすぐに導ける.）後で見るように回転行列は複素空間を用いればベクトルと同格なのであり，その深淵にクォータニオンは宿るのである．

せっかくここまできたので，回転行列を指数関数で表示してみよう．ここでもやはり，

$$[\![a, b]\!]_M \equiv a + \boldsymbol{I}b;\ \boldsymbol{I} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

としておくと（a には単位行列 $\mathbf{1}$ が掛かっているが省略してある），式 (6) [p.15] より

$$\begin{aligned} \exp[\![0, \theta]\!]_M &= \cos\theta + \boldsymbol{I}\sin\theta \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

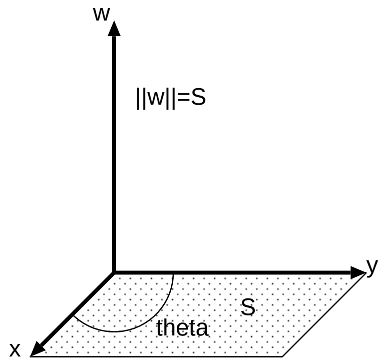


図 5: ベクトル積

なので，

$$T(\theta) = \exp[\![0, \theta]\!]_M \tag{12}$$

とも書けるのである．

回転行列の指数関数表示は今後も繰り返し現れるので，じっくり味わってもらいたい．

少しだけ深い話　アフィン変換を見かけ上線形化する同次座標系という体系がある．これは

$$P_A : \boldsymbol{x} \to M\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$$

のかわりに

$$P_A : \hat{\boldsymbol{x}} \to A\hat{\boldsymbol{x}}$$

ただし，

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix};\ A = \begin{pmatrix} M & \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{O} & 1 \end{pmatrix};\ \boldsymbol{O} = (0 \quad \ldots)$$

とする体系である．この場合，3 次元のベクトル $\hat{\boldsymbol{x}}$ はたまたま 4 個の実数成分から成るが，$\hat{\boldsymbol{x}}$ はクォータニオンではない．同次座標系はコンピュータグラフィックスではしばしば用いられる．■

2.7　余談：ベクトル積とテンソル積

内積（スカラ積）はベクトル同士の積の一種であるが，ベクトル同士の積には他にここで定義するベクトル積 と テンソル積 がある（ベクトル積とテンソル積はそれぞれ 外積 と 直積 と呼ぶこともあるが，外積と直積はそれぞれより広い概念を指す）．

残念ながらベクトル積はそれほど「正統な」数学ではない．これから 3 次元ベクトルのベクトル積を説明するが，この説明は一般に n 次元 ($n \in \mathbb{N}$) では成り立たない（成り立つのは 3 次元の場合だけである）.「本物のベクトル積」すなわち広義の外積はグラスマン (Grassmann) 代数（外積代数）によって初めて定義されるが，本稿では触れない．ただし生い立ちをグラスマン代数に認める フォーム については第 3 章および付録で触れる．

3 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ と 3 次元ベクトル $\boldsymbol{y}$ のベクトル積 $\boldsymbol{w}$ は

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$$

と書き，その結果はまた 3 次元ベクトルである．ベクトル積 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ およびベクトル $\boldsymbol{y}$ に直交し，そのノルムがベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ が張る平行四辺形の面積 S に等しいベクトルと定義する（図 5 参照）．ここで面積 S は

$$S = \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| \sin\theta;\ \theta \equiv (\boldsymbol{x} \text{ と } \boldsymbol{y} \text{ のなす角})$$

である．ベクトル積 $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ の成分は,

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x^2y^3 - x^3y^2 \\ x^3y^1 - x^1y^3 \\ x^1y^2 - x^2y^1 \end{pmatrix}$$

であり，行列式を使って，

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} \equiv \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix}$$

と書くこともできる．

ベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ のテンソル積は

$$\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}$$

と書き，その結果はふたつの添字を持つ量（2 階テンソル）になる．

$$(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y})^{ij} \equiv x^i y^j \quad \ldots \textbf{定義}$$

これ以上の説明は第 8 章を参照されたい．

少しだけ深い話 ベクトル積（狭義の外積）は初等物理学からフォーム（詳しくは付録を参照）を追い出すよい方法であるが，他に次のような方法もある．例えば，回転運動している粒子の角速度 $\boldsymbol{\omega}$ は

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}$$

であるが，上式の右辺は 2 階反対称テンソル Ω^i_j でもって

$$\frac{d}{dt}x^i = \Omega^i_j x^j$$

と書き直す．ただし

$$\begin{bmatrix} \Omega^1_1 & \Omega^1_2 & \Omega^1_3 \\ \Omega^2_1 & \Omega^2_2 & \Omega^2_3 \\ \Omega^3_1 & \Omega^3_2 & \Omega^3_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{bmatrix}$$

であって，このように成分が 2 階反対称テンソルで表されるベクトルを 軸性ベクトル または 面テンソル と呼び，成分が 1 階テンソルで表されるベクトルを 極性ベクトル または 線テンソル と呼んで区別する（こともある）．運動が（特殊）相対論的である場合は，物理量はローレンツ変換を受けなければならないから（3 次元の）ベクトル積はそもそも役にたたないが，特殊相対論でも面テンソル（ファラデーテンソルなど）はそのまま利用でき,（3 次元の）ベクトル積と同じように働く．物理学者は線テンソル，面テンソルの定義に，フォームが発明される前から，フォームの概念を埋め込んでいた．■

✓この章のまとめ

1. ベクトルとは座標系の回転に対して共変な量のことである．ベクトル方程式は座標系を回転させてもその形を変えない．ベクトルは（いまのところ）数の性質を持たない．

2. スカラとは座標系の回転に対して不変な量のことである．スカラは 1 個の実数で書くことができる 1 成分量であり，数の性質を全て持つ．

3. ベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ の内積とはベクトル $\boldsymbol{x}$ のベクトル $\boldsymbol{y}$ への投影であり，その結果はスカラである．ベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ の内積は，

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$$

と書く．正規直交座標系では（かつ正規直交座標系に限り）ベクトルの内積は

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_i x^i y^i$$

で求められる．

4. 座標系とは（いまのところ）基底ベクトルの組のことである．

5. 回転変換とは基底ベクトルを同じ方向に同じ角度だけいっぺんにまわすことであり，ある位置が回転後の座標系からどのように見えるかを表すパラメタが回転行列である．

6. 2 次元の回転行列 T は回転角を θ としたとき，

$$T(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

である．

7. ベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ のベクトル積とは，3 次元空間の場合，かつその場合に限り，

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} \equiv \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix}$$

である．ベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ のベクトル積 $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ は（3 次元空間の場合かつその場合に限り）3 次元のベクトルであり，ベクトル $\boldsymbol{x}$ およびベクトル $\boldsymbol{y}$ に直交し，そのノルムはベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ の張る平行四辺形の面積に等しい．

3 ブラとフォーム（寄り道）

この章では少し趣向を変えてそれぞれベクトルの一種である「ブラ」と「フォーム」についてふれる．これまでは正規直交座標系だけを考えてきたが，ブラを使うと正規でも直交でもない空間を扱えるようになる．またフォームはあらゆる積分と不可分な関係にある．この章では

- **斜交座標系**
- **計量テンソル**
- **ブラ**
- **積分とフォーム**

を見る．この章を読めば，ベクトルの成分の真の意味が見えてくるはずである．（この章は全くの寄り道である．この章では斜交座標系を扱うが，次の章以降では再び正規直交座標系に戻る．先を急ぐ読者はとばしてもらいたい．）

3.1 斜交座標系

これまでは，例えば図 6(a) [p.28] のような正規直交座標系（基底ベクトルが正規かつ直交する座標系）でのベクトルだけを考えてきた．しかし，例えば図 6(b) [p.28] のように

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

でもよいのである．これでも 2 次元の平面上の任意の点 $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 x^1 + \boldsymbol{e}_2 x^2$$

と書けるから，$\boldsymbol{e}_i$ は <u>完全</u> である（すなわち基底ベクトルである）．しかし，こうも勝手に座標系を変えられては内積

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} \boldsymbol{y} = \sum_i x^i y^i \ldots \text{間違い？}$$

が座標系ごとにかわってしまう．内積が変化するということは，ベクトルの長さ（ノルム）さえ座標系のとり方によって変わってしまうということである．つまり，我々は内積の計算方法を間違えていたのである．

図 6(b) [p.28] のように，まっすぐな（まがっていない）軸が斜めに交わっている座標系を <u>斜交座標系</u> と呼ぶ．斜交座標系ではもはや 1 軸と 2 軸が直交しないので，1 軸に直交する軸（1^* 軸とする）を仮に考え，これを「もうひとつの 2 軸」として $2^\star$ 軸とする．こうしておくと，1–2 軸が斜交座標系だとしても 1–$2^\star$ 座標系（または同様に考えた $1^\star$–2 座標系）は直交座標系である．

少しだけ深い話　そもそも座標系とは間違いなく場所を指定できて，近傍が連続で，かつ穴さえなければよいのである．この座標の一意性と連続性のみをぎりぎり満たしているのが一般座標系であり，座標軸は一般に「ぐにゃぐにゃ」の曲線となる．ところが，一般座標系でも微小な領域を考えると斜交座標系とみなすことができるのであって，これが斜交座標系を重視する理由となっている．■

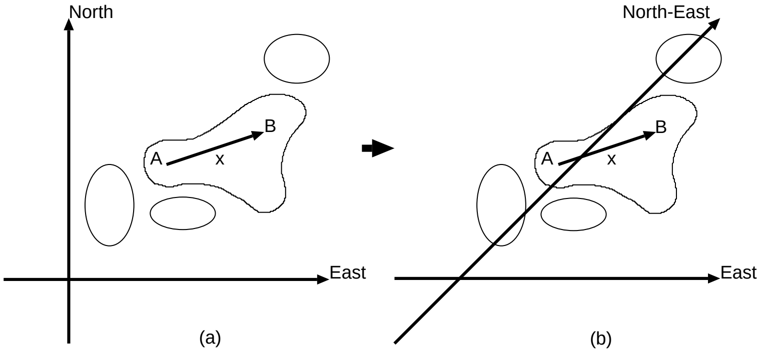


図 6: 直交座標系と斜交座標系

3.2 ブラ

ベクトル $\boldsymbol{x}$ が次の形をしていたとする．

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

（もちろん x^i は $\boldsymbol{x}$ を i 軸に投影したものである．）ここでベクトル $\boldsymbol{x}$ の転置（風）ベクトル

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \end{pmatrix}$$

のかわりに，$\boldsymbol{x}^\star$ を次のように定義したとする（添え字の上下に注意）．

$$\boldsymbol{x}^\star \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \quad \ldots \textbf{定義}$$

ここで x_i は $\boldsymbol{x}$ を $i^\star$ 軸に投影したものとする．このベクトルを転置したようなものは，ベクトルの一種であることには変わりないが，特別に ブラ（ブラベクトル）と呼ぶ．斜交座標系では

$$x_i \neq x^i$$

であり，係数 g_{ij} を用いた線形変換（1 次変換）で

$$x_i = g_{ij}x^j \quad \ldots \textbf{定義}$$

と書ける．ここに g_{ij} は空間の 基本テンソル または 計量テンソル と呼ばれる量である．計量テンソルは座標系に固有な量である．また，x_i をベクトル $\boldsymbol{x}$ の 共変成分 と呼ぶ．

正規直交座標系では

$$g_{ij} = \delta_{ij}$$

であり δ_{ij} は クロネッカ (Kronecker) のデルタ記号 であり，

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1; & \text{iff } i = j \\ 0; & \text{otherwise} \end{cases} \quad \ldots \textbf{定義}$$

である．早い話が，

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

であり，正規直交座標系では

$$x_i = x^i$$

が成立する．

ベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ の内積を，内積記号 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ で表すことは既に述べた．ベクトルの内積は正しくは次式で与えられる．

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \equiv x_i y^i \quad \ldots \textbf{定義}$$

ベクトル $\boldsymbol{x}$ の共変成分 x_i を使って $\boldsymbol{x}$ を定義しなおすこともできる．

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}^i x_i$$

ただし，

$$\boldsymbol{e}^i \equiv g^{ij}\boldsymbol{e}_j$$

であり，$\boldsymbol{e}^i$ の組は基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ の組に対して逆ベクトル系と呼ばれる．また g^{ij} はここでも計量テンソルである．

基底ベクトルとその逆ベクトル系が決まると（つまり計量テンソル g_{ij} が与えられると），ベクトルの反変成分，共変成分が正しく定義できる．ベクトルの反変成分は正しくは次のようなものである．

$$x^i \equiv \langle \boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{x} \rangle \quad \ldots \textbf{定義} \tag{13}$$

ベクトルの共変成分は

$$x_i \equiv \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{x} \rangle \quad \ldots \textbf{定義} \tag{14}$$

である（実は我々はまだ逆ベクトル系基底ベクトルのノルムを定義していないが，この説明は本稿では省略する）．基底ベクトルに直交基底を用いた場合，式 (13) および式 (14) は直交分解の式と呼ばれる．

ブラを使ってもう一度ノルムを定義しておくと，

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^\star \boldsymbol{x}}$$

であり，$\boldsymbol{x}^\star$ が $\boldsymbol{x}$ を転置して作ったものであることを思い出すと，線形代数の掛け算規則と一致する．また $\boldsymbol{x}^\star$ が $\boldsymbol{x}$ と双子の関係にあることを思い出すと，複素数のノルムの式ともよく似ている．

少しだけ深い話 g_{ij} は共変計量テンソルと呼ばれる．一方 g^{ij} は反変計量テンソルと呼ばれる．計量テンソルの正しい定義は任意の x-座標系と任意の x'-座標系の間で次のように与えられる．

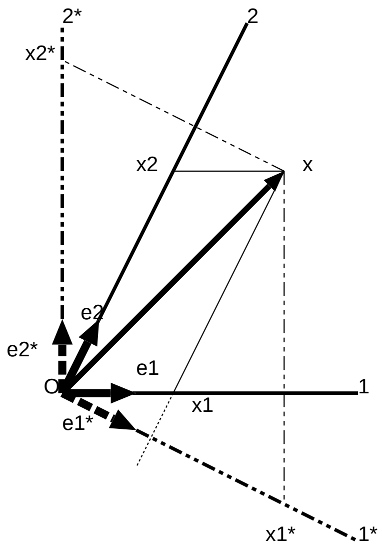
$$g_{ij} \equiv \frac{\partial (x')^k}{\partial x^i} \frac{\partial (x')^l}{\partial x^j} \eta_{kl}$$

$$g^{ij} \equiv \frac{\partial x^i}{\partial (x')^k} \frac{\partial x^j}{\partial (x')^l} \eta^{kl}$$

純粋な数学を考えるときは

$$\eta_{kl} \equiv \delta_{kl};\ \eta^{kl} \equiv \delta^{kl}$$

として何ら不都合はない．一方，物理学ではふつうこれとは異なった η が用いられる． ■



本文中の記号	図中の記号
$\boldsymbol{x}$	x
$1, 2, 1^\star, 2^\star$	1, 2, 1*, 2*
e_1, e_2	e1, e2
x^1, x^2, x_1, x_2	x1, x2, x1*, x2*

図 7: ブラの幾何学的解釈

3.3 ブラの幾何学的解釈

ベクトルの共変成分とは実際のところ何なのであろうか．ベクトルの反変成分とは，そのベクトルの位置を座標軸の上に平行投影したものである．

図 7 [p.29] の実線の部分を見てもらいたい．図中の 1–2 座標系がいま考える斜交座標系である．ベクトル $\boldsymbol{x}$ の反変成分は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i x^i$$

であるとしよう．

ここで図 7 [p.29] の破線の部分のように $\boldsymbol{e}^1$ を伸ばしたものを $1^\star$ 軸，$\boldsymbol{e}^2$ 軸を伸ばしたものを $2^\star$ 軸として，$1^\star$–$2^\star$ 座標系を仮に考える．ベクトル $\boldsymbol{x}$ の共変成分が

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}^i x_i$$

であることを思い出すと，$1^\star$ 軸は 2 軸に直交し，$2^\star$ 軸は 1 軸に直交することが理解できる．つまり，

$$\boldsymbol{e}^1 = (\boldsymbol{e}_2 \text{ に直交する基底ベクトル})$$
$$\boldsymbol{e}^2 = (\boldsymbol{e}_1 \text{ に直交する基底ベクトル})$$

であることがわかる．いま考えた $1^\star$–$2^\star$ 座標系こそが 1–2 座標系の逆ベクトル系である．あるベクトルを普段の座標系で表したのが $\boldsymbol{x}$ であって，逆ベクトル系で表したのが $\boldsymbol{x}^\star$ であった．つまり，当然のことながら基底が異なるだけで $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}^\star$ は同じ位置を指している．

ところでベクトルのノルムの自乗が

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = x_1 x^1 + x_2 x^2$$

であることは図 7 [p.29] から全く幾何的に証明できるが，余計なおしゃべりで読者のお楽しみをふいにしないでおこう．

少しだけ深い話 量子力学を知っている人ならば，ここで紹介したブラの定義は様子が違うと思うかもしれない．しかし，ベクトル代数の偉大なるトリックによって，ケットとベクトル，ブラと逆ベクトル系から見たベクトルは一対一に対応する．まず量子力学におけるブラとケットをおさらいしておこう．それは基底状態（基底ベクトルの組，我々の $\boldsymbol{e}_i$ とか $\boldsymbol{e}^i$ に対応する）をブラとケットで表すものであった．ある基底が $\boldsymbol{e}_i$ で与えられるとするとその基底は

$$|\, i\,\rangle = \boldsymbol{e}_i \text{ and } \langle\, j\,| = \boldsymbol{e}^j$$

と書ける．基底状態からある状態 $\boldsymbol{x}$ に遷移する確率振幅は

$$\langle\, \boldsymbol{x} \mid i\,\rangle$$

であった．ベクトル代数の（そしてそう呼びたければブラケット代数の）偉大なるトリックとは上の式から座標系（基底）のとり方によらない抽象的な性質を抜きだすことである．つまり，上の式から $\langle\, \boldsymbol{x}\,|$ だけを抜きだす．

$$\begin{aligned}\langle\, \boldsymbol{x}\,| &= \sum_i \langle\, \boldsymbol{x} \mid i\,\rangle\langle\, i\,| \\ &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}^i\rangle \boldsymbol{e}^i \\ &= x_i \boldsymbol{e}^i\end{aligned}$$

これがブラの正体である．

ブラとケットにはこの先がある．それは，ある状態 $\boldsymbol{x}$ から装置 M を通り抜けて別な状態 $\boldsymbol{y}$ に到達する確率振幅

$$\langle\, \boldsymbol{y} \mid M \mid \boldsymbol{x}\,\rangle$$

を考えたときに現れる．もちろん上式は

$$\langle\, \boldsymbol{y} \mid M \mid \boldsymbol{x}\,\rangle = \sum_{ij} \langle\, \boldsymbol{y} \mid j\,\rangle\langle\, j \mid M \mid i\,\rangle\langle\, i \mid \boldsymbol{x}\,\rangle$$

と展開できる（しかも実験と一致する！）から，

$$\langle\, j \mid M \mid i\,\rangle$$

だけを考えればよく，ブラの場合と同様 M だけを抜きだすことができる．この M はもちろん「演算子」であり，対応する概念はベクトル代数の中にはない（M を含む演算に対応する数学的概念はテンソル代数であるが，この類推はあまり生産的ではない）．

ところで，さきほど $\langle\, \boldsymbol{x} \mid i\,\rangle$ から $|\, i\,\rangle$ を取り去り $\langle\, \boldsymbol{x}\,|$ だけ抜きだしたが，さらに $\langle\, \boldsymbol{x}\,|$ も取り去ってしまうとどうなるだろう．

$$| = 1$$

冗談のようにも見えるが（おそらく数学的には冗談であろう），これも量子力学の一法則である．■

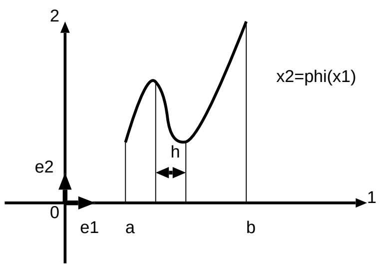


図 8: リーマン積分

3.4　フォーム

ごく普通の実数関数を考えてみよう．

$$y = \phi(x)$$

どうも変数名が気に入らないので，変数名をベクトル風にしてみる．

$$x \to x^1;\ y \to x^2$$

するとこうなる．

$$x^2 = \phi\left(x^1\right)$$

思い切ってベクトルにしてみる．

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \phi\left(x^1\right) \end{pmatrix}$$

ただし，元々の x 軸は 1 軸，元々の y 軸は 2 軸とする．

図 8 のように $x^2 = \phi\left(x^1\right)$ を $a \leq x^1 \leq b$ の範囲で積分し，面積 S を得るとする．x^2 は $\boldsymbol{x}$ の 2 軸への投影であるから，2 軸に沿った基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_2$ とすると，逆基底ベクトル $\boldsymbol{e}^2$ を使って

$$x^2 = \langle \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{x} \rangle$$

である．

ちょっと待った．初心に立ち返ってみると，そもそも「もうひとつの 2 軸」とは 1 軸に直交する座標軸すなわち 1^* 軸のことであった．そこで 1^* 軸の基底ベクトル（我々の $\boldsymbol{e}^2$ と同じもの）をここでは初心に戻ったつもりで

$$\boldsymbol{e}_1^* \equiv \boldsymbol{e}^2$$

と表そう．初心を忘れなければ，

$$x^2 = \langle \boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{x} \rangle$$

と書くこともできるわけである．

あとは x^1 を a から b まで徐々に（例えば h ずつ）変化させ，その都度 x^2 を拾い集めて合計すれば面積 S に近づく．いや，単純に合計しただけでは発散してしまう．何らかの規格因子が必要である．我々がふだん使う積分すなわち リーマン (Riemann) 積分 では h そのものを使う．つまり，

$$S \equiv h \sum_{x^1=a}^{b} x^2;\ h \to 0 \quad \ldots \textbf{定義}$$

として面積を求める．

後は一気に行く．

$$\begin{aligned} S &= \lim_{h\to 0} h \sum_a^b x^2 \\ &= \lim_{h\to 0} h \sum_a^b \langle \boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{x} \rangle \\ &= \lim_{h\to 0} \sum_a^b \langle h\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{x} \rangle \\ &= \int_a^b \langle \boldsymbol{dx}_1, \boldsymbol{x} \rangle \quad \left(\text{where } \boldsymbol{dx}_1 \equiv \lim_{h\to 0} h\boldsymbol{e}_1^*\right) \\ &= \int_a^b dx_1 x^2 \end{aligned}$$

この dx_1 は 1 軸の フォーム と呼ばれる．フォームのイメージを図 9 [p.32] に示す．ある座標軸に対して，直交する平面をぎっしり並べたものがフォームのイメージである．フォームはベクトルとよく似ているが，ベクトルとは違う性質を示す．そこでベクトルと区別するために $\boldsymbol{dx}$ という特別な記号を使う．

我々がブラと呼んできたものは，逆ベクトル系という意味あいにおいてはベクトルよりフォームとよく似ている．やはりブラには特別な記号（ディラック (Dirac) が発明した）があって，

$$\langle \boldsymbol{x} \mid \equiv \boldsymbol{x}^{\star}$$

と書く．ブラにはこれ以外の一般的な正しい呼び方はない（ブラはしばしば共変ベクトルとも呼ばれるが，厳密には誤りである）．ブラに対して，普段のベクトル $\boldsymbol{x}$ は ケット と呼び

$$\mid \boldsymbol{x} \rangle \equiv \boldsymbol{x}$$

で表す．回転行列 T による回転変換はこのケット記号を用いると

$$\mid \boldsymbol{x}' \rangle = T \mid \boldsymbol{x} \rangle$$

と書ける．

最後に，ベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ の内積は，ブラとケットを使うと ブラケット になる．

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y} \rangle$$

筆者が内積記号に $\langle \ldots \rangle$ を好むのはこういった事情による．

少しだけ深い話　実は dx だけでなく，一般に dx_i を基底とする「ベクトルのようなもの」

$$\phi_1 dx_1 + \phi_2 dx_2 + \cdots$$

をフォームと呼ぶ．実数 ϕ_i は座標値 $x_1, x_2, \ldots$ の関数であってかまわないが，座標系のとりかたによって不変でなければならない．フォームにはベクトルと違って正当な掛け算が定義されている．重積分，例えば

$$S = \iint \phi\,(x, y)\, dxdy$$

に登場する $dxdy$ は「本当は」ウェッジ積（広義の 外積 のこと）であり，正しくは

$$dx \wedge dy$$

と書く．ウェッジ積は非可換で，

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx$$

が成り立つ．これ以上の話は本稿の付録または文献 [14] などを参照されたい．フォームは日本語では 形式 と言う場合がある．■

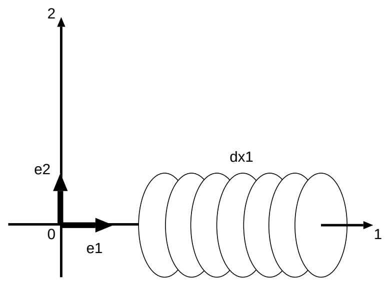


図 9: フォームのイメージ

3.5　余談：関数と内積

関数もまたベクトルの基底になることができる（これは 20 世紀の一大発見であろう）．例えば次のような関数の組を考えてみよう．

$$\boldsymbol{\phi}_1(t) = \cos t$$
$$\boldsymbol{\phi}_2(t) = \sin t$$

関数 $\boldsymbol{\phi}_1(t)$ と $\boldsymbol{\phi}_2(t)$ を基底としてベクトル $\boldsymbol{x}$ を作ってみる．

