

算法分析和複雜性理論

干皓丞，2101212850, 信息工程學院

2022 年 6 月 3 日

1 作業目標與章節摘要

求解遞推方程的四個例題（例 1 例 4）

1. 例題 1: $T(n) = 9T(n/3) + n$
2. 例題 2: $T(n) = T(2n/3) + 1$
3. 例題 3: $T(n) = 3T(n/4) + n \log n$
4. 例題 4: $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \log n$

2 作業內容概述

作業可以從 GitHub 下的 kancheng/kan-cs-report-in-2022 專案找到，作業程式碼與文件目錄為 kan-cs-report-in-2022/AATCC/lab-report/。實際執行的環境與實驗設備為 Google 的 Colab、MacBook Pro (Retina, 15-inch, Mid 2014)、Acer Aspire R7 與 HP Victus (Nvidia GeForce RTX 3060)。

本作業 GitHub 專案為 kancheng/kan-cs-report-in-2022 下的 AATCC 的目錄。程式碼可以從 code 目錄下可以找到 *.py 文件，內容包含上次課堂練習、LeetCode 範例思路整理與作業。

<https://github.com/kancheng/kan-cs-report-in-2022/tree/main/AATCC>



Fig. 1. 作業專案位置

1. LeetCode: <https://leetcode.com/>
2. LeetCode CN: <https://leetcode-cn.com/>
3. OnlineGDB: <https://www.onlinegdb.com/>

LeetCode 的平台部分，CN 的平台有針對簡體中文使用者進行處理，包含中英文切換等功能。OnlineGDB 則可線上進行簡易的環境測試，其程式碼涵蓋 C, C++, C#, Java, Python, JS, Rust, Go。

3 作業推導

求解遞推方程：例1

例1 求解遞推方程

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

解 上述遞推方程中的

$$a = 9, \quad b = 3, \quad f(n) = n$$

$$\underline{n^{\log_3 9} = n^2, \quad f(n) = O(n^{\log_3 9 - 1})}$$

相當於主定理的case1, 其中 $\varepsilon=1$.根據定理得到 $T(n) = \Theta(n^2)$

求解遞推方程：例3

例3 求解遞推方程

$$T(n) = 3T(n/4) + n \log n$$

解 上述遞推方程中的

$$\underline{a = 3, \quad b = 4, \quad f(n) = n \log n}$$

$$n \log n = \Omega(n^{\log_4 3 + \varepsilon}) \approx \Omega(n^{0.793 + \varepsilon})$$

取 $\varepsilon = 0.2$ 即可.

递归算法分析

二分檢索: $W(n) = W(n/2) + 1, W(1) = 1$

$$a=1, b=2, \underline{n^{\log_2 1} = 1, f(n) = 1},$$

屬於Case2,

$$W(n) = \Theta(\log n)$$

二分歸併排序:

$$W(n) = 2W(n/2) + n - 1, W(1) = 0$$

$$a=2, b=2, \underline{n^{\log_2 2} = n, f(n) = n - 1}$$

屬於Case2,

$$W(n) = \Theta(n \log n)$$

求解遞推方程：例2

例2 求解遞推方程

$$T(n) = T(2n/3) + 1$$

解 上述遞推方程中的

$$\underline{a = 1, b = 3/2, f(n) = 1,}$$

$$n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1$$

相當於主定理的Case2.

根據定理得到 $T(n) = \Theta(\log n)$

条件验证

要使 $a f(n/b) \leq c f(n)$ 成立,代入 $f(n) = n \log n$, 得到

$$\underline{3(n/4) \log(n/4) \leq c n \log n}$$

只要 $c \geq 3/4$, 上述不等式可以對所有充分大的 n 成立. 相當於主定理的

Case3.

因此有 $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n \log n)$

不能使用主定理的例子

例4 求解 $T(n) = 2T(n/2) + n \log n$

$$\text{解 } a=b=2, \underline{n^{\log_2 2} = n, f(n) = n \log n}$$

不存在 $\varepsilon > 0$ 使下式成立

$$n \log n = \Omega(n^{1+\varepsilon})$$

不存在 $c < 1$ 使 $\underline{a f(n/b) \leq c f(n)}$ 對所有充分大的 n 成立

有

$$2(n/2) \log(n/2) = \underline{n(\log n - 1) \leq c n \log n}$$

Fig. 2. 課程內容

3.1 例題 1

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

由主定理 $a = 9, b = 3$

$$\log_b a = 2$$

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } f(n) = n = O(n^{2-\varepsilon})$$

$$\therefore 1, T(n) = \Theta(n^2)$$

3.2 例題 2

$$T(n) = T(2n/3) + 1, a = 1, b = 3/2, \log_b a = 0$$

$$f(n) = 1 = n^0 = \Theta(n^2)$$

$$\therefore 2, T(n) = \Theta(n^0 \log n) = \Theta(n)$$

3.3 例題 3

$$T(n) = 3T(n/4) + n \log n, a = 3, b = 4, \log_b a = \log_4 3 < 1$$

$$f(n) = n \log(n) = \Omega(n) = \Omega(n^{\log_4 3 + (1 - \log_4 3)})$$

$$\text{且 } \exists c < 1, \exists n_0 \text{ s.t. } \forall n > n_0, 3f(n/4) = \frac{3n}{4} \log \frac{n}{4} \leq cn \log n$$

$$(c = \frac{7}{8}) \therefore 3, T(n) = \Theta(n \log n) = \Theta(n)$$

3.4 例題 4

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \log n,$$

$$a = 2, b = 2, \log_b a = 1$$

$$f(n) = n \log n = \Omega(n^{1+\epsilon})$$

$$\text{而顯然 } \nexists c < 1, \text{ s.t. } \exists n_0, \forall n > n_0, n \log \frac{n}{2} \leq cn \log n$$

\therefore 主定理失效，以下用無窮級數處理:

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \log n = 4T(\frac{n}{4}) + n \log n + 2 \frac{n}{2} \log \frac{n}{2}$$

$$= 8T(\frac{n}{8}) + n \log n + 2 \frac{n}{2} \log \frac{n}{2} + 4 \frac{n}{4} \log \frac{n}{4} = \dots$$

$$= n \log n + n \log \frac{n}{2} + n \log \frac{n}{4} + \dots =$$

$$= n(\log n + \log n - 1 + \log n - 2 + \log n - 3 + \dots + 0)$$

$$= \Theta(n \log^2 n)$$