3. ÁLBEGRA DE CONMUTACIÓN. FUNCIONES LÓGICAS

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

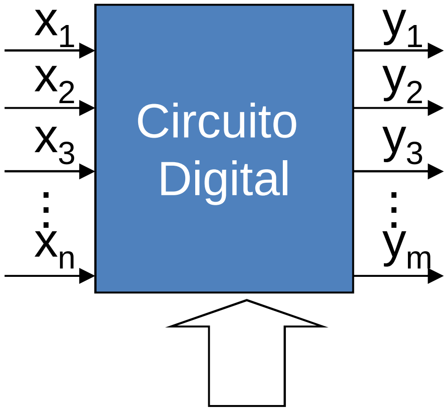
3. ÁLBEGRA DE CONMUTACIÓN. FUNCIONES LÓGICAS

Álgebra de Boole

- El álgebra de Boole es el fundamento matemático de la Electrónica Digital
  - En 1850, el filósofo y matemático, George Boole desarrolla esta teoría matemática, introduciendo el concepto de **variable lógica** (variable que sólo puede tomar dos valores y que en programación se denomina booleano)
  - En 1938, Claude Shannon adapta el Álgebra de Boole a los sistemas digitales

George Boole

Claude Shannon



- Un sistema o circuito digital lo podemos considerar como una caja negra con entradas y salidas
- Su comportamiento vendrá dado por una serie de ecuaciones (funciones lógicas), que relacionan las entradas con las salidas:

$$\left.\begin{array}{c} y_1=f_1(x_1,\dots,x_n) \\ y_2=f_2(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ y_m=f_m(x_1,\dots,x_n) \end{array}\right\}$$

Las entradas y las salidas sólo toman valores 0 y 1

- El Álgebra de Boole establece una serie de postulados y operaciones con los que se pueden obtener las ecuaciones lógicas que representan el comportamiento del circuito

- **Postulados del álgebra de Boole**

  Algebra de Boole es un conjunto B con las operaciones + y · que cumple los Postulados de Huntington:

  - P1: Leyes de composición interna:

    $\forall a,b \in B \quad a+b \in B$

    $a \cdot b \in B$

  - P2: Propiedad conmutativa:

    $\forall a,b \in B \quad a+b = b+a$

    $a \cdot b = b \cdot a$

  - P3: Elementos identidad o neutros:

    $\exists 0 \in B \,/\, a \in B, \quad a+0 = 0+a = a$

    $\exists 1 \in B \,/\, a \in B, \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

  - P4: Propiedad distributiva:

    $\forall a,b,c \in B \quad a+(b \cdot c) = (a+b) \cdot (a+c)$

    $a \cdot (b+c) = (a \cdot b)+(a \cdot c)$

  - P5: Elemento complementario u opuesto:

    $\forall a \in B, \ \exists \bar{a} \in B \,/\, a+\bar{a} = 1$

    $a \cdot \bar{a} = 0$

  - P6: Número de elementos:

    $a,b \in B \,/\, a \neq b$ (como mínimo hay 2 elementos)

Principio de dualidad: el Álgebra de Boole es simétrica respecto a las operaciones (+,·) y los elementos neutros (0,1):

sustituyendo

$a+0 = a \quad \boxed{0 \rightarrow 1 \text{ y } + \rightarrow \cdot} \quad a \cdot 1 = a$

$a+(b \cdot c)=(a+b) \cdot (a+c) \qquad a \cdot (b+c)=(a \cdot b)+(a \cdot c)$

Suma y producto lógico:

El conjunto B {0,1} y las operaciones (+,·) se definen como

Suma lógica

+	0	1
0	0	1
1	1	1

Producto lógico

·	0	1
0	0	0
1	0	1

y se emplean en el análisis y diseño de circuitos digitales

- **Teoremas del álgebra de Boole**

Los teoremas afirman una verdad demostrable y se demuestran sobre la base de los postulados

- T1: Idempotencia a,b Є B
  - ∀ a Є B $a+a = a$
  - $a \cdot a = a$
- T2: Conmutativa respecto al elemento neutro
  - ∀a Є B $a+1 = 1+a$
  - $a \cdot 0 = 0 \cdot a$
- T3: Ley de absorción:
  - ∀ a,b Є B $a+(a \cdot b) = a$
  - $a \cdot (a+b) = a$
- T4: Propiedad asociativa:
  - ∀ a,b,c Є B $a+(b+c) = (a+b)+c = a+b+c$
  - $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$
- T5: Unicidad del complementario
  - ∀a,b Є B, si $a = b$ entonces $\bar{a} = \bar{b}$
  - a Є B $a = \bar{\bar{a}}$
- T6: Leyes de Morgan
  - ∀ a1,…,an Є B $\overline{a_1+\ldots+a_n} = \bar{a}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{a}_n$
  - $\overline{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} = \bar{a}_1+\ldots+\bar{a}_n$
- T7: Teorema de Shannon
  - $\overline{f(X_1,X_2,\ldots X_n,+,\cdot)} = f(\overline{X_1},\overline{X_2},\ldots\overline{X_n},\cdot,+)$
- T8: Teorema de expansión
  - a) $f(X_1,\ldots,X_n) = X_1 \cdot f(1,X_2,\ldots X_n)+\overline{X_1} \cdot f(0,X_2,\ldots,X_n)$
  - b) $f(X_1,\ldots,X_n) = [X_1+f(1,X_2\ldots X_n)] \cdot [\overline{X_1}+f(0,X_2\ldots X_n)]$

– Variable lógica o booleana:

Representa cualquier elemento del conjunto B formado por (0,1). Su valor es el elemento de B que representa (un 0 o un 1)

Sea una variable booleana X, la variable $\overline{X}$ es su complemento:

si $X=0 \Rightarrow \overline{X}=1$ y si $X=1 \Rightarrow \overline{X}=0$

– Función lógica o booleana:

Es una función de variables booleanas con los operadores + y ·

$y=f(X_1,X_2,X_3)= X_1+ \overline{X}_1 \cdot X_2 \cdot \overline{X}_3$

Sirve para indicar la relación de correspondencia que existe entre las entradas y salidas de un circuito digital

$y=f(X_1,X_2,X_3) = X_1+ \overline{X}_1 \cdot X_2 \cdot \overline{X}_3$

aplicando valores concretos de X_1,X_2 y X_3:

$y=f(0,1,1) = 0 + 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$

$y=f(1,0,1) = 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 = 1$

– Tabla de verdad:

Representa los resultados de la función para todas las combinaciones de las variables de entrada

X_1	X_2	X_3	$y=f(X_1,X_2,X_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

– Funciones lógicas básicas y sus símbolos (puertas)