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}_1(t)x^1 + \boldsymbol{\phi}_2(t)x^2$$

ここで t は実数であれば何でもよい．関数 $\boldsymbol{\phi}_1(t)$ と $\boldsymbol{\phi}_2(t)$ が 線形独立 であることは，次のように確かめられる．

$$\boldsymbol{\phi}_i(t)x^i = 0 \Leftrightarrow x^1 = x^2 = 0$$

次はちょっと厄介だが，関数 $\boldsymbol{\phi}_1(t)$ と $\boldsymbol{\phi}_2(t)$ の直交性を調べる．一般に，関数 $\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \ldots, \boldsymbol{\phi}_n$ の区間 $[a, b]$ における直交性は

$$\int_a^b \boldsymbol{\phi}_i(t)\boldsymbol{\phi}_j{}^*(t)dt = c_i\delta_{ij};\ c_i \in \mathbb{R}$$

であることを調べねばならないが，実関数の場合にはもう少し手抜きな方法がある．それは，関数 $\boldsymbol{\phi}_1$ と関数 $\boldsymbol{\phi}_2$ の コンボリューション積 を求め，その実数部が 0 になることを確かめればよい．コンボリュー

ション積は $\boldsymbol{\phi}_1 * \boldsymbol{\phi}_2$ と書き，

$$\boldsymbol{\phi}_1(t) * \boldsymbol{\phi}_2(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\phi}_1(\tau)\boldsymbol{\phi}_2(t-\tau)d\tau \quad \ldots\textbf{定義}$$

と定義する．上式右辺の積分を 畳み込み積分 と呼ぶ．

フーリエ (Fourier) 変換を使うとコンボリューション積は楽に計算できる．フーリエ変換 $\mathcal{F}$ によって関数 $\phi(t)$ が関数 $\Phi(f)$ に変換される様子は，次のように定義できる．

$$\begin{aligned}\Phi(f) &\equiv \mathcal{F}\{\phi(t)\} \\ &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\exp[\![0, 2\pi ft]\!]dt \quad \ldots\textbf{定義}\end{aligned}$$

（ただし $[\![a, b]\!] \equiv a + \boldsymbol{i}b$ である．）ここで $\phi(t)$ のように関数の引数が t の世界を 時間領域 または 空間領域 と呼び，フーリエ変換後の $\Phi(f)$ のように関数の引数が f の世界を 周波数領域 と呼ぶ．

いま $\boldsymbol{\phi}_i(t)$ をフーリエ変換したものを $\boldsymbol{\Phi}_i(f)$ としよう．

$$\boldsymbol{\Phi}_i(f) \equiv \mathcal{F}\{\boldsymbol{\phi}_i(t)\}$$

フーリエ変換のすばらしさのひとつに，周波数領域ではコンボリューション積がただの積になることがあげられる．

$$\mathcal{F}\{\boldsymbol{\phi}_1(t) * \boldsymbol{\phi}_2(t)\} = \boldsymbol{\Phi}_1(f)\boldsymbol{\Phi}_2(f)$$

sin 関数，cos 関数についてそれぞれ出来合いのフーリエ変換表（表 1 [p.34]）からフーリエ変換を求めると，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\} &= \frac{1}{2}[\![\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0), 0]\!] \\ \mathcal{F}\{\sin(2\pi f_0 t)\} &= \frac{1}{2}[\![0, \delta(f+f_0) - \delta(f-f_0)]\!]\end{aligned}$$

である．関数 $\delta(f)$ は ディラックのデルタ関数 である（クロネッカのデルタ記号 δ_{ij} と間違えないように）．上式を用いると，

$$\boldsymbol{\Phi}_1(f)\boldsymbol{\Phi}_2(f) = -\frac{1}{4}[\![0, \delta^2(f+f_0) + \delta^2(f-f_0)]\!]$$

となり，

$$\mathfrak{Re}\{\boldsymbol{\Phi}_1(f)\boldsymbol{\Phi}_2(f)\} = 0$$

であることがわかる（記号 $\mathfrak{Re}$ は実数部を意味する）．

コンボリューション積の実数部が 0 であることは，フーリエ変換の性質からふたつの実関数が直交することを意味する．すなわち，関数 $\boldsymbol{\phi}_1(t)$ と関数 $\boldsymbol{\phi}_2(t)$ は直交する．信号処理の専門家はときどき

$$\langle \boldsymbol{\phi}_1(t), \boldsymbol{\phi}_2(t) \rangle \equiv \mathfrak{Re}\{\boldsymbol{\phi}_1(t) * \boldsymbol{\phi}_2(t)\}$$

と書くのであるが，その理由はもはやお分かりいただけよう．

少しだけ深い話　フーリエ変換は 積分変換 の一種である（積分変換とは

$$\mathcal{I}\{\phi(s)\} \equiv \int_a^b \phi(t)\kappa(t, s)dt$$

という $\mathcal{I}$ のこと）．フーリエ変換と並んでポピュラーな積分変換は ラプラス (Laplace) 変換 である．ラプラス変換 $\mathcal{L}$ は次のように定義される．

$$\begin{aligned}\Phi_L(s) &\equiv \mathcal{L}\{\phi(t)\} \\ &\equiv \int_0^{\infty} \phi(t)\exp(-st)dt \quad \ldots\textbf{定義}\end{aligned}$$

ここで s は複素変数である．ラプラス変換の面白みは関数 $\phi(t)$ の t による微分に現われる．

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\phi(t)\right\} = s\Phi_L(s) - \phi(0); \quad \text{where } \Phi_L(s) \equiv \mathcal{L}\{\phi(t)\}$$

ラプラス変換によって微分演算子 d/dt が 1 個の複素変数 s に置き換わるのである．■

表 1: フーリエ変換・ラプラス変換

$\phi(t)$	$\mathcal{F}\{\phi(t)\}(f)$	$\mathcal{L}\{\phi(t)\}(s)$
$\delta(t)$	1	1
1	$\delta(f)$	$1/s$
$\exp(at)$	—	$1/(s-a)$
$\cos(\omega t)$	$\left(\delta(f-\omega/2\pi)+\delta(f+\omega/2\pi)\right)/2$	$s/\left(s^2+\omega^2\right)$
$\sin(\omega t)$	$\boldsymbol{i}\left(\delta(f-\omega/2\pi)-\delta(f+\omega/2\pi)\right)/2$	$\omega/\left(s^2+\omega^2\right)$
d/dt	$\boldsymbol{i}2\pi f$	s

✓この章のまとめ

1. 一般に，座標系の各軸は直交でなくてもよい．一般に，基底ベクトルは規格化されていなくてもよい．

2. 斜交座標系の性質は計量テンソル g_{ij} で一義に決まる．したがって，座標系とは計量テンソルのことである．

3. 斜交座標系では，これまでのベクトルはケットと呼び
$$|\,\boldsymbol{x}\,\rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$
と書く．一方，逆ベクトル系から見たベクトルはブラと呼び
$$\langle\,\boldsymbol{x}\,| = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \end{pmatrix}$$
と書く．ブラとケットの成分はそれぞれ異なり，
$$x_i = g_{ij}x^j$$
の関係がある．ここに g_{ij} は計量テンソルである．

4. ベクトルの内積はブラケットである．
$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \langle\,\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{y}\,\rangle$$

5. 積分（リーマン積分）に登場する dx とはフォームであり，ブラと同じく一種の「逆」ベクトルである．

4 ガウス平面と 2 次元の回転

2 次元（平面）のベクトルは 2 個の実数成分で表すことができた．しかし，何も実数を 2 個使わなくとも複素数 1 個でも 2 次元のベクトルは表現できるのである．すなわち，

$$\boldsymbol{e}_1 = [\![1,0]\!];\ \boldsymbol{e}_2 = [\![0,1]\!]$$

としてしまうのである．このなんでもない置き換えが実は大きな意味を持っている．さしあたって言えることは 2 次元のベクトルは複素数を使うと「数」としての性質を持つようになることである．この章では

- **2 次元ベクトルの複素数表示**

に触れる．この章を読めば，ベクトルと複素数の密接な関係が見えてくるはずである．

4.1 ガウス平面

平面に正規直交座標系を設置したとする．1 軸を実軸，2 軸を虚軸と名づけて，それぞれ複素数の実数成分，虚数成分に対応させると，複素数は平面上の位置を表すようになる．これがガウス平面（複素平面）である．ガウス平面への移行は簡単で，これまでの

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

を

$$\boldsymbol{\xi} = [\![x^1, x^2]\!]$$

に置き換えるだけである（図 10 [p.36] 参照）．ただし，

$$[\![a,b]\!] \equiv a + \boldsymbol{i}b \quad \ldots\textbf{定義}$$

としている．

位置 $\boldsymbol{\xi} \equiv [\![x^1, x^2]\!]$ はそのままに，座標系を θ 回転させたとき，$\boldsymbol{\xi}$ が $\boldsymbol{\xi}'$ の位置に見えたとする．$\boldsymbol{\xi}'$ は

$$\boldsymbol{\xi}' = [\![(x')^1, (x')^2]\!]$$

とする．ベクトルだろうと複素数だろうと成分（実数）ごとの演算は同じであるから，

$$\begin{cases} (x')^1 = \cos(\theta)x^1 + \sin(\theta)x^2 \\ (x')^2 = -\sin(\theta)x^1 + \cos(\theta)x^2 \end{cases}$$

である．線形代数の記法を借りれば

$$\begin{bmatrix} (x')^1 \\ (x')^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

であるが，$\boldsymbol{i}^2 = -1$ の関係を使うと複素数表示独自のまとめ方ができて，

$$[\![(x')^1, (x')^2]\!] = [\![\cos\theta, \sin\theta]\!][\![x^1, x^2]\!]$$

と書き直すことができる．ここで

$$U(\theta) \equiv [\![\cos\theta, \sin\theta]\!] \quad \ldots\textbf{定義}$$

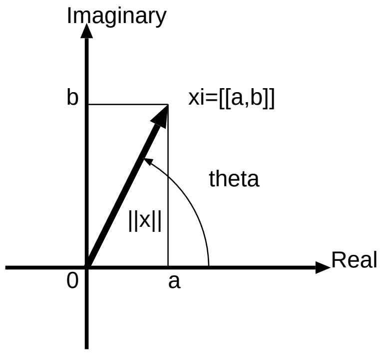


図 10: ガウス平面

とすると

$$\boldsymbol{\xi}' = U(\theta)\boldsymbol{\xi}$$

である．

回転するものとされるものがここに同格（同じ複素数）になったのである．

4.2 オイラーの定理と回転行列

オイラーの定理

$$\exp[\![0, \theta]\!] = [\![\cos\theta, \sin\theta]\!]$$

を使うと

$$U(\theta) = \exp[\![0, \theta]\!]$$

となり，式 (12) [p.23] とそっくりになる．ガウス平面の上では，複素数 $\boldsymbol{z}$ の時計回りの $\pi/2$ 回転は虚数単位 $\boldsymbol{i}$ を掛けることに相当する．この回転は実平面では

$$\begin{bmatrix} (x')^1 \\ (x')^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

であって，式 (5) [p.14] で定義した行列 $\boldsymbol{I}$ を用いると

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{I}\boldsymbol{x}$$

とやはり

$$\boldsymbol{i} \fallingdotseq \boldsymbol{I}$$

が対応していることを思い出させる．

4.3 余談：$SO(2) = U(1)$

この章で見てきたように，2 次元ベクトルも 2 次元回転行列も同じ複素数 1 個で表すことができる．これは群論で言うところの

$$SO(2) = U(1)$$

を覗き見たに過ぎない．$SO(2)$ とは 2 次元の（2×2 の）特殊 (Special) 直交 (Orthogonal) 行列で決められる回転変換全体の集合である．一方 $U(1)$ とは複素数 1 個すなわち 1×1 のユニタリ (Unitary) 行列によって決められる回転変換全体の集合である．これら両者の性質は一致する．ユニタリ行列は第 6 章で登場する．

✓この章のまとめ

1. 2 次元のベクトルは基底を

$$\boldsymbol{e}_1 = [\![1, 0]\!];\ \boldsymbol{e}_2 = [\![0, 1]\!]$$

とするとガウス平面上に描くことができる．

2. ガウス平面上では回転は

$$\boldsymbol{\xi}' = U(\theta)\boldsymbol{\xi}$$

である．ただし

$$\boldsymbol{\xi} = [\![x^1, x^2]\!]$$
$$U(\theta) = [\![\cos\theta, \sin\theta]\!]$$

である．

3. オイラーの定理より，回転行列は

$$U(\theta) = \exp[\![0, \theta]\!]$$

とも書ける．

5　オイラー角と 3 次元の回転

第 4 章では 2 次元の位置（ベクトル）と回転（行列）が同じように複素数を用いて表されることを見た．3 次元のベクトルと 3 次元の回転もまたある種の複素行列を使うと同格にになるのであるが，その下準備としてこれから 3 次元の回転と，回転にまつわる「生成子」という定数について見てみよう．この章では

- **ベクトルの 3 次元の回転**
- **3 次元回転の生成子**

を見る．この章を読めば，ともかくは 3 次元の回転というものが見えてくるはずである．

5.1　オイラー角

3 次元ベクトルを回転させる場合は，2 次元の場合と異なって「どういうふうに回すか」が重要になってくる．そこで，例えばまず 3 軸まわりに θ_1 回し，1 軸まわりに θ_2 回し，もう一度 3 軸まわりに θ_3 回す，などとする．この場合，$(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ を 3–1–3 オイラー角と呼ぶ．この他に，3–2–1 オイラー角（別名，ロール・ピッチ・ヨー）もよく用いられる．

3 軸まわりに θ 回転させる回転行列を $T_3(\theta)$ としよう（以下 i 軸まわりの回転行列を T_i で表す）．この場合，単純に 1–2 平面の回転を想像すればよく，

$$T_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

である．

同じように考えていくと，2 軸まわりの回転は，

$$T_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

である．1 軸まわりの回転は，

$$T_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

である．

あとは T_i を組み合わせれば任意の回転が表現できる．ただし，一般に 3 次元の回転行列は非可換である（すなわち，3 次元の回転は回転の順序に依存する）．行列 T_i は特殊直交行列である（θ の符号を入れ換えれば容易に確かめられる）．

実際のところ，最低限 3 軸まわりの任意の回転と 2 軸まわりの $\pi/2$ 回転だけで，全ての回転を表すことができる．というわけで，本稿ではほとんどいつも 3 軸まわりの回転だけを扱う．

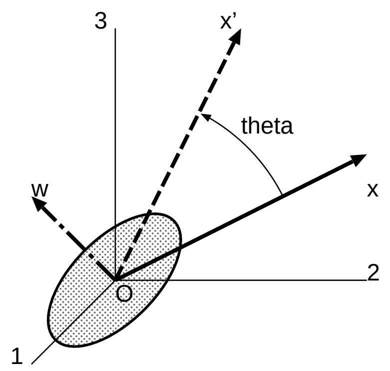


図 11: 角度ベクトルよる回転

少しだけ深い話 コンピュータグラフィックス応用を考えると，回転は座標系を座標軸まわりに行うより，任意の軸まわりに対象を回転させるほうが都合がよく，これがコンピュータグラフィックスからオイラー角が敬遠される理由のひとつであろう（回転をオイラー角で表すと「回転軸の回転」をフォローしにくい）. ■

5.2 角速度ベクトル（寄り道）

オイラー角は 3 個の実数の組み合わせであった．ではオイラー角はベクトルだろうか.

3 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ の回転を表すオイラー角の成分 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ は，ベクトル $\boldsymbol{x}$ が定義されている座標系を回転させるととんでもない（単純ではない）変化の仕方をする．なので，オイラー角はベクトルではない（ただしこれには例外があり，この章の後半に登場する）.

ところが世の中うまくしたもので，回転を表すベクトルもちゃんと存在するのである．物理学に登場する角速度ベクトルがそれである．角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は，あるベクトル $\boldsymbol{x}$ が回転によって Δt 秒後にベクトル $\boldsymbol{x}'$ になったとき,

$$\frac{\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}}{\Delta t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}$$

となるような量である．角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は物理的にはなかなか便利な量で，$\boldsymbol{\omega}$ の向きが回転軸を表し，ノルム $\|\boldsymbol{\omega}\|$ が単位時間あたりの回転角を表している.

我々はいま運動を考えているわけではないので,

$$\boldsymbol{\Theta} \equiv \boldsymbol{\omega} \Delta t$$

なる角度ベクトルを発明しよう．我々の角度ベクトルを使うと

$$\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Theta} \times \boldsymbol{x}$$

である．角速度ベクトルは名前のとおりベクトルであったから，角度ベクトルもベクトルで,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Theta} &= \boldsymbol{e}_i \Theta^i \\ &= \begin{pmatrix} \Theta^1 \\ \Theta^2 \\ \Theta^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と成分を持つ.

角度ベクトルから回転行列を作ることは可能であるが，普通はやらないし，少なくともコンピュータグラフィックスではほとんど使われていない.

5.3 回転行列の指数関数表示

2 次元の回転行列 $T_{\langle 2\mathrm{D} \rangle}(\theta)$ は行列 $\boldsymbol{I}$ を用いて

$$T_{\langle 2\mathrm{D} \rangle}(\theta) = \exp(\boldsymbol{I}\theta);\ \boldsymbol{I} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

と指数関数表示することができた．実は 3 次元の回転行列も行列定数 $\boldsymbol{J}_i$ を使って指数関数に書き直すことができる.

$$T_i(\theta) = \exp(\boldsymbol{J}_i \theta)$$

ここで

$$\boldsymbol{J}_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

...**定義**

である．(3 軸に関してのみ証明する．

$$(\boldsymbol{J}_3)^{2i} = (-1)^i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \ (\boldsymbol{J}_3)^{2i+1} = (-1)^i \boldsymbol{J}_3$$

より，

$$\begin{aligned} \exp(\boldsymbol{J}_3\theta) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\boldsymbol{J}_3\theta)^{2i}}{(2i)!} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\boldsymbol{J}_3\theta)^{2i+1}}{(2i+1)!} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \theta^{2i}}{(2i)!} \\ &\qquad + \boldsymbol{J}_3 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \theta^{2i+1}}{(2i+1)!} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos\theta \\ &\qquad + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sin\theta \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= T_3(\theta) \end{aligned}$$

証明終わり．)

$\boldsymbol{J}_i$ は 3 次元回転の 生成子 と呼ばれる．

少しだけ深い話 $\boldsymbol{J}_i$ は $SO(3)$ 群の基底ベクトルである．任意の 3 次元無限小回転は $\boldsymbol{J}_i$ の線形和で書ける． ■

5.4 微小回転の線形化

一般の 3 次元回転は非可換であったが，i 軸まわりにそれぞれ微小な角 $\Delta\theta_i$ ずつまわす場合は，可換どころか 線形化 できるのである．回転を線形化できる理由は，$\Delta\theta$ が微小量のとき $\Delta\theta$ の 2 次以上の項を無視すると，

$$\sin\Delta\theta \simeq \Delta\theta; \ \cos\Delta\theta \simeq 1; \ 1 \pm \Delta\theta^2 \simeq 1$$

といった 近似 が使えるからである．

i 軸まわりにそれぞれ微小な角 $\Delta\theta_i$ ずつまわしたのだから，このときの回転行列を T_Δ とすると

$$\begin{aligned} T_\Delta &\equiv T_3(\Delta\theta_3)\, T_2(\Delta\theta_2)\, T_1(\Delta\theta_1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \Delta\theta_3 & -\Delta\theta_2 \\ -\Delta\theta_3 & 1 & \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 & -\Delta\theta_1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

すなわち

$$T_\Delta = \boldsymbol{1} + \delta\boldsymbol{T}; \ \delta\boldsymbol{T} \equiv \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{J}_i \Delta\theta_i \qquad (16)$$

と書ける．さっそく生成子 $\boldsymbol{J}_i$ がこんなところにも顔を出して面白い（面白いどころか，生成子によって微小回転が表されることこそが リー (Lie) 代数 と呼ばれる数学の一分野の基礎なのである）．

少しだけ深い話 テイラー (Taylor) 展開 すなわち

$$\phi(x+h) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h^i \phi^{(i)}(x)}{i!}$$

を使うと，近似式を得られることが多い．特に $|h| \ll 1$ で 1 次までの展開

$$\phi(x+h) \simeq \phi(x) + h\frac{d}{dx}\phi(x)$$

は 1 次近似と呼ばれ，よく用いられる． ■

表 2: 回転行列

次元	特殊直交行列	複素数
2	$T(\theta) = \exp(\boldsymbol{I}\theta)$	$U(\theta) = \exp(\boldsymbol{i}\theta)$
3	$T_i(\theta) = \exp(\boldsymbol{J}_i\theta)$	**?**

5.5 オイラー角ベクトル

オイラー角はベクトルではないと書いたが，ある奇妙な基底ベクトルを使うとオイラー角はベクトルとなる．その基底ベクトルについては第 6 章で述べる．今はただ，その基底ベクトルを $\boldsymbol{\varsigma}^i$ としておこう．

i 軸まわりの回転角を θ_i と書く．そうすると，オイラー角ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ は

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\varsigma}^i \theta_i$$

と書ける．今はまだこれだけである．ひとつ種明かしをしておくと，$\boldsymbol{\varsigma}^i$ は行列である．

少しだけ深い話 「オイラー角ベクトル」は一般的な用語ではない．英語では オイラーパラメタ がここで言うオイラー角ベクトルを指す場合がある． ■

5.6 余談：今後の予想

これまで三度（みたび），回転行列が指数関数で表示できたわけである．それらを表 2 にまとめておいた．2 次元の位置（ベクトル）と回転（行列）をそれぞれ複素数で表示することは，位置と回転が字面上同じ形式で書けるという利点があった．3 次元の位置（ベクトル）と回転（行列）が同じ形式の複素数っぽい「数」で表示できれば，やはり嬉しいと思う．表 2 を見ると，3 次元の場合の複素数表示がまだ空いている．ならば，ガウス平面の 3 次元版に

$$U_i(\theta) = \exp(\boldsymbol{\Sigma}_i\theta) \ldots \text{予想}$$

のような形式があればいいと思うであろう．結論を先に言えば，この形式は存在する．そして，さきほど登場した行列 $\boldsymbol{\varsigma}^i$ とこの未知の虚数単位 $\boldsymbol{\Sigma}_i$ はだいたい同じものである．(実のところ，

$$\boldsymbol{\Sigma}_i = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varsigma}^i$$

である.）

ではこの $\boldsymbol{\varsigma}^i$ は一体何なのか，というのが第 6 章のトピックである．我々はただ数学遊びをしているだけではない．我々はいま確実にクォータニオンの影をとらえている．クォータニオンは，いまはまだ実態を明かしていない $\boldsymbol{\varsigma}^i$ を使うと

$$q = \mathbf{1}s + \boldsymbol{\varsigma}^1 t + \boldsymbol{\varsigma}^2 u + \boldsymbol{\varsigma}^3 v;\ s, t, u, v \in \mathbb{R}$$

と書けることをここでは指摘しておく．

少しだけ深い話 $\boldsymbol{\Sigma}_i$ は $SU(2)$ 群の基底ベクトルである．任意の 3 次元無限小回転は $\boldsymbol{\Sigma}_i$ の線形和でも書ける． ■

✓この章のまとめ

1. 3 次元の回転はふつうオイラー角で表す．オイラー角とは「i 軸まわりに θ_i まわす」を 3 回繰り返したものである．3 次元の回転行列は

$$T_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$T_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$T_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるので，例えば 3–1–3 オイラー角が与えられると，回転は

$$T = T_3 T_1 T_3$$

と計算できる．

2. オイラー角の組は一般にベクトルではない．

3. 3 次元の回転行列は（3 次元回転の）生成子 $\boldsymbol{J}_i$ の指数関数で表すことができる．

$$T_i(\theta) = \exp(\boldsymbol{J}_i \theta)$$

ただし，

$$\boldsymbol{J}_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．

6 複素行列

いよいよ物語は核心に近づいてきた．表 2 [p.42] で見たように，2 次元の特殊直交変換（つまり回転変換）は 1 個の複素数で表すことができた．2 次元のベクトルもまた 1 個の複素数で表すことができた．では 3 次元の特殊直交変換とベクトルはやはり 1 個の「超複素数」（クォータニオン？）で表すことができるであろうか．答えを言ってしまうと，3 次元の特殊直交変換（とベクトル）は 1 個の複素行列で表すことができる．そして，複素行列とクォータニオンは極めて近い関係にある．この章では

