算法分析和複雜性理論

干皓丞，2101212850, 信息工程學院

2022 年 6 月 3 日

1 作業目標與章節摘要

求解遞推方程的四個例題（例 1 例 4）

1. 例題 1 : $T(n) = 9T(n/3) + n$
2. 例題 2 : $T(n) = T(2n/3) + 1$
3. 例題 3 : $T(n) = 3T(n/4) + n \log n$
4. 例題 4 : $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \log n$

2 作業內容概述

作業可以從 GitHub 下的 kancheng/kan-cs-report-in-2022 專案找到，作業程式碼與文件目錄為 kan-cs-report-in-2022/AATCC/lab-report/。實際執行的環境與實驗設備為 Google 的 Colab 、MacBook Pro (Retina, 15-inch, Mid 2014) 、Acer Aspire R7 與 HP Victus (Nvidia GeForce RTX 3060)。

本作業 GitHub 專案為 kancheng/kan-cs-report-in-2022 下的 AATCC‘ 的目錄。程式碼可以從 code 目錄下可以找到 *.pynb，內容包含上次課堂練習、LeetCode 範例思路整理與作業。

https://github.com/kancheng/kan-cs-report-in-2022/tree/main/AATCC

Fig. 1. 作業專案位置

1. LeetCode : https://leetcode.com/
2. LeetCode CN : https://leetcode-cn.com/
3. OnlineGDB : https://www.onlinegdb.com/

LeetCode 的平台部分，CN 的平台有針對簡體中文使用者進行處理，包含中英文切換等功能。OnlineGDB 則可線上進行簡易的環境測試，其程式碼涵蓋 C, C++, C#, Java, Python, JS, Rust, Go。

