УДК 519.21

Андрій Кандрьонкін, студент

Про клас інверсних моноїдів ко-скінченних порядкових автоморфізмів множини $\mathbb{Z}$

У роботі розглядається клас інверсних напівгруп, які одержуються із групи порядкових автоморфізмів лінійно впорядкованої множини цілих чисел приєднанням ко–скінченного ідемпотента.

Ключові слова: інверсна напівгрупа, ко–скінченний порядковий автоморфізм.

Andrii Kandrynkin, student

On some class of inverse monoids of co–finite orderly automorphisms of integers

In the paper a class of inverse semigroups, which is received from the group of orderly automorphisms of the linearly–ordered set of integers by the the adjunction of the co–finite idempotent, is considered.

Key Words: inverse monoid, co–finite orderly automorphism.

Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор Кириченко В.В.

Вступ

Теорія напівгруп є однією із тих областей сучасної алгебри, яка постійно розвивається. Вона має тісні зв'язки з диференціальною геометрією, функціональним аналізом, теорією графів, теорією алгоритмів, абстрактною теорією автоматів та ін. Найпростішою конструкцією, яка призводитиме до напівгруп, є просте приєднання до групи, яка влаштована досить прозоро, одного ідемпотента. Тим самим ми одержимо моноїд, який зразу ж стає суттєво складнішим.

Розглянемо у якості базової групи групу C_∞ порядкових автоморфізмів лінійно впорядкованої множини цілих чисел $\mathbb{Z}$, і нехай
$C_\infty =< b >$. Позначимо напівгрупу частково визначених ко–скінченних порядкових автоморфізмів множини $\mathbb{Z}$, що визначаються групою C_∞, символом IC_∞. Тоді напівгрупа IC_∞ породжується автоморфізмами b та f, де для всіх $x \in \mathbb{Z}$ маємо $b : x \to x + 1$, $Codom\ f = \{0\}$ і для всіх $x \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ $f : x \to x$, і задається такими визначальними співвідношеннями:

$$IC_\infty =< b, f | bb^{-1} = b^{-1}b = 1, f^2 = f,$$

$$fb^{-r} fb^r = b^{-r} fb^r\ f, r \in \mathbb{N} > .$$

Тим самим ми можемо ототожнити елементи напівгрупи IC_∞ із напівгруповими словами над алфавітом $S = \{b, f\}$. Тоді кожен елемент $g \in IC_\infty$ допускає єдине зображення у вигляді слова вигляду

$$h_1 \dots h_t h, \text{ де } h = b^k,\ h_i = b^{-\alpha_i} f b^{\alpha_i}$$

для $i \in \{1, \dots, t\}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{Z}$ такі, що $\alpha_1 < \dots < \alpha_t, t \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \in \mathbb{Z}$.

1. Клас $(u_1, \dots, u_c)$–піднапівгруп $IC_{u_1,\dots,u_c;\infty}$ моноїда IC_∞

Нехай $u_1, \dots, u_c$ — невід'ємні цілі числа такі, що $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_c$. Позначимо символом $f_{u_1,\dots,u_c}$ частково визначений ко–скінченний порядковий автоморфізм моноїда IC_∞ такий, що

$$Codom\ f_{u_1,\dots,u_c} = \{-u_c, \dots, -u_1, 0, u_1, \dots, u_c\}$$

і для всіх $x \in \mathbb{Z} \backslash \{-u_c, \dots, -u_1, 0, u_1, \dots, u_c\}$ $f_{u_1,\dots,u_c} : x \to x$.

Твердження 1. *1) Нехай $u_1, \dots, u_c$ — невід'ємні цілі числа такі, що $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_c$. Для довільного $k \in \mathbb{Z}$ частково визначений автоморфізм $b^{-k} f_{u_1,\dots,u_c} b^k \in IC_\infty$ є ідемпотентом.*

2) Для довільної послідовності $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_c$ невід'ємних цілих чисел $f_{u_1,\dots,u_c} = b^{-1} f_{u_1,\dots,u_{c-1}} b f_{u_1,\dots,u_{c-1}}$.

