Інститут математики НАН України
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
Національний педагогічний університет ім. М. Драгоманова
Національний технічний університет України «КПІ»

П'ЯТНАДЦЯТА МІЖНАРОДНА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ ІМЕНІ АКАДЕМІКА МИХАЙЛА КРАВЧУКА

15–17 травня 2014 р., Київ

МАТЕРІАЛИ КОНФЕРЕНЦІЇ

I

Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування

Київ — 2014

Institute of Mathematics of the National Academy of Science of Ukraine
Taras Shevchenko National University of Kyiv
National Pedagogical Drahomanov University
National Technical University of Ukraine «KPI»

XV

INTERNATIONAL SCIENTIFIC MYKHAILO KRAVCHUK CONFERENCE

15–17 May, 2014, Kyiv

CONFERENCE MATERIALS

I

Differential and integral equations and its applications

Kyiv — 2014

Институт математики НАН Украины
Киевский национальный университет им. Тараса Шевченка
Национальный педагогический университет им. М. Драгоманова
Национальный технический университет Украины «КПИ»

ПЯТНАДЦАТАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ИМЕНИ АКАДЕМИКА МИХАИЛА КРАВЧУКА

15–17 мая 2014 г., Киев

МАТЕРИАЛЫ КОНФЕРЕНЦИИ

I

Дифференциальные и интегральные уравнения, их применение

Киев — 2014

Академік Всеукраїнської академії наук
Academician of All-Ukrainian Academy of Sciences
Академик Всеукраинской академии наук
Михайло Кравчук
Mychailo Kravchuk
Михаил Кравчук
1892–1942

УДК 517.9(06)
ББК 22.161.6я43
Д50

П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 15–17 травня, 2014 р., Київ: Матеріали конф. Т. 1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. — К.: НТУУ «КПІ», 2014. — 372 с. — Укр., англ., рос.

Fifteenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference, May 15–17, 2014, Kyiv: Conference materials. Vol. 1. Differential and integral equations and its applications. — K.: NTUU «KPI», 2014. — 372 p.

Пятнадцатая международная научная конференция им. акад. Михаила Кравчука, 15–17 мая, 2014, Киев: Материалы конф. Т. 1. Дифференциальные и интегральные уравнения, их применение. — К.: НТУУ «КПИ», 2014. — 372 с.

ISBN 978-617-7021-18-5

XV Міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука

Програмний комітет

Акад. НАН України *М. Згуровський* (Україна)
Проф. *Н. Вірченко* (Україна)
(співголови)
Доц. *В. Гайдей* (Україна)
(заступник голови)
Акад. НАН України *Ю. Якименко* (Україна)
Акад. НАН України *М. Ільченко* (Україна)
Проф. *В. Ванін* (Україна)
Акад. НАН України *А. Самойленко* (Україна)
Акад. НАН України *Я. Яцків* (Україна)
Акад. НАН України *М. Перестюк* (Україна)
Проф. *М. Городній* (Україна)
Проф. *М. Працьовитий* (Україна)
Проф. *І. Парасюк* (Україна)
Чл.-кор. НАН України *М. Горбачук* (Україна)
Проф. *Р. Андрушків* (США)

Організаційний комітет

Акад. НАН України *М. Згуровський* (Україна)
Проф. *Н. Вірченко* (Україна)
(співголови)
Доц. *В. Гайдей* (Україна)
(заступник голови)
Проф. *О. Клесов* (Україна)
Проф. *С. Івасишен* (Україна)
Доц. *М. Дудкін* (Україна)
Проф. *О. Іванов* (Україна)
Доц. *І. Алєксєєва* (Україна)
Доц. *О. Диховичний* (Україна)
Доц. *Н. Коновалова* (Україна)
Доц. *Г. Нефьодова* (Україна)
Доц. *Л. Федорова* (Україна)

Fifteenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference

Programme Committee

Acad. NASU *M. Zgurovsky* (Ukraine)
Prof. *N. Virchenko* (Ukraine)
(Co-Chairs)
Ass. Prof. *V. Haidey* (Ukraine) (Deputy Chair)
Acad. NASU *Yu. Yakymenko* (Ukraine)
Acad. NASU *M. Ilchenko* (Ukraine)
Prof. *V. Vanin* (Ukraine)
Acad. NASU *A. Samoilenko* (Ukraine)
Acad. NASU *Ya. Yatskiv* (Ukraine)
Acad. NASU *M. Perestiuk* (Ukraine)
Prof. *M. Horodniy* (Ukraine)
Prof. *M. Pratsiovytyi* (Ukraine)
Prof. *I. Parasiuk* (Ukraine)
Corr. Member NASU *M. Horbachuk* (Ukraine)
Prof. *R. Andrushkiw* (USA)