1. Función AND

Símbolos

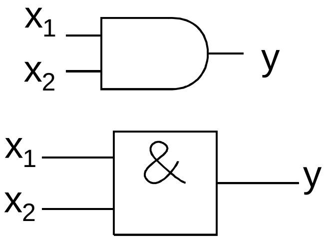


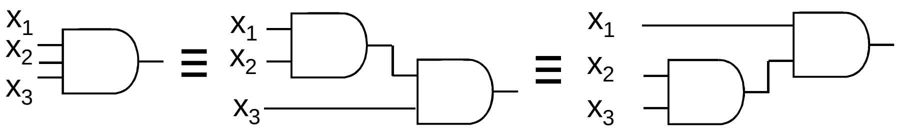
Tabla de verdad

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Función: $y=f(x_1,x_2)= x_1 \cdot x_2$

Propiedades:

- Conmutativa: $y=f(x_1,x_2)= x_1 \cdot x_2=x_2 \cdot x_1$
- Asociativa:



2. Función OR

Símbolos

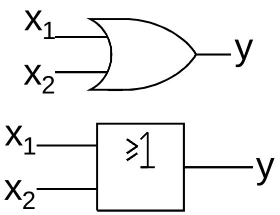


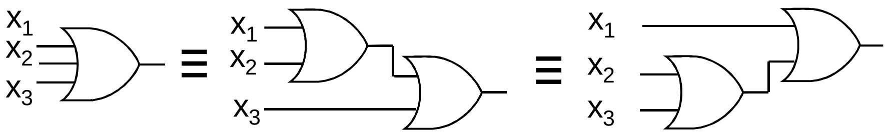
Tabla de verdad

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Función: $y=f(x_1,x_2)= x_1+x_2$

Propiedades:

- Conmutativa: $y=f(x_1,x_2)= x_1+x_2=x_2+x_1$
- Asociativa:



3. Función NOT (inversora)

Símbolos:

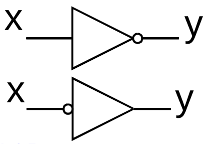


Tabla de verdad:

x	y
0	1
1	0

Función: $y=f(x)= \overline{x}$

4. Función NAND

Símbolos

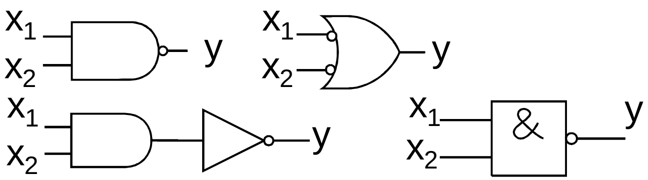


Tabla de verdad:

x_1	x_2	y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Función: $y=f(x_1,x_2)= \overline{x_1 \cdot x_2}$

Propiedades:

- Conmutativa: $y=f(x_1,x_2)= \overline{x_1 \cdot x_2}= \overline{x_1}+ \overline{x_2} = \overline{x_2}+ \overline{x_1}$
- Asociativa: no la cumple

– Funciones lógicas básicas y sus símbolos (puertas)

5. Función NOR

Símbolos

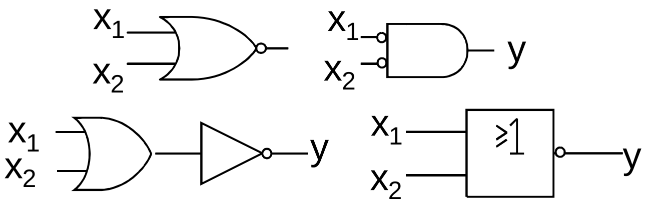


Tabla de verdad:

x_1	x_2	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Función: $y=f(x_1,x_2)=\overline{x_1+x_2}$

Propiedades:

- Conmutativa: $y=f(x_1,x_2)=\overline{x_1+x_2}=\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}=\overline{x_2}\cdot\overline{x_1}$

- Asociativa: no la cumple

6. Función XOR

Símbolos

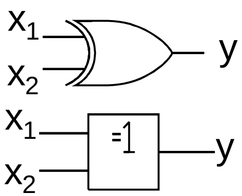


Tabla de verdad

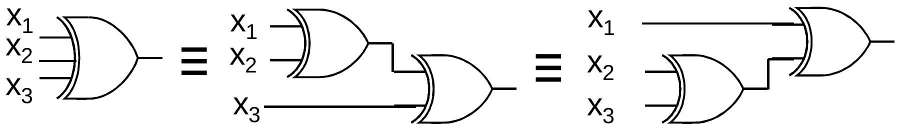
x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Función: $y=f(x_1,x_2)=x_1\oplus x_2=x_1\cdot\overline{x_2}+\overline{x_1}\cdot x_2$

Propiedades:

- Conmutativa: $y=f(x_1,x_2,x_3)=x_1\oplus x_2=x_2\oplus x_1$

- Asociativa:



7. Función NXOR

Símbolos

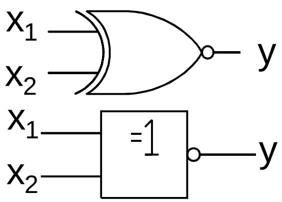


Tabla de verdad

x_1	x_2	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Función: $y=f(x_1,x_2)=\overline{x_1\oplus x_2}=\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}+x_1\cdot x_2$

Propiedades:

- Conmutativa: $y=f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_1\oplus x_2}=\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}+x_1\cdot x_2=(x_1+\overline{x_2})(\overline{x_1}+x_2)=$
$x_1\oplus\overline{x_2}=\overline{x_1}\oplus x_2$

- Asociativa: no la cumple

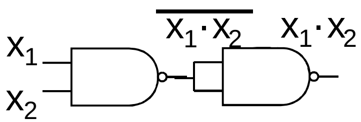
– Conjuntos completos de puertas lógicas

Conjuntos de puertas lógicas que permiten realizar cualquier función.

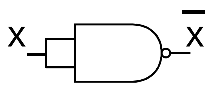
Ordenados de mayor a menor número de puertas existen los siguientes grupos:

1. { AND, OR, NOT }
2. { AND, NOT }
3. { OR, NOT}
4. { NAND}
5. { NOR }

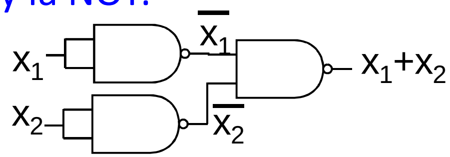
Demostración de que { NAND } es un conjunto completo comprobando que con puertas NAND se puede implementar la puerta AND, la OR y la NOT:



AND

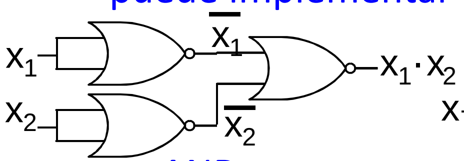


NOT

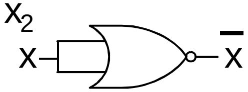


OR

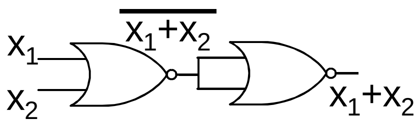
Demostración de que { NOR } es un conjunto completo comprobando que con puertas NAND se puede implementar la puerta AND, la OR y la NOT:



AND



NOT



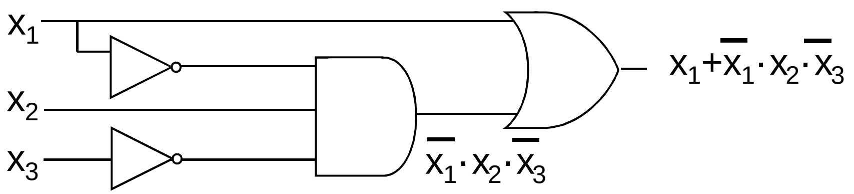
OR

– Generación de funciones mediante puertas lógicas

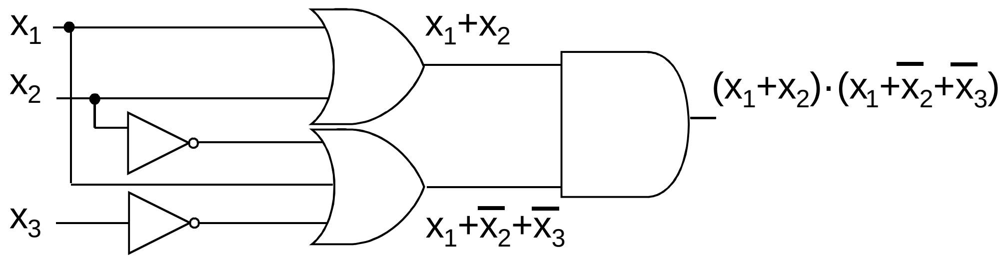
Ya vistos los conjuntos completos se comprobará su utilización obteniendo funciones con dichos conjuntos.

1. Con el conjunto { AND, OR, NOT }

Ejemplo 1: $Y=f(X_1,X_2,X_3)= X_1+ \overline{X_1}\cdot X_2\cdot \overline{X_3}$



Ejemplo 2: $Y=f(X_1,X_2,X_3)= (X_1+ X_2)\cdot(X_1 + \overline{X_2} + \overline{X_3})$



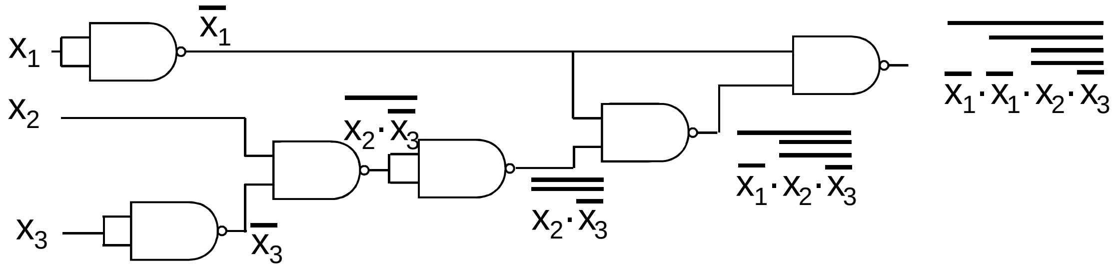
– Generación de funciones mediante puertas lógicas

2. Con el conjunto { NAND }

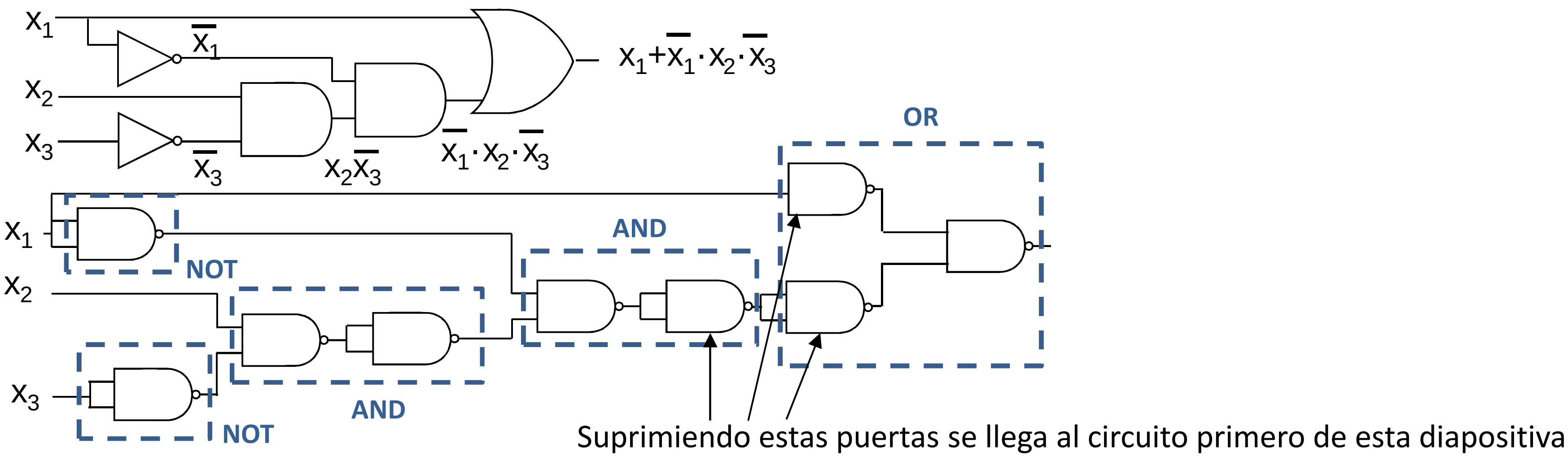
Además emplearemos sólo puertas NAND de dos entradas

a) Transformando la función

Ejemplo 1: $Y=f(X_1,X_2,X_3)= X_1+\overline{X_1}\cdot X_2\cdot\overline{X_3} = \overline{\overline{X_1+\overline{X_1}\cdot X_2\cdot\overline{X_3}}} = \overline{\overline{X_1}\cdot\overline{\overline{X_1}\cdot X_2\cdot\overline{X_3}}} = \overline{\overline{X_1}\cdot\overline{\overline{X_1}\cdot\overline{\overline{X_2\cdot\overline{X_3}}}}}$



b) Implementando la función anterior con AND, OR y NOT, y sustituyendo después dichas puertas con NAND