3) Для довільної послідовності $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_c$ невід'ємних цілих чисел та для довільних цілих чисел k, l ідемпотенти $b^{-k} f_{u_1,\dots,u_c} b^k$ та $b^{-l} f_{u_1,\dots,u_c} b^l$ комутують.

Доведення — безпосередня перевірка.

Означення 1. *Частково визначений ко–скінченний порядковий автоморфізм $b^{-k}f_{u_1,\dots,u_c}b^k \in IC_\infty$ називатимемо $(u_1,\dots,u_c;k)$–ідемпотентом.*

Визначимо для послідовності $0=u_1<u_2<\dots<u_c$ невід'ємних цілих чисел піднапівгрупу $IC_{u_1,\dots,u_c;\infty}$ інверсного моноїда IC_∞ як таку

$$IC_{u_1,\dots,u_c;\infty} =< b, f_{u_1,\dots,u_c} >$$

і називатимемо її $(u_1,\dots,u_c)$–піднапівгрупою моноїда IC_∞.

Означення 2. *Для $k_1,\dots,k_s \in \mathbb{Z}$ називатимемо елемент g $(k_1,\dots,k_s)$–зміщенням елемента $f_{u_1,\dots,u_c}$, якщо $Codom\ g = \{-k_1-u_c,\dots -k_1-u_1,-k_1,-k_1+u_1,\dots,-k_1+u_c, -k_1-k_2-u_c,\dots -k_1-k_2-u_1,-k_1-k_2, -k_1-k_2+u_1,\dots,-k_1-k_2+u_c,\dots,-k_1-\dots-k_{s-1}-u_c,\dots,-k_1-\dots-k_{s-1}-u_1,-k_1-\dots-k_{s-1}, -k_1-\dots-k_{s-1}+u_1,\dots, -k_1-\dots-k_{s-1}+u_c\}$, а на області визначення елемент g діє як $b^{k_1+k_2+\dots+k_s}$.*

$(k_1,\dots,k_s)$–зміщення відповідає своїй назві. Область невизначення елемента g є об'єднанням паралельних зміщень множини $\{-u_c,\dots,-u_1,0,u_1,\dots,u_c\}$ на k_1, k_1+k_2, …, $k_1+\dots+k_{s-1}$ вліво.

Твердження 2. *Частково визначений ко-скінченний порядковий автоморфізм g моноїда IC_∞ належить піднапівгрупі $IC_{u_1,\dots,u_c;\infty}$ тоді і тільки тоді, коли g є деяким $(k_1,\dots,k_s)$–зміщенням елемента $f_{u_1,\dots,u_c}$ $(u_1,\dots,u_c \in \mathbb{Z})$.*

Доведення. Оскільки $f^2=f$, то кожен елемент $g\in IC_{u_1,\dots,u_c;\infty}$ можна зобразити у вигляді слова такого вигляду

$$g = b^{k_1}f_{u_1,\dots,u_c}b^{k_2}\dots b^{k_{s-1}}f_{u_1,\dots,u_c}b^{k_s},$$

де $k_1,\dots,k_s \in \mathbb{Z}$. Тоді матимемо $g = b^{k_1}\ b^{u_c}fb^{-u_c}\dots\ b^{u_1}fb^{-u_1}\ fb^{-u_1}fb^{u_1}\dots b^{-u_c}fb^{u_c}\ b^{k_2}\ b^{u_c}fb^{-u_c}\dots\ b^{u_1}fb^{-u_1}f\ b^{-u_1}fb^{u_1}\dots b^{-u_c}fb^{u_c}\ b^{k_3}\dots b^{k_{s-1}}\ b^{u_c}\ fb^{-u_c}\dots b^{u_1}fb^{-u_1}fb^{-u_1}f\ b^{u_1}\dots\ b^{-u_c}fb^{u_c}\ b^{k_s} = b^{k_1+u_c}fb^{-k_1-u_c}\ b^{k_1+u_{c-1}}f\ b^{-k_1-u_{c-1}}\dots\ b^{k_1+u_1}fb^{-k_1-u_1}\ b^{k_1}fb^{-k_1}b^{k_1-u_1}fb^{-k_1+u_1}b^{k_1-u_2}\ fb^{-k_1+u_2}\dots\ b^{k_1-u_c}fb^{-k_1+u_c}\ b^{k_1+k_2+u_c}fb^{-u_c-k_1-k_2}\ b^{k_1+k_2+u_{c-1}}\dots b^{k_1+k_2+\dots+k_s}$ Тоді $Codom\ g = \{-k_1-u_c,\dots -k_1-u_1,-k_1,-k_1+u_1,\dots,-k_1+u_c,-k_1-k_2-u_c,\dots -k_1-k_2-u_1,-k_1-k_2,-k_1-k_2+u_1,\dots,-k_1-k_2+u_c,\dots,-k_1-\dots-k_{s-1}-u_c,\dots,-k_1-\dots-k_{s-1}-u_1,-k_1-\dots-k_{s-1},-k_1-\dots-k_{s-1}+u_1,\dots,-k_1-\dots-k_{s-1}+u_c\}$, а для всіх $x\in\mathbb{Z}\backslash Codom\ g$ матимемо: $g(x)=b^{k_1+k_2+\dots+k_s}(x)$. $\square$