Organizing Committee

Acad. NASU *M. Zgurovsky* (Ukraine)
Prof. *N. Virchenko* (Ukraine)
(Co-Chairs)
Ass. Prof. *V. Haidey* (Ukraine) (Deputy Chair)
Prof. *O. Klesov* (Ukraine)
Prof. *S. Ivashyshen* (Ukraine)
Ass. Prof. *M. Dudkin* (Ukraine)
Prof. *O. Ivanov* (Ukraine)
Ass. Prof. *I. Alyeksyeyeva* (Ukraine)
Ass. Prof. *O. Dykhovychnyi* (Ukraine)
Ass. Prof. *N. Konovalova* (Ukraine)
Ass. Prof. *H. Nefiodova* (Ukraine)
Ass. Prof. *L. Fedorova* (Ukraine)

XV Международная научная конференция им. акад. Михаила Кравчука

Программный комитет

Акад. НАН Украины *М. Згуровский* (Украина)
Проф. *Н. Вирченко* (Украина)
(сопредседатели)
Доц. *В. Гайдей* (Украина)
(заместитель председателя)
Акад. НАН Украины *Ю. Якименко* (Украина)
Акад. НАН Украины *М. Ильченко* (Украина)
Проф. В. Ванин (Украина)
Акад. НАН Украины *А. Самойленко* (Украина)
Акад. НАН Украины *Я. Яцкив* (Украина)
Акад. НАН Украины *Н. Перестюк* (Украина)
Проф. *Н. Городний* (Украина)
Проф. *Н. Працевитый* (Украина)
Проф. *И. Парасюк* (Украина)
Чл.-кор. НАН Украины *М. Горбачук* (Украина)
Проф. *Р. Андрушкив* (США)

Организационный комитет

Акад. НАН Украины *М. Згуровский* (Украина)
Проф. *Н. Вирченко* (Украина)
(сопредседатели)
Доц. *В. Гайдей* (Украина)
(заместитель председателя)
Проф. *О. Клесов* (Украина)
Проф. *С. Ивасишен* (Украина)
Доц. *Н. Дудкин* (Украина)
Проф. *А. Иванов* (Украина)
Доц. *И. Алексеева* (Украина)
Доц. *А. Дыховичный* (Украина)
Доц. *Н. Коновалова* (Украина)
Доц. *Г. Нефедова* (Украина)
Доц. *Л. Федорова* (Украина)

УКРАЇНСЬКИЙ ВЧЕНИЙ СВІТОВОЇ СЛАВИ

Михайло Пилипович Кравчук (1892–1942) — найвизначніший український математик XX сторіччя, всесвітньо відомий вчений, громадський діяч, академік Всеукраїнської академії наук.

«… Майже жодне явище у створенні математичної науки в Україні не сталося без його участі,… ані закладалися ***перші*** *українські школи в місті і по селах,* ***перші*** *курси,* ***перші українські університети*** *(народний і державний),…, ані утворювалася математична термінологія або наукова мова… — нічого цього не робилося без* ***найактивнішої участі Михайла Кравчука»*** *(так писалося в характеристиці на нього, надісланої до Всеукраїнської академії наук 1929 р. у зв'язку з висуненням його кандидатури в дійсні члени академії).*

Наукові праці М. Кравчука з різних галузей математики (вищої алгебри та математичного аналізу, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії імовірностей та математичної статистики тощо) увійшли до скарбниці ***світової Науки.*** *За його ідеями й відкриттями виразно проступала перспектива поглибленого розвитку й використання їх.*

Вже давно існують на сторінках наукових досліджень і ***многочлени Кравчука,*** *і* ***моменти Кравчука****, і* ***формули Кравчука****, і осцилятори* ***Кравчука****, а завдяки пошукам І. Качановського виявилося, що М. Кравчук стояв біля витоків* ***винаходу першого у світі електронного комп'ютера!***

Увесь свій короткий вік М. Кравчук працював невпинно й творчо на благо ***Науки****, на благо* ***Освіти рідного народу.***

«Моя любов — Україна і математика» *— таким було його життєве кредо.*

Він справжній поет формул, математика для нього — це творчість, натхнення і радість. Він педагог за покликанням. Його лекції — це і сила, й безмірна глибочінь, і краса математичної думки. На його лекції ходили як на свято.