- **エルミート行列の性質**
- **ユニタリ行列の性質**
- **パウリ行列**
- **3 次元ベクトルのエルミート行列表示と回転**

を見る．この章を読めば，複素行列を使った少し濃いめの 3 次元回転が見えてくるはずである．

6.1 エルミート行列

ある複素行列（複素数成分を持つ行列）H の各成分について共役複素数と置き換え，かつ転置したものを共役転置 または エルミート (Hermtie) 共役 と呼び $H^\dagger$ で表す．

ある行列のエルミート共役が元の行列と等しいものを エルミート行列 と呼ぶ．つまり，

$$H^\dagger = H$$

のとき行列 H はエルミート行列である．また，行列 H が

$$H^\dagger = -H$$

のとき，行列 H を 反エルミート行列 と呼ぶ．

少しだけ深い話 複素行列も第 1 章で紹介した複素数の行列表示と同等の方法を使えば実行列で表すことができる．例えば 2×2 複素行列は 4×4 実行列でも表すことができる．計算機の中には 4×4 実行列の掛け算，足し算を高速に演算できるものがあるが，特定の計算機向け最適化以外に複素行列の実行列表示の利点は無いであろう． ■

6.2 ユニタリ行列

ある実行列 M があって，

$$M^{-1} = M^{\mathrm{t}}$$

であるとき，行列 M は直交行列であった．ある複素行列 Υ があって，

$$\Upsilon^{-1} = \Upsilon^\dagger$$

であるとき，Υ を ユニタリ行列 と呼ぶ．ユニタリ行列がどんな形をしているかといえば，例えば次の形（実際には特殊ユニタリ行列の一般形）をしている．

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{bmatrix};\ \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 = 1; \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (17)$$

ここに集合 $\mathbb{C}$ は複素数全体の集合である．実行列 M が

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix};\ a^2+b^2=1;\ a,b \in \mathbb{R}$$

の形のとき，行列 M が特殊直交行列であったことを思い出せば式 (17) [p.45] も悪くはない．今考えている行列 Υ の行列式 $\det \Upsilon$ を考えると

$$\begin{aligned} \det \Upsilon &= \alpha\alpha^* + \beta\beta^* \\ &= \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

となるので，行列 Υ は特殊ユニタリ行列である．

少しだけ深い話 対称行列，エルミート行列とその指数関数には面白い関係がある．

$$\begin{aligned} \exp(\text{対称行列}) &= (\text{対称行列}) \\ \exp(\text{反対称行列}) &= (\text{直交行列}) \\ \exp(\text{エルミート行列}) &= (\text{エルミート行列}) \\ \exp(\text{反エルミート行列}) &= (\text{ユニタリ行列}) \end{aligned}$$

特にトレースが 0 の反エルミート行列の指数関数は特殊ユニタリ行列になる． ■

6.3 パウリ行列

さて少々のわざとらしさには目をつぶってもらって，式 (17) [p.45] において

$$\alpha = [\![u_0, u_3]\!];\ \beta = [\![u_2, u_1]\!];$$
$$u_i \in \mathbb{R};\ i \in \{0,1,2,3\}$$

としてみよう．ただしここでも

$$[\![a, b]\!] \equiv a + \boldsymbol{i}b \quad \ldots \textbf{定義}$$

としている．すると $\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 = 1$ の条件は

$$(u_0)^2 + (u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2 = 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\sum_{i=0}^{3} (u_i)^2 = 1$$

となる．また行列 Υ は，

$$\begin{aligned} \Upsilon &= \begin{pmatrix} u_0 & 0 \\ 0 & u_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}u_3 & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{i}u_3 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & u_2 \\ -u_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{i}u_1 \\ \boldsymbol{i}u_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{1}u_0 + \boldsymbol{i\sigma}^3 u_3 + \boldsymbol{i\sigma}^2 u_2 + \boldsymbol{i\sigma}^1 u_1 \\ &= [\![u_0, \boldsymbol{\sigma}^i u_i]\!] \end{aligned}$$

と書き表すことができる（最後の式で単位行列 $\mathbf{1}$ を省略した）．ここに，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^1 &\equiv \boldsymbol{\sigma}_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\sigma}^2 &\equiv \boldsymbol{\sigma}_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{i} & 0 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\sigma}^3 &\equiv \boldsymbol{\sigma}_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \ldots \textbf{定義} \end{aligned}$$

である．この $\boldsymbol{\sigma}^i$ はパウリ行列と呼ばれる（添字は場合に応じて上下都合のよい方を用いる）．パウリ行列は，互いに直交している．またパウリ行列は単位行列 $\mathbf{1}$ とも直交しているので，パウリ行列と単位行列の組は基底ベクトルになることができる．

パウリ行列の線形独立性は

$$\boldsymbol{\sigma}^i x_i = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0;\ i \in \{1,2,3\}$$

よりただちにわかる．パウリ行列の直交性は

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2 \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}^2, \boldsymbol{\sigma}^3 \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}^3, \boldsymbol{\sigma}^1 \rangle = 0$$

であることから了解できる．パウリ行列と単位行列はエルミート行列である．

少しだけ深い話 パウリ行列こそが 3 次元の回転の本質である．オイラー角による回転も，クォータニオンによる回転も，その根底にはパウリ行列が活躍している．これは 3 次元の回転が $SU(2)$ 対称性を持っているからである． ■

6.4　パウリ行列の性質

少々退屈ではあるが，パウリ行列の性質を見ておこう．実はパウリ行列の性質こそがクォータニオンを「超複素数」たらしめている性質なのである．

$$\left(\boldsymbol{\sigma}^1\right)^2 = \left(\boldsymbol{\sigma}^2\right)^2 = \left(\boldsymbol{\sigma}^3\right)^2 = \mathbf{1}$$
$$\boldsymbol{\sigma}^1\boldsymbol{\sigma}^2 = -\boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{\sigma}^1 = -\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}^3; \ldots$$
$$\boldsymbol{\sigma}^1\boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{\sigma}^3 = \boldsymbol{i}$$
$$\det\boldsymbol{\sigma}^1 = \det\boldsymbol{\sigma}^2 = \det\boldsymbol{\sigma}^3 = -1$$

（第 3 式の右辺 $\boldsymbol{i}$ はもちろん $\boldsymbol{i1}$ のことである.）第 2 式の . . . は添え字をサイクリックに変更してもよいという意味であり，

$$\boldsymbol{\sigma}^1\boldsymbol{\sigma}^2 = -\boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{\sigma}^1 = -\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}^3$$
$$\boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{\sigma}^3 = -\boldsymbol{\sigma}^3\boldsymbol{\sigma}^2 = -\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}^1$$
$$\boldsymbol{\sigma}^3\boldsymbol{\sigma}^1 = -\boldsymbol{\sigma}^1\boldsymbol{\sigma}^3 = -\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}^2$$

を縮めて書いたものである．

ところで，パウリ行列 $\boldsymbol{\sigma}^i$ にもオイラーの定理は成立し，

$$\exp[\![0, \boldsymbol{\sigma}^i\theta]\!] = [\![\cos\theta, \boldsymbol{\sigma}^i\sin\theta]\!]$$

である．証明は

$$\left(\boldsymbol{\sigma}^i\right)^2 = \mathbf{1};\ i \in \{1, 2, 3\}$$

の性質を利用すれば，行列 $\boldsymbol{I}$ についてオイラーの定理を証明した場合と同様にできる．

少しだけ深い話　ファインマン (Feynman) の言葉を借りれば，オイラーの定理はまさに我々の至宝である．

$$\exp[\![0, \pi]\!] = -1$$

は負の概念と虚の概念（両者の悪しき呼び名は数学の暗黒時代を思い出させる）を幾何学的に結びつける．■

6.5　3 次元ベクトルの行列化

3 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ が

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i x^i;\ i \in \{1, 2, 3\}$$

であるとする．基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_i$ からパウリ行列 $\boldsymbol{\sigma}_i$ に取り替えてみる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} &= \boldsymbol{\sigma}_i x^i \\ &= \boldsymbol{\sigma}_1 x^1 + \boldsymbol{\sigma}_2 x^2 + \boldsymbol{\sigma}_3 x^3 \\ &= \begin{pmatrix} x^3 & [\![x^1, -x^2]\!] \\ [\![x^1, x^2]\!] & -x^3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{18}$$

基底を変えただけであるから，$\boldsymbol{\xi}$ はベクトルである．ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ もまたエルミート行列である．実はこれが，3 次元ベクトルの複素行列表示なのである．複素行列表示はエルミート表示とも言う．

少しだけ深い話　繰り返すが 3 次元のベクトルの表しかたはエルミート表示だけではない．基底ベクトルの選び方は特定の組合せが慣習になっている場合が多い．■

6.6　ユニタリ変換

特殊直交変換（回転変換のこと）は，特殊直交行列つまり回転行列 T を用いて

$$\boldsymbol{x}' = T\boldsymbol{x}$$

ただし

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

であった．特殊直交変換の特徴として，

$$\|\boldsymbol{x}'\| = \|\boldsymbol{x}\|$$

であった．

複素行列の場合，特殊直交変換に対応する変換として 特殊ユニタリ変換 がある．特殊ユニタリ変換

は，特殊ユニタリ行列 U を用いて

$$\boldsymbol{\xi}' = U\boldsymbol{\xi}U^\dagger$$

であって，このときやはり

$$\|\boldsymbol{\xi}'\| = \|\boldsymbol{\xi}\|$$

である．ただしここでも

$$\|\boldsymbol{\xi}\| = \sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\xi}^\dagger\boldsymbol{\xi})} \quad \ldots\textbf{定義}$$

である．

そして，特殊ユニタリ変換こそが，ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ を回転させるのである．詳しくは次節で見るが，行列 U は特殊ユニタリ行列であるから

$$U = [\![u_0, \boldsymbol{\sigma}^i u_i]\!]$$

と書けることを思い出しておこう．

少しだけ深い話 ベクトル（ここで言うベクトルとは 1 階テンソルのこと）の回転変換が $SU(2)$ の世界では線形代数の相似変換で表されることは，本稿の第 8 章で触れる 2 階テンソル変換と相似変換の同値性の証明と同様の方法で証明できる．1 階テンソルは 2 階 スピノール であるからである． ■

6.7 3 次元ベクトルの回転

ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i x^i$$

を 3 軸まわりに θ まわして

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{e}_i\,(x')^i$$

としたとする．式 (15) [p.39] から

$$\begin{pmatrix}(x')^1\\(x')^2\\(x')^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}$$

であった．これと同じことを

$$\boldsymbol{\xi}' = U_3\boldsymbol{\xi}{U_3}^\dagger$$

で再現するためには，

$$U_3(\theta) = \begin{pmatrix}u & 0\\ 0 & u^*\end{pmatrix} \tag{19}$$

ただし

$$u \equiv [\![\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)]\!]$$
$$u^* \equiv [\![\cos(\theta/2), -\sin(\theta/2)]\!]$$

であればよい．(天下り式に証明する．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}' &= U_3\boldsymbol{\xi}{U_3}^\dagger\\ &= \begin{pmatrix}u & 0\\ 0 & u^*\end{pmatrix}\\ &\qquad\begin{pmatrix}x^3 & [\![x^1, -x^2]\!]\\ [\![x^1, x^2]\!] & -x^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u^* & 0\\ 0 & u\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}uu^*x^3 & u^2[\![x^1, -x^2]\!]\\ (u^*)^2[\![x^1, x^2]\!] & -uu^*x^3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

一方，

$$uu^* = 1$$
$$u^2 = [\![\cos\theta, \sin\theta]\!]$$
$$(u^*)^2 = [\![\cos\theta, -\sin\theta]\!]$$

から，

$$(\xi')^1 = \cos\theta\xi^1 + \sin\theta\xi^2$$
$$(\xi')^2 = -\sin\theta\xi^1 + \cos\theta\xi^2$$
$$(\xi')^3 = \xi^3$$

である．）式 (19) はオイラーの定理から

$$u = \exp[\![0, \theta/2]\!]$$
$$u^* = \exp[\![0, -\theta/2]\!]$$

であることを思い出せば，$U_3(\theta)$ は対角行列の指数関数で表すことができて，

$$\begin{aligned}U_3(\theta) &= \exp\begin{pmatrix}[\![0, \theta/2]\!] & 0\\ 0 & [\![0, -\theta/2]\!]\end{pmatrix}\\ &= \exp[\![0, \boldsymbol{\sigma}_3\theta/2]\!]\end{aligned}$$

である．他の軸まわりの回転についても，

$$U_i(\theta) = \exp[\![0, \boldsymbol{\sigma}_i\theta/2]\!];\ i \in \{1,2,3\}$$

である（証明は省略する）．

なお，特殊ユニタリ変換が回転を表していることは第 7 章でもう一度確認する．

少しだけ深い話　ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ の回転が，

$$\boldsymbol{\xi}' = U\boldsymbol{\xi}U^\dagger$$

であるのならば，

$$\boldsymbol{\psi}' = U\boldsymbol{\psi}$$

なる量はないのか，と思うかもしれない．この $\boldsymbol{\psi}$ こそが第 8 章の主役 スピノール である．■

6.8　オイラー角による微小回転

i 軸まわりに θ 回転させた場合，回転行列は

$$U_i(\theta) = \exp[\![0, \boldsymbol{\sigma}_i\theta/2]\!]$$

であった．いま，微小な回転の 1–2–3 オイラー角を $(\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3)$ としよう．この回転の回転行列 $U_\Delta(\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3)$ は $U_i(\theta_i)$ を掛け合わせればよいから，

$$\begin{aligned} U_\Delta(\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3) &= U_1(\Delta\theta_1)\,U_2(\Delta\theta_2)\,U_3(\Delta\theta_3) \\ &= \prod_{i=1}^{3} U_i(\Delta\theta_i) \\ &= \prod_{i=1}^{3} \exp[\![0, \boldsymbol{\sigma}_i\Delta\theta_i/2]\!] \qquad (20) \end{aligned}$$

である．ここで式 (20) に現れる $\boldsymbol{\sigma}_i\theta_i$ は i について和をとるわけではないことに注意しよう．

ここで，微小回転のオイラー角をベクトルだと思って

$$\Delta\boldsymbol{\theta} \equiv \boldsymbol{\sigma}^i\Delta\theta_i = \sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{\sigma}_i\Delta\theta_i$$

としてみよう．行列の指数関数の積は $|\Delta t| \ll 1$ のとき，

$$\exp(\Delta tA)\exp(\Delta tB) \simeq \exp(\Delta tA + \Delta tB); \quad \text{where } |\Delta t| \ll 1$$

と書ける（証明略）ので，式 (20) は

$$\prod_{i=1}^{3} U_i(\Delta\theta_i) \simeq \exp[\![0, \Delta\boldsymbol{\theta}/2]\!]$$

と近似できる．すなわち，

$$U_\Delta(\Delta\boldsymbol{\theta}) \simeq \exp[\![0, \Delta\boldsymbol{\theta}/2]\!]$$

と美しくまとめることができる．

これまでの回転行列の一覧を表 3 [p.50] にまとめた．ところで，第 5 章に登場した $\boldsymbol{\varsigma}^i$ とは，まさしくパウリ行列（に虚数単位を掛けたもの）であった．

$$\boldsymbol{\varsigma}^i \equiv [\![0, \boldsymbol{\sigma}^i]\!]$$

だからもう $\boldsymbol{\varsigma}^i$ については忘れてもよい．

少しだけ深い話　一般に

$$\exp A \exp B = \exp(A+B)$$

が成立するのは

$$AB = BA \Leftrightarrow [A,B] = 0$$

が成り立つ場合だけである．ここに

$$[A,B] \equiv AB - BA \quad \ldots\textbf{定義}$$

で 交換子積 を定義した．交換子積を用いると

$$\begin{aligned} &\exp(tA)\exp(tB) \\ &\quad = \exp\Big(t(A+B) + \frac{1}{2}t^2[A,B] \\ &\qquad + \frac{1}{12}t^3([A,[A,B]] \\ &\qquad\qquad + [[A,B],B]) + \cdots\Big) \end{aligned}$$

というふうに展開できる．上式はベーカー・キャンベル・ハウスドルフ (Baker-Cambell-Housdorff) の公式として有名である．■

表 3: 回転行列（全部）

次元	特殊直交行列	特殊ユニタリ行列
2	$T(\theta) = \exp(\boldsymbol{I}\theta)$	$U(\theta) = \exp(\boldsymbol{i}\theta)$
3	$T_i(\theta) = \exp(\boldsymbol{J}_i\theta)$	$U_i(\theta) = \exp(\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}_i\theta/2)$

6.9 余談：$SO(3) = SU(2)$

3 次元の回転を表すのに，3×3 特殊直交行列（$SO(3)$ 行列）を使っても 2×2 特殊ユニタリ行列（$SU(2)$ 行列）を使ってもどちらでもよいことがわかった．これは群論で言えば，

$$SO(3) = SU(2)$$

に相当する．

どちらでもよいのになぜ特殊ユニタリ変換を考えるのかといえば，ひとつには特殊ユニタリ変換が実際に便利（クォータニオンのもとになる）だからであり，今ひとつは特殊ユニタリ変換こそが回転変換の本質だからである．回転の本質については，本稿の最後の最後で触れる．

少しだけ深い話 正確には，C_2 を 2 次の巡回群として

$$SO(3) = SU(2)/C_2$$

であり，$SO(3)$ は $SU(2)$ の部分群である．ただし，それぞれのリー代数 $so(3)$ と $su(2)$ の間には

$$so(3) = su(2)$$

の関係がある． ■

✓この章のまとめ

1. 複素成分をもつ行列を複素行列と呼ぶ．

2. 複素行列 H のエルミート共役とは，各成分について複素共役をとり，かつ転置した行列であり，$H^\dagger$ で表す．

3. 行列 H が

$$H^\dagger = -H$$

のとき行列 H は反エルミート行列である．

4. 行列 Υ が

$$\Upsilon^{-1} = \Upsilon^\dagger$$

のとき行列 Υ はユニタリ行列である．特に，

$$\det \Upsilon = 1$$

であるようなユニタリ行列 Υ は特殊ユニタリ行列と呼ばれる．

5. パウリ行列とは

$$\boldsymbol{\sigma}^1 \equiv \boldsymbol{\sigma}_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{\sigma}^2 \equiv \boldsymbol{\sigma}_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{i} & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{\sigma}^3 \equiv \boldsymbol{\sigma}_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

のことである．

6. 特殊ユニタリ行列 Υ はパウリ行列の線形和に分解できる．

$$
\begin{aligned}
\Upsilon &= \begin{pmatrix} [\![u_0, u_3]\!] & [\![u_2, u_1]\!] \\ [\![-u_2, u_1]\!] & [\![u_0, -u_3]\!] \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{1}u_0 + \boldsymbol{i}\sum_{i=0}^{3} \boldsymbol{\sigma}^i u_i \\
&= [\![u_0, \boldsymbol{\sigma}^i u_i]\!]
\end{aligned}
$$

ただし，第 2 式では単位行列 $\mathbf{1}$ を省略した．

7. 3 次元のベクトル空間はパウリ行列を基底とすることができる．このときベクトル

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{e}_i x^i
\end{aligned}
$$

は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi} &= \begin{pmatrix} x^3 & [\![x^1, -x^2]\!] \\ [\![x^1, x^2]\!] & -x^3 \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{\sigma}_i x^i
\end{aligned}
$$

と表すことになり，i 軸まわりのベクトルの回転

$$
\boldsymbol{x}' = T_i \boldsymbol{x};\ T_i(\theta) = \exp[\![0, \boldsymbol{J}_i\theta]\!]
$$

は

$$
\boldsymbol{\xi}' = U_i \boldsymbol{\xi} {U_i}^\dagger;\ U_i(\theta) = \exp[\![0, \boldsymbol{\sigma}_i\theta/2]\!]
$$

である．この基底の取り換えはクォータニオンの基本（第 7 章）であり，かつ回転の本質（第 8 章）でもある．

7　クォータニオン

この章ではついに浮世離れしたクォータニオンなる数を調べる．クォータニオンはいわば超複素数のようなものであり，1 個の実数成分と 3 種類の超虚数成分からなる．この章で見るとおり，クォータニオンは回転行列 T や U と同じく 3 次元ベクトルの回転をひきおこす．ただ回転を表すだけなら回転行列 T でもよいのだが，クォータニオンを作っておくと

1. **任意の軸まわりの回転を簡単に合成できる**
2. **回転の球面線形補間ができる**

という特徴がある．そして，この球面線形補間こそがコンピュータグラフィックスでクォータニオンが使われる最大の理由である．この章では

- **クォータニオンの定義**
- **クォータニオンによる回転**
- **クォータニオン代数**
- **球面線形補間**

を見る．この章を読めば，クォータニオンによる 3 次元回転と，クォータニオンの球面線形補間が見えてくるはずである．

7.1　複素行列からクォータニオンへ

第 6 章では位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ が

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i x^i$$

であるとき，

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\sigma}_i x^i$$

なる行列 $\boldsymbol{\xi}$ もまた特殊ユニタリ変換を受けるベクトルであることを見た．ただし，$\boldsymbol{\sigma}_i$ はパウリ行列で，

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{\sigma}_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{i} & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{\sigma}_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である．この場合，i 軸まわりの回転は

$$\boldsymbol{\xi}' = U_i \boldsymbol{\xi} {U_i}^\dagger$$

であって，

$$\begin{aligned} U_i &= \exp[\![0, \boldsymbol{\sigma}_i\theta/2]\!] \\ &= [\![\cos(\theta/2), \boldsymbol{\sigma}_i \sin(\theta/2)]\!] \end{aligned}$$

であった.（繰り返すが

$$[\![a, b]\!] \equiv a + \boldsymbol{i}b$$

である．また単位行列 $\mathbf{1}$ は

$$\mathbf{1} = 1$$

として省略してある.）

面白い話をしよう．x^i から行列 $\boldsymbol{\xi}$ を作るかわりに x^i から行列 $\boldsymbol{X}$ を次のように作る．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X} &\equiv [\![0, \boldsymbol{\sigma}_i x^i]\!] \\ &= \begin{pmatrix} [\![0, x^3]\!] & [\![x^2, x^1]\!] \\ [\![-x^2, x^1]\!] & [\![0, -x^3]\!] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

行列 $\boldsymbol{X}$ は

$$\boldsymbol{X} = -\boldsymbol{X}^{\dagger}$$

を満たすので反エルミート行列である．

同じように行列 $\boldsymbol{Y}$ を

$$\boldsymbol{Y} \equiv \begin{pmatrix} [\![0, y^3]\!] & [\![y^2, y^1]\!] \\ [\![-y^2, y^1]\!] & [\![0, -y^3]\!] \end{pmatrix}$$

とする．また

$$\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{e}_i x^i;\ \boldsymbol{y} \equiv \boldsymbol{e}_i y^i$$

としておく．そうすると次のような面白い性質が表れる．

$$\boldsymbol{XY} = -[\![\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle, \boldsymbol{\sigma}_i (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y})^i]\!]$$

なんと左辺の掛け算を展開してみたら内積とベクトル積が登場したのである．確認してみよう．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{XY} &= \begin{pmatrix} [\![0, x^3]\!] & [\![x^2, x^1]\!] \\ [\![-x^2, x^1]\!] & [\![0, -x^3]\!] \end{pmatrix} \\ &\qquad \begin{pmatrix} [\![0, y^3]\!] & [\![y^2, y^1]\!] \\ [\![-y^2, y^1]\!] & [\![0, -y^3]\!] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [\![-s, -w^3]\!] & [\![-w^2, -w^1]\!] \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} s &\equiv x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 \\ w^1 &\equiv x^2 y^3 - x^3 y^2 \\ w^2 &\equiv x^3 y^1 - x^1 y^3 \\ w^3 &\equiv x^1 y^2 - x^2 y^1 \end{aligned}$$

とおいたのであるが，こうしておくと

$$\boldsymbol{XY} = [\![-s, -\boldsymbol{\sigma}_i w^i]\!]$$

であり，なおかつ

$$\begin{aligned} s &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \\ w^i &= (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y})^i \end{aligned}$$

であるから，やはり

$$\boldsymbol{XY} = -[\![\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle, \boldsymbol{\sigma}_i (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y})^i]\!]$$

なのである．

$\boldsymbol{X}$ や $\boldsymbol{Y}$ のように基底に $[\![0, \boldsymbol{\sigma}_i]\!]$ をとったベクトルを クォータニオン と呼ぶ．

ところで，クォータニオン $\boldsymbol{X}$ とクォータニオン $\boldsymbol{Y}$ の積は，

$$-\boldsymbol{XY} = \mathbf{1}s + [\![0, \boldsymbol{\sigma}_1]\!]w^1 + [\![0, \boldsymbol{\sigma}_2]\!]w^2 + [\![0, \boldsymbol{\sigma}_3]\!]w^3$$