Звідси отримуємо, що областю невизначення ідемпотента $b^{-k}f_{u_1,\dots,u_c}b^k$ є множина $Codom\ b^{-k}f_{u_1,\dots,u_c}b^k = \{k-u_c,\dots,k-u_1,k,k+u_1,\dots,k+u_c\}$. Елемент $b^{-k}f_{u_1,\dots,u_c}b^k$ природно називати ідемпотентним (k)–зміщенням елемента $f_{u_1,\dots,u_c}$. Тоді ідемпотентне (k)–зміщення на області визначення діє тривіально, а його область невизначення є паралельним зсувом області невизначення елемента $f_{u_1,\dots,u_c}$ на k вправо.

Твердження 3. *Кожен елемент $g\in IC_{u_1,\dots,u_c;\infty}$ єдиним чином зображається у вигляді слова виду $h_1\dots h_t h$, де $h_i = b^{-\alpha_i}f_{u_1,\dots,u_c}b^{\alpha_i}$ для $i\in\{1,\dots,t\}, h=b^k$, $\alpha_1,\dots,\alpha_t\in\mathbb{Z}$ таких, що $\alpha_1<\dots<\alpha_t, t\in\mathbb{N}\cup\{0\}, k\in\mathbb{Z}$.*

Доведення. Кожен елемент $g\in IC_{u_1,\dots,u_c;\infty}$ можна зобразити у вигляді слова такого вигляду $g = b^{k_1}f_{u_1,\dots,u_c}b^{k_2}\dots b^{k_{s-1}}f_{u_1,\dots,u_c}b^{k_s}$, де $k_1,\dots,k_s\in\mathbb{Z}$. Тоді із твердження 2 матимемо $g = b^{k_1}f_{u_1,\dots,u_c}\ b^{-k_1}b^{k_1+k_2}f_{u_1,\dots,u_c}b^{-k_1-k_2}\dots b^{k_1+\dots+k_{s-1}}f_{u_1,\dots,u_c}\ b^{-k_1-\dots-k_{s-1}}\ b^{k_1+\dots+k_s}$. Окрім того, згідно твердження 1 елементи $b^kf_{u_1,\dots,u_c}b^{-k}$ і $b^lf_{u_1,\dots,u_c}b^{-l}$ комутують як ідемпотенти, а $b^kf_{u_1,\dots,u_c}b^{-k}b^k\ f_{u_1,\dots,u_c}\ b^{-k} = b^kf_{u_1,\dots,u_c}\ b^{-k}$, що і доводить існування нашого зображення.