– Generación de funciones mediante puertas lógicas

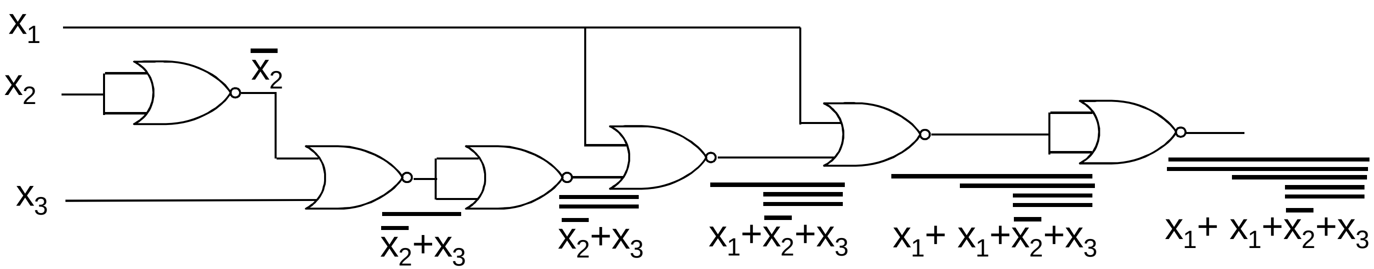
3. Con el conjunto { NOR }

Además emplearemos sólo puertas NOR de dos entradas

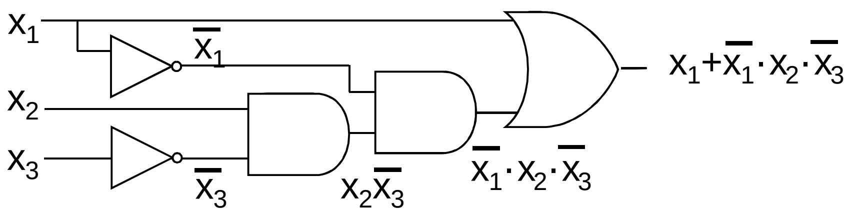
a) Transformando la función

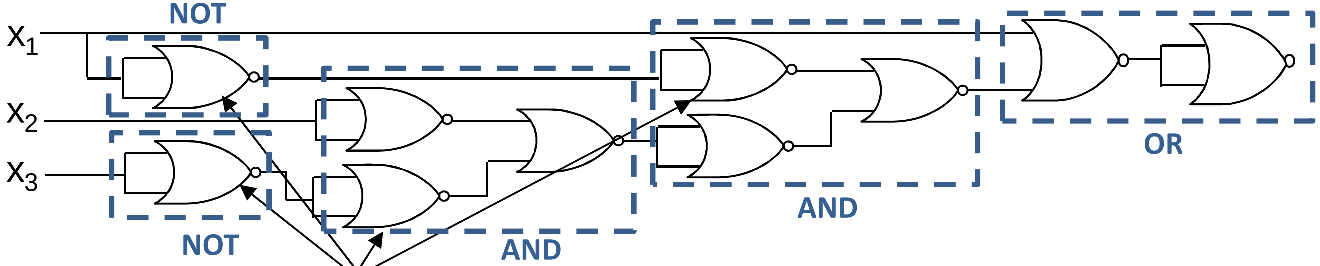
Ejemplo 1: $Y=f(X_1,X_2,X_3)= X_1+ \bar{X}_1\cdot X_2\cdot \bar{X}_3 = X_1+\overline{\overline{\bar{X}_1\cdot X_2\cdot \bar{X}_3}} = X_1+\overline{\bar{\bar{X}}_1+\bar{X}_2+\bar{\bar{X}}_3} = X_1+\overline{X_1+\bar{X}_2+X_3} = X_1+\overline{X_1+\overline{\overline{\bar{X}_2+X_3}}} =$

$$\overline{\overline{X_1+\overline{X_1+\overline{\overline{\bar{X}_2+X_3}}}}}$$



b) Implementando la función anterior con AND, OR y NOT, y sustituyendo después dichas puertas con NOR





Suprimiendo estas puertas se llega al circuito primero de esta diapositiva

- Una función lógica se puede expresar de diferentes formas booleanas
- Interesa la forma booleana que lleve al circuito de mínimo coste
- **Criterios utilizados:**
  a) Forma booleana como **suma de productos o como producto de sumas**, con el mínimo número de términos y el mínimo número variables en cada término, lo que se traduce en un mínimo número de puertas AND-OR con mínimo número de entradas
  b) Minimizar el número de pastillas de circuito integrado (Ejemplo: si se utilizan para un circuito 4 puertas NAND, sólo se necesita una pastilla de 4 puertas NAND, pero si el mismo circuito se implementa con una NOT, 2 AND y 1 OR, se necesitan 3 pastillas (una pastilla de puertas AND, otra de OR y otra de NOR)
- **En la actualidad se usa el criterio de la suma de productos o el producto de sumas:**
  - Los circuitos se implementan en dispositivos de lógica programable (contienen matrices de puertas AND y OR) y se programan por software
  - Se aprenderá a programar en las prácticas
  - Sin embargo, para tener una idea más clara de los circuitos lógicos se aprenderán los métodos clásicos de simplificación que servirán para poder programar de una forma más eficaz
    - **Aplicación de axiomas y teoremas del Álgebra de Boole**
    - **Diagramas de Karnaugh**
    - **Método de Quine McCluskey**

- **Simplificación de funciones mediante axiomas y teoremas del Álgebra de Boole**
  - **Ejemplo 1. Simplificar la siguiente función:**

$$Y=f(x_1,x_2,x_3)= \overline{x}_1\cdot\overline{x}_2\cdot\overline{x}_3 + \overline{x}_1\cdot\overline{x}_2\cdot x_3 + x_1\cdot\overline{x}_2\cdot\overline{x}_3 + x_1\cdot\overline{x}_2\cdot x_3 + x_1\cdot x_2\cdot\overline{x}_3 + x_1\cdot x_2\cdot x_3$$

$\{a\cdot b+a\cdot c = a\cdot(b+c)\}$

$$= \overline{x}_1\cdot\overline{x}_2\cdot(\overline{x}_3 + x_3) + x_1\cdot\overline{x}_2\cdot(\overline{x}_3 + x_3) + x_1\cdot x_2\cdot(\overline{x}_3 + x_3)$$

$\{a+a = 1\}$

$$= \overline{x}_1\cdot\overline{x}_2 + x_1\cdot\overline{x}_2 + x_1\cdot x_2$$

$\{a\cdot b+a\cdot c = a\cdot(b+c)\}$

$$= \overline{x}_1\cdot\overline{x}_2 + x_1\cdot(\overline{x}_2 + x_2)$$

$\{a+a = 1\}$

$$= \overline{x}_1\cdot\overline{x}_2 + x_1$$

$\{a+b\cdot c = (a+b)\cdot(a+c)\}$

$$= \underbrace{(x_1+\overline{x}_1)}_{\{a+a = 1\}}\cdot(x_1 + \overline{x}_2)$$

$$= x_1 + \overline{x}_2$$

  - **Ejemplo 2. Simplificar la siguiente función:**

$$Y=f(x_1,x_2,x_3)= (x_1+x_2)\cdot(x_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3) \xrightarrow{\text{Se multiplica miembro a miembro}} x_1\cdot x_1+ x_1\cdot\overline{x}_2+ x_1\cdot\overline{x}_3+ x_2\cdot x_1+ \overbrace{x_2\cdot\overline{x}_2}^{0}+ x_2\cdot\overline{x}_3=$$

$$= x_1+ x_1\cdot\overline{x}_2+ x_1\cdot\overline{x}_3+ x_2\cdot x_1+ x_2\cdot\overline{x}_3 \xrightarrow{a\cdot b+a\cdot c = a\cdot(b+c)} x_1(1+\overline{x}_2+\overline{x}_3+x_2)+ x_2\cdot\overline{x}_3 \xrightarrow{1+a = 1} x_1+ x_2\cdot\overline{x}_3$$

