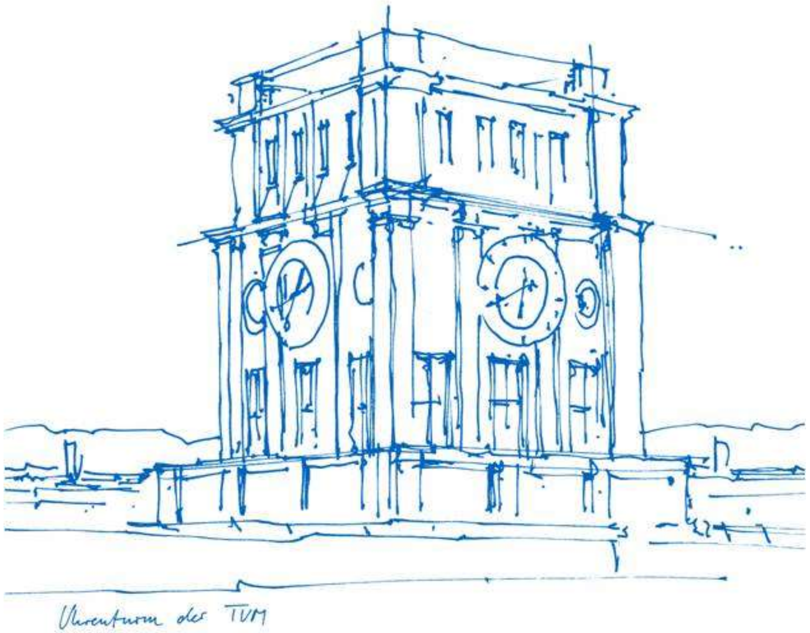
Die LU-Zerlegung

Aleksandre Kandelaki, Matthias Staritz, Benjamin Liertz

Technische Universität München

Fakultät für Informatik

Garching, 16.August 2021



Einleitung

Untere Dreiecksatrix:

$$\begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 & & \vdots \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n,1} & l_{n,2} & l_{n,3} & \cdots & l_{n,n} \end{bmatrix}$$

Obere Dreiecksatrix:

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \cdots & u_{2,n} \\ 0 & 0 & u_{3,3} & \cdots & u_{3,n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{n,n} \end{bmatrix}$$

Einleitung

Einheitsmatrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Pivomatrix:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem als Beispiel

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 0x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 14x_4 &= 0 \\ -4x_1 + 12x_2 + 15x_3 + -21x_4 &= 0 \\ 6x_1 + 9x_2 + -5x_3 + -7x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Koeffizientenmatrix A:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ -4 & 12 & 15 & -21 \\ 6 & 9 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

Ergebnis der LU-Zerlegung:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ -4 & 12 & 15 & -21 \\ 6 & 9 & -5 & -7 \end{bmatrix} \mathrm{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{U} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 & 14 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & -49 \\ 0 & 0 & 0 & 168 \end{bmatrix} \mathrm{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösungsansatz

Beispiel für Zeilenvertauschungen

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ -4 & 12 & 15 & -21 \\ 6 & 9 & -3 & -9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 9 & -3 & -9 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ -4 & 12 & 15 & -21 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Lösungsansatz

Beispiel für Zeilenaddition mit Faktor

$$\begin{bmatrix} 6 & 9 & -3 & -9 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ -4 & 12 & 15 & -21 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \frac{1}{3} \\ \\ + \\ \\ \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 9 & -3 & -9 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 0 & 15 & 14 & -24 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

L	U	P
$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1&2\\3&4&5\\6&6&12\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}6&6&12\\3&4&5\\0&1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\begin{bmatrix}1&0&0\\0.5&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}6&6&12\\0&1&-1\\0&1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\begin{bmatrix}1&0&0\\0.5&1&0\\0.5&1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}6&6&12\\0&1&-1\\0&0&3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

Speicherallokation

- Wahl zwischen Stack und Heap
- Stack performanter aber begrenzt auf 8MB
- Fallunterscheidung je nach größe der Eingabe
- Berechnung der Maximalgröße für Stack Allokationen mit $4 \times 4 \times n \times n \leq 8 \times 10^6$
- Wenn $n \geq 700$ Allokation auf dem Heap

Genauigkeit

Absorption:

$$1000000{,}00\mathrm{f} + 0{,}01\mathrm{f} = 1000000{,}00\mathrm{f}$$

Auslöschung:

$$1000000{,}1\mathrm{f} - 1000000{,}0\mathrm{f} = 0{,}125\mathrm{f}\ != 0{,}1\mathrm{f}$$

Kondition Beispiel

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\epsilon \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4 \\ 4-\epsilon \end{bmatrix} = b$$

Lösung: $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Störung der rechten Seite mit $0 < \epsilon \ll 1$

$$\bar{b} = b + \begin{bmatrix} \epsilon \\ -\epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+\epsilon \\ 4-2\epsilon \end{bmatrix}$$

Lösung: $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1+\epsilon \\ 3 \end{bmatrix}$

Zugehörige Matrixnorm

sein $||.||$ eine beliebige Norm auf R^n dann ist:

$$||A|| := sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} \; \forall \; A \in R^{n \times n}$$

Norm von $||Ax||$ kann abgeschätzt werden durch:

$$||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x|| \; \forall \; x \in R^n$$

Relativer Fehler

Relativer Fehler: $\frac{||x - \bar{x}||}{||x||}$

Relative Störung: $\frac{||b - \bar{b}||}{||b||}$

Kondition: $||A|| \cdot ||A^{-1}||$

Störung in b: $\frac{||x - \bar{x}||}{||x||} \leq \frac{||b||}{||x||} \cdot ||A^{-1}|| \cdot \frac{||b - \bar{b}||}{||b||} \leq ||A|| \cdot ||A^{-1}|| \cdot \frac{||(b - \bar{b})||}{||b||}$