の形をしている．そこで，クォータニオンの積もクォータニオンの仲間に入れることにする．すなわち基底ベクトルとして

$$\mathbf{Q} = \{\mathbf{1}, [\![0, \boldsymbol{\sigma}_1]\!], [\![0, \boldsymbol{\sigma}_2]\!], [\![0, \boldsymbol{\sigma}_3]\!]\}$$

をとったものをクォータニオンと呼ぶことにする．

少しだけ深い話 クォータニオンがクォータニオンらしく振舞うのはまさに 3 次元ベクトルのベクトル積の特異性—ベクトルとベクトルのベクトル積が再びベクトルになる—による． ■

7.2 クォータニオンによる回転 (1)

複素行列ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ を U で回転させたように，もうひとつの複素行列 $\boldsymbol{X}$ を V で回転させるには V はどのような成分を持てばよいのであろうか．もう一度 3 軸まわりの θ 回転を考えてみよう．ここでも式 (15) [p.39] から

$$\begin{pmatrix} (x')^1 \\ (x')^2 \\ (x')^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

と同じことを

$$\boldsymbol{X}' = V_3 \boldsymbol{X} V_3{}^{\dagger}$$

で再現することを考えると，

$$\begin{aligned} v &\equiv [\![\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)]\!] \\ v^* &\equiv [\![\cos(\theta/2), -\sin(\theta/2)]\!] \end{aligned}$$

としておいて，

$$V_3 = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v^* \end{pmatrix} = [\![\cos(\theta/2), \boldsymbol{\sigma}_3 \sin(\theta/2)]\!]$$

に到達する．

1 軸，2 軸まわりの回転についても同様で，予想通り i 軸まわりの θ 回転は

$$V_i = [\![\cos(\theta/2), \boldsymbol{\sigma}_i \sin(\theta/2)]\!]$$

である（V_i は特殊ユニタリ変換と同一の行列である）．ここに θ はオイラー角（オイラーパラメタ）ではなく i 軸まわりの回転角（実数）であることに注意しよう．行列 V_i は $\mathbf{Q}$ を基底に持つのでクォータニオンである．任意の回転はこの V_i を合成すればよいのだが，次節に述べるようなもっと合理的な方法がある．

コンピュータグラフィックスなどの実応用を考えると，座標系の回転ではなくベクトル（位置）そのものを回転させるほうが有用であろう．これは回転角の符号を全て入れ換えればよいのであるが，もっと上手なトリックがある．今までとは逆に，行列はいつも右から掛けると約束するのである．つまり，これからはベクトル $\boldsymbol{X}$ がある軸まわりに回転して $\boldsymbol{X}''$ に移動したと考え，

$$\boldsymbol{X}'' = V^\dagger \boldsymbol{X} V$$

とするのである．この置換によって得られる演算は左手座標系で使う線形代数と同じであるので，「左手トリック」と呼んでおこう．

ところで，あるクォータニオン M が

$$M = [\![m, \boldsymbol{\mu}]\!];\ \boldsymbol{\mu} \equiv \boldsymbol{\sigma}_i \mu^i$$

の形をしているとき，

$$M^* \equiv [\![m, -\boldsymbol{\mu}]\!] \quad \ldots \textbf{定義}$$

は行列 M のエルミート共役 $M^\dagger$ と同一，すなわち

$$M^* = M^\dagger$$

であるので，今後 M^* を M の 共役クォータニオン と名付け，M のエルミート共役 $M^\dagger$ のかわりに表記上は共役クォータニオン M^* のほうを用いることにする．

少しだけ深い話 回転を表すクォータニオン V は特殊ユニタリ行列であるので，

$$\det V = 1$$

という条件がつく．後程登場するクォータニオンのノルム $\|V\|$ と行列式とは

$$\|V\|^2 = \det V$$

の関係があるので，回転を表すクォータニオンのノルムは 1 である． ■

7.3 クォータニオンによる回転 (2)

任意の回転軸 $\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{e}_i r^i$ に対する θ 回転 $V(\theta, \boldsymbol{r})$ はどのように与えられるのだろうか．結論を先に書くと，

$$V(\theta, \boldsymbol{r}) = [\![\cos(\theta/2), \boldsymbol{\sigma}_i r^i \sin(\theta/2)]\!]$$

なのである．

任意のベクトル

$$\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{e}_i x^i;\ \boldsymbol{X} \equiv [\![0, \boldsymbol{\sigma}_i x^i]\!]$$

を考える．いま回転軸を表すベクトル $\boldsymbol{r}$ が

$$\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{e}_i r^i$$

と書けて，なおかつ単位ベクトルであったとしよう（図 12 [p.56] 参照）．すなわち

$$\|\boldsymbol{r}\| = 1$$

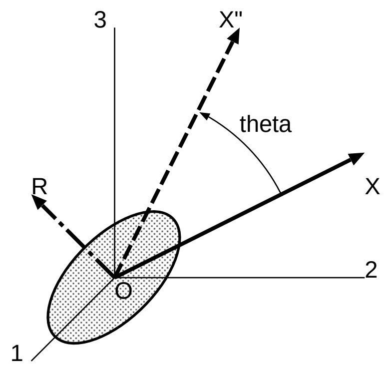


図 12: クォータニオンによる回転 (A)

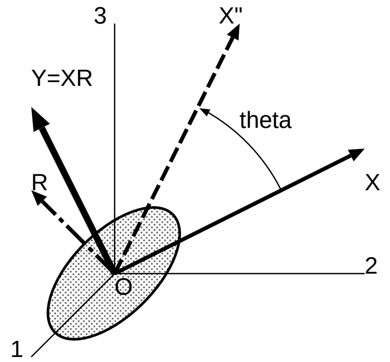


図 13: クォータニオンによる回転 (B)

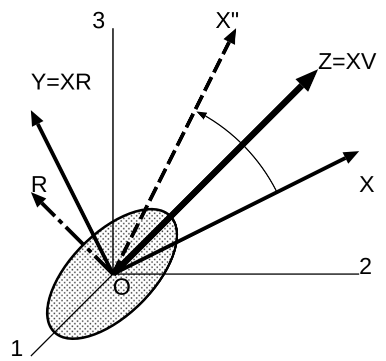


図 14: クォータニオンによる回転 (C)

とする．またベクトル $\boldsymbol{r}$ の基底をこれまでの $\boldsymbol{X}$ と同じく $[\![0, \boldsymbol{\sigma}_i]\!]$ とした

$$\boldsymbol{R} = [\![0, \boldsymbol{\sigma}_i r^i]\!]$$

を考える．クォータニオン V を次のように定義する．

$$\begin{aligned} V &\equiv [\![\cos(\theta/2), \boldsymbol{\sigma}_i r^i \sin(\theta/2)]\!] \\ &= \cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{R}\sin\frac{\theta}{2} \end{aligned} \tag{21}$$

（もちろん単位行列 $\mathbf{1}$ を省略しているのであって，実数と行列を足し算しているわけではない．上式は

$$V \equiv \mathbf{1}\cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{R}\sin\frac{\theta}{2}$$

のことである．）角度 θ をあらかじめ 2 で割っている理由は筆者が答えを先に知っているからであるが，本節を読み進めば読者もすぐに納得してもらえることであろう．

仮にベクトル $\boldsymbol{r}$ がベクトル $\boldsymbol{x}$ に直交するとしよう．

$$\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$$

ベクトル $\boldsymbol{Y}$ を次のように定義してみる．

$$\boldsymbol{Y} \equiv \boldsymbol{X}\boldsymbol{R} \ \ldots\text{（左手）}$$

ベクトル $\boldsymbol{r}$ とベクトル $\boldsymbol{x}$ は直交と定義したから，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y} &= \boldsymbol{X}\boldsymbol{R} \\ &= -[\![\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{r} \rangle, \boldsymbol{\sigma}_i (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{r})^i]\!] \\ &= -[\![0, \boldsymbol{\sigma}_i (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{r})^i]\!] \end{aligned}$$

つまり（$\boldsymbol{y} \equiv \boldsymbol{e}_i y^i$ として）

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{R} \Leftrightarrow \boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{r} \Leftrightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{x}; \quad \text{if} \quad \|\boldsymbol{r}\| = 1 \text{ and } \langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$$

である（図 13 参照）．

実のところ我々はベクトル $\boldsymbol{R}$ にはあまり興味があるわけでなくクォータニオン V に興味があるので，

$$\boldsymbol{Z} \equiv \boldsymbol{X}V \ \ldots\text{（左手）}$$

を考えてみる．ここで V は式 (21) のように分解できるから，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Z} &\equiv \boldsymbol{X}V \\
&= \boldsymbol{X}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{R}\sin\frac{\theta}{2}\right) \\
&= \boldsymbol{X}\cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{R}\sin\frac{\theta}{2} \\
&= \boldsymbol{X}\cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{Y}\sin\frac{\theta}{2}
\end{aligned}
$$

である．こうしてみると，$\boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ の線形結合であり，結合係数が $\cos(\theta/2)$ と $\sin(\theta/2)$ であることがわかる．$\boldsymbol{X}$ は $\boldsymbol{R}$ に直交，$\boldsymbol{Y}$ は $\boldsymbol{R}$ および $\boldsymbol{X}$ に直交する．ということは，$\boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{X}$ を V によって $\boldsymbol{R}$ まわりに $\theta/2$ 回転させたものである（図 14 [p.56] 参照）．ただし $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{X}$ が直交していることが条件であった．この困難は次節に示すように

$$\boldsymbol{X}'' = V^*\boldsymbol{X}V \quad \ldots(\text{左手})$$

とすれば解消するのだが，その前に $\boldsymbol{X}$ に 2 度 V を掛けるとどうなるか見ておこう．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{X}VV &= \boldsymbol{Z}V \\
&= \left(\boldsymbol{X}\cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{Y}\sin\frac{\theta}{2}\right) \\
&\qquad \left(\cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{R}\sin\frac{\theta}{2}\right) \\
&= \boldsymbol{X}\cos^2\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{Y}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\
&\quad + \boldsymbol{X}\boldsymbol{R}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{Y}\boldsymbol{R}\sin^2\frac{\theta}{2} \\
&= \boldsymbol{X}\cos^2\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{Y}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\
&\quad + \boldsymbol{Y}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}\sin^2\frac{\theta}{2} \\
&= \boldsymbol{X}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) \\
&\quad + \boldsymbol{Y}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right) \\
&= \boldsymbol{X}\cos\theta + \boldsymbol{Y}\sin\theta
\end{aligned}
$$

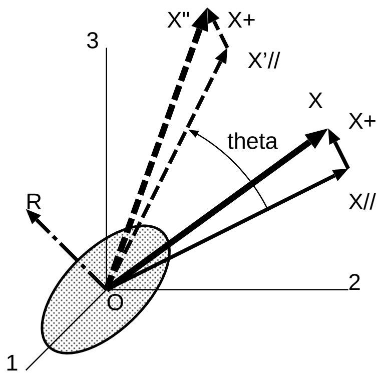


図 15: クォータニオンによる回転 (D)

ここで

$$\boldsymbol{R}^2 = -\boldsymbol{1}$$

であることを利用した．

もしベクトル $\boldsymbol{X}$ と回転軸 $\boldsymbol{R}$ が直交していれば，回転後のベクトル $\boldsymbol{X}''$ は $\boldsymbol{X}VV$ で求まることがわかった．

少しだけ深い話 クォータニオンによる回転は特殊ユニタリ変換なので，最初から

$$\boldsymbol{\xi}' = U\boldsymbol{\xi}U^\dagger$$

の関係を用いてもこの章で論じている方法と同じ結論に達する． ■

7.4 クォータニオンによる回転 (3)

前節のクォータニオンによる回転は，回転軸と回転の対象となるベクトルが直交していなければならなかった．本節では任意の回転軸による回転がクォータニオンで行えることを証明する．

クォータニオン V と V^* を

$$
\begin{aligned}
V &\equiv \cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{R}\sin\frac{\theta}{2} \\
V^* &\equiv \cos\frac{\theta}{2} - \boldsymbol{R}\sin\frac{\theta}{2}
\end{aligned}
$$

と定義する．

全く任意のベクトル $\boldsymbol{X}$ を考える．このベクトル $\boldsymbol{X}$ を

$$\boldsymbol{X} \equiv \boldsymbol{X}_\perp + \boldsymbol{X}_\parallel$$

と分解する（図 15 [p.57] 参照）．ここに

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_\perp & \ldots \text{ベクトル } \boldsymbol{R} \text{ に垂直な成分} \\ \boldsymbol{X}_\parallel & \ldots \text{ベクトル } \boldsymbol{R} \text{ に平行な成分} \end{cases}$$

である．証明は割愛するが

$$V\boldsymbol{X}_\parallel = \boldsymbol{X}_\parallel V$$

の性質を利用すると

$$\begin{aligned} V^*\boldsymbol{X}V &= V^*\boldsymbol{X}_\perp V + V^*\boldsymbol{X}_\parallel V \\ &= \left(\cos\frac{\theta}{2} - \boldsymbol{R}\sin\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{X}_\perp V + \boldsymbol{X}_\parallel \\ &= \boldsymbol{X}_\perp V\cos\frac{\theta}{2} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{X}_\perp V\sin\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{X}_\parallel \\ &= \boldsymbol{X}_\perp V\cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{X}_\perp V\boldsymbol{R}\sin\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{X}_\parallel \\ &= (\boldsymbol{X}_\perp V)\cos\frac{\theta}{2} + (\boldsymbol{X}_\perp V)\,\boldsymbol{R}\sin\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{X}_\parallel \\ &= (\boldsymbol{X}_\perp V)\,V + \boldsymbol{X}_\parallel \\ &= \boldsymbol{X}_\perp VV + \boldsymbol{X}_\parallel \\ &= \boldsymbol{X}_\perp\cos\theta + \boldsymbol{Y}\sin\theta + \boldsymbol{X}_\parallel \end{aligned}$$

となる．ただしベクトル積の性質

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}\boldsymbol{X}_\perp V &= \boldsymbol{R}\,(\boldsymbol{X}_\perp V) \\ &= -\,(\boldsymbol{X}_\perp V)\,\boldsymbol{R} \\ &= -\boldsymbol{X}_\perp V\boldsymbol{R} \end{aligned}$$

を利用した．

こうしてみると $V^*\boldsymbol{X}V$ はベクトル $\boldsymbol{X}$ を θ 回転させていることがわかる．すなわち V を

$$V \equiv [\![\cos(\theta/2), \boldsymbol{\sigma}_i r^i \sin(\theta/2)]\!]$$

と定義しておけば，V は $\boldsymbol{R}$ まわりの θ 回転を表すことになる．

少しだけ深い話 OpenGL 互換コンピュータグラフィックスライブラリの Mesa ライブラリ実装 (v4.0.2) では，実際の回転演算には同次座標系を用いた $SO(3)$ 回転を行っている． ■

7.5 クォータニオン代数

位置を表すクォータニオンは

$$\boldsymbol{X} = [\![0, \boldsymbol{\sigma}_i x^i]\!]$$

であった．回転を表すクォータニオンは

$$V = [\![\cos(\theta/2), \boldsymbol{\sigma}_i \rho^i \sin(\theta/2)]\!]$$

であった．そこで，次のような数

$$q = \mathbf{1}s + [\![0, \boldsymbol{v}]\!] = [\![s, \boldsymbol{v}]\!]$$

を考える．ただし s は実数，$\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{\sigma}_i$ を基底に持つベクトルと同じように作られた数，すなわち

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &\equiv \boldsymbol{\sigma}_1 t + \boldsymbol{\sigma}_2 u + \boldsymbol{\sigma}_3 v \\ &= \begin{bmatrix} v & [\![t, -u]\!] \\ [\![t, u]\!] & -v \end{bmatrix} \end{aligned}$$

とする．つまり，数 q は

$$q = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\![0, v]\!] & [\![u, t]\!] \\ [\![-u, t]\!] & [\![0, -v]\!] \end{bmatrix}; \qquad s, t, u, v \in \mathbb{R}$$

という形をしているとする．この q こそが，我々がついにたどり着いたクォータニオンである．せっかくクォータニオンに到達したので，代数規則を考えクォータニオンの「数」としての性質を調べ上げておこう．

7.5.1 和と差

クォータニオン $q_{(1)}$ と $q_{(2)}$ の足し算および引き算は自然に定義できる．

$$q_{(1)} \pm q_{(2)} = [\![s_{(1)} \pm s_{(2)}, \boldsymbol{v}_{(1)} \pm \boldsymbol{v}_{(2)}]\!]$$

ただし複号同順である．

行列の代数規則（線形代数）からただちにクォータニオンの 線形性 を導ける．

$$aq_{(1)} \pm bq_{(2)} = [\![as_{(1)} \pm bs_{(2)}, a\boldsymbol{v}_{(1)} \pm b\boldsymbol{v}_{(2)}]\!]$$

ここに

$$a, b \in \mathbb{R}$$

である．

7.5.2　共役クォータニオン

共役クォータニオンを改めて定義しておく．クォータニオン q の共役 q^* は

$$q^* \equiv [\![s, -\boldsymbol{v}]\!] \quad \ldots \textbf{定義}$$

である．

7.5.3　内積

クォータニオンの内積 を定義しよう．クォータニオンの内積は各成分の積の和として

$$\begin{aligned}\langle q_{(1)}, q_{(2)} \rangle &\equiv s_{(1)} s_{(2)} + \langle \boldsymbol{v}_{(1)}, \boldsymbol{v}_{(2)} \rangle \\ &= s_{(1)} s_{(2)} + \sum_{i=1}^{3} \left(v_{(1)}\right)^i \left(v_{(2)}\right)^i\end{aligned}$$

$$\ldots \textbf{定義}$$

と定義する．

共役クォータニオンと後で述べるクォータニオン積を用いれば，内積は

$$\langle q_{(1)}, q_{(2)} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{tr} \left({q_{(1)}}^* q_{(2)} \right)$$

とも書ける．上式右辺を展開すると，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \mathrm{tr} \left({q_{(1)}}^* q_{(2)} \right) &= \frac{1}{2} \mathrm{tr} \left(s_{(1)} s_{(2)} + \boldsymbol{v}_{(1)} \boldsymbol{v}_{(2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \mathrm{tr} \begin{pmatrix} s_{(1)} s_{(2)} + \langle \boldsymbol{v}_{(1)}, \boldsymbol{v}_{(2)} \rangle & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \\ &= s_{(1)} s_{(2)} + \langle \boldsymbol{v}_{(1)}, \boldsymbol{v}_{(2)} \rangle\end{aligned}$$

であり，確かにクォータニオンの内積である．

7.5.4　ノルム

クォータニオンのノルム は

$$\|q\| \equiv \sqrt{\langle q, q \rangle} \quad \ldots \textbf{定義}$$

と定義する．こうしておくと，

$$\|q\|^2 = s^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2$$

なので，ノルムの条件を満たしている．

なお $\|q\| = 1$ のとき q を 単位クォータニオン と呼ぶ．

7.5.5　クォータニオン積

クォータニオン同士を掛け算するとどうなるであろうか．成分をあらわにして計算してしまえば，

$$\begin{aligned}q_{(1)} q_{(2)} &= [\![s_{(1)}, \boldsymbol{\sigma}_i (v_{(1)})^i]\!] \cdot [\![s_{(2)}, \boldsymbol{\sigma}_i (v_{(2)})^i]\!] \\ &= [\![s_{(1)} s_{(2)} - \langle \boldsymbol{v}_{(1)}, \boldsymbol{v}_{(2)} \rangle, \\ &\qquad s_{(1)} \boldsymbol{v}_{(2)} + s_{(2)} \boldsymbol{v}_{(1)} - \boldsymbol{v}_{(1)} \times \boldsymbol{v}_{(2)}]\!]\end{aligned}$$

に到達する．上式はただの行列積であるが，特別にクォータニオン積 と呼ぶこともある．

回転はクォータニオン積によって合成できる．例えば，回転 $V_{(1)}$ と回転 $V_{(2)}$ の合成 $V_{(3)}$ は，左手トリックを使っている場合

$$V_{(3)} = V_{(1)} V_{(2)}$$

と合成できる．

7.5.6　逆クォータニオン

クォータニオンと一般のベクトルの顕著な違いは，逆クォータニオン が定義できることである．クォータニオン q の逆クォータニオン q^{-1} は

$$q^{-1} q = \mathbf{1}$$

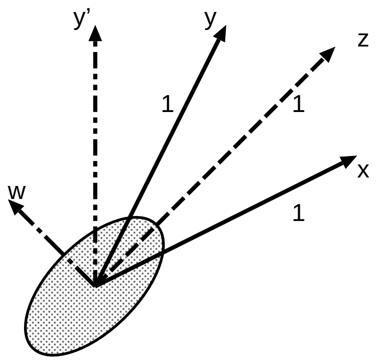


図 16: ベクトルの球面線形補間

となる q^{-1} である．

特に $\mathbf{1}$ は <u>アイデンティティクォータニオン</u> と呼ばれる．

クォータニオン q の共役クォータニオン q^* を用いると，逆クォータニオンは

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2}$$

である．

少しだけ深い話 クォータニオンが「数」の性質を持つからといって大騒ぎすることはない．特殊な対称性をもった複素行列にすぎないのである．しかし，クォータニオンが「実数部」と「虚数部」に分解できるという性質は注目に値する．実際，クォータニオンの実数部はスカラ量を表し，クォータニオンの虚数部はベクトル量を表す． ■

7.6 球面線形補間

補間について考えてみる．いま互いに独立なベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ があったとしよう．ベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ の間にベクトル $\boldsymbol{z}$ を内挿したいとすると，ベクトル $\boldsymbol{z}$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ およびベクトル $\boldsymbol{y}$ と共通の平面上にあるべきであるから，実関数 ϕ_x と ϕ_y を使って

$$\boldsymbol{z} = \phi_x(t)\boldsymbol{x} + \phi_y(t)\boldsymbol{y} \tag{22}$$

と書ける．ここに t は $\boldsymbol{z}$ の $\boldsymbol{x}$（または $\boldsymbol{y}$）への「近さ」を表すパラメタで，唯一の条件は

$$\begin{cases} \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}; & \text{if} \quad t = 0 \\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}; & \text{if} \quad t = 1 \end{cases}$$

であることである（もし $\phi_i(t)$ が t に対して単調であればより「補間」という言葉の印象に近くなるであろう）．すなわち

$$\phi_x(0) = 1;\ \phi_x(1) = 0;\ \phi_y(0) = 0;\ \phi_y(1) = 1$$

であることが求められる．

最も素直で単純な補間は <u>線形補間</u> であろう．線形補間は

$$\phi_x(t) = 1 - t;\ \phi_y(t) = t$$

である．ところで，もし

$$\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\| = 1$$

のとき，補間したベクトル $\boldsymbol{z}$ についても

$$\|\boldsymbol{z}\| = 1$$

であってほしい場合もあるであろう（図 16 参照）．この要求を満たす補間を <u>球面線形補間</u> と呼ぶ．残念ながら線形補間はこの要求を満たさない．

もしもベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ が直交していれば

$$\phi'_x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right);\ \phi'_y(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

を使うと球面線形補間できる．上式は $(1-t)$ を復活させて

$$\phi'_x(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(1-t)\right);\ \phi'_y(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

とも書ける．

ベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ が直交しない一般の場合はベクトル $\boldsymbol{x}$ に直交するようなベクトル $\boldsymbol{y}'$ を作ればよい．ベクトル積の性質を用いると

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{w};\ \boldsymbol{w} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$$

と作ることができる．ただしベクトル $\boldsymbol{y}'$ のノルムはベクトル $\boldsymbol{x}$ およびベクトル $\boldsymbol{y}$ が直交しない限り 1 にはならず一般に $\|\boldsymbol{w}\|$ であるので，補間関数には $1/\|\boldsymbol{w}\|$ の補正項が必要である．すなわち

$$\phi''_x(t) = \frac{\sin(\pi(1-t)/2)}{\|\boldsymbol{w}\|}$$
$$\phi''_y(t) = \frac{\sin(\pi t/2)}{\|\boldsymbol{w}\|}$$

としておくと，

$$\boldsymbol{z} = \phi''_x(t)\boldsymbol{x} + \phi''_y(t)\boldsymbol{y}'$$

と球面線形補間できる．後の仕上げは上式に現れる $\boldsymbol{y}'$ を $\boldsymbol{y}$ で置き換えることであるが，これは t の係数 $\pi/2$ をベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ のなす角 θ で置き換えれば達せられる．また θ を使えば

$$\|\boldsymbol{w}\| = \sin\theta$$

であるので，

$$\phi'''_x(t) = \frac{\sin(\theta(1-t))}{\sin\theta}$$
$$\phi'''_y(t) = \frac{\sin(\theta t)}{\sin\theta}$$
$$\text{where } \cos\theta = \langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$$

でもって任意のベクトルの球面線形補間ができる．念のため式 (22) [p.60] に上式を代入しておくと

$$\boldsymbol{z} = \frac{\sin(\theta(1-t))}{\sin\theta}\boldsymbol{x} + \frac{\sin(\theta t)}{\sin\theta}\boldsymbol{y} \tag{23}$$