Тепер доведемо єдиність зображення. Нехай $g = h_1\dots h_t h = \tilde h_1\dots\tilde h_s\tilde h$ — два зображення елемента h необхідного вигляду, де $h_i = b^{-\alpha_i}\ f_{u_1,\dots,u_c}\ b^{\alpha_i}$, $i\in\{1,\dots,t\}$, $h=b^{k_1}$, $\tilde h_j = b^{-\beta_j}\ f_{u_1,\dots,u_c}\ b^{\beta_j}$, $j\in\{1,\dots,s\}$, $\tilde h = b^{k_2}$. Тоді $Codom\ g = Codom\ (h_1\dots h_t) = Codom\ (\tilde h_1\dots\tilde h_s)$ і $(h_1\dots h_t)|_{Dom\ g} = (\tilde h_1\dots\tilde h_s)|_{Dom\ g} = id|_{Dom\ g}$. Тому $h|_{Dom\ g} = \tilde h|_{Dom\ g}$, а значить $h=\tilde h$. Більш того, область невизначення елемента $h_1\dots h_t$ є об'єднанням паралельних зсувів на α_1, …, α_t вправо області невизначення елемента $f_{u_1,\dots,u_c}$. Аналогічно, область невизначення елемента $\tilde h_1\dots\tilde h_s$ є об'єднанням паралельних зсувів на β_1, …, β_t вправо області невизначення елемента $f_{u_1,\dots,u_c}$ і $\alpha_1<\dots<\alpha_t$, $\beta_1<\dots<\beta_s$. Таким чином, $t=s$ і $\alpha_1=\beta_1$, …, $\alpha_t=\beta_t$. $\square$

Означення 3. *Нехай g — довільний елемент моноїда $IC_{u_1,\ldots,u_c;\infty}$. $(u_1,\ldots,u_c)$–канонічним виглядом елемента g називатимемо його зображення у вигляді слова, описаного в твердженні 3 (позначатимемо це зображення елемента g символом $[g]_{u_1,\ldots,u_c}$). Число $r \in \{1,\ldots,t\}$ таке, що $\alpha_1 < \ldots < \alpha_r < 0 \leqslant \alpha_{r+1} < \ldots < \alpha_t$, називатимемо $(u_1,\ldots,u_c)$–індексом переходу і позначатимемо символом $i([g]_{u_1,\ldots,u_c})$.*

З останнього твердження отримуємо, що

Твердження 4. *Піднапівгрупа $IC_{u_1,\ldots,u_c;\infty}$ є інверсною піднапівгрупою моноїда IC_∞. Її задання твірними елементами і визначальними співвідношеннями має наступний вигляд: $IC_{u_1,\ldots,u_c;\infty} = < b, f_{u_1,\ldots,u_c} \mid bb^{-1} = b^{-1}b = 1$, $f^2_{u_1,\ldots,u_c} = f_{u_1,\ldots,u_c}$, $f_{u_1,\ldots,u_c}\ b^{-r}\ f_{u_1,\ldots,u_c}\ b^r = b^{-r}\ f_{u_1,\ldots,u_c}\ b^r\ f_{u_1,\ldots,u_c}$, $r \in \mathbb{N} >$, причому система визначальних співвідношень є незвідною, тобто жодне із цих співвідношень не є наслідком інших.*

Знайдемо довжину $l_w([g]_{u_1,\ldots,u_c})$ напівгрупового слова $[g]_{u_1,\ldots,u_c}$. Матимемо: $l_w([g]_{u_1,\ldots,u_c}) = |\alpha_1|+1+|\alpha_1-\alpha_2|+1+\ldots+|\alpha_{t-1}-\alpha_t|+1++|\alpha_t+k| = |\alpha_1|+\alpha_t-\alpha_1+|\alpha_t+k|+t$, оскільки $\alpha_1 < \ldots < \alpha_t$. Позначимо символом g_π слово $h_{\pi(1)}\ldots h_{\pi(t)}h$ де $\pi \in S_t$ – довільна підстановка. Тоді довжина елемента g_π дорівнює $l_w(g_\pi) = |\alpha_{\pi(1)}|+1+|\alpha_{\pi(1)}-\alpha_{\pi(2)}|+1+\ldots+|\alpha_{\pi(t-1)}-\alpha_{\pi(t)}|+1+|\alpha_{\pi(t)}+k|$, і має місце таке