- **Formas canónicas de una función. Síntesis por minitérminos y por maxitérminos**
  - Antes de comenzar con el segundo método de simplificación se verá el concepto de **forma canónica de una función**.
  - Existen dos versiones:

a) Síntesis por suma de productos canónicos (también llamados minitérminos o minterms):

Un producto canónico, minitérmino o minterm es aquel término que se componen del producto de todas las variables de la función.

Ejemplo: para una función $Y=f(X_1,X_2,X_3)$, son minterms: $\overline{X}_1 \cdot X_2 \cdot X_3$, $X_1 \cdot \overline{X}_2 \cdot \overline{X}_3$, $X_1 \cdot \overline{X}_2 \cdot X_3$, etc.

De modo que una función se puede expresar como suma de minterms:

$$Y=f(X_1,X_2,X_3)= \overline{X}_1 \cdot X_2 \cdot X_3+X_1 \cdot \overline{X}_2 \cdot \overline{X}_3+ X_1 \cdot \overline{X}_2 \cdot X_3$$

Si para cada minterm se extrae un código binario resultante de que las variables complementadas valen 0 y las sin complementar valen 1, se puede expresar la función anterior de forma resumida:

$$Y=f(X_1,X_2,X_3)= \underbrace{\overline{X}_1 \cdot X_2 \cdot X_3}_{\boxed{0\ 1\ 1}}+\underbrace{X_1 \cdot \overline{X}_2 \cdot \overline{X}_3}_{\boxed{1\ 0\ 0}}+ \underbrace{X_1 \cdot \overline{X}_2 \cdot X_3}_{\boxed{1\ 0\ 1}} = m_3+m_4+m_5 =\sum (3,4,5)$$

En la tabla de verdad, en las filas correspondientes a los minterms la función vale 1:

nº de fila	X_1	X_2	X_3	$y=f(X_1,X_2,X_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

b) Síntesis por producto de sumas canónicas (también llamadas maxitérminos o maxterms):

Una suma canónica, maxitérmino o maxterm es aquel término que se componen de la suma de todas las variables de la función.

Ejemplo: para una función $Y=f(X_1,X_2,X_3)$, son maxterms: $\overline{X}_1+\overline{X}_2+X_3$, $X_1+\overline{X}_2+X_3$, $X_1+X_2+X_3$, etc.

De modo que una función se puede expresar como producto de maxterms:

$$Y=f(X_1,X_2,X_3)= (\overline{X}_1+\overline{X}_2+X_3)\cdot(X_1+\overline{X}_2+X_3)\cdot(X_1+X_2+X_3)$$

Si para cada maxterm se extrae un código binario resultante de que las variables complementadas valen 1 y las sin complementar valen 0, se puede expresar la función anterior de forma resumida:

$$Y=f(X_1,X_2,X_3)= \underbrace{(\overline{X}_1+\overline{X}_2+X_3)}_{1\ 1\ 0}\cdot\underbrace{(X_1+\overline{X}_2+X_3)}_{0\ 1\ 0}\cdot\underbrace{(X_1+X_2+X_3)}_{0\ 0\ 0} = M_6\cdot M_2\cdot M_0 =\Pi\ (0,2,6)$$

En la tabla de verdad, en las filas correspondientes a los maxterms la función vale 0:

nº de fila	X_1	X_2	X_3	$y=f(X_1,X_2,X_3)$
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

Nota: por razones de simplicidad, a lo largo de la asignatura solo se trabajará con minterms

- **Simplificación de funciones mediante Diagramas de Karnaugh**
  - **Diagrama de Karnaugh:** es una forma particular de representar la tabla de verdad de una función que además facilita la simplificación de dicha función
  - Lleva a estructuras OR-AND ó AND-OR con el mínimo número de puertas y con el mínimo número de entradas.
  - Es el método idóneo para su aplicación en dispositivos de lógica programable basados en matrices de puertas AND y OR
  - Es un método adecuado para simplificación de funciones de hasta 5 variables (para un número mayor se emplea el método de Quine McCluskey)

  - Ejemplo:

    a) Expresión booleana:

    $Y=f(X_1,X_2,X_3)= X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 + X_1 \cdot X_2 \cdot \overline{X_3}$

    b) Tabla de verdad:

X_1	X_2	X_3	$y=f(X_1,X_2,X_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

c) Diagrama de Karnaugh

$X_3 \backslash X_1X_2$	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	0	1	0

Contiene celdas adyacentes (los lados comunes corresponden a combinaciones que difieren en el valor de una variable)

• Normas para simplificar mediante Diagramas de Karnaugh

1. Se puede simplificar mediante dos formas:
   a) Agrupando mediante lazos, celdas adyacentes que contengan 1s (la identidad que se aplica es $A \cdot x_1 + A \cdot \overline{x_1} = A(x_1 + \overline{x_1}) = A$
   b) Agrupando mediante lazos, celdas adyacentes que contengan 0s (la identidad que se aplica es $(A+x_1) \cdot (A+\overline{x_1}) = A + x_1 \cdot \overline{x_1} = A$
2. Los lazos de 1s o de 0s que se formen deberán ser potencias de 2:
   a) Lazo de 1 elemento (1 ó 0) — término donde no se elimina ninguna variable
   b) Lazo de 2 elemento (1s ó 0s) — término donde se elimina 1 variable
   c) Lazo de 4 elemento (1s ó 0s) — término donde se eliminan 2 variables
   d) Lazo de 8 elemento (1s ó 0s) — término donde se eliminan 3 variables
   e) Lazo de 16 elemento (1s ó 0s) — término donde se eliminan 4 variables
   f) Lazo de 32 elemento (1s ó 0s) — término donde se eliminan 5 variables
   g) Lazo de 64 elemento (1s ó 0s) — término donde se eliminan 6 variables
3. Cubrir todos los 1s ó 0s del diagrama con lazos
   - Emplear el mínimo número de lazos. Cada lazo debe contener el mayor número de 1s ó 0s. Ningún lazo debe estar contenido en otro
4. Cada lazo representa un término de la función simplificada, al que le faltarán variables según el apartado 2
   a) Caso de lazos de 1s: la función simplificada es suma de productos (cada uno de los lazos)
   b) Caso de lazos de 0s: la función simplificada es producto de sumas (cada uno de los lazos)
5. Si en un lazo una variable está en estado 1 y en estado 0, se elimina. Si la variables está con el mismo estado se incluye en el término simplificado
   a) Caso de lazos de 1s: si el estado es 0 $\Rightarrow$ $\overline{x}$ en el término; si el estado es 1 $\Rightarrow$ x en el término
   b) Caso de lazos de 0s: si el estado es 0 $\Rightarrow$ x en el término; si el estado es 1 $\Rightarrow$ $\overline{x}$ en el término

DK para función de 1 variable

$y = f(x) = \overline{x}$

Tabla de verdad: 2^1=2 filas

nº de fila	x	y=f(x)
0	0	1
1	1	0

Diagrama de Karnaugh: 2^1=2 celdas

x	0	1
	$_0$ $\boxed{1}$	$_1$ $\boxed{0}$

número de fila

término m_0

término M_0

Simplificando por 1s: $y = f(x) = m_0 = \overline{x}$

Simplificando por 0s: $y = f(x) = M_0 = \overline{x}$

Simplificar por 0s es más complicado y a partir de ahora sólo lo haremos por 1s

DK para función de 2 variables

$y = f(x_1,x_2) = \overline{x_1}\cdot x_2+x_1\cdot\overline{x_2}+x_1\cdot x_2 = \sum(1,2,3)$

filas de la tabla de verdad: $\boxed{1 \quad 2 \quad 3}$ → Términos canónicos minterm (producto de las variables de la función)

Tabla de verdad: 2^2=4 filas

nº de fila	X_1	X_2	$y=f(X_1,X_2)$
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	1

Los términos canónicos que aparecen en la función, en la tabla de verdad están a 1

Diagrama de Karnaugh: 2^2=4 celdas

x_2 \ x_1	0	1
0	$_0$ 0	$_2$ 1
1	$_1$ 1	$_3$ 1

$m_2+m_3=x_1\cdot\overline{x_2}+x_1\cdot x_2=x_1\cdot\overbrace{(x_2+\overline{x_2})}^{1} = x_1$

$m_1+m_3=\overline{x_1}\cdot x_2+x_1\cdot x_2=\underbrace{(x_1+\overline{x_1})}_{1}\cdot x_2 = x_2$

se suman los términos de cada lazo:

$f(x_1,x_2)=\boxed{x_1+x_2}$

Por Álgebra de Boole: $\overline{x_1}\cdot x_2+x_1\cdot\overline{x_2}+x_1\cdot x_2=\overline{x_1}\cdot x_2+x_1\cdot\overbrace{(\overline{x_2}+x_2)}^{1} =\overline{x_1}\cdot x_2+x_1=$

$= \underbrace{(x_1+\overline{x_1})}_{1}\cdot(x_1+x_2) = \boxed{x_1+x_2}$

DK para función de 3 variables

Ej. 1) $y = f(x_1,x_2,x_3) = \sum (2,4,5,6,7)$

Tabla de verdad: 2^3=8 filas

nº de fila	X_1	X_2	X_3	$y=f(X_1,X_2,X_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Diagrama de Karnaugh: 2^3=8 celdas

$x_3 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
0	(0) 0	(2) 1	(6) 1	(4) 1
1	(1) 0	(3) 0	(7) 1	(5) 1

$m_4+m_5+m_6+m_7=x_1$

$m_2+m_6=x_2\cdot\overline{x_3}$

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boxed{x_1+x_2\cdot\overline{x_3}}$$

Ej. 2) $y = f(x_1,x_2,x_3) = \sum (0,3,4,5,7)$

Tabla de verdad: 2^3=8 filas

nº de fila	X_1	X_2	X_3	$y=f(X_1,X_2,X_3)$
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Diagrama de Karnaugh: 2^3=8 celdas

$x_3 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
0	(0) 1	(2) 0	(6) 0	(4) 1
1	(1) 0	(3) 1	(7) 1	(5) 1

$m_0+m_4=\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}$

$m_7+m_5=x_1\cdot x_3$

$m_3+m_7=x_2\cdot x_3$

$$f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}+x_1\cdot x_3+ +x_2\cdot x_3$$

DK para función de 4 variables

Ej. 1) $y = f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum (0,1,3,4,5,7,9,11,13,14,15)$

Tabla de verdad: 2^4=16 filas

nº de fila	X_1	X_2	X_3	X_4	$y=f(X_1,X_2,X_3,X_4)$
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

Diagrama de Karnaugh: 2^4=16 celdas

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0: 1	4: 1	12: 0	8: 0
01	1: 1	5: 1	13: 1	9: 1
11	3: 1	7: 1	15: 1	11: 1
10	2: 0	6: 0	14: 1	10: 0

$m_0+m_4+m_1+m_5=\overline{x}_1\cdot\overline{x}_3$

$m_1+m_3+m_5+m_7+$
$+\ m_{13}+m_{15}+m_9+m_{11} = x_4$

$m_{14}+m_{15} = x_1\cdot x_2\cdot x_3$

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)= \boxed{x_4+\overline{x}_1\cdot\overline{x}_3+ +x_1\cdot x_2\cdot x_3}$

DK para función de 4 variables

Ej. 2) Tableros de ajedrez:

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	(0) 0	(4) 1	(12) 0	(8) 1
01	(1) 1	(5) 0	(13) 1	(9) 0
11	(3) 0	(7) 1	(15) 0	(11) 1
10	(2) 1	(6) 0	(14) 1	(10) 0

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	(0) 1	(4) 0	(12) 1	(8) 0
01	(1) 0	(5) 1	(13) 0	(9) 1
11	(3) 1	(7) 0	(15) 1	(11) 0
10	(2) 0	(6) 1	(14) 0	(10) 1

$y = \overline{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4}$

$$y = f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\cdot x_4 + \bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot\bar{x}_4 + \bar{x}_1\cdot x_2\cdot\bar{x}_3\cdot\bar{x}_4 + \bar{x}_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4 + x_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\cdot\bar{x}_4 + x_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot x_4 + x_1\cdot x_2\cdot\bar{x}_3\cdot x_4 + x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\bar{x}_4 = \bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot(\bar{x}_3\cdot x_4+x_3\cdot\bar{x}_4)+x_1\cdot x_2\cdot(\bar{x}_3\cdot x_4+x_3\cdot\bar{x}_4)+x_1\cdot\bar{x}_2\cdot(\bar{x}_3\cdot\bar{x}_4+x_3\cdot x_4)+\bar{x}_1\cdot x_2\cdot(\bar{x}_3\cdot\bar{x}_4+x_3\cdot x_4)$$

$$= \underbrace{(\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2+x_1\cdot x_2)}_{\overline{x_1\oplus x_2}}\cdot\underbrace{(\bar{x}_3\cdot x_4+x_3\cdot\bar{x}_4)}_{x_3\oplus x_4}+\underbrace{(\bar{x}_1\cdot x_2+x_1\cdot\bar{x}_2)}_{x_1\oplus x_2}\cdot\underbrace{(\bar{x}_3\cdot\bar{x}_4+x_3\cdot x_4)}_{\overline{x_3\oplus x_4}} = x_1\oplus x_2\oplus x_3\oplus x_4$$