である．これが球面線形補間の式である．

少しだけ深い話　コンピュータグラフィックスアニメーション作成の一手法であるキーフレームアニメーションでは，この球面線形補間の他に前後複数枚のフレーム情報を用いた 3 次エルミート補間（多項式補間）もよく用いられている．■

7.7　球面線形補間クォータニオン

球面線形補間をクォータニオンで行うとどうなるだろうか．前節のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ についてここでも基底を $\boldsymbol{e}_i \to [\![0, \boldsymbol{\sigma}_i]\!]$ と置き換えて，

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \to \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$$

と表すことにする．(球面線形補間であるので，

$$\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{z}\| = 1$$

を前提とする.）また，球面線形補間関数 $\phi(t)$ は要するに回転変換の一種であるので $\phi(t)$ に対応するクォータニオン $\varPhi(t)$ があるとして

$$\boldsymbol{Z} = \varPhi^*(t)\boldsymbol{X}\varPhi(t)$$

であるとする．

あるクォータニオン V があって，

$$\boldsymbol{Y} = V^*\boldsymbol{X}V$$

であるとする．明らかに $t = 1$ で $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Y}$ とならなければならないから，$t = 1$ の時の補間係数 $\varPhi(1)$ は

$$\varPhi(1) = V$$

であるはずである．

ところで，$\varPhi(1)$ は回転を表すので単位クォータニオンであるから

$$\varPhi(1) = [\![\cos\vartheta, \boldsymbol{\sigma}_i\rho^i \sin\vartheta]\!]$$

と書ける．ここで ϑ は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ から決まる定数である．上式にパラメタ t が隠れていると思いこんで，

$$\varPhi(t) = [\![\cos(\vartheta t), \boldsymbol{\sigma}_i\rho^i \sin(\vartheta t)]\!]$$

としてみる．(もちろん

$$\varPhi(0) = 1$$

である．) そうすると補間の式は

$$\boldsymbol{Z} = \Phi^*(t)\boldsymbol{X}\Phi(t) \tag{24}$$

となるが，ここで t を $0 \to 1$ と変化させると，$\boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ と連続的に，なおかつ $\|\boldsymbol{Z}\| = 1$ を保ちながら変化する．この式 (24) [p.62] は式 (23) と同等である．クォータニオンを用いると球面線形補間は式 (24) [p.62] のように単純に記述できる．

少しだけ深い話 ベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ のノルムは等しいので回転の運動方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t) = -\varphi(t)\omega^2$$

を解いてもよい．この式の解は

$$\varphi(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t);\ a, b \in \mathbb{R}$$

である． ■

7.8 回転の球面線形補間

ある回転ともうひとつの回転のあいだの回転を考える．

あるベクトル $\boldsymbol{\varXi}$ があって

$$\boldsymbol{X} = {V_x}^*\boldsymbol{\varXi}V_x;\ \boldsymbol{Y} = {V_y}^*\boldsymbol{\varXi}V_y$$

なるクォータニオン V_x, V_y があるとし，なおかつ

$$V_y = \Psi(1)V_x$$

であるとする．ここに $\Psi(1)$ は

$$\Psi(1) \equiv V_y{V_x}^* \quad \ldots\textbf{定義}$$

である．ここでやはり

$$\Psi(1) = [\![\cos\vartheta, \boldsymbol{\sigma}_i\rho^i\sin\vartheta]\!]$$

と書けるから，

$$\Psi(t) = [\![\cos(\vartheta t), \boldsymbol{\sigma}_i\rho^i\sin(\vartheta t)]\!]$$

を仮定する．こうすると t が $0 \to 1$ に対して $\Psi(t)$ は連続的に $1 \to V_y{V_x}^*$ と変化する．すなわち，クォータニオン $\Psi(t)$ は回転 V_x から回転 V_y へとなめらかに変化する．これが回転の球面線形補間である．クォータニオンを用いると，回転そのものの球面線形補間も単純に書けるのである．

少しだけ深い話 $\Psi(t)$ の 2 階微分を考える．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Psi(t) &= -\vartheta[\![\sin(\vartheta t), -\boldsymbol{\sigma}_i\rho^i\cos(\vartheta t)]\!]\\ \frac{d^2}{dt^2}\Psi(t) &= -\vartheta^2[\![\cos(\vartheta t), \boldsymbol{\sigma}_i\rho^i\sin(\vartheta t)]\!]\\ &= -\vartheta^2\Psi(t)\end{aligned}$$

このように回転の 2 階微分が元の回転の定数倍で表されるのは，クォータニオンの特徴である．
■

7.9 余談：「超複素数」の理由

なぜクォータニオンが超複素数と呼ばれるのか，その理由を説明しておこう．

$$\mathsf{I} = [\![0, \boldsymbol{\sigma}_1]\!];\ \mathsf{J} = [\![0, \boldsymbol{\sigma}_2]\!];\ \mathsf{K} = [\![0, \boldsymbol{\sigma}_3]\!]$$

とすると，クォータニオン q は次のように書ける．

$$q = s + \mathsf{I}t + \mathsf{J}u + \mathsf{K}v$$

この $\mathsf{I}, \mathsf{J}, \mathsf{K}$ はクォータニオン単位と呼ばれる．クォータニオン単位はパウリ行列の性質から「超虚数単位」としての素質を持っている．

$$\mathsf{IJK} = \mathsf{I}^2 = \mathsf{J}^2 = \mathsf{K}^2 = -1$$

$$\mathsf{IJ} = -\mathsf{JI} = \mathsf{K}$$

$$\mathsf{JK} = -\mathsf{KJ} = \mathsf{I}$$

$$\mathsf{KI} = -\mathsf{IK} = \mathsf{J}$$

実際，これらの性質は虚数単位 $\boldsymbol{i}$ の性質を自然に拡張したように見える．これらの性質が，クォータニオンを超複素数と呼ばせる理由である．

少しだけ深い話 もう一つの 4 元超複素数である *the hyper complex*（狭義超複素数）はクォータニオン単位の代わりに次のような超複素数単位を使う．

$$\begin{gathered}
\mathsf{I}'\mathsf{J}' = \mathsf{J}'\mathsf{I}' = \mathsf{K}' \\
\mathsf{J}'\mathsf{K}' = \mathsf{K}'\mathsf{J}' = -\mathsf{I}' \\
\mathsf{K}'\mathsf{I}' = \mathsf{I}'\mathsf{K}' = -\mathsf{J}' \\
\left(\mathsf{I}'\right)^2 = \left(\mathsf{J}'\right)^2 = -1 \\
\left(\mathsf{K}'\right)^2 = 1
\end{gathered}$$

狭義超複素数はクォータニオンと違い，積が可換である． ■

✓この章のまとめ

1. 任意の 3 次元ベクトルは基底ベクトルを $\boldsymbol{i\sigma}_i$ とすることでクォータニオンになる．例えば，ベクトル $\boldsymbol{x}$ が

   $$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

   であるとき，同じ位置を表すクォータニオンは

   $$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} [\![0, x^3]\!] & [\![x^2, x^1]\!] \\ [\![-x^2, x^1]\!] & [\![0, -x^3]\!] \end{pmatrix}$$

   である．

2. 位置を表すクォータニオンの回転は回転軸を $\boldsymbol{R}$，回転角を θ とすると，

   $$\boldsymbol{X}' = V\boldsymbol{X}V^*$$

   ただし，

   $$\begin{aligned} V &= \cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{R}\sin\frac{\theta}{2} \\ V^* &= \cos\frac{\theta}{2} - \boldsymbol{R}\sin\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

   である．

3. 左手トリック：座標系を回転させるのではなく，ある点をある軸まわりに回転させたとき，元の座標系から見てどこに移動したかを知りたいときは，

   $$\boldsymbol{X}'' = V^*\boldsymbol{X}V$$

   とした方が便利である．

4. クォータニオン同士には和，積が定義され，それぞれ単位元が存在し，逆クォータニオンも存在する．すなわち，クォータニオンは数の仲間である．

5. クォータニオンによる回転は球面線形補間できる．位置 $\boldsymbol{X}$ が回転 $V(0)$ によって $\boldsymbol{Y}$ に変換さ

れ，同じく位置 $\boldsymbol{X}$ が回転 $V(1)$ によって $\boldsymbol{Z}$ に変換されたとする．回転 $V(t)$ が球面線形だとすると $V(t)$ は次の形をしている．

$$V(t) = \Phi(t)V(0)$$
$$\Phi(t) = [\![\cos(\vartheta t), \boldsymbol{\sigma}_i \rho^i \sin(\vartheta t)]\!]$$

ここで ϑ は

$$V(1) = \Phi(1)V(0)$$

を満たすような値である．

8 余談：スピノール

この章は全くの余談である．これまではクォータニオンが「どのように」働くかを見てきたわけであるが，この章ではクォータニオンが「なぜ」そのように働くかを，クォータニオンと同じ $SU(2)$ 回転群に属する特殊ユニタリ変換を調べることで探る．この章ではまたなぜクォータニオンによる回転に回転角 θ ではなくその半分の $\theta/2$ を用いなければならないのかも語る．それは 1 個のクォータニオンが 2 個のスピノールから出来上がっているという単純な事実に基づくのである．この章では

- **テンソル**
- **スピノール**
- **スピノールからのベクトルとスカラの合成**

を見る．この章を読めば，謎に包まれていたクォータニオンの正体を知る手がかりがついに見えてくるはずである．

8.1 テンソル

やわらかいスポンジを思い浮かべてもらいたい．このスポンジはどの向きから握っても同じだけ縮むとすると，スポンジの縮み具合（緊張の度合い）は座標系のとり方によらないから，スカラ量である．ところが，このスポンジは 1 軸方向から握った場合，2 軸方向から握った場合の 2 倍縮むとしよう．この場合，スポンジの緊張（テンション）の度合いは座標系のとり方に依存するから，スカラではない．3 個の実数が必要である．

さらに想像を働かせる．もしスポンジを 1 軸方向から 1 の力で握った場合，スポンジのある部分は 1 軸方向に 1 縮むとともに，2 軸方向に 0.5 縮んだとする（スポンジを握ったときの変形を想像するとよい）．一般に，i 方向からの握り圧力を $Press_i$ とし，握られた結果の縮みないし緊張を $Stress_j$ とすると，

$$
\begin{array}{cccc}
 & Press_1 & Press_2 & Press_3 \\
Stress_1 & W_{(11)} & W_{(12)} & W_{(13)} \\
Stress_2 & W_{(21)} & W_{(22)} & W_{(23)} \\
Stress_3 & W_{(31)} & W_{(32)} & W_{(33)}
\end{array}
$$

のような 9 個の変数が考えられる．そこで，ベクトルのときに倣って

$$
\boldsymbol{W} \equiv \begin{pmatrix} W^{11} & W^{12} & W^{13} \\ W^{21} & W^{22} & W^{23} \\ W^{31} & W^{32} & W^{33} \end{pmatrix}
$$

という量 $\boldsymbol{W}$ でもってスポンジの「緊張しやすさ」を表すことにする．あとは，この $\boldsymbol{W}$ の成分が座標系の回転に対してどのように変化するか決定できればよい．

スポンジのように座標系のとり方をかえたからとって，その性質まで変化しない場合は，回転行列 $T(\theta)$ を使って

$$
(W')^{ij} = T^i_k(\theta) T^j_l(\theta) W^{kl}
$$

という変換を受ける．このような変換を受ける量をテンソルと呼ぶ．この場合 T が 2 回現れるので W^{ij} を 2 階テンソルと呼ぶ.

8.2　テンソルの回転

例によって 3 軸まわりの θ 回転を考える．3 軸まわりの回転行列（回転行列自身もまたテンソルである）は

$$T(\theta)=\begin{pmatrix}T_1^1 & T_2^1 & T_3^1\\ T_1^2 & T_2^2 & T_3^2\\ T_1^3 & T_2^3 & T_3^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\cos\theta & \sin\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

であったから，テンソルの変換則

$$(W')^{ij}=T_k^i(\theta)T_l^j(\theta)W^{kl} \tag{25}$$

を使って，試しに $(W')^{11}$ を計算してみよう.

$$\begin{aligned}(W')^{11}&=T_k^1T_l^1W^{kl}\\ &=T_1^1T_1^1W^{11}+T_2^1T_1^1W^{21}\\ &\quad+T_1^1T_2^1W^{12}+T_2^1T_2^1W^{22}\\ &=\mathsf{c}^2W^{11}+\mathsf{cs}\left(W^{21}+W^{12}\right)+\mathsf{s}^2W^{22}\end{aligned}$$

ここに

$$\mathsf{c}\equiv\cos\theta;\ \mathsf{s}\equiv\sin\theta$$

とした.

同様に $(W')^{21}$ および $(W)^{22}$ についても調べておくと,

$$\begin{aligned}(W')^{21}&=\mathsf{c}^2W^{21}+\mathsf{cs}\left(-W^{11}+W^{22}\right)-\mathsf{s}^2W^{12}\\ (W')^{12}&=\mathsf{c}^2W^{12}+\mathsf{cs}\left(-W^{11}+W^{22}\right)-\mathsf{s}^2W^{21}\end{aligned}$$

である.

なぜいちいち成分ごとに計算してみたかというと，テンソルの変換則は線形代数を使っても表すことができることを示したかったのである．式 (25) はテンソルも行列だと思えば行列の相似変換すなわち

$$\boldsymbol{W}'=T\boldsymbol{W}T^{\mathrm{t}} \tag{26}$$

と同じことである（お尻の転置記号は線形代数則の非対称性を打ち消すために必要なのである）．式 (26) の成分をあらわにすると,

$$\boldsymbol{W}'=\begin{pmatrix}\mathsf{c} & \mathsf{s} & 0\\ -\mathsf{s} & \mathsf{c} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}W^{11} & W^{12} & W^{13}\\ W^{21} & W^{22} & W^{32}\\ W^{31} & W^{32} & W^{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathsf{c} & -\mathsf{s} & 0\\ \mathsf{s} & \mathsf{c} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

である．確かめるために，$\boldsymbol{W}'$ の成分を一部計算しておくと,

$$\begin{aligned}(W')^{11}&=\mathsf{c}^2W^{11}+\mathsf{cs}\left(W^{21}+W^{12}\right)+\mathsf{s}^2W^{22}\\ (W')^{21}&=\mathsf{c}^2W^{21}+\mathsf{cs}\left(-W^{11}+W^{22}\right)-\mathsf{s}^2W^{12}\\ (W')^{12}&=\mathsf{c}^2W^{12}+\mathsf{cs}\left(-W^{11}+W^{22}\right)-\mathsf{s}^2W^{21}\end{aligned}$$

であり，確かにテンソルの変換則と一致している.

一般の場合のテンソル変換則と行列の相似変換の同値性はテンソル代数の教科書を参考にされたい.

8.3　1 階から 2 階へ

ベクトル x^i は

$$(x')^i=T_j^ix^j$$

と変換を受けるから，1 階テンソルである．スカラ s は

$$s'=s$$

であるので，0 階テンソルと定義する.

ところで，1 階テンソル 2 個から 2 階テンソル 1 個を作り出すことができる．いま x^i および y^j が 1 階テンソルとすると，

$$W^{ij} = x^i y^j$$

なる W^{ij} は 2 階テンソルである．ベクトル風の記号を用いて，

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}$$

と書く場合もある．この証明はテンソル代数やテンソル解析の教科書の冒頭に必ず載っている．

なぜ 2 階テンソルが 1 階テンソル（ベクトル）から合成されることを調べたかというと，2 階テンソルもまたベクトル空間を張るということを主張したかったからである．1 階 3 元テンソル（3 次元ベクトル）2 個からなる 2 階テンソルは 3 の自乗で 9 次元のベクトル空間を張ることになる．すなわち，テンソルもまたベクトルなのである．

次の節では逆にベクトルの階段を降りてみる．ただし，半分だけ降りる．

8.4　0 階と 1 階のあいだ？

第 6 章では 3 次元ベクトルの回転が $SO(3)$ 行列（3×3 特殊直交行列）では線形変換（1 次変換），$SU(2)$ 行列では相似変換で表されることを見た．では，$SU(2)$ 行列で線形変換を受ける量 $\boldsymbol{\psi}$ はあるだろうか．

スカラを 0 階テンソル，ベクトルを 1 階テンソルと呼ぶことにして表 4 [p.68] のように並べてみると，ここで我々が探しているものは 0 階テンソルと 1 階テンソルの間にある，1/2 階テンソルのようなものであることがわかる．それはスピノールと呼ばれる．

$SU(2)$ 行列 U を使って，

$$|\,\boldsymbol{\psi}'\,\rangle = U\,|\,\boldsymbol{\psi}\rangle$$

と変化する複素 2 成分量

$$|\,\boldsymbol{\psi}\,\rangle \equiv \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix};\ \psi^i \in \mathbb{C};\ i \in \{1,2\} \qquad (27)$$

を考えてみる．この $|\,\boldsymbol{\psi}\rangle$ がスピノールである．$|\,\boldsymbol{\psi}\rangle$ はケットと似ているのでケットスピノールと呼びたくなるが，実際は反変スピノールと呼ぶ．スピノールが式 (27) で与えられるとき，ブラ風のスピノール $\langle\boldsymbol{\psi}\,|$ を

$$\langle\,\boldsymbol{\psi}\,| \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \end{pmatrix} \quad \ldots\textbf{定義}$$

と定義しておく．このとき計量テンソルのような係数 ϵ_{ij} でもって

$$\psi_i = -\epsilon_{ij}\psi^j \quad \ldots\textbf{定義}$$

と添え字を上下させる．ただし，スピノールの場合は，

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \ldots\textbf{定義}$$

とする．ブラ風スピノールは共変スピノールと呼ぶ．共変スピノールから反変スピノールへは

$$\psi^i = \epsilon^{ij}\psi_j;\ \epsilon^{ij} \equiv \epsilon_{ij}$$

で戻ることができる．まとめておくと，

$$|\,\boldsymbol{\psi}\,\rangle = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \langle\,\boldsymbol{\psi}\,| = \begin{pmatrix} -\psi^2 & \psi^1 \end{pmatrix} \qquad (28)$$

である．

スピノールの際だった特徴は，その変換性にある．一般にテンソルは 2π 回転で元に戻る．すなわち，

$$T(2\pi)\,|\,\boldsymbol{x}\,\rangle = |\,\boldsymbol{x}\,\rangle$$

である．しかし，スピノールは 2π 回転で符号が入れ替わる．すなわち，

$$U(2\pi)\,|\,\boldsymbol{\psi}\,\rangle = -1\,|\,\boldsymbol{\psi}\,\rangle$$

である．これは i 軸まわりの回転行列 U_i が

$$U_i(2\pi) = -\mathbf{1};\ i \in \{1,2,3\}$$

であることを確かめればすぐにわかる．

表 4: 変換量はどう変換されるか

変換量	$SO(3)$	$SU(2)$
0 階テンソル（スカラ）	$s' = s$	$s' = s$
1/2 階テンソル？	—	$\boldsymbol{\psi}' = U\boldsymbol{\psi}$
1 階テンソル	$\boldsymbol{x}' = T\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{\xi}' = U\boldsymbol{\xi}U^\dagger$
2 階テンソル	$\boldsymbol{W}' = T\boldsymbol{W}T^{\mathrm{t}}$	$\ldots$

少しだけ深い話 ϵ_{ij} からマイナス符号を引き出した理由は，次のようなものである．スピノール $\boldsymbol{\psi}$ の転置 $\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{t}}$ を考えると，本章に登場する s および x^i はそれぞれ

$$s = \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\chi}$$
$$x^i = \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\sigma}^i\boldsymbol{\chi}$$

と $\boldsymbol{\epsilon}$ を用いて書ける．また，

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\chi})^{\mathrm{t}}$$

は 3 次元ベクトルのエルミート表示に他ならない．$\boldsymbol{\xi}$ が 3 次元ベクトルのエルミート表示であることは

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi}' &= \boldsymbol{\psi}'(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\chi}')^{\mathrm{t}} \\
&= (U\boldsymbol{\psi})(\boldsymbol{\epsilon}U\boldsymbol{\chi})^{\mathrm{t}} \\
&= (U\boldsymbol{\psi})(U^*\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\chi})^{\mathrm{t}} \ldots (\boldsymbol{\epsilon}U = U^*\boldsymbol{\epsilon}) \\
&= (U\boldsymbol{\psi})((\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\chi})^{\mathrm{t}}\, U^\dagger) \ldots \left((AB)^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}\right) \\
&= U(\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{t}})U^\dagger \\
&= U\boldsymbol{\xi}U^\dagger
\end{aligned}$$

であることから納得できる．これが ϵ_{ij} からマイナス符号を引き出した理由である（ではなぜ転置スピノールの流儀にあわせるのかと言えば，この場合歴史的経緯に逆らっても得るものが少ないからである）． ■

8.5 スカラとベクトルの合成

2 個のスピノール $\boldsymbol{\psi}$ と $\boldsymbol{\chi}$ のスカラ積は本当にスカラである（後で証明する）．

$$\begin{aligned}
s &= \langle\,\boldsymbol{\psi} \mid \boldsymbol{\chi}\,\rangle \\
&= \psi^1\chi^2 - \psi^2\chi^1
\end{aligned}$$

この s は回転変換に対して不変である．ところで上式は

$$s = \langle\,\boldsymbol{\psi} \mid \mathbf{1} \mid \boldsymbol{\chi}\,\rangle$$

の $\mathbf{1}$ を省略したものと見ることもできる．($\boldsymbol{\sigma}^0 \equiv \mathbf{1}$ とする場合もある．この場合，エルミート行列 H は全く形式的に

$$H = \boldsymbol{\sigma}^i u_i;\ i \in \{0, 1, 2, 3\}$$

と書くことができる.）実際単位行列 $\mathbf{1}$ の代わりにパウリ行列 $\boldsymbol{\sigma}^i$ を入れてやると，

$$x^i = \langle\,\boldsymbol{\psi} \mid \boldsymbol{\sigma}^i \mid \boldsymbol{\chi}\,\rangle$$

が出てくるが，x^i はベクトルとしての変換性を示す（後で限定的に証明する）．成分 x^i について書き下しておくと，

$$\begin{aligned}
x^1 &= \psi^1\chi^1 - \psi^2\chi^2 \\
x^2 &= [\![0, (\psi^1\chi^1 + \psi^2\chi^2)]\!] \\
x^3 &= -\left(\psi^1\chi^2 + \psi^2\chi^1\right)
\end{aligned}$$

である．

s および x^i の変換性が本当かどうかは，

$$\mid \boldsymbol{\psi}'\,\rangle = U(\theta) \mid \boldsymbol{\psi}\,\rangle$$
$$\mid \boldsymbol{\chi}'\,\rangle = U(\theta) \mid \boldsymbol{\chi}\,\rangle$$

としておいて，

$$\begin{aligned}
s' &= s \\
\mid \boldsymbol{x}'\,\rangle &= T(\theta) \mid \boldsymbol{x}\,\rangle \qquad (29)
\end{aligned}$$

が導かれることを確認すればよい．念のため，式 (29) はテンソル形式で書けば

$$(x')^i = T^i_j(\theta)x^j$$

である．

本稿では例によって 3 軸まわりの回転のみ見ておこう．3 軸まわりの θ 回転を表す $SU(2)$ 行列 $U_3(\theta)$ は

$$\bar{\mathsf{c}} \equiv \cos\frac{\theta}{2};\ \bar{\mathsf{s}} \equiv \sin\frac{\theta}{2};\ u \equiv [\![\bar{\mathsf{c}}, \bar{\mathsf{s}}]\!]$$

とおくと，

$$\begin{aligned} U_3(\theta) &= [\![\bar{\mathsf{c}}, \boldsymbol{\sigma}^3\bar{\mathsf{s}}]\!] \\ &= \begin{pmatrix} [\![\bar{\mathsf{c}}, \bar{\mathsf{s}}]\!] & 0 \\ 0 & [\![\bar{\mathsf{c}}, -\bar{\mathsf{s}}]\!] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であった．一方，$SO(3)$ 行列の方は，

$$T_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であったことを思い出しておこう．

U_3 によって回転されたスピノール $|\,\boldsymbol{\psi}'\,\rangle$ は

$$\begin{aligned} |\,\boldsymbol{\psi}'\,\rangle &= U_3\,|\,\boldsymbol{\psi}\,\rangle \\ &= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u\psi^1 \\ u^*\psi^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり，その共変スピノール版は式 (28) [p.67] より

$$\langle\,\boldsymbol{\psi}'\,| = \begin{pmatrix} -u^*\psi^2 & u\psi^1 \end{pmatrix}$$

