

數位訊號處理作業

干皓丞，2101212850, 信息工程學院

2021年10月25日

1 作業目標

證明 E3 調整定理

2 數學說明

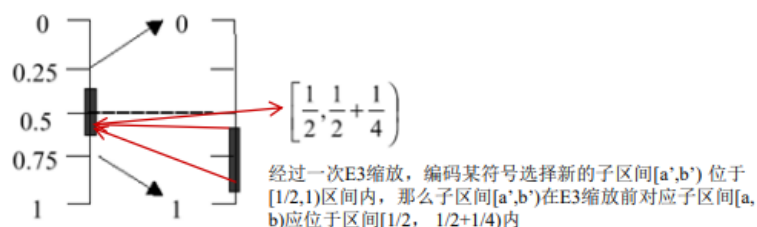
E1, E2 和 E3 之間的關係描述如下，從數學式 (1.1) 的解釋為從 n 次 E3 調整後跟一次 E1 調整，等價於 1 次 E1 調整後跟 n 次 E2 調整，而數學式 (1.2) 的意義為 n 次 E3 調整後跟一次 E2 調整，等價於 1 次 E2 調整後跟 n 次 E1 調整。

$$E_1 \circ (E_3)^n = (E_2)^n \circ E_1 \quad (1.1)$$

$$E_2 \circ (E_3)^n = (E_1)^n \circ E_2 \quad (1.2)$$

$E_i \circ (E_j)^n : n(E_j)$ scalings, followed by an E_i scaling.

- $E_3 E_2$
– send code 1 0



- $$\underbrace{E_3 E_3 \dots E_3}_m E_2$$

– send code $1 \underbrace{00 \dots 0}_m$

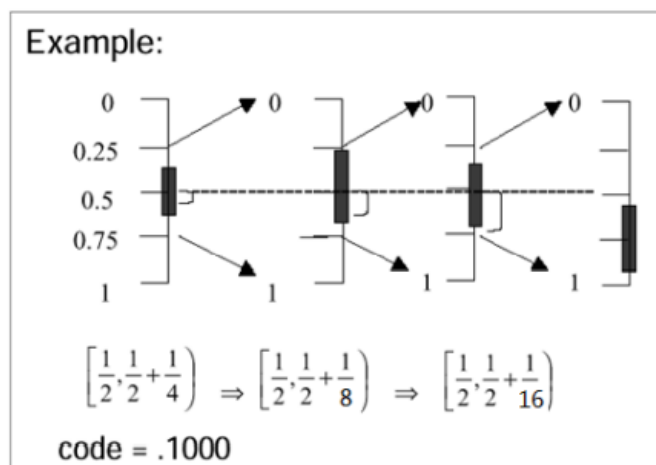
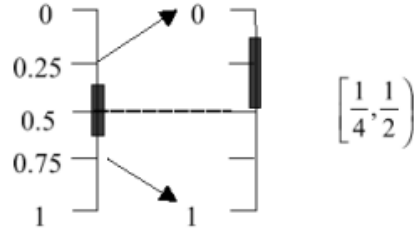


Fig. 1. E3 後面跟 E2

- $E_3 E_1$
– send code 0 1



- $\underbrace{E_3 E_3 \dots E_3}_m E_1$
– send code 0 1 1 ... 1

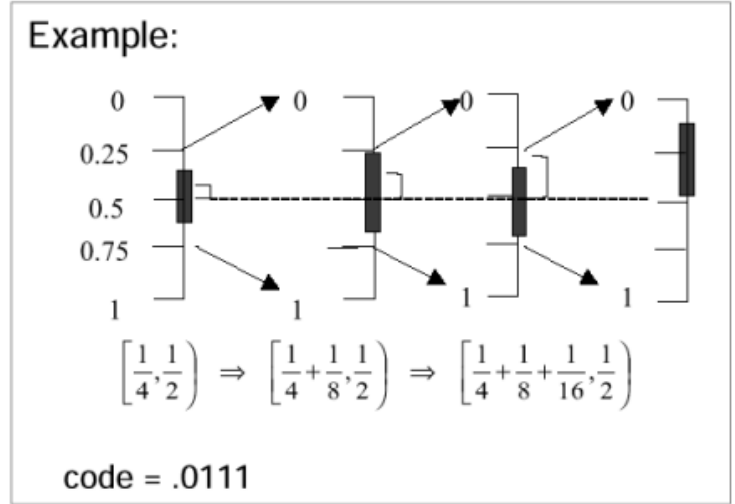


Fig. 2. E3 後面跟 E1

3 E3 調整定理證明

在此設 f 和 g 是兩個函數， $g \circ f$ 是 f 和 g 的連續應用 (the consecutive application)。那麼我們可以將方法表達如下：

LEMMA 適用於任何序列，以下等式都是有效的，下面為之前的數學式 (1.1) 和 (1.2)：

$$E_1 \circ (E_3)^n = (E_2)^n \circ E_1 \quad (1.1)$$

$$E_2 \circ (E_3)^n = (E_1)^n \circ E_2 \quad (1.2)$$

證明：

讓 $a := \text{low}$, $b := \text{high}$ 和 $I := [0, 1]$ 是我們正在使用的間隔，其縮放函數 (The scaling functions) 可以表示如下：

$$E_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$E_2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - 1 \\ 2b - 1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$E_3 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - \frac{1}{2} \\ 2b - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

第 n 次迭代結果

$$E_1^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n a \\ 2^n b \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$E_2^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n a - 2^n + 1 \\ 2^n b - 2^n + 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$E_3^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n a - 2^{n-1} + \frac{1}{2} \\ 2^n b - 2^{n-1} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

歸納證明後，得出以下兩個數學式：

$$(E_1 \circ (E_3)^n) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = E_1 \begin{pmatrix} 2^n a - 2^{n-1} + \frac{1}{2} \\ 2^n b - 2^{n-1} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} a - 2^n + 1 \\ 2^{n+1} b - 2^n + 1 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$$((E_2)^n \circ E_1) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (E_2)^n \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} a - 2^n + 1 \\ 2^{n+1} b - 2^n + 1 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

數學式 (3.7) 和 (3.8)，即為原本的數學式 (1.1)：

$$E_1 \circ (E_3)^n = (E_2)^n \circ E_1 \quad (1.1)$$

反之亦然可以用類似的方式證明數學式 (1.2)。