3 作業推導

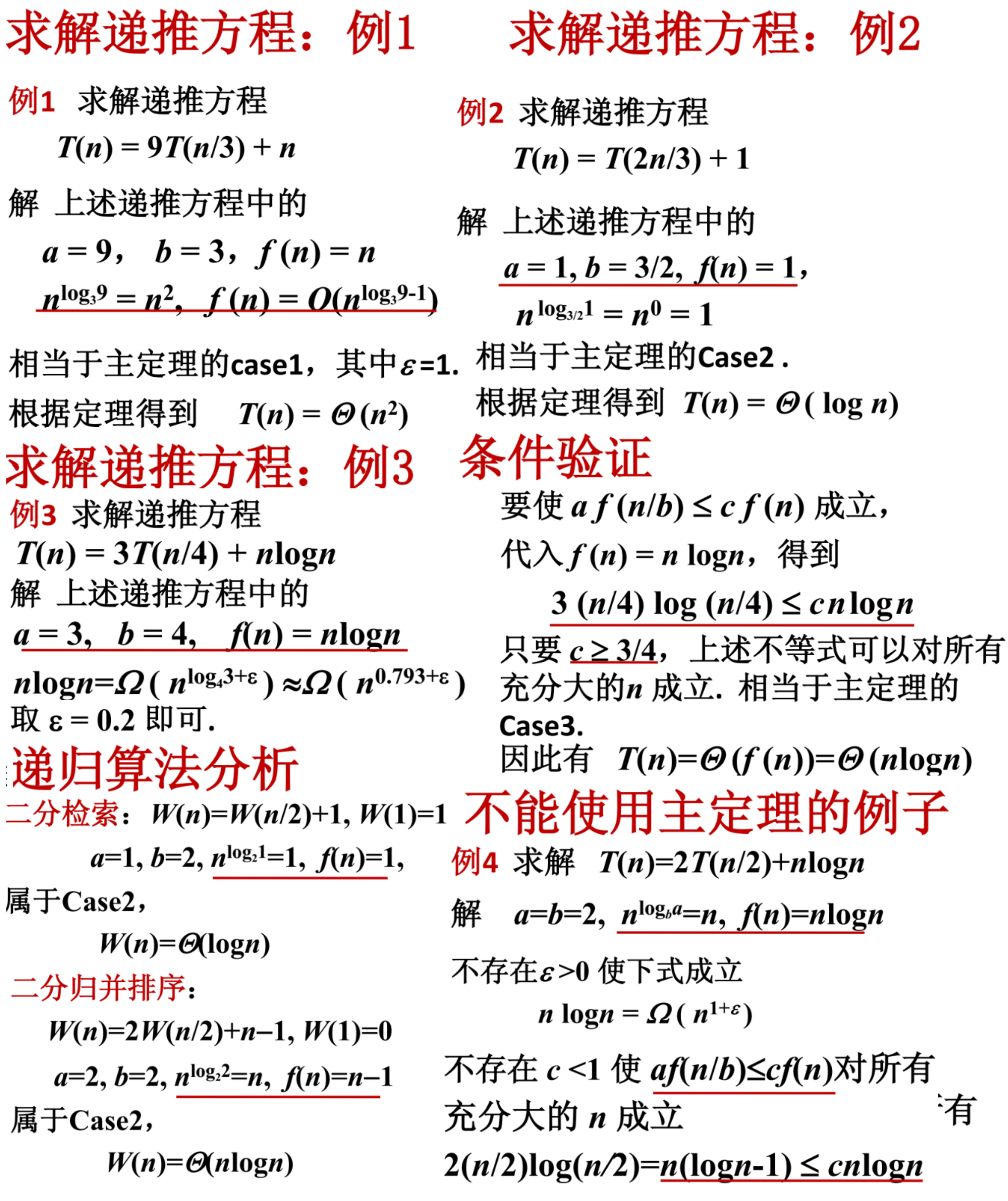

Fig. 2. 課程內容

3.1 例題 1

$T(n) = 9T(n/3) + n$

由主定理 $a = 9, b = 3$

$\log_b a = 2$

$\exists \varepsilon > 0 s.t. f(n) = n = O(n^{2-\varepsilon})$

$\therefore \quad 1, T(n) = \Theta(n^2)$

3.2 例題 2

$T(n) = T(2n/3) + 1, a = 1, b = 3/2, \log_b a = 0$
$f(n) = 1 = n^0 = \Theta(n^2)$
$\therefore \quad 2, T(n) = \Theta(n^0 \log n) = \Theta(n)$

3.3 例題 3

$T(n) = 3T(n/4) + n \log n, a = 3, b = 4, \log_b a = \log_4 3 < 1$
$f(n) = n \log(n) = \Omega(n) = \Omega(n^{\log_4 3 + (1 - \log_4 3)})$
且 $\exists c < 1, \exists n_0 s.t. \forall n > n_0, 3f(n/4) = \frac{3n}{4} \log \frac{n}{4} \leq cn \log n$
$(\ c = \frac{7}{8} \quad) \therefore \quad 3, T(n) = \Theta(n \log n) = \Theta(n)$

3.4 例題 4

$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \log n,$
$a = 2, b = 2, \log_b a = 1$
$f(n) = n \log n = \Omega(n^{1+\varepsilon})$
而顯然 $\nexists c < 1, s.t. \exists n_0, \forall n > n_0, n \log \frac{n}{2} \leq cn \log n$
$\therefore$ 主定理失效，以下用無窮級數處理:
$T(n) = 2T(\frac{n}{2} + n \log n = 4T(\frac{n}{4}) + n \log n + 2\frac{n}{2} \log \frac{n}{2}$
$= 8T(\frac{n}{8} + n \log n + 2\frac{n}{2} \log \frac{n}{2} + 4\frac{n}{4} \log \frac{n}{4}) = ...$
$= n \log n + n \log \frac{n}{2} + n \log \frac{n}{4} + ... =$
$= n(\log n + \log n - 1 + \log n - 2 + \log n - 3 + ... + 0)$
$= \Theta(n \log^2 n)$