である．ここで $s', (x')^1, (x')^2$ について調べてみると，

$$\begin{aligned} s' &= \langle\,\boldsymbol{\psi}'\,|\,\boldsymbol{\chi}'\,\rangle \\ &= \begin{pmatrix} -u^*\psi^2 & u\psi^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u\chi^1 \\ u^*\chi^2 \end{pmatrix} \\ &= uu^*\psi^1\chi^2 - uu^*\psi^2\chi^1 \\ &= \left(\bar{\mathsf{c}}^2 + \bar{\mathsf{s}}^2\right)\psi^1\chi^2 - \left(\bar{\mathsf{c}}^2 + \bar{\mathsf{s}}^2\right)\psi^2\chi^1 \\ &= \psi^1\chi^2 - \psi^2\chi^1 \\ &= s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x')^1 &= \langle\,\boldsymbol{\psi}'\,|\,\boldsymbol{\sigma}^1\,|\,\boldsymbol{\chi}'\,\rangle \\ &= \begin{pmatrix} -u^*\psi^2 & u\psi^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u\chi^1 \\ u^*\chi^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -u^*\psi^2 & u\psi^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^*\chi^2 \\ u\chi^1 \end{pmatrix} \\ &= u^2\psi^1\chi^1 - (u^*)^2\psi^2\chi^2 \\ &= [\![\bar{\mathsf{c}}, \bar{\mathsf{s}}]\!]^2\psi^1\chi^1 - [\![\bar{\mathsf{c}}, -\bar{\mathsf{s}}]\!]^2\psi^2\chi^2 \\ &= \left(\bar{\mathsf{c}}^2 - \bar{\mathsf{s}}^2\right)\left(\psi^1\chi^1 - \psi^2\chi^2\right) \\ &\qquad + \boldsymbol{i}2\bar{\mathsf{c}}\bar{\mathsf{s}}\left(\psi^1\chi^1 + \psi^2\chi^2\right) \\ &= \left(\bar{\mathsf{c}}^2 - \bar{\mathsf{s}}^2\right)x^1 + 2\bar{\mathsf{c}}\bar{\mathsf{s}}x^2 \\ &= \cos\theta x^1 + \sin\theta x^2 \\ &= T^1_i(\theta)x^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x')^2 &= \langle\,\boldsymbol{\psi}'\,|\,\boldsymbol{\sigma}^2\,|\,\boldsymbol{\chi}'\,\rangle \\ &= \begin{pmatrix} -u^*\psi^2 & u\psi^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{i} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u\chi^1 \\ u^*\chi^2 \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{i}\begin{pmatrix} -u^*\psi^2 & u\psi^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -u^*\chi^2 \\ u\chi^1 \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{i}\left(u^2\psi^1\chi^1 + (u^*)^2\psi^2\chi^2\right) \\ &= \boldsymbol{i}\left([\![\bar{\mathsf{c}}, \bar{\mathsf{s}}]\!]^2\psi^1\chi^1 + [\![\bar{\mathsf{c}}, -\bar{\mathsf{s}}]\!]^2\psi^2\chi^2\right) \\ &= -2\bar{\mathsf{c}}\bar{\mathsf{s}}\left(\psi^1\chi^1 - \psi^2\chi^2\right) \\ &\qquad + \boldsymbol{i}\left(\bar{\mathsf{c}}^2 - \bar{\mathsf{s}}^2\right)\left(\psi^1\chi^1 + \psi^2\chi^2\right) \\ &= -2\bar{\mathsf{c}}\bar{\mathsf{s}}x^1 + \left(\bar{\mathsf{c}}^2 - \bar{\mathsf{s}}^2\right)x^2 \\ &= -\sin\theta x^1 + \cos\theta x^2 \\ &= T^2_i(\theta)x^i \end{aligned}$$

である．

確かに s はスカラとして変換しており，x^1, x^2 についてまとめると

$$(x')^i = T^i_j(\theta) x^j;\ i,j \in \{1,2,3\}$$

なので，$x^i = \langle \boldsymbol{\psi} \mid \boldsymbol{\sigma}^i \mid \boldsymbol{\chi} \rangle$ はやはりベクトルとして 3 軸まわりの回転変換を受けている．すなわち，スピノール 2 個からベクトル 1 個とスカラ 1 個が合成できたのである．

8.6 余談：スピノールのテンソル積

見ての通り，2 個の 2 成分スピノール $\boldsymbol{\psi}$ と $\boldsymbol{\chi}$ から，1 個のスカラ s と 1 個の 3 成分 3 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ が合成できた．ここで，2 個のスピノールのテンソル積を

$$M^i_j \equiv \psi_j \chi^i$$

として，

$$M \equiv \begin{pmatrix} M^1_1 & M^1_2 \\ M^2_1 & M^2_2 \end{pmatrix}$$

とすると，次のように M はベクトルとスカラに分解できる．

$$\begin{aligned}
M &= \begin{pmatrix} \psi_1\chi^1 & \psi_2\chi^1 \\ \psi_1\chi^2 & \psi_2\chi^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\psi^2\chi^1 & \psi^1\chi^1 \\ -\psi^2\chi^2 & \psi^1\chi^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} \psi^1\chi^2 + \psi^2\chi^1 & 2\psi^1\chi^1 \\ -2\psi^2\chi^2 & -\left(\psi^1\chi^2 + \psi^2\chi^1\right) \end{pmatrix} + \mathrm{tr}M\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -x^3 & [\![-x^1, x^2]\!] \\ [\![-x^1, -x^2]\!] & x^3 \end{pmatrix} + s\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\boldsymbol{\xi} + s\right)
\end{aligned}$$

ここに $\boldsymbol{\xi}$ は式 (18) [p.47] に登場するベクトル $\boldsymbol{\xi}$ であり，s は「セットでついてくる」スカラ量である．

上式は 2 個のスピノールのテンソル積で作られた 2 階スピノールが，変換性の異なる 2 個の量，すなわち 3 次元ベクトルと（1 次元）スカラとに分解されることを意味している．このようにある量を「約して」しまうことで，その量の座標系のとりかたによらない幾何学的性質を引き出すことができるのである．

我々は幾何学に深入りしたわけではないが，それでもいまクォータニオンの回転角になぜ 1/2 を掛けるのか，なぜスカラとベクトルを抱きあわせて一つの数にするのか，理解したわけである．クォータニオンの裏側には 2 個のスピノールが隠れていたわけである．

少しだけ深い話 この章のはじめで「クォータニオンがなぜクォータニオンとして働くか」を見ると言ったが，これは少々言いすぎたかもしれない．我々はせいぜいクォータニオンの下部構造を見たに過ぎないのである．ではクォータニオン，テンソル，ベクトルの下部構造としてのスピノールにはさらにその下部構造がないのかと勘ぐりたくなる．だが我々は安心してもよさそうである．スピノールは終着点である．もう裏にはなにもない． ■

✓この章のまとめ

1. ベクトルのテンソル積はより高次元のベクトル空間を張る．
2. ベクトル（1 階テンソル）のテンソル積（すなわちテンソル）はベクトルとは異なった変換性を示す．1 階テンソルの変換性は $SO(3)$ の世界では線形代数の線形変換に相当するのに対し，2 階テンソルの変換性は線形代数の相似変換に相当する．
3. 1 階テンソルは $SU(2)$ の世界では相似変換を受ける．
4. $SU(2)$ の世界で線形変換を受ける量はスピノールである．
5. スピノールのテンソル積からスカラ（0 階テンソルとも言う）と 1 階テンソルを合成できる．

9　これまでとこれからと

線形代数方程式からはじめた我々のコースは，クォータニオンにたどり着いたところでいったん終了する．我々のコースは言わば

- **実行列と複素数 — 第 1 章**
- **実数による 2 次元回転 — 第 2 章**
- **ベクトルとフォーム — 第 3 章**
- **複素数による 2 次元回転 — 第 4 章**
- **オイラー角による 3 次元回転 — 第 5 章**
- **複素行列による 3 次元回転 — 第 6 章**
- **クォータニオンによる 3 次元回転— 第 7 章**
- **スピノール — 第 8 章**

を豊かに並べた料理であった．クォータニオンの存在の裏側には，このような仕組みが隠されていたのである．

9.1　ことのはじまり

ふりかえみれば，多元連立線形方程式を解くために行列というものが考え出されたのであった．我々は行列を

$$M = \left[\ddots\right] \quad \ldots \quad \text{行列}$$

と書いた．

一方，高次方程式を解いてみたら複素数という概念が登場した．我々は複素数を

$$z = [\![a, b]\!] \quad \ldots \quad \text{複素数}$$

と一貫して書いてきた．

ところで，初歩の力学からベクトルという考え方が浮かび上がってくる．初歩的なベクトルは偶然にも紙の上では行列と同じように書ける．しかし，これらふたつの考え方は明確に区別されなければならない．我々はベクトルを

$$\boldsymbol{x} = \left(\ddots\right) \quad \ldots \quad \text{ベクトル}$$

と書いて行列から区別してきた．

この 3 個の概念，行列，ベクトル，複素数は出発点が異なっていた．しかし，クォータニオンなる数のからくりを調べると，この 3 個の概念が密接に絡みあって出来上がっていることが見てとれる．すなわち，ベクトルは複素数（2 次元）または複素行列（3 次元）で表され，それらはやがて数（クォータニオン）としての性質を帯びる方法を手にする．

ベクトルは複素数（または複素行列）で表したほうがより豊かに表現可能であることを，我々は発見している．その一つはクォータニオンであり，コンピュータグラフィックスには不可欠な数学である．より深い発見はスピノールであり，その存在意義は量子力学に存分に現れている．つまり,（テンソルではなく）スピノールによってのみ合理的かつ簡潔に記述可能な自然法則があるのである．そしてなにより，スピノール自身が美しい．

9.2 クォータニオンだけではなく

コンピュータグラフィックスに使われる数学はクォータニオンだけではない．低解像度ジオメトリに高解像度テクスチャを合成するテクスチャマッピング技術が今後いつまで使われるかわからないが，このテクスチャマッピングは数学で言う同相微分写像である．現在のところ幾何学的に正しい写像を行っていることは稀であるが，いずれは正しい写像（一般座標変換）が求められるかもしれない．一般座標変換は，工学分野では役にたつフィールドがほとんどないため，ふつうは工学系の大学院でも教わらない（もちろん工学系なら学部からふんだんに登場するフーリエ変換もまたテクスチャマッピングに使われているので，大学教育が無意味なわけではない）．このような学校で教わらない数学がコンピュータグラフィックスで使われる機会は増えるかもしれない．

また，本稿執筆中に開催された学会 *Siggraph 2002* では,「新しい数」を用いた，クォータニオン代数では不可能な回転と平行移動の同時補間を可能とする代数を発明（発見）したとの発表があった（文献 [18]）．もっとも新しい「数」といっても，代数を基本としている以上それは必ず複素行列で書ける．新しい数学を系統的に理解可能にするところに，抽象数学をおろそかに出来ない理由がある（かといって具象数学を知らないとコンピュータは動かせない）．クォータニオンを理解したからと言って，コンピュータグラフィックスにまつわる幾何学をマスタしたと言うにはまだまだ早い．少年老い易く学成り難し．

9.3 晩餐のおわりに

最後に，本稿に対する質問，間違いの指摘などは

kanaya@computer.org

まで寄せてもらえるとありがたい．

追記 1.0

歳とともにお節介症候群というものは避けられないものらしい．食後のデザートとしてリー代数とオイラーの定理を載せることにした．どうぞ召しあがれ．

2002-10-16

追記 1.1

本文中では匂いをかいだだけのフォーム（微分形式）についても，付録に載せることにした．

2003-01-04

本稿の組版には TEX, AMS-LATEX, pLATEX を，編集には XEmacs, Canna, Tgif をそれぞれ FreeBSD と XFree86 上で用いた．これらのソフトウェア，並びにこれらのソフトウェアの元になったコード，ツール，ライブラリ，ドキュメント類を無償で公開されている方々に感謝する．

A　リー代数

群は幾何学と代数学を結びつける．この付録では群論の基礎であるリー代数について，ごく触りの部分だけ述べる．

A.1　無限小変換とリー代数

ある行列 $\boldsymbol{A}$ の指数関数 $\exp(t\boldsymbol{A})$ が群 $\mathbf{G}$ の元であるとしよう．

$$\exp(t\boldsymbol{A}) \in \mathbf{G};\ t \in \mathbb{R} \tag{30}$$

これを満たす行列 $\boldsymbol{A}$ の集合を群 $\mathbf{G}$ のリー代数（リー環）と呼び $\mathbf{L}$ で表す．

例えば群 $\mathbf{G}$ として $SO(2)$ 群を考えよう．$SO(2)$ 群の元 $T_{\langle 2\mathrm{D}\rangle}(t)$ は

$$T_{\langle 2\mathrm{D}\rangle}(t) = \exp(t\boldsymbol{A});\quad \text{where } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

と書けるので，確かに式 (30) を満たしている．

群 $\mathbf{G}$ が $SO(3)$ 群であったとすると，その元 $T_\mu(t)$ は

$$T_\mu(t) = \exp(t\boldsymbol{A}_\mu);\quad \text{where } \boldsymbol{A}_\mu = \boldsymbol{J}_\mu;\ \mu \in \{1, 2, 3\}$$

ただし，

$$\boldsymbol{J}_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{J}_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{J}_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と書け，やはり式 (30) を満たしている．この場合行列 $\boldsymbol{A}$ は集合

$$\mathbf{J} \equiv \{\boldsymbol{J}_1, \boldsymbol{J}_2, \boldsymbol{J}_3\}$$

の元であるから，$SO(3)$ 群のリー代数（対応する小文字を使って $so(3)$ と書く）は $\mathbf{J}$ である．

次にリー代数が群 $\mathbf{G}$ の無限小変換を決定していることを見てみよう．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= T(\varDelta t)\boldsymbol{x} \\ &= \exp(\varDelta t\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

ここで

$$|\varDelta t| \ll 1$$

とすると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= (\mathbf{1} + \varDelta t\boldsymbol{A} + (\varDelta t \text{ の 2 次以上の項}))\,\boldsymbol{x} \\ &\simeq \boldsymbol{x} + \varDelta t\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

となる．

$$\varDelta\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x} \quad \ldots\textbf{定義}$$

とすると

$$\varDelta\boldsymbol{x} = \varDelta t\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

となり，行列 $\boldsymbol{A}$ が（すなわちリー代数が）無限小変換の構造を決定していることがわかる．もちろん上式は $\varDelta t \to 0$ の極限では

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

のことである．

少しだけ深い話　時間 t に関する関数 $\phi(t)$ の微小時間 $\varDelta t$ 後の値 $\phi(t+\varDelta t)$ が，関数 $\phi(t)$ の時刻 0 から時刻 t までの間までの値にのみ依存する場合，関数 $\phi(t)$ は因果的と言う．関数 ϕ は次のように書ける．

$$\phi(t+\varDelta t) = \mathcal{A}(t, \phi(\tau))$$

関数 $\mathcal{A}$ はおそらく相当に複雑であろうが，もし運よく，

$$\phi(t+\varDelta t) = \phi(t) + \varDelta t A(t)\phi(t)$$

なる関数 A を見付けられればこれは奇跡的な儲けものであり，関数 ϕ の振舞いがわかったと言っても過言ではない（いや，過言であろう）．物理学の目的のひとつは自然を最もうまく記述できる因果的な ϕ と A の組を見付けることである．■

A.2 リー代数ベクトル空間

群 $\mathbf{G}$ のリー代数 $\mathbf{L}$ は次の性質を持っている．

- 性質 I

$$a\boldsymbol{A} \in \mathbf{L}; \quad \text{where } \boldsymbol{A} \in \mathbf{L} \text{ and } a \in \mathbb{R}$$

- 性質 II

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \in \mathbf{L}; \quad \text{where } \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{L}$$

性質 I は式 (30) [p.75] より明らかであるが，性質 II のほうは少しやっかいで，性質 II の証明は

$$\begin{aligned}\exp(\Delta t\boldsymbol{A})\exp(\Delta t\boldsymbol{B}) &= (\mathbf{1} + \Delta t\boldsymbol{A})(\mathbf{1} + \Delta t\boldsymbol{B}) \\ &\quad + (\Delta t \text{ の 2 次以上の項}) \\ &\simeq \mathbf{1} + \Delta t(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \\ &\quad + (\Delta t \text{ の 2 次以上の項}) \\ &\simeq \exp(\Delta t(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}))\end{aligned}$$

とできる．ただし，

$$|\Delta t| \ll 1$$

の場合に限る．

リー代数の性質 I および II から，リー代数 $\mathbf{L}$ がベクトル空間を張ることがわかる．リー代数はベクトル空間であるから，基底ベクトルを決めておくと便利であろう．リー代数 $\mathbf{L}$ の基底ベクトルの個数（すなわちベクトル空間の次元）は リー代数の次元 と呼び，

$$\dim \mathbf{L}$$

と書く．リー代数 $\mathbf{L}$ の基底ベクトルは $\dim \mathbf{L}$ 個あるから，例えば

$$\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2, \ldots, \boldsymbol{K}_n; \quad \text{where } n = \dim \mathbf{L}$$

と書けるであろう．すると，リー代数 $\mathbf{L}$ の元 $\boldsymbol{A}$ は必ず

$$\boldsymbol{A} = \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu \boldsymbol{K}_\mu; \quad \text{where } a_\mu \in \mathbb{R}$$

と書ける．基底ベクトル $\boldsymbol{K}_\mu$ はリー代数 $\mathbf{L}$ の（または群 $\mathbf{G}$ の）生成子 と呼ばれる．

A.3 構造定数

これから 交換子積 を使う．交換子積は

$$[A, B] \equiv AB - BA \quad \ldots \textbf{定義}$$

という二項演算である．

リー代数にはもう一つ次の性質がある．

- 性質 III

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \in \mathbf{L}; \quad \text{where } \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{L}$$

性質 III の証明は性質 II と同様に，無限小変換を考えればできる（ただし Δt の 2 次の項まで必要である）．

性質 III より，

$$[\boldsymbol{K}_\mu, \boldsymbol{K}_\nu] \in \mathbf{L}$$

であるから，必ず

$$[\boldsymbol{K}_\mu, \boldsymbol{K}_\nu] = \sum_{\lambda=1}^{n} f_{\mu\nu\lambda} \boldsymbol{K}_\lambda; \quad \text{where } f_{\mu\nu\lambda} \in \mathbb{R}$$

と書けるはずである．実際，実数 $f_{\mu\nu\lambda}$ はリー代数 $\mathbf{L}$ の 構造定数 と呼ばれる．交換子積の性質

$$[\boldsymbol{K}_\mu, \boldsymbol{K}_\nu] = -[\boldsymbol{K}_\nu, \boldsymbol{K}_\mu]$$

より，構造定数には

$$f_{\mu\nu\lambda} = -f_{\nu\mu\lambda}$$

という反対称関係がある．

具体的にリー代数 $so(3)$ の構造定数を調べてみよう．それには行列 $\boldsymbol{J}_\mu$ の交換関係を調べればよい（ところで基底ベクトル $\boldsymbol{J}_\mu$ の直交性は容易に確かめられるので，確かめておいてもらいたい）．行列 $\boldsymbol{J}_\mu$ の交換関係は，

$$[\boldsymbol{J}_\mu, \boldsymbol{J}_\nu] = -\sum_{\lambda=1}^{3} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \boldsymbol{J}_\lambda$$

である．ここに レビ・チビタ (Levi-Civita) 記号

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mu\nu\lambda} &\equiv \operatorname{sgn}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 \\ \mu & \nu & \lambda\end{bmatrix} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{偶置換} \\ -1 & \text{奇置換} \\ 0 & \text{同じ添字が 2 回以上現れた}\end{cases}\end{aligned}$$

を用いた．(具体的に書くと

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$$
$$\varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1$$
$$\varepsilon_{112} = \varepsilon_{121} = \varepsilon_{211} = 0; \ldots$$

である.）よって $so(3)$ の構造定数は

$$f_{\mu\nu\lambda} = -\varepsilon_{\mu\nu\lambda}$$

である．

この調子で $su(2)$ の構造定数も調べてみる．$SU(2)$ の元は特殊ユニタリ行列であるから，$su(2)$ の元はトレースが 0 の反エルミート行列でなければならない．トレースが 0 の反エルミート行列 $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}a_3 & a_2 + \boldsymbol{i}a_1 \\ -a_2 + \boldsymbol{i}a_1 & -\boldsymbol{i}a_3 \end{pmatrix}$$

と書ける．基底ベクトルとして，

$$\boldsymbol{\Sigma}_\mu = \frac{1}{2}\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}_\mu$$

を用いると（係数 1/2 を掛けたのは生成子各々のノルムを 1 にするため）

$$\boldsymbol{A} = 2\sum_{\mu=1}^{3} a_\mu \boldsymbol{\Sigma}_\mu$$

となってうまくいく（もちろんパウリ行列は直交するので，基底ベクトル $\boldsymbol{\Sigma}_\mu$ も直交する）．生成子 $\boldsymbol{\Sigma}_\mu$ の交換関係を求めると

$$[\boldsymbol{\Sigma}_\mu, \boldsymbol{\Sigma}_\nu] = -\sum_{\lambda=1}^{3} \varepsilon_{\mu\nu\lambda}\boldsymbol{\Sigma}_\lambda$$

と求まる．よって $su(2)$ の構造定数は

$$f_{\mu\nu\lambda} = -\varepsilon_{\mu\nu\lambda}$$

である．

$so(3)$ と $su(2)$ は同じ構造定数 $-\varepsilon_{\mu\nu\lambda}$ を持っていたのである．すなわち $so(3)$ と $su(2)$ は同一のリー代数である．もっとも，$so(3)$ の場合は基底ベクトル（生成子）が，

$$\mathbf{J} = \{\boldsymbol{J}_1, \boldsymbol{J}_2, \boldsymbol{J}_3\}$$

であったのに対し，$su(2)$ の場合は

$$\boldsymbol{\Sigma} = \{\boldsymbol{\Sigma}_1, \boldsymbol{\Sigma}_2, \boldsymbol{\Sigma}_3\}\,; \quad \text{where } \boldsymbol{\Sigma}_\mu = \frac{1}{2}\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}_\mu$$

という違いがあった．

生成子の組は表現と言う．$\mathbf{J}$ も $\boldsymbol{\Sigma}$ も同じ $su(2)$ の表現である．$\mathbf{J}$ は 3×3 行列なので $su(2)$ の 3 次元表現，$\boldsymbol{\Sigma}$ は 2×2 行列なので $su(2)$ の 2 次元表現とも言う．

少しだけ深い話　この項で登場した交換子積にはもうひとつ

$$\{A, B\} \equiv AB + BA \quad \ldots \textbf{定義}$$

というバリエーション（反交換子積）がある．■

A.4　随伴表現

構造定数と生成子の間には何か関係がないだろうか．例えば，$so(3)$ を考えると偶然にも

$$(\boldsymbol{J}_\mu)_{ij} = -f_{\mu ij}$$

と書くことができる．ここに

$$\boldsymbol{A}_\mu = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{A}_\mu)_{11} & (\boldsymbol{A}_\mu)_{12} & \cdots \\ (\boldsymbol{A}_\mu)_{21} & (\boldsymbol{A}_\mu)_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

と書くと約束する．実はこれは偶然ではない．リー代数の構造定数から作られる表現を随伴表現と呼ぶ．

まず，交換子積に関するヤコビ (Jacobi) の恒等式を紹介する．

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

この恒等式に生成子を代入してみる．

$$[\boldsymbol{K}_1, [\boldsymbol{K}_2, \boldsymbol{K}_3]] + [\boldsymbol{K}_2, [\boldsymbol{K}_3, \boldsymbol{K}_1]] + [\boldsymbol{K}_3, [\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2]] = 0 \quad (31)$$

構造定数の定義式

$$[\boldsymbol{K}_\mu, \boldsymbol{K}_\nu] = \sum_{\lambda=1}^{n} f_{\mu\nu\lambda}\boldsymbol{K}_\lambda$$

を用いると，式 (31) は

$$\sum_k f_{\nu ik}\left[\boldsymbol{K}_\mu, \boldsymbol{K}_k\right] + \sum_k f_{i\mu k}\left[\boldsymbol{K}_\nu, \boldsymbol{K}_k\right] + \sum_k f_{\mu\nu k}\left[\boldsymbol{K}_i, \boldsymbol{K}_k\right] = 0$$

と展開でき，さらに

$$\sum_{jk} f_{\nu ik} f_{\mu kj} \boldsymbol{K}_j + \sum_{jk} f_{i\mu k} f_{\nu kj} \boldsymbol{K}_j + \sum_{jk} f_{\mu\nu k} f_{ikj} \boldsymbol{K}_j = 0$$

と展開できる．ベクトル $\boldsymbol{K}_j$ が線形独立なので，上式は結局

$$\sum_k f_{\nu ik} f_{\mu kj} + \sum_k f_{i\mu k} f_{\nu kj} + \sum_k f_{\mu\nu k} f_{ikj} = 0 \quad (32)$$

と同値である．

$so(3)$ のときにならって，

$$\left(\boldsymbol{\Lambda}_\mu\right)_{ij} = -f_{\mu ij}$$

とおいてみる．行列 $\boldsymbol{\Lambda}_\mu$ が $N \times N$ 行列とすると，行列 $\boldsymbol{\Lambda}_\mu$ も N 個である．式 (32) の第 1 項を $\boldsymbol{\Lambda}_\nu$ で書き直してみると，

$$\sum_k f_{\nu ik} f_{\mu kj} = \sum_k \left(\boldsymbol{\Lambda}_\nu\right)_{ik}\left(\boldsymbol{\Lambda}_\mu\right)_{kj} = \left(\boldsymbol{\Lambda}_\nu \boldsymbol{\Lambda}_\mu\right)_{ij}$$

となり，行列 $\boldsymbol{\Lambda}_\nu$ と行列 $\boldsymbol{\Lambda}_\mu$ の積に到達する．式 (32) の第 2 項については同様に

$$\sum_k f_{i\mu k} f_{\nu kj} = -\left(\boldsymbol{\Lambda}_\mu \boldsymbol{\Lambda}_\nu\right)_{ij}$$

と変形することができる（構造定数の反対称性を使う必要がある）．第 3 項を，

$$\sum_k f_{\mu\nu k} f_{ikj} = -\sum_k f_{\mu\nu k} f_{kij} = \sum_k f_{\mu\nu k}\left(\boldsymbol{\Lambda}_k\right)_{ij}$$

と変形してやると，式 (32) は

$$\boldsymbol{\Lambda}_\nu \boldsymbol{\Lambda}_\mu - \boldsymbol{\Lambda}_\mu \boldsymbol{\Lambda}_\nu + \sum_{k=1}^N f_{\mu\nu k} \boldsymbol{\Lambda}_k = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\left[\boldsymbol{\Lambda}_\mu, \boldsymbol{\Lambda}_\nu\right] = \sum_{k=1}^N f_{\mu\nu k} \boldsymbol{\Lambda}_k$$

と，リー代数の構造定数の定義式にたどり着く．すなわち，集合

$$\mathbf{\Lambda} = \{\boldsymbol{\Lambda}_1, \boldsymbol{\Lambda}_2, \ldots, \boldsymbol{\Lambda}_N\}; \quad \text{where } \left(\boldsymbol{\Lambda}_\mu\right)_{ij} = -f_{\mu ij}$$

はリー代数の N 次元表現なのである．生成子 $\mathbf{\Lambda}$ は随伴表現 と呼ばれる．$so(3)$ の 3 次元表現は $su(2)$ の随伴表現のひとつなのであった．

少しだけ深い話 わざわざ $so(3)$ の「3 次元表現」とことわったのは，より高次の表現があるからである．例えば，2 階テンソルは 9 次元ベクトル空間を張るので 9 次元表現である．$SO(3)$ の n 階テンソルは $3^n \times 3^n$ 行列で変換をうけるが，この $3^n \times 3^n$ 変換行列は n 個の 3×3 変換行列のテンソル積から合成できる．そこで，$so(3)$ の場合 3×3 変換行列で表される変換を基本表現 と呼ぶのである． ■

A.5 リー代数のおわりに

このように，同じ幾何でありながら異なる代数であった $SO(3)$ と $SU(2)$ は全く代数的に統合されたのである．我々は味噌と醤油が実は同じ原材料から作られていたことに気づいたのである．リー代数はあらゆる表現のベクトルをひとつの体系にまとめる．

幾何学は数学の中でも最も歴史が深いためか，とりわけ崇高なものとされる傾向があるようだ．物理法則や代数規則の中に幾何学を発見すると，なぜか美しく見える．幾何形状の中でも円や球がとりわけ美しいと思うのは，古代からかわらぬ人間の性であろうか．文献 [14]，[15]，[16] などには 20 世紀後半の幾何学への情熱が見てとれる．もっともファインマンは物理法則を何でも幾何学に還元しようとする態度を批判している [17].