М. Кравчук викладав математичні предмети і в Київському університеті, і у політехнічному, авіаційному, архітектурному, ветеринарно-зоотехнічному, сільськогосподарському інститутах Києва. Він відкрив талант і дав путівку у світ відкриттів видатним конструкторам ***Сергію Корольову*** *і* ***Архипу Люльці****.*

Пам'ять про М. Кравчука живе у ***серцях київських політехніків****, де він викладав вищу математику з 1921 р. і завідував кафедрою вищої математики (1934–1938 рр). КПІ від 1992 р. вже провів 13 Міжнародних наукових конференцій ім. акад. М. Кравчука. Видано його «Науково-популярні праці», «Вибрані математичні праці», книгу «Розвиток математичних ідей Михайла Кравчука», відкрито* ***пам'ятник*** *М. Кравчуку (2003 р.), створено фільм «Голгофа академіка Кравчука» (2004 р.), названо його ім'ям одну з київських* ***вулиць*** *(2009 р.)*

Життя цього видатного вченого-математика спалахнуло як блискучий болід і після арешту й засуду в терорному 1938 році приречено було згоріти через кілька літ у суворих колимських таборах.

Ім'я М. Кравчука повернулось в український науковий пантеон і є зразком для наслідування та продовження його досліджень у працях сучасних і прийдешніх науковців в ***Україні й далеко поза Україною.***

OUTSTANDING UKRAINIAN MATHEMATICIAN ACADEMICIAN M. KRAVCHUK (1892–1942)

Mykhailo Kravchuk *made significant contributions to numerous branches of mathematics and the development of* ***mathematical education****. In 1929 Kravchuk was elected a full member of All-Ukrainian Academy of Sciences.*

Kravchuk was the author of more than 180 scientific works, including 10 monographs, in a number of branches of mathematics (algebra and number theory, theory of functions of real and complex variable, theory of differential and integral equations, mathematical statistics and probability theory, history of mathematics, Ukrainian mathematical terminology etc.)

Let us point some fundamental lines of his research:

— investigations in the theory of permutation matrices, quadratic and bilinear forms, theory of algebraic and transcendental equations;

— the creation and mathematical proof of the general method of moments and its application to the approximate solution of ordinary linear differential equations, integral equations, equations of mathematical physics;

— introduction and use of polynomials associated with the binomial distribution, now known in the world mathematical literature as ***Kravchuk's polynomials;***

— analysis of complex questions in philosophy, the history of mathematics and techniques.

Mykhailo Kravchuk never learned about the role that his sci. works played in the inventions of the first electronic computer. American scientist ***John Atanasoff*** *(1903–1995) took a great interest in Kravchuk's sci. works when he investigated the problem of* ***making electronic computer****.*

His selfness efforts for the sake of the ***development of science*** *in* ***Ukraine****, extraordinary* ***talent*** *as* ***teacher*** *and* ***reputation among students*** *and* ***scientific community*** *could not go unnoticed by authority.*

In 1938 *Kravchuk was arrested and accused of involvement in a host of typical counterrevolutionary activities — changes that were common in those years in USSR. In the same year he was sentenced to 20 years of confinement and 5 years of exile and transported to concentration camps in* ***Kolyma****. There in consequence of cold, undernourishment and illnesses he* ***was died in March 9, 1942.***

He was ***rehabilitated*** *be soviet regime only* ***in 1956****. But only in 1992, almost 100 years after his birth, M. Kravchuk was readmitted to membership in* ***the National Academy of Sciences of Ukraine****. The same year his name was entered in the International Calendar of Scientists by UNESCO. The* ***First Kravchuk International Conference*** *was held at Kyiv Polytechnic Institute "KPI" in 1992. Since that time there were 13 such* ***conferences, three books*** *of M. Kravhuk's works were* ***published*** *in Kyiv:*

"Popular scientific works" (2000).

"Selected mathematical works" (2002).

"Development of the Mathematical ideas of Mykhailo Kravchuk (Krawtchouk)".

On the 20th of May 2003 the NTUU "KPI" unveiled ***a statue of M. Kravchuk****.*

ON CORRECT SOLVABILITY BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SYSTEM OF PARTIAL DERIVATIVE EQUATIONS

G. A. Abdikalikova
Aktobe Regional State University by K. Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan
a_a_galiya@mail.ru

We consider the non-local boundary value problem for first order system of hyperbolic with the similar main part on Courant equations in $\bar{\Omega} = \{(x,t) : t \le x \le t+\omega, 0 \le t \le T\}, T > 0,\ \omega > 0$

$$Dv = A(x,t)v + F(x,t), \qquad (x,t) \in \bar{\Omega}, \tag{1}$$

$$B(x)v(x,0) + C(x)v(x+T,T) = d(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{2}$$

where $v \in \mathbb{R}^n$, $D = \dfrac{\partial}{\partial t} + \sum\limits_{k=1}^{n} \Lambda_k \dfrac{\partial}{\partial x_k}$, $\Lambda_k = diag[a_k, a_k, ..., a_k]$; symmetrical -$(n \times n)$-matrix $A(x,t)$ and n-vector-function $F(x,t)$ are continuous on $\bar{\Omega}$; $(n \times n)$matrices $B(x)$, $C(x)$ and n-vector-function $d(x)$ are continuous on $[0,\omega]$.