Relativer Fehler

Relative Störung in A: $\frac{||A-\bar{A}||}{||A||} \leq ea$

Relative Störung in b: $\frac{||b-\bar{b}||}{||b||} \leq eb$

Störung in A und b:
$$\frac{||x-\bar{x}||}{||x||} \leq \frac{cond(A)}{1 - ea \cdot cond(A)} \cdot (ea + eb)$$

Stabilität

Beschränkung der Störung:

$$\frac{||A - \bar{A}||}{||A||} \leq C\ eps \qquad \frac{||b - \bar{b}||}{||b||} \leq C\ eps$$

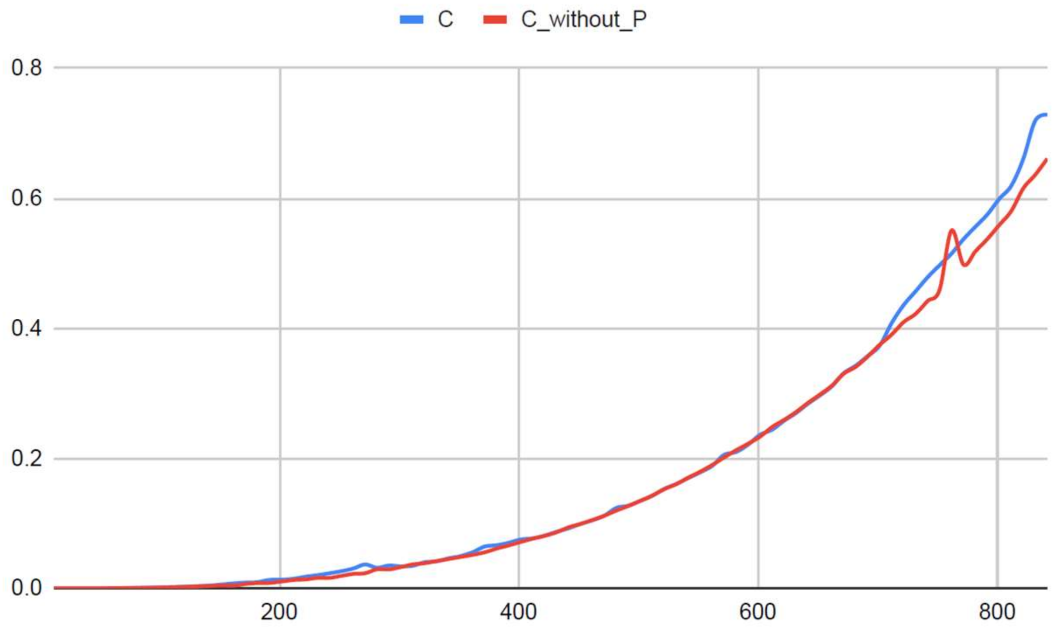
Störung in b:

$$|A - \bar{A}| \leq 2n\ eps\ |\bar{L}||\bar{R}| + O(eps^2)$$

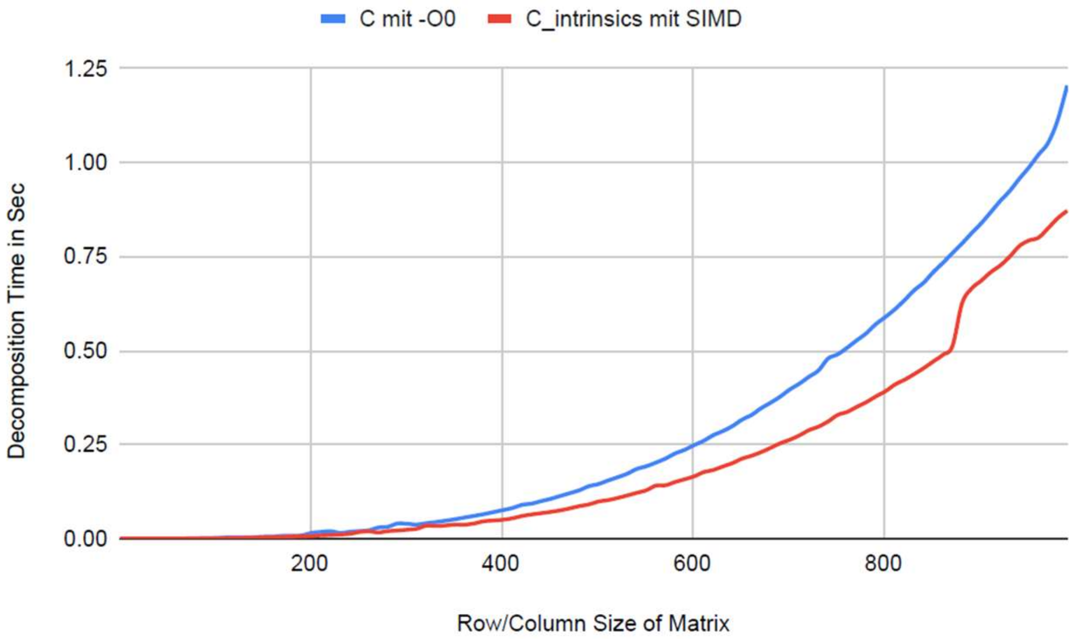
Störung in A und b:

$$\frac{||A - \bar{A}||\infty}{||A||\infty} \leq 2n^3\ eps\ \frac{max_{i,j}|\hat{U}_{ij}|}{max_{i,j}|a_{ij}|} + O(eps^2)$$

Pivotisierend vs. Nicht-Pivotisierend



C-linear vs. C-vektorisiert



Compileroptimiert vs. ASM-Vektorisiert