B オイラーの定理

オイラーの定理は幾何学と代数学を結びつける．この付録では虚数の指数関数から全く代数的に三角関数が見付けられることを再発見してみる．

B.1 実数の冪乗

我々はすでに実数の冪乗を知っているところからスタートする．知っているとは例えば

$$10^{3.14159}$$

が実数であることを知っているという意味である．ところで，この式を手計算するにはどうしたらよいだろうか．まず

$$\begin{aligned} 10^{3.14159} &= 10^{(3+0.14159)} \\ &= 10^3 \cdot 10^{0.14159} \end{aligned}$$

と分解する．10^3 の計算はわけないであろう．実は $10^{0.14159}$ のほうもわけないのである．もし $|x| \ll 1$ であれば，だいたい

$$10^x \simeq 1 + 2.3026x$$

なのである（このマジックナンバには純粋に代数的な方法で到達できるが，その道のりは後回しにしよう）．このように計算してみると

$$\begin{aligned} 10^{0.14159} &\simeq 1 + 2.3026 \cdot 0.14159 \\ &= 1.3260 \end{aligned}$$

となる．$10^{0.14159}$ の正しい値は

$$10^{0.14159} = 1.3855\ldots$$

であるから，

$$\frac{1.3260 - 1.3855}{1.3855} = -0.042886$$

つまり，およそ 4 パーセントのエラーで $10^{0.14159}$ の値を求めることができたことになる．

もっとよい近似を求めるにはこうすればよい．指数部の 0.14159 を 2 で割る．そのかわり，全体を 2 乗する．

$$\begin{aligned} 10^{0.14159} &= \left(10^{0.070795}\right)^2 \\ &\simeq (1 + 2.3026 \cdot 0.070795)^2 \\ &= (1.16301)^2 \\ &= 1.3526 \end{aligned}$$

こんどは

$$\frac{1.3526 - 1.3855}{1.3855} = -0.0237107$$

であるから，エラーはおよそ 2 パーセントである．

得た教訓はこうである．10^x の値を求めるには，

$$10^x = \left(10^{x/n}\right)^n; \quad \text{where } n \in \mathbb{N}$$

の関係を利用して，x をできるだけ大きな数 n で割り，$10^{x/n}$ を計算し，$10^{x/n}$ を n 回掛け合わせればよい．

さて，マジックナンバ 2.3026 にどうやってたどり着いたかを語ろう．それには表 5 [p.80] のように 10 の平方根を次々にとりさえすればよい．そうすると，10 の 1/2 乗，10 の 1/4 乗，10 の 1/8 乗といった具合に進められるが，

$$\frac{10^x - 1}{x}$$

の値は 2.3026 . . . に収束する．これがマジックナンバの正体である．

もし 10 のかわりに自然対数の底 e を使えば

$$\frac{e^x - 1}{x} \to 1 \quad (x \to 0)$$

であるから，マジックナンバは 1 である．つまり，

$$e^x \simeq 1 + x; \quad \text{where } e \equiv 2.71828\ldots$$

である．

少しだけ深い話 ある数 x の平方根を計算する最も簡単な方法のひとつは，ある数 x の平方根に近い数 y を適当に選んで x/y を求め，次に新しい y として平均 $y' = (x + (x/y))/2$ を用いればよい．これを繰り返せば極めて早く x の平方根に到達する（2 乗収束する）． ■

表 5: 10 の逐次平方根

x	10^x	$(10^x - 1)/x$
1	10	9
1/2	3.16228	4.3246
1/4	1.77828	3.1131
⋮	⋮	⋮
1/512	3.16228	2.3077
1/1024	3.16228	2.3051
⋮	⋮	⋮
1/65536	1.00004	2.3026

（出展：ファインマン物理学 I，一部改変）

B.2 虚数の冪乗

実数 y の虚数乗を考えてみる．答えが複素数であるとすると，

$$y^{\boldsymbol{i}x} = a + \boldsymbol{i}b$$

と書けるであろう．虚数単位に負の符号をつけると，

$$y^{-\boldsymbol{i}x} = a - \boldsymbol{i}b$$

となって，これも成り立ちそうである．このふたつを掛け合わせよう．

$$y^{\boldsymbol{i}x}y^{-\boldsymbol{i}x} = y^0 = 1 = (a + \boldsymbol{i}b)(a - \boldsymbol{i}b) = a^2 + b^2$$

つまり，

$$a^2 + b^2 = 1$$

という 単位円の方程式 が顔を出した．が，先を急ごう．

実数 x について，

$$e^x \simeq 1 + x; \quad \text{where } |x| \ll 1$$

であった．そこで虚数 $\boldsymbol{i}x$ についても

$$e^{\boldsymbol{i}x} \simeq 1 + \boldsymbol{i}x; \quad \text{where } |x| \ll 1$$

であると仮定しよう．こうすれば微小な x についてはの e の冪乗が計算できる．あとは $e^{\boldsymbol{i}x}$ を n 乗すれば，原理的にはどんな虚数の冪乗でも計算できるはずである．試しに $x = 0.1$ で計算すると，

$$e^{\boldsymbol{i}0.1} \simeq 1 + \boldsymbol{i}0.1$$

である．実数部と虚数部をそれぞれ自乗して和をとると，

$$1^2 + 0.1^2 = 1.01$$

であるから，およそ 1 パーセントのエラー（ノルムに関して）である．

$x = 0.1$ の場合を自乗すれば $x = 0.2$ の場合が求まる．

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{i}0.2} &= \left(e^{\boldsymbol{i}0.1}\right)^2 \\ &\simeq (1 + \boldsymbol{i}0.1)^2 \\ &= (1 - 0.01) + \boldsymbol{i}(0.1 + 0.1) \\ &= 0.99 + \boldsymbol{i}0.2 \end{aligned}$$

ここで

$$0.99^2 + 0.2^2 = 1.0201$$

であるから，エラーはおよそ 2 パーセントになった．

$x = 0.3$ の場合も同様である．

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{i}0.3} &= \left(e^{\boldsymbol{i}0.1}\right)^3 \\ &\simeq (1 + \boldsymbol{i}0.01)^3 \\ &= 0.97 + \boldsymbol{i}0.399 \end{aligned}$$

今度は

$$0.97^2 + 0.399^2 = 1.1001$$

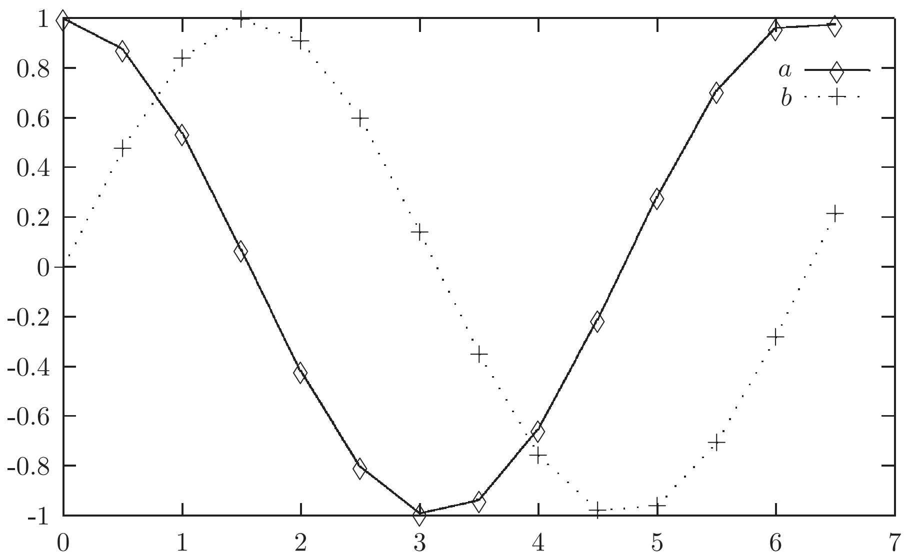
で，エラーはおよそ 10 パーセントである．

エラーが膨らまないようにもう少し注意深く計算すると，$e^{\boldsymbol{i}x}$ の値を一覧表にすることができる．

$$e^{\boldsymbol{i}x} = a(x) + \boldsymbol{i}b(x)$$

として計算し，その結果を表 6 [p.81] と図 17 [p.81] に載せた．

図示すると一目瞭然であるが，$a(x)$ はコサイン関数，$b(x)$ はサイン関数にそっくりである．実際，このようにして見付けた「代数的」サイン関数,「代数的」コサイン関数は本物の「幾何的」sin 関数,「幾何的」cos 関数と全く同じ性質を持つ．



横軸: x 縦軸: a, b ただし $e^{ix} = a(x) + ib(x)$

図 17: 自然対数の底の虚数乗

表 6: 自然対数の底の虚数乗

x	$a = \mathfrak{Re}\left\{e^{ix}\right\}$	$b = \mathfrak{Im}\left\{e^{ix}\right\}$
0	1	0
1/2	0.877583	0.479426
2/2	0.540302	0.841471
3/2	0.0707372	0.997495
4/2	−0.416147	0.909297
5/2	−0.801144	0.598472
6/2	−0.989992	0.14112
7/2	−0.936457	−0.350783
8/2	−0.653644	−0.756802
9/2	−0.210796	−0.97753
10/2	0.283662	−0.958924
11/2	0.70867	−0.70554
12/2	0.96017	−0.279415
13/2	0.976588	0.21512

（$\mathfrak{Re}$ は実数部，$\mathfrak{Im}$ は虚数部を表す.）

B.3 オイラーの定理のおわりに

我々は全く代数的に三角関数に到達した．我々は実数の自然数乗なら文句無しに受け入れられる．次に実数の実数乗（冪乗）を考えた．冪乗は直接は計算できないが，微小な冪乗をまず計算しておいて，それの自然数乗を考えると任意の冪乗を計算できる．

次に我々は実数の虚数乗を手にとる．ところが虚数の冪乗となると，冪を計算するたびに実数と虚数が絡み熔けあう．その熔けあいは優雅に弧を描き，6.28319 . . . のところで一周を完結する．この値は幾何学の言葉で言えば 4 直角である．

なんと，またも代数構造の中に幾何が隠されていたのである．数学とは我々人類が考え出した道具ではあるが，しばしば設計者の意図を超えて新たなおどろきを我々に投げ返す．

我々はあまりにも無知であるので，ときどき数学が神の意志であるかのように美しく見える．これほど知的で，これほど刺激的で，これほど調和のとれたものが他にあろうか．

　オイラーの定理

$$e^{\boldsymbol{i}x} = \cos x + \boldsymbol{i} \sin x$$

は，数ある数学公式の中で最も重要なものである．数
は，円を描く．

C　フォーム

フォームは驚くほど多くの概念を統一する．外積，重積分，ストークスの定理，ガウスの定理，などなど．本付録ではフォームの真髄である外微分演算子とウェッジ積（本稿では広義の外積を一貫してウェッジ積と呼ぶ）を解説する．この付録を読めば，クォータニオンによる回転が 3 次元空間でしか成立し得ないことが理解できよう．

C.1　微分の変数変換

実数 ϕ が位置を表す実数 x によって変化する量であるとしよう．実数 ϕ は温度でもなんでもよいが，スカラ量であるとしよう．

$$\phi = \phi(x)$$

ともかく x と ϕ の間の関係を調べたい．そこで x と ϕ の対応表をせっせと作ったとしよう．

物理学で大切なことは，過去がどうであったか（既知の x における $\phi(x)$ の値）ではなく，未来がどうなるか（未知の x における $\phi(x)$ の値）を予測することである．そのためによく用いられる方法は関数 $\phi(x)$ の 勾配 すなわち grad を求める方法である．そこで，

$$\mathrm{grad}\,\phi(x) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\phi(x)$$

が知りたいとする．ところが位置を表すのに用いた x-座標系が実は平等目盛ではなかったことに，いまさらながら気が付いたとしよう．これでは平等な勾配演算を期待できない．平等目盛を備えた X-座標系を用い，位置 X における ϕ の値 $\phi(X)$ についてもう一度表を作り直さねばならないだろうか．

否．もちろん表を作り直す必要はない．そのかわり，x-座標系と X-座標系の関係を調べるだけでよい（モノサシを並べるだけである）．

$$X = X(x)$$

さて，x と X の関係がわかればただちに $\partial\phi/\partial X$ が分かる．なぜなら，

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X}\phi$$

であるから．これが（偏）微分における変数変換である．微分法の偉大なるトリックとは上の式から ϕ の性質によらない抽象的な性質を抜き出すことである．つまり，

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X}$$

とする．

次にスカラ量 ϕ が位置を表すベクトル

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

の関数であったとしよう．このとき，

$$\phi = \phi\left(x^1, x^2\right)$$

と書く．さて，なにがしかのモノサシで作る x-座標系で

$$\mathrm{grad}\,\phi\left(x^1, x^2\right) \equiv \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x^1 \\ \partial\phi/\partial x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x^1 \\ \partial/\partial x^2 \end{pmatrix}\phi$$

を求めたとしよう．もちろん x-座標系が不平等目盛であることには後から気づく．そこで，X-座標系を正規直交座標系として，

$$\begin{aligned} X^1 &= X^1\left(x^1, x^2\right) \\ X^2 &= X^2\left(x^1, x^2\right) \end{aligned}$$

を求めたとしよう．もし x-座標系で用いたモノサシがまっすぐで，かつ直交していれば

$$\frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial X^1}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial X^1};\ \frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{\partial X^1}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial X^1}$$

でよいが，いつもはこうはいかない．斜交座標系では新しい座標系の 1 軸は古い座標系の 1 軸と 2 軸の両方の線形結合であるので

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^1} &= \frac{\partial X^1}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial X^1} + \frac{\partial X^2}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial X^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} &= \frac{\partial X^1}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial X^1} + \frac{\partial X^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial X^2} \end{aligned}$$

となる．上式は斜交座標系を仮定したが，微分演算子であるので（無限小領域を扱うので）一般座標系でもそのまま成立する．

C.2 積分の変数変換

x-座標系と X-座標系の間に次の関係（線形とは限らない）があるとする．

$$X^1 = X^1\left(x^1, x^2\right)$$
$$X^2 = X^2\left(x^1, x^2\right)$$

まずは次の形式を全く形式的に受け入れて欲しい．

$$dX^1 = \frac{\partial X^1}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial X^1}{\partial x^2}dx^2$$
$$dX^2 = \frac{\partial X^2}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial X^2}{\partial x^2}dx^2$$

（上式を

$$dX^\mu = \left(\partial_\nu X^\mu\right)dx^\nu$$

と省略して書く場合もある.）次の演算規則も全く形式的に受け入れて欲しい．

$$\left\{\begin{array}{lcl} dx^1 \wedge dx^1 & = & 0 \\ dx^2 \wedge dx^2 & = & 0 \\ dx^1 \wedge dx^2 & = & -dx^2 \wedge dx^1 \end{array}\right. \tag{33}$$

演算子 $\wedge$ に関しては、あとは普通の掛け算と同じとする．これで役者が揃った．

$dX^1 \wedge dX^2$ を計算してみる．

$$\begin{aligned} dX^1 \wedge dX^2 &= \left(\frac{\partial X^1}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial X^1}{\partial x^2}dx^2\right) \\ &\qquad \wedge \left(\frac{\partial X^2}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial X^2}{\partial x^2}dx^2\right) \\ &= \frac{\partial X^1}{\partial x^1}\frac{\partial X^2}{\partial x^1}dx^1 \wedge dx^1 \\ &\qquad + \frac{\partial X^1}{\partial x^1}\frac{\partial X^2}{\partial x^2}dx^1 \wedge dx^2 \\ &\qquad + \frac{\partial X^1}{\partial x^2}\frac{\partial X^2}{\partial x^1}dx^2 \wedge dx^1 \\ &\qquad + \frac{\partial X^1}{\partial x^2}\frac{\partial X^2}{\partial x^2}dx^2 \wedge dx^2 \\ &= \left(\frac{\partial X^1}{\partial x^1}\frac{\partial X^2}{\partial x^2} - \frac{\partial X^1}{\partial x^2}\frac{\partial X^2}{\partial x^1}\right) \\ &\qquad dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned}$$

なにやら $dX^1 \wedge dX^2$ を計算すると

$$dX^1 \wedge dX^2 = J dx^1 \wedge dx^2 \tag{34}$$

の形になった．ただし，

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial X^1}{\partial x^1}\frac{\partial X^2}{\partial x^2} - \frac{\partial X^1}{\partial x^2}\frac{\partial X^2}{\partial x^1} \\ &= \det\begin{bmatrix} \partial X^1/\partial x^1 & \partial X^1/\partial x^2 \\ \partial X^2/\partial x^1 & \partial X^2/\partial x^2 \end{bmatrix} \\ &= \det\frac{\partial\left(X^1, X^2\right)}{\partial\left(x^1, x^2\right)} \end{aligned} \tag{35}$$

である（最後の 2 行は書き方を変えただけである）．

さて，これまでの演算は何の役にたつのだろうか．そう，二重積分で変数変換を行うときに役にたつのである．

$$\begin{aligned} &\iint \phi\left(X^1, X^2\right)dX^1 dX^2 \\ &\qquad = \iint \phi\left(X^1, X^2\right)|J|dx^1 dx^2 \end{aligned}$$

つまり，式 (34) および式 (35) は二重積分の変数変換公式を与えている．一般に $|J|$ は <u>ヤコビアン</u> と呼ばれる．

理由はわからないが式 (33) で定義された演算規則に従う二項演算子 $\wedge$ を使うと，二重積分の変換公式が得られた．演算子 $\wedge$ は <u>ウェッジ積</u> と呼ばれる．

少しだけ深い話 変数変換と一般座標変換は同じ概念を指す．両者はともに微分同相写像である．
■

C.3 p-ベクトル（ウェッジ積の定義）

これからウェッジ積 $\wedge$ の定義にとりかかる．ウェッジ積はこれまで見たベクトル積（一般に外積と呼ばれているもの）の拡張である．ただし，その前にこれまでのベクトルの概念を深く掘り下げておかねばならない．

実数体（実数全体の集合と四則演算の方法の組）を $\mathbb{R}$ とする．実数体 $\mathbb{R}$ 上の n 次元ベクトル空間を $\mathbf{V}$ とする．ベクトル空間 $\mathbf{V}$ の基底ベクトルを $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ とする．

ベクトル空間 $\mathbf{V}$ にウェッジ積 $\wedge$ を定義する．ベクトル空間 $\mathbf{V}$ 中の任意のふたつのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ について，そのウェッジ積 $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}$ 全体が作る空間を $\mathbf{V}'$ と

する（後で確認するが，空間 $\mathbf{V}'$ はベクトル空間である）．このことは数学風に書けば

$$\wedge : \mathbf{V} \boxtimes \mathbf{V} \mapsto \mathbf{V}'$$

である（記号 $\boxtimes$ は集合論でいう 直積 を表す）．さて，ここでウェッジ積が従うべき唯一の規則をあげておこう．$a, b \in \mathbb{R}$ として

$$\boldsymbol{e}_\mu \wedge \boldsymbol{e}_\nu = \begin{cases} 0 & \text{iff } \mu = \nu \\ -\boldsymbol{e}_\nu \wedge \boldsymbol{e}_\mu & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(a\boldsymbol{e}_\mu + b\boldsymbol{e}_\nu) \wedge \boldsymbol{e}_\lambda = a\boldsymbol{e}_\mu \wedge \boldsymbol{e}_\lambda + b\boldsymbol{e}_\nu \wedge \boldsymbol{e}_\lambda$$

である．この規則は 3 次元のベクトル積からの帰納である．特に第 2 式はウェッジ積の線形性を表している．少し考えると，空間 $\mathbf{V}'$ は $\boldsymbol{e}_\mu \wedge \boldsymbol{e}_\nu$ を基底とするベクトル空間を張ることが理解できよう．そこでベクトル空間 $\mathbf{V}'$ の基底ベクトルを考えておこう．例えば，ベクトル空間 $\mathbf{V}$ として 3 次元ベクトル空間を考えると，ベクトル空間 $\mathbf{V}'$ の基底ベクトルは

$$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1$$

の 3 個しかないことがわかる．

空間 $\mathbf{V}'$ がベクトル空間であることから，もう一度ウェッジ積を考えることができる．すなわち

$$\wedge : \mathbf{V}' \boxtimes \mathbf{V}' \mapsto \mathbf{V}''$$

を考えるのである．もちろん空間 $\mathbf{V}''$ もベクトル空間になるが，その基底ベクトルは

$$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$$

のひとつしかない．

実数体 $\mathbb{R}$ を 0-ベクトル空間，ベクトル空間 $\mathbf{V}$ を 1-ベクトル空間，ベクトル空間 $\mathbf{V}'$ を 2-ベクトル空間と呼び，ベクトル空間 $\mathbf{V}''$ は 3-ベクトル空間と呼ぶ．一般に，実数体 $\mathbb{R}$ から p 回ウェッジ積をとった空間を p-ベクトル空間と呼ぶ．ただし 1-ベクトルは「普通の意味での」ベクトルである．また n 次元 1-ベクトルからスタートした場合，p-ベクトル空間は $\mathcal{C}_p^n$ 次元となる．ただし，$\mathcal{C}_p^n$ は 二項係数 で

$$\mathcal{C}_p^n \equiv \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \ldots \textbf{定義}$$