The boundary value problem with non-local conditions for some equation in the partial derivative was researched a lot of authors, we shall note [1]–[3].

In the work [4] researched existence and uniqueness of solution to wide extent periodic problem for first order system of hyperbolic partial derivative equation brought to canonical type.

The problem (1)–(2) arise by researched on $\bar{\Omega}$ non-local boundary value problem for second order system of partial derivative equations

$$D[Du] = A(x,t)Du + S(x,t)u + f(x,t), \tag{3}$$

$$B(x)Du(x,0) + C(x)Du(x+T,T) = d(x), \qquad x \in [0,\omega]. \tag{4}$$

Here $u(x,t) = col(u_1(x,t), u_2(x,t), ..., u_n(x,t))$ is unknown function, symmetrical $(n \times n)$-matrix $A(x,t)$ and $(n \times n)$-matrix $S(x,t)$ also n-vector-function $f(x,t)$ are continuous on $\bar{\Omega}$; $(n \times n)$-matrices $B(x)$, $C(x)$ and n-vector-function $d(x)$ are continuous on $[0,\omega]$.

In the present work are investigated a questions of correct solvability non-local boundary value problem (3)–(4) to wide extent.

Used the work's idea [5] we introduce new unknown function $v(x,t) = Du$ and investigation problem is reduces equivalent problem for first order system of hyperbolic equations (1)–(2), where $F(x,t) = S(x,t)u + f(x,t)$ by all $(x,t) \in \bar{\Omega}$.

The non-local boundary value problem (1)–(2) for the system with similar main part on Courant equation using method of the characteristic receive family of the ordinary differential equations in the

$$\overline{\mathrm{H}} = \left\{ \left(\xi, \tau \right) : 0 \le \xi \le \omega, 0 \le \tau \le T \right\}, T > 0,\ \omega > 0:$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} = \tilde{A}\left(\xi, \tau \right) \tilde{v} + \tilde{S}\left(\xi, \tau \right) \tilde{u}\left(\xi, \tau \right) + \tilde{f}\left(\xi, \tau \right), \qquad \tau \in \left[0, T \right], \tag{5}$$

with conditions

$$\tilde{B}\left(\xi \right) \tilde{v}\left(\xi, 0 \right) + \tilde{C}\left(\xi \right) \tilde{v}\left(\xi, T \right) = \tilde{d}\left(\xi \right), \qquad \xi \in \left[0, \omega \right], \tag{6}$$

where

$\tilde{v}\left(\xi, \tau \right) = v\left(\xi + a\tau, \tau \right), \tilde{A}\left(\xi, \tau \right) = A\left(\xi + a\tau, \tau \right),\ \tilde{S}\left(\xi, \tau \right) = S\left(\xi + a\tau, \tau \right),$
$\tilde{f}\left(\xi, \tau \right) = f\left(\xi + a\tau, \tau \right),\ \tilde{u}\left(\xi, \tau \right) = u\left(\xi + a\tau, \tau \right);\ a = \left(a_1, a_2, \ldots, a_n \right)$ — n-vector; $\left(n \times n \right)$-matrices $\tilde{A}\left(\xi, \tau \right)$, $\tilde{S}\left(\xi, \tau \right)$ and n-vector-function $\tilde{f}\left(\xi, \tau \right)$ are continuous on $\overline{\mathrm{H}}$; $\tilde{B}\left(\xi \right), \tilde{C}\left(\xi \right) - \left(n \times n \right)-$ matrices and n-vector-function $\tilde{d}\left(\xi \right)$ — are continuous on $\left[0, \omega \right]$.

By fixed $\tilde{u}\left(\xi, \tau \right)$ boundary value problem (5)-(6) reduce family two point boundary value problem for the ordinary differential equations.

To family two points of boundary value problem for the ordinary differential equations using the method parameterization [6].

Obtained sufficient conditions are the correct solvability to wide extent of the boundary value problem in the terms of invertibility of the matrices of