Твердження 5. *Для довільного елемента $g \in IC_\infty$, де $g = h_1\ldots h_t h$ — його канонічний вигляд, маємо:*

$$l(g) = \min_{\pi\in S_t}\{l_w(g_\pi)\}.$$

Доведення. Нехай π — підстановка із S_t така, що $l_w(g_\pi) = \min_{\pi\in S_t}\{l_w(g_\pi)\}$. Рівність $l(g) \leqslant l_w(g_\pi)$ очевидна. Нехай $d = d_1d_2\ldots d_j$ таке напівгрупове слово, що $l(g) = l_w(d) = j < l_w(g_\pi)$. Тоді ми можемо зобразити d у вигляді $d = b^{\delta_1}fb^{\delta_2}f\ldots fb^{\delta_q}$, де $\delta_2 \neq 0,\ldots,\delta_{q-1} \neq 0$ і $|\delta_1|+\ldots+|\delta_q|+(q-1) = j$. Наша мета показати, що $l_w(d) = l_w(g_\pi)$ для деякої підстановки $\pi \in S_t$. Оскільки згідно попереднього твердження $d = g_\pi$, то $h = b^{\delta_1+\ldots+\delta_q}$ і $b^{\delta_1}fb^{-\delta_1}\ b^{\delta_1+\delta_2}fb^{-\delta_1-\delta_2}\ldots b^{\delta_1+\ldots+\delta_{q-1}}\ fb^{-\delta_1-\ldots-\delta_{q-1}} = h_1\ldots h_t$ є ідемпотентами. А з того, що $l(g) = l_w(d)$ випливає $\delta_1, \delta_1+\delta_2,\ldots,\delta_1+\ldots+\delta_{q-1}$ є різними. Тепер необхідна рівність випливає із порівняння областей невизначення $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_t\}$ та $\{\delta_1,\delta_1+\delta_2,\ldots,\delta_1+\ldots+\delta_{q-1}\}$ тих ідемпотентів, які ми щойно розглядали. □

Ми можемо обчислити точне значення функції довжини $l(g)$, де $g \in IC_{u_1,\ldots,u_c;\infty}$.

Теорема 1. *Нехай g — довільний елемент напівгрупи $IC_{u_1,\ldots,u_c;\infty}$, $[g]_{u_1,\ldots,u_c}$ — його $(u_1,\ldots,u_c)$–канонічне зображення, а $r = i([g]_{u_1,\ldots,u_c})$ — індекс переходу. Тоді для $k > 0$*

$$l(g) = \begin{cases} 2\alpha_t-\alpha_1+|\alpha_1+k|+t, & \text{якщо } r\neq 0,t,\\ 2\alpha_t+k+t, & \text{якщо } r=0,\\ -\alpha_1+|\alpha_1+k|+t, & \text{якщо } r=t;\end{cases}$$

і для $k \leqslant 0$

$$l(g) = \begin{cases} \alpha_t-2\alpha_1+|\alpha_t+k|+t, & \text{якщо } r\neq 0,t,\\ \alpha_t+|\alpha_t+k|+t, & \text{якщо } r=0,\\ -2\alpha_1-k+t, & \text{якщо } r=t.\end{cases}$$

Доведення. Нехай $k > 0$. Тоді матимемо, що довжина слова g_π не буде більшою за $\pi(1) = r+1,\ \ldots,\ \pi(t-r) = t,\ \ \pi(t-r+1) = r,\ \ldots,\ \ \pi(t) = 1$, тобто $l(g) = l_w(g_\pi) = l_w(h_{r+1}\ldots h_t h_r\ldots h_1 h)$. Для $k \leqslant 0$ довжина не буде більшою за $\pi(1) = 1,\ \ldots,\ \pi(t) = t$, і ми маємо $l(g) = l_w(h_1\ldots h_r h_{r+1}\ldots h_t h)$. Отримаємо, що довжина $l_w(g_\pi)$ у кожному із випадків має вигляд із умови твердження. □

Список використаних джерел

1. А. Клиффорд, Г. Престон, *Алгебраическая теория полугрупп, т.1*, Москва: Мир.-1972.-293 с.

2. O. Bezushchak, *On growth of the inverse semigroup of partially defined co-finite automorphisms of integers*, Algebra and discrete mathematics, 2004, N 2.

Надійшла до редколегії 1.04.2009