である．

p-ベクトルと q-ベクトルとのウェッジ積は $(p+q)$-ベクトルであるが，説明は割愛する．

少しだけ深い話　グラスマンは p-ベクトルのことを「p 位のテンソル」（「位」は独語で “Stufe” の訳）と呼んだ．■

C.4　p-フォーム（外微分演算子の定義）

変数変換（一般座標変換）

$$X^1 = X^1\left(x^1, x^2\right)$$
$$X^2 = X^2\left(x^1, x^2\right)$$

があるとする．例えば x^1 と x^2 をそれぞれ微小量 Δx^1 と Δx^2 だけ変化させたとき X^1 の変化が ΔX^1 だったとすると，おおよそ

$$X^1 + \Delta X^1 = X^1 + \frac{\partial X^1}{\partial x^1}\Delta x^1 + \frac{\partial X^1}{\partial x^2}\Delta x^2$$

が成り立つであろう．そこで両辺から X^1 を取り去り，微小量記号 Δ のかわりに無限小量を意味する d を書いて

$$dX^1 = \frac{\partial X^1}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial X^1}{\partial x^2}dx^2$$
$$dX^2 = \frac{\partial X^2}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial X^2}{\partial x^2}dx^2$$

としてみる．上式をよく見ると dX^μ はそれぞれ $\left\{dx^1, dx^2\right\}$ を基底とするベクトルであるかのように見える．実際 dX^1 と dX^2 はそれぞれ 1-ベクトルであるが，その大きさが無限小であることを忘れないように 1-フォームと呼ぶ（普通の実関数は 0-ベクトルであり，かつ 0-フォームでもある）．

外微分演算子 d は p-フォームの $(p+1)$-フォームへの写像と解釈できる．

$$d : X^1 \mapsto a dx^1 + b dx^2$$

ここにもちろん

$$a = \frac{\partial X^1}{\partial x^1};\ b = \frac{\partial X^1}{\partial x^2}$$

である．そこで，外微分演算子 d を次のように定義しなおそう．

$$d\,(X+Y) = dX + dY$$
$$d\,(X \wedge Y) = dX \wedge Y + (-1)^p X \wedge dY \quad \text{where } X \text{ は } p\text{-フォーム}$$
$$d(dX) = 0; \quad \text{where } X \text{ は任意のフォーム}$$
$$d\phi = \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^i; \quad \text{where } \phi \text{ は任意の関数}$$

これで外微分 d が定義できた．

C.5 ベクトル解析

3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の 0-フォーム，つまり普通の関数，の外微分を調べてみよう．

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \phi}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \phi}{\partial x^3} dx^3$$

次に，同じく $\mathbb{R}^3$ で 1-フォーム ξ が与えられたとしよう．1-フォーム ξ は

$$\xi = \xi_1 dx^1 + \xi_2 dx^2 + \xi_3 dx^3$$

と書けるから，

$$\begin{aligned}
d\xi &= d\xi_1 \wedge dx^1 + d\xi_2 \wedge dx^2 + d\xi_3 \wedge dx^3 \\
&= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^1 \\
&\quad + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^2 \\
&\quad + \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \xi_3}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \xi_3}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^3 \\
&= \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 \\
&\quad + \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x^3} - \frac{\partial \xi_3}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1 \\
&\quad + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2
\end{aligned}$$

である（$d\xi$ が 2-フォームであることを思い出そう）．さらに同じく 2-フォーム η が

$$\eta = \eta_1 dx^2 \wedge dx^3 + \eta_2 dx^3 \wedge dx^1 + \eta_3 dx^3 \wedge dx^1$$

として与えられたとしよう．η の外微分は

$$\begin{aligned}
d\eta &= d\eta_1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + d\eta_2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \\
&\quad + d\eta_3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\
&= \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \eta_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta_3}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3
\end{aligned}$$

となる（$\mathbb{R}^3$ における 3-フォームの外微分は恒等的に 0 である）．

これまでの計算を整理しよう．関数 ϕ の外微分演算は

$$d : \phi \mapsto \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x^1 \\ \partial\phi/\partial x^2 \\ \partial\phi/\partial x^3 \end{pmatrix}$$

への写像である．同様に 1-フォーム ξ の外微分演算は

$$d : \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \partial\xi_3/\partial x^2 - \partial\xi_2/\partial x^3 \\ \partial\xi_1/\partial x^3 - \partial\xi_3/\partial x^1 \\ \partial\xi_2/\partial x^1 - \partial\xi_1/\partial x^2 \end{pmatrix}$$

という写像である．つづけて 2-フォーム η の外微分演算は

$$d : \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{\partial \eta_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \eta_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta_3}{\partial x^3}$$

という写像である．

ところで，ベクトル解析に登場する勾配 (grad)，回転 (rot)，発散 (div) とは次の演算であった．

$$\text{grad} : \phi \mapsto \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x^1 \\ \partial\phi/\partial x^2 \\ \partial\phi/\partial x^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{rot} : \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \partial\xi_3/\partial x^2 - \partial\xi_2/\partial x^3 \\ \partial\xi_1/\partial x^3 - \partial\xi_3/\partial x^1 \\ \partial\xi_2/\partial x^1 - \partial\xi_1/\partial x^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{div} : \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{\partial \eta_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \eta_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta_3}{\partial x^3}$$

ここに我々は，次のことを理解したわけである．

- スカラ場の勾配とは，0-フォームの外微分のことである．
- ベクトル場の回転とは，1-フォームの外微分のことである．
- ベクトル場の発散とは，2-フォームの外微分のことである．

ところで，普通のベクトル解析の教科書では勾配，回転，発散をそれぞれ

$$\nabla \equiv \begin{pmatrix} \partial/\partial x^1 \\ \partial/\partial x^2 \\ \partial/\partial x^3 \end{pmatrix} \quad \ldots \textbf{定義}$$

なる演算子ベクトルを用いて

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}\phi &= \nabla\phi \\ \operatorname{rot}\xi &= \nabla\times\xi; \quad \text{where "$\times$" はベクトル積} \\ \operatorname{div}\eta &= \langle\nabla,\eta\rangle \end{aligned}$$

と定義してお茶を濁している．我々はフォームを知っているので，もはや ∇ は必要ない．∇ 記号はもっと大切な概念を表すために使われるべきである．

少しだけ深い話 筆者は ∇ 記号は共変微分にこそ用いられるべきだと考える．共変微分には D 記号をあてる流派もある．共変微分については文献 [12] や文献 [13] が詳しい． ■

C.6 ⋆（星印演算子）

⋆演算子を定義する．⋆演算子は星印演算子と呼ばれたり，ホッジ (Hodge) 演算子と呼ばれたりする．⋆記号の他に $*$ 記号を使う場合もある（むしろ $*$ 記号のほうがが主流である）．

$\mathbb{R}^n$ の p-ベクトル X に⋆演算子を作用させると，$\mathbb{R}^n$ の $(n-p)$-ベクトル Y になる．

$$Y = \star X$$

ただし X と Y の間にはちゃんとした関係がある．それをこれから見よう．それにはまず内積を定義しなければならない．

n 次元ベクトル空間 $\mathbf{V}$ があるとしよう．内積とはつまり

$$\mathbf{V}\boxtimes\mathbf{V}\mapsto\mathbb{R}$$

という写像であって，次の対称性（第 1 式），双線形性（第 2 式と第 3 式），正則性（第 4 式）を満たすものとしよう．

$$\begin{aligned} \langle X,Y\rangle &= \langle Y,X\rangle \\ \langle aX+bY,Z\rangle &= a\langle X,Z\rangle + b\langle Y,Z\rangle \\ \langle X,aY+bZ\rangle &= a\langle X,Y\rangle + b\langle X,Z\rangle \\ X=0 \quad &\text{if} \quad \forall Y,\ \langle X,Y\rangle = 0 \end{aligned}$$

この定義はこれまでの全ての内積の定義に合致する．

さらに内積の定義を拡張する．ふたつの p-ベクトル

$$\begin{aligned} X &= \xi_1\wedge\xi_2\wedge\cdots\wedge\xi_p \\ Y &= \eta_1\wedge\eta_2\wedge\cdots\wedge\eta_p \end{aligned}$$

に対して，内積 $\langle X,Y\rangle$ を

$$\langle X,Y\rangle \equiv \det\begin{bmatrix} \langle\xi_1,\eta_1\rangle & \langle\xi_1,\eta_2\rangle & \ldots & \langle\xi_1,\eta_p\rangle \\ \langle\xi_2,\eta_1\rangle & \langle\xi_2,\eta_2\rangle & \ldots & \langle\xi_2,\eta_p\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\xi_p,\eta_1\rangle & \langle\xi_p,\eta_2\rangle & \ldots & \langle\xi_p,\eta_p\rangle \end{bmatrix}$$

$$\ldots\textbf{定義}$$

と定義する．

n 次元 p-ベクトル空間 $\mathbf{V}_p^n$ の元（p-ベクトル）X を固定しておいて，写像

$$P: Y\mapsto X\wedge Y$$

を考える．ここに Y は n 次元 $(n-p)$-ベクトル空間 $\mathbf{V}_{n-p}^n$ の元である．$X\wedge Y$ は n 次元の n-ベクトルであるから，結局 1 次元である．すなわち，

$$P: \mathbf{V}_{n-p}^n \mapsto \mathbf{V}_n^n$$

である．写像 P は線形写像である．いま $\mathbf{V}_n^n$ の正規直交規定を $\boldsymbol{e}^{(1,\ldots,n)}$ ただし，

$$\boldsymbol{e}^{(1,\ldots,n)} = \boldsymbol{e}^1\wedge\boldsymbol{e}^2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}^n$$

とすると，写像 P は関数 ϕ_X に置き換えて

$$P : Y \mapsto \phi_X(Y)\boldsymbol{e}^{(1,\dots,n)};\quad \text{where } \phi_X(Y)\boldsymbol{e}^{(1,\dots,n)} = X \wedge Y$$

とも書ける．関数 ϕ_X は $\mathbf{V}^n_{n-p}$ から $\mathbb{R}$ への線形写像である．

内積の性質を用いると，

$$\phi_X(Y) = \langle Z_X, Y\rangle$$

となるような $\mathbf{V}^n_{n-p}$ 中のベクトル Z_X が一意に存在することを示せる．この Z_X を

$$Z_X = \star X$$

と書く．まとめると，

$$X \wedge Y = \langle \star X, Y\rangle \boldsymbol{e}^{(1,\dots,n)} \tag{36}$$

となるベクトル $\star X$ がベクトル X について一意に存在する．演算子 $\star$ は

$$\star : \mathbf{V}^n_p \mapsto \mathbf{V}^n_{n-p}$$

なる線形写像である．

実際に $\star X$ を求めるには，線形性が成り立つので，X が基底ベクトル，すなわち

$$X = \boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^p = \boldsymbol{e}^{(1,\dots,p)}$$

の場合のみ考えればよい．式 (36) に X を代入すればよいが，外積の性質から

$$Y = \boldsymbol{e}^k;\quad \text{where } k \in \{p+1, p+2, \dots, n\}$$

の場合だけが意味を持つ．式 (36) に X と Y を代入すると，

$$\boldsymbol{e}^{(1,\dots,n)} = \langle \star X, \boldsymbol{e}^{p+1} \wedge \boldsymbol{e}^{p+2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^n\rangle \boldsymbol{e}^{(1,\dots,n)}$$

よって，

$$\begin{aligned}\star X &= c\boldsymbol{e}^{p+1} \wedge \boldsymbol{e}^{p+2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^n\\ &= c\boldsymbol{e}^{(p+1,\dots,n)}\end{aligned}$$

ここに定数 c は $c = \pm 1$ の値を持ち

$$c = \langle \boldsymbol{e}^{(p+1,\dots,n)}, \boldsymbol{e}^{(p+1,\dots,n)}\rangle$$

である．結局，

$$\star\boldsymbol{e}^{(1,\dots,p)} = \langle \boldsymbol{e}^{(p+1,\dots,n)}, \boldsymbol{e}^{(p+1,\dots,n)}\rangle \boldsymbol{e}^{(p+1,\dots,n)}$$

なる公式を得る．上式を逆に解けば，次式を得る．

$$\star\boldsymbol{e}^{(p+1,\dots,n)} = (-1)^{p(n-p)}\langle \boldsymbol{e}^{(1,\dots,p)}, \boldsymbol{e}^{(1,\dots,p)}\rangle \boldsymbol{e}^{(1,\dots,p)}$$

3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ では

$$\begin{aligned}\star dx^1 &= dx^2 \wedge dx^3\\ \star dx^2 &= dx^3 \wedge dx^1\\ \star dx^3 &= dx^1 \wedge dx^2\end{aligned}$$

である（証明略）．

C.7 △（ラプラス演算子）

3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の 0-フォーム ϕ の外微分 $d\phi$ を考えよう．

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial\phi}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial\phi}{\partial x^3}dx^3$$

であったから，

$$\star d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^1}dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial\phi}{\partial x^2}dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial\phi}{\partial x^3}dx^1 \wedge dx^2$$

である．$\star d\phi$ にもう一度 d を作用させると面白いことがおこる．

$$d(\star d\phi) = (\triangle\phi)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3;\quad \text{where } \triangle\phi = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial {x^1}^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial {x^2}^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial {x^3}^2}\right)$$

ここに演算子

$$\triangle \equiv \sum_i \frac{\partial^2}{\partial {x^i}^2} \quad \dots\textbf{定義}$$

は ラプラス演算子 または ラプラシアン と呼ばれる演算子である．

これまでの知識をすべて使えば,

$$\begin{aligned} \mathrm{grad} &= d \\ \mathrm{rot} &= \star d \\ \mathrm{div} &= \star d \star \\ \triangle &= d \star d \end{aligned}$$

と解釈できるはずである．ただし grad とラプラス演算子は 0-フォームに，rot と div は 1-フォームに作用する．これらの演算子がそれぞれ物理的に有用であることは興味深い.（もっともマクスウェル (Maxwell) 方程式を d や $\star$ を使って書き直すのは生産的ではない．マクスウェル方程式はテンソル解析を用いれば，A_μ を電磁ポテンシャル，j_μ を電荷電流密度として

$$\Box A_\mu = j_\mu$$

と書けるので十分簡潔である．ここに □ は 4 次元ラプラス演算子であり，特別にダランベール演算子（または ダランベリアン）とも呼ぶ.）

少しだけ深い話　3 次元のラプラス演算子と 4 次元のラプラス演算子（ダランベール演算子）を区別する数学上の理由はない．ただ区別するほうが物理学では便利であるというだけである．ラプラス演算子は カシミール演算子 のひとつである．カシミール演算子は大変豊かな構造（例えば $SO(3)$ 不変であるなど）を持っており，興味深い研究対象のひとつである．■

C.8　ストークスの定理

ストークスの定理とは

$$\int_C dX = \int_{\partial C} X \tag{37}$$

のことである．ここに X はフォーム，C は領域，∂C は領域 C の境界である（正しくは X は多様体 M 上の p-フォーム，C は多様体 M 上の $(p+1)$-鎖，演算子 ∂ は境界演算子なのであるが，本稿では深入りしない)．ストークスの定理の証明は割愛するが，ストークスの定理から導かれる様々な公式を鑑賞しよう．

積分の基本定理　領域 C として実数体 $\mathbb{R}$ 上の閉区間 $[a, b]$ を考える．0-フォームすなわち関数（$\phi(x)$ としよう）について式 (37) は

$$\int_C d\phi = \int_{\partial C} \phi \Leftrightarrow \int_C d\phi = \phi(b) - \phi(a)$$

であり，積分の基本定理が得られる．

グリーンの公式　領域 C として 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ 上の閉領域 C を考える．ξ を 1-フォーム

$$\xi = \xi^1\left(x^1, x^2\right) dx^1 + \xi^2\left(x^1, x^2\right) dx^2$$

とおくと，

$$d\xi = \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} - \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2$$

である．式 (37) はこの場合

$$\int_{\partial C} \left(\xi^1 dx^1 + \xi^2 dx^2\right) = \iint_C \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} - \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2}\right) dx^1 dx^2$$

であり，グリーンの公式が得られる．

狭義のストークスの定理　領域 C として 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 上の閉曲線で囲まれた曲面 C を考える．η を 1-フォーム

$$\begin{aligned} \eta = \eta^1\left(x^1, x^2, x^3\right) dx^1 + \eta^2\left(x^1, x^2, x^3\right) dx^2 \\ + \eta^3\left(x^1, x^2, x^3\right) dx^3 \end{aligned}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} d\eta = \left(\frac{\partial \eta^3}{\partial x^2} - \frac{\partial \eta^2}{\partial x^3}\right) dx^2 \wedge dx^3 \\ + \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial x^3} - \frac{\partial \eta^3}{\partial x^1}\right) dx^3 \wedge dx^1 \\ + \left(\frac{\partial \eta^2}{\partial x^1} - \frac{\partial \eta^1}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned}$$

である．式 (37) はこの場合

$$\int_{\partial C}\left(\eta^1 dx^1+\eta^2 dx^2+\eta^3 dx^3\right)$$
$$=\iint_C\left(\left(\frac{\partial\eta^3}{\partial x^2}-\frac{\partial\eta^2}{\partial x^3}\right)dx^2\wedge dx^3\right.$$
$$+\left(\frac{\partial\eta^1}{\partial x^3}-\frac{\partial\eta^3}{\partial x^1}\right)dx^3\wedge dx^1$$
$$\left.+\left(\frac{\partial\eta^2}{\partial x^1}-\frac{\partial\eta^1}{\partial x^2}\right)dx^1\wedge dx^2\right)$$

である．上式は少々読みづらいが，ベクトル解析風に

$$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}\eta^1\\ \eta^2\\ \eta^3\end{pmatrix}$$
$$d\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}dx^1\\ dx^2\\ dx^3\end{pmatrix}$$
$$d\boldsymbol{s}=\begin{pmatrix}dx^2\wedge dx^3\\ dx^3\wedge dx^1\\ dx^1\wedge dx^2\end{pmatrix}$$

としてみると，

$$\oint_{\partial C}\langle\boldsymbol{Y},d\boldsymbol{r}\rangle=\iint_C\langle\mathrm{rot}\,\boldsymbol{Y},d\boldsymbol{s}\rangle$$

とおなじみのストークスの定理となる．ベクトル解析では量 $d\boldsymbol{r}$ を 線素，量 $d\boldsymbol{s}$ を 面素 と呼ぶことが多い．テンソル解析では量 $d\boldsymbol{r}$ を 線テンソル，量 $d\boldsymbol{s}$ を 面テンソル として扱う．いずれにせよ量 $d\boldsymbol{r}$ は 1-フォーム，量 $d\boldsymbol{s}$ は 2-フォームである．

ガウスの発散定理　領域 C として 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 上の閉曲面で囲まれた空間 C を考える．ζ を 2-フォーム

$$\zeta=\zeta^1\left(x^1,x^2,x^3\right)dx^2\wedge dx^3$$
$$+\zeta^2\left(x^1,x^2,x^3\right)dx^3\wedge dx^1$$
$$+\zeta^3\left(x^1,x^2,x^3\right)dx^1\wedge dx^2$$

とおくと，

$$d\zeta=\left(\frac{\partial\zeta^1}{\partial x^1}+\frac{\partial\zeta^2}{\partial x^2}+\frac{\partial\zeta^3}{\partial x^3}\right)dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$$

である．式 (37) [p.89] はこの場合

$$\iint_{\partial C}\left(\zeta^1 dx^2\wedge dx^3+\zeta^2 dx^3\wedge dx^1\right.$$
$$\left.+\zeta^3 dx^1\wedge dx^2\right)$$
$$=\iiint_C\left(\frac{\partial\zeta^1}{\partial x^1}+\frac{\partial\zeta^2}{\partial x^2}+\frac{\partial\zeta^3}{\partial x^3}\right)$$
$$dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$$

である．今度もベクトル解析風に

$$\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}\zeta^1\\ \zeta^2\\ \zeta^3\end{pmatrix}$$
$$d\boldsymbol{s}=\begin{pmatrix}dx^2\wedge dx^3\\ dx^3\wedge dx^1\\ dx^1\wedge dx^2\end{pmatrix}$$
$$dV=dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$$

としてみると，

$$\iint_{\partial C}\langle\boldsymbol{Z},d\boldsymbol{s}\rangle=\iiint_C(\mathrm{div}\,\boldsymbol{Z})dV$$

とガウスの（発散）定理となる．量 dV は 体積素 と呼ばれることがある．

少しだけ深い話 ストークスの定理を用いれば，コーシーの積分定理さえ導出可能である．■

C.9　フォームの終わりに

3 次元 1-ベクトル $\boldsymbol{x}$ はいかなる意味においても 3 次元であって，基底ベクトルを $\{\boldsymbol{e}_\mu\}$ とすると次のように書ける．

$$\boldsymbol{x}=x^1\boldsymbol{e}_1+x^2\boldsymbol{e}_2+x^3\boldsymbol{e}_3$$

ところが 3 次元 2-ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ もまた，3 次元であって，同じく次のように書ける．

$$\boldsymbol{\xi}=\xi^1\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3+\xi^2\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_1+\xi^3\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$$
$$\star\boldsymbol{\xi}=\xi^1\boldsymbol{e}_1+\xi^2\boldsymbol{e}_2+\xi^3\boldsymbol{e}_3$$

ここに $\boldsymbol{x}$ と $\star\boldsymbol{\xi}$ はそっくりではないだろうか．

　3 次元 1-ベクトルと 3 次元 2-ベクトルの次数の偶然の一致，すなわち

$$\mathcal{C}_1^3 = \mathcal{C}_2^3 = 3$$

および，2 個の 2 次元スピノールから 1 個の 3 次元 1-ベクトルと 1 個のスカラが合成できる

$$2 \cdot 2 = 3 + 1$$

という偶然の一致が，クォータニオンによる回転を正当化する．

参考文献

[1] 足立恒雄: 『数—体系と歴史』, 朝倉書店, 2002.
— **「数」の仲間内でのクォータニオンの位置付け**

[2] ワイルダー (Wilder) 著, 吉田洋一訳: 『数学基礎論序説』, 培風館, 1976.
— **数学基礎論**

[3] 表実: 『キーポイント複素関数』, 岩波書店, 1992.
— **複素数**

[4] ファインマン (Feyinman), レイトン (Leighton), サンズ (Sands) 著, 坪井忠二訳: 『ファインマン物理学 I: 力学』, 岩波書店, 1967.
— **ベクトル，角速度ベクトル，オイラーの定理**

[5] 梁成吉: 『キーポイント行列と変換群』, 岩波書店, 1996.
— **特殊直交変換，特殊ユニタリ変換，スピノール**

[6] ストラウストラップ (Stroustrup) 著, 長尾高弘訳: 『プログラミング言語 C++ 第 3 版』, アジソン・ウェスレイ・パブリシャーズ・ジャパン, 1998.
— **計算機科学者のベクトル**

[7] ファインマン, レイトン, サンズ著, 砂川重信訳: 『ファインマン物理学 V: 量子力学』, 岩波書店, 1979.
— **ブラとケット，パウリ行列**

[8] 吉川圭二: 『群と表現』, 岩波書店, 1996.
— **ブラとケット，パウリ行列（もうひとつの視点）**

[9] ファインマン, ヒッブス (Hibbs) 著, 北原和夫訳: 『量子力学と経路積分』, みすず書房, 1995.
— **積分の本質**

[10] 和達三樹: 『微分・位相幾何』, 岩波書店, 1996.
— **フォーム**

[11] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery: “NUMERICAL RECIPES in C++ (Third Ed.)”, Cambridge University Press, 2002.
— **フーリエ変換**

[12] パウリ (Pauli) 著, 内山龍雄訳: 『相対性理論』, 講談社, 1974.
— **テンソル**

[13] 内山龍雄: 『一般相対性理論』, 裳華房, 1978.
— **スピノール**

[14] 安藤哲哉編: 『コホモロジー』, 日本評論社, 2002.
— **幾何学と代数学の接点**

[15] 黒川重信, 若山正人: 『絶対カシミール元』, 岩波書店, 2002.
— **リー代数，外積代数，数学と物理学の接点**

[16] 銅谷賢治: 『これからの幾何学』, 日本評論社, 1998.
— **新しい幾何学への話題**

[17] ファインマン, モリニーゴ (Mornigo), ワーグナー (Wagner), ハットフィールド (Hatfield) 編, 和田純夫訳: 『ファインマン講義重力の理論』, 岩波書店, 1999.
— **数学者への抗議**

[18] Marc Alexa: “Linear Combination of Transformations”, *Proceedings of ACM SIGGRAPH 2002*, pp. 380–387, ACM, 2002.
— **回転と平行移動の同時補間**

[19] M. Woo, J. Neider, T. Davis, D. Shreiner, OpenGL ARB: “OpenGL Programming Guide: The Official Guide to Learning OpenGL, Version 1.2 (Third Ed.)”, Addison-Wesley Pub Co, 1999.
— **実時間コンピュータグラフィックス**

[20] Math World: *http://www.mathworld.com/*
— **ウルフラムリサーチが公開している数学辞典，味見程度にとどめるのが吉**

索 引

ベクトル・複素数・クォータニオン

金谷一朗
大阪大学大学院基礎工学研究科

http://www-inolab.sys.es.osaka-u.ac.jp/users/kanaya/