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	(0) 0	(4) 0	(12) 1	(8) 1
01	(1) 1	(5) 1	(13) 0	(9) 0
11	(3) 0	(7) 0	(15) 1	(11) 1
10	(2) 1	(6) 1	(14) 0	(10) 0

$y = x_1 \oplus x_3 \oplus x_4$

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	(0) 1	(4) 1	(12) 0	(8) 0
01	(1) 0	(5) 0	(13) 1	(9) 1
11	(3) 1	(7) 1	(15) 0	(11) 0
10	(2) 0	(6) 0	(14) 1	(10) 1

$y = \overline{x_1 \oplus x_3 \oplus x_4}$

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	(0) 0	(4) 0	(12) 1	(8) 1
01	(1) 0	(5) 0	(13) 1	(9) 1
11	(3) 1	(7) 1	(15) 0	(11) 0
10	(2) 1	(6) 1	(14) 0	(10) 0

$y = x_1 \oplus x_3$

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	(0) 1	(4) 1	(12) 0	(8) 0
01	(1) 1	(5) 1	(13) 0	(9) 0
11	(3) 0	(7) 0	(15) 1	(11) 1
10	(2) 0	(6) 0	(14) 1	(10) 1

$y = \overline{x_1 \oplus x_3}$

DK para función de 5 variables

$y = f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \sum (0,1,4,5,6,12,14,16,19,22,28,30,31)$ **Tabla verdad y Diagrama de K.:** 2^5=32 filas/celdas

nº fila	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$y=f(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)$
0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	1	0	0
3	0	0	0	1	1	0
4	0	0	1	0	0	1
5	0	0	1	0	1	1
6	0	0	1	1	0	1
7	0	0	1	1	1	0
8	0	1	0	0	0	0
9	0	1	0	0	1	0
10	0	1	0	1	0	0
11	0	1	0	1	1	0
12	0	1	1	0	0	1
13	0	1	1	0	1	0
14	0	1	1	1	0	1
15	0	1	1	1	1	0

nº fila	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$y=f(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)$
16	1	0	0	0	0	1
17	1	0	0	0	1	0
18	1	0	0	1	0	0
19	1	0	0	1	1	1
20	1	0	1	0	0	0
21	1	0	1	0	1	0
22	1	0	1	1	0	1
23	1	0	1	1	1	0
24	1	1	0	0	0	0
25	1	1	0	0	1	0
26	1	1	0	1	0	0
27	1	1	0	1	1	0
28	1	1	1	0	0	1
29	1	1	1	0	1	0
30	1	1	1	1	0	1
31	1	1	1	1	1	1

x_1=0

$x_4x_5 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
00	0: 1	4: 1	12: 1	8: 0
01	1: 1	5: 1	13: 0	9: 0
11	3: 0	7: 0	15: 0	11: 0
10	2: 0	6: 1	14: 1	10: 0

$m_0+m_1+m_4+m_5 = \overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_4}$

x_1=1

$x_4x_5 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
00	16: 1	20: 1	28: 1	24: 0
01	17: 0	21: 0	29: 0	25: 0
11	19: 1	23: 0	31: 1	27: 0
10	18: 0	22: 1	30: 1	26: 0

$m_0+m_4+m_{16}+m_{20}=\overline{x_2}\cdot\overline{x_4}\cdot\overline{x_5}$

$m_4+m_{12}+m_{20}+m_{28}$
$+m_6+m_{14}+m_{22}+m_{30}=x_3\cdot\overline{x_5}$

$m_{19}=x_1\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}\cdot x_4\cdot x_5$

$m_{30}+m_{31}=x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)= \overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_4}+x_3\cdot\overline{x_5}+\overline{x_2}\cdot\overline{x_4}\cdot\overline{x_5}+x_1\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}\cdot x_4\cdot x_5+x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$$

- **Simplificación por el método de Quine McKluskey**
  - Consiste en:
    - a) Ordenar los términos en grupos , según su **índice**, de menor a mayor índice.
    - b) Ir comparando cada uno de los términos de un grupo con los términos del grupo adyacente. Los términos que difieran en una variable (en un término la variable está complementada y en el otro sin complementar) se reducirán en esa variable
  - Aunque se usa para funciones de 6 variables o más, el ejemplo siguiente contendrá sólo 4 variables para que sea más sencillo de entender:
  - $y = f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum(3,6,8,9,12,13,14) = \underbrace{\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\cdot x_4}_{3} + \underbrace{\overline{x_1}\cdot x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4}}_{6} + \underbrace{x_1\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}}_{8} + \underbrace{x_1\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}\cdot x_4}_{9} + \underbrace{x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}}_{12} + \underbrace{x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_3}\cdot x_4}_{13} + \underbrace{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4}}_{14}$

Paso 1: ordenar los términos en grupos según su índice de menor a mayor índice (el índice es el nº de variables sin complementar del término):

índice	Minterm	X_1	X_2	X_3	X_4	
1	8	1	0	0	0	·
2	3	0	0	1	1	d
2	6	0	1	1	0	·
2	9	1	0	0	1	·
2	12	1	1	0	0	·
3	13	1	1	0	1	·
3	14	1	1	1	0	·

Paso 2: hacer reducciones de los términos comparando cada uno de los términos de un grupo con los del grupo adyacente. Si los términos difieren en el estado de una variable (en uno la variable está complementada y en el otro sin complementar), se elimina la variable (poniendo un guión):

Reducción 1

	Minterm	X_1	X_2	X_3	X_4	
Grupos 1 y 2	8,9	1	0	0	-	·
	8,12	1	-	0	0	·
Grupos 2 y 3	6,14	-	1	1	0	c
	9,13	1	-	0	1	·
	12,13	1	1	0	-	·
	12,14	1	1	-	0	b

Reducción 2

Minterm	X_1	X_2	X_3	X_4	
8,9,12,13	1	-	0	-	a

En la reducción 2 se ha comparado los términos de los dos grupos formados en la reducción 1

Paso 3: obtener los implicantes primos (implicante que no está incluido en otro implicante de orden superior de la función). En el ejemplo son a, b, c y d.

Paso 4: se determinan los implicantes primos esenciales (implicante primo que incluye algún minterm que no está incluido en ningún otro implicante primo):

	Minterms →	#3	#6	#8	#9	#12	#13	#14
Implicantes primos	*a			$X	$X	X	$X	
	b					X		X
	*c		$X					X
	*d	$X						

Se marca con x los minterms que están incluidos en cada implicante primo.

Se determinan las columnas que sólo tienen una X y se marcan con $

Se marcan con * los implicantes primos que contengan alguna X con $. Dichos implicantes primos son esenciales (en el ejemplo a, c y d)

Paso 5: se comprueba si los implicantes primos esenciales cubren todos los minterms (si algún minterm no es cubierto por los implicantes primos esenciales habría que coger el implicante primo que lo cubra)

En el ejemplo, a, c y d cubren todos los minterms

Paso 6: La función simplificada será la suma lógica de los implicantes primos esenciales:

$y = f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 \cdot \overline{x_3} + x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4$

Comprobación del anterior resultado mediante Karnaugh:

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	0: 0	4: 0	12: 1	8: 1
01	1: 0	5: 0	13: 1	9: 1
11	3: 1	7: 0	15: 0	11: 0
10	2: 0	6: 1	14: 1	10: 0

$m_{12}+m_8+m_{13}+m_9 = x_1 \cdot \overline{x_3}$

$m_3 = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4$

$m_6+m_{14} = x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$

$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$

• Simplificación de funciones incompletas

Función completa (completamente definida): cuando para todas las combinaciones de valores de las variables, la función tiene definido el valor que toma

nº de fila	X_1	X_2	$y=f(X_1,X_2)$
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	1

$$f(x_1,x_2)= x_1+x_2$$

Función incompleta: cuando existen combinaciones de valores de las variables para los que la función no tiene definido el valor que toma. Esto suceder porque esas combinaciones no se van a dar, o porque es indiferente el valor que tome la función para dichas combinaciones. En ese caso, para esas combinaciones, se asigna a la función el valor X (que puede ser 0 o 1)

nº de fila	X_1	X_2	$y=f(X_1,X_2)$
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	1	X

$f(x_1,x_2)= x_1\cdot\overline{x_2}$ (si X vale 0)

$f(x_1,x_2)= x_1\cdot\overline{x_2} + x_1\cdot x_2 = x_1$ (si X vale 1)

<u>Consejo:</u> resolviendo con diagrama de Karnaugh utilizar las X como 1 cuando convenga para ampliar los lazos que abarcan los 1s (los lazos grandes permiten simplificar más).

En el ejemplo anterior el lazo del 1 se extiende si X=1:

x_2 \ x_1	0	1
0	[0] 0	[2] 0
1	[1] 1	[3] X

<u>Pero ojo:</u> no se deben añadir lazos nuevos que abarquen solo X, ya que esto implica añadir un término nuevo a la función

Ejemplo de función incompleta:

Los trabajadores de una empresa tienen tarjetas para acceder a dos laboratorios. Los números 0,3,4,7,8 y 12 acceden a uno de ellos (la función lógica a diseñar devuelve 0) y los números 2,5,6 y 9 acceden al otro (la función lógica a diseñar devuelve 1).

Tabla de verdad:

nº de fila	X_1	X_2	X_3	X_4	$y=f(X_1,X_2,X_3,X_4)$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	X
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	X
11	1	0	1	1	X
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	X
14	1	1	1	0	X
15	1	1	1	1	X

Sustituyendo las X por 1s:

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0: 0	4: 0	12: 0	8: 0
01	1: X	5: 1	13: X	9: 1
11	3: 0	7: 0	15: X	11: X
10	2: 1	6: 1	14: X	10: X

$\overline{x}_3\cdot x_4$

x_1

$x_3\cdot \overline{x}_4$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)= x_1+\overline{x}_3\cdot x_4+x_3\cdot \overline{x}_4= \\ = x_1 + x_3\oplus x_4$$

Sustituyendo las X por 0s:

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0: 0	4: 0	12: 0	8: 0
01	1: X	5: 1	13: X	9: 1
11	3: 0	7: 0	15: X	11: X
10	2: 1	6: 1	14: X	10: X

$\overline{x}_1\cdot x_2\cdot \overline{x}_3\cdot x_4$

$x_1\cdot \overline{x}_2\cdot \overline{x}_3\cdot x_4$

$x_1\cdot \overline{x}_3\cdot x_4$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)= \overline{x}_1\cdot x_2\cdot \overline{x}_3\cdot x_4+ \\ + x_1\cdot \overline{x}_2\cdot \overline{x}_3\cdot x_4+ \\ + x_1\cdot \overline{x}_3\cdot x_4+$$

Extendiendo lazos de unos con X (la opción correcta):

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0: 0	4: 0	12: 0	8: 0
01	1: X	5: 1	13: X	9: 1
11	3: 0	7: 0	15: X	11: X
10	2: 1	6: 1	14: X	10: X

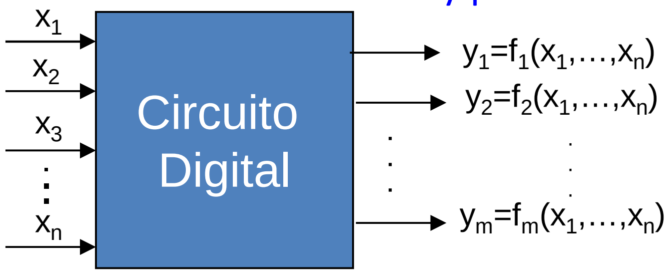
$\overline{x}_3\cdot x_4$

$x_3\cdot \overline{x}_4$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)= \overline{x}_3\cdot x_4+x_3\cdot \overline{x}_4= \\ x_3\oplus x_4$$

- **Multifunciones**

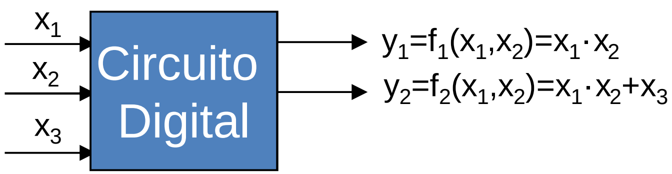
Son circuitos con más de una salida y por tanto con más de una función:



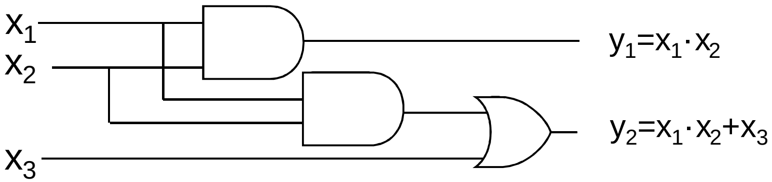
Las funciones se pueden simplificar de modo independiente

Sin embargo, si se consigue que las funciones compartan términos, se obtiene una mayor simplificación del circuito

Ejemplo:



a) Sin compartir puertas



b) Compartiendo puertas