數位訊號處理作業

干皓丞，2101212850, 信息工程學院

2021 年 10 月 26 日

1 作業目標

證明 E3 調整定理

2 數學說明

E1, E2 和 E3 之間的關係描述如下，從數學式 (1.1) 的解釋為從 n 次 E3 調整後跟一次 E1 調整，等價於 1 次 E1 調整後跟 n 次 E2 調整，而數學式 (1.2) 的意義為 n 次 E3 調整後跟一次 E2 調整，等價於 1 次 E2 調整後跟 n 次 E1 調整。

$$E_1 \circ (E_3)^n = (E_2)^n \circ E_1 \qquad (1.1)$$

$$E_2 \circ (E_3)^n = (E_1)^n \circ E_2 \qquad (1.2)$$

$E_i \circ (E_j)^n : n(E_j)$ scalings, followed by an E_i scalling.

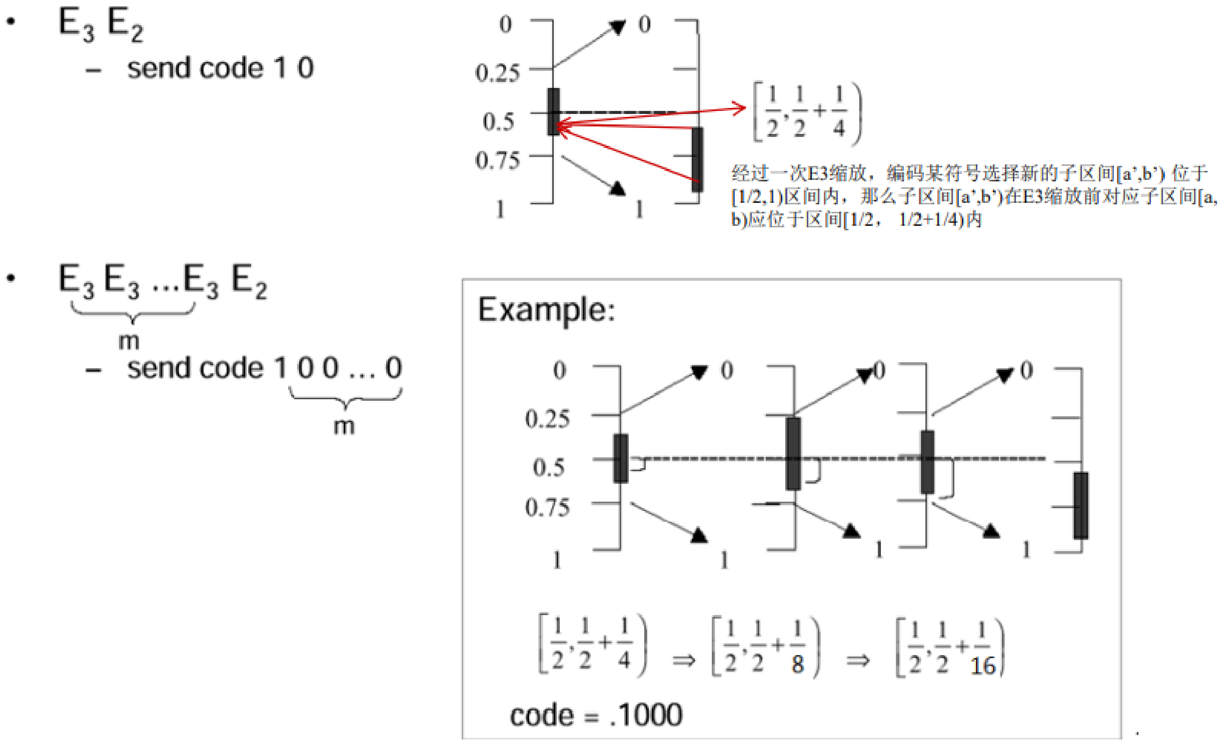

Fig. 1. E3 後面跟 E2

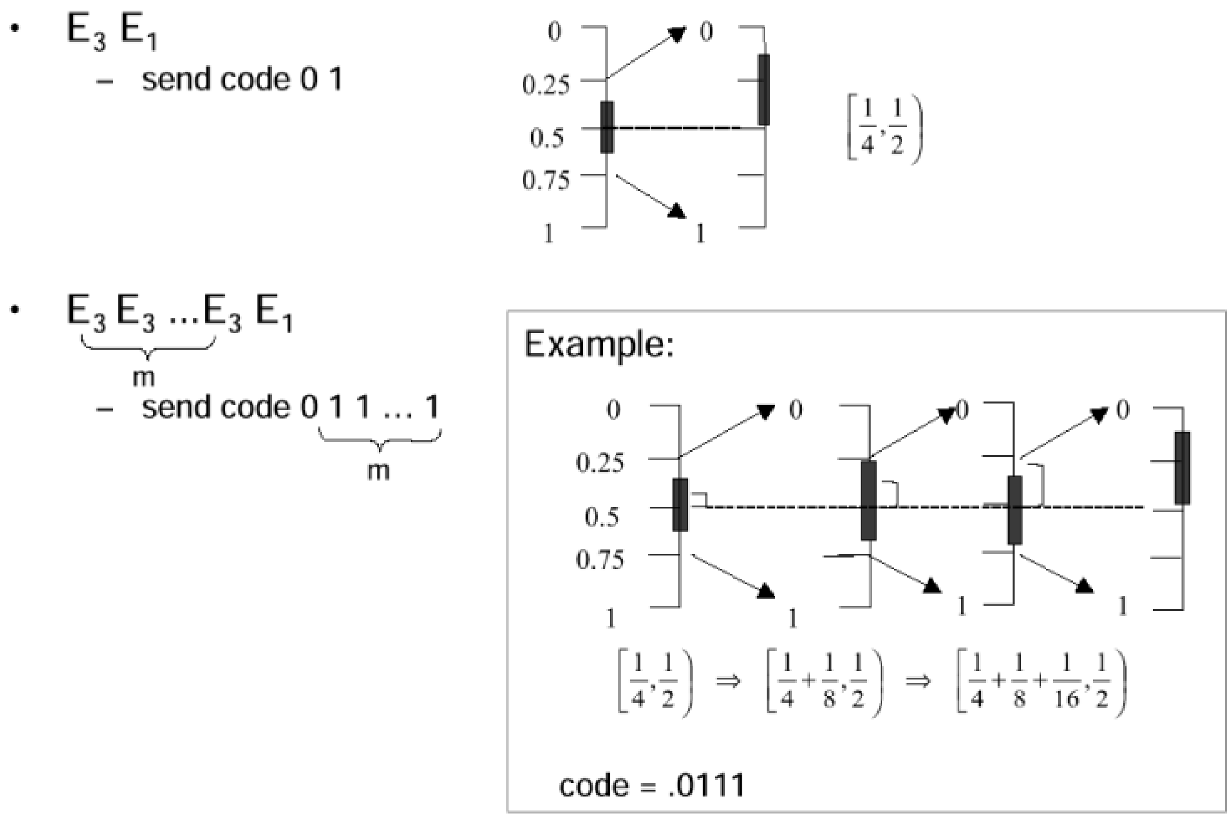

Fig. 2. E3 後面跟 E1

3 E3 調整定理證明

在此設 f 和 g 是兩個函數，$g \circ f$ 是 f 和 g 的連續應用 (the consecutive application)。那麼我們可以將方法表達如下：

LEMMA 適用於任何序列，以下等式都是有效的，下面為之前的數學式 (1.1) 和 (1.2)：

$$E_1 \circ (E_3)^n = (E_2)^n \circ E_1 \quad (1.1)$$

$$E_2 \circ (E_3)^n = (E_1)^n \circ E_2 \quad (1.2)$$

證明：

讓 a := low, b := high 和 I := [0,1) 是我們正在使用的間隔，其縮放函數 (The scaling functions) 可以表示如下：

$$E_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$E_2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-1 \\ 2b-1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$E_3 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-\frac{1}{2} \\ 2b-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

第 n 次迭代結果

$$E_1^n\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^na\\2^nb\end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$E_2^n\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^na-2^n+1\\2^nb-2^n+1\end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$E_3^n\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^na-2^{n-1}+\frac{1}{2}\\2^nb-2^{n-1}+\frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad (3.6)$$

歸納證明後，得出以下兩個數學式：

$$(E_1\circ(E_3)^n)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=E_1\begin{pmatrix}2^na-2^{n-1}+\frac{1}{2}\\2^nb-2^{n-1}+\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n+1}a-2^n+1\\2^{n+1}b-2^n+1\end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$$((E_2)^n\circ E_1)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=(E_2)^n\begin{pmatrix}2a\\2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n+1}a-2^n+1\\2^{n+1}b-2^n+1\end{pmatrix} \quad (3.8)$$

數學式 (3.7) 和 (3.8) ，即為原本的數學式 (1.1) :

$$E_1\circ(E_3)^n=(E_2)^n\circ E_1 \quad (1.1)$$

反之亦然可以用類似的方式證明數學式 (1.2)。

$$(E_2\circ(E_3)^n)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=E_2\begin{pmatrix}2^na-2^{n-1}+\frac{1}{2}\\2^nb-2^{n-1}+\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n+1}a-2^n\\2^{n+1}b-2^n\end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$$((E_2)^n\circ E_1)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=(E_1)^n\begin{pmatrix}2a-1\\2b-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n+1}a-2^n\\2^{n+1}b-2^n\end{pmatrix} \quad (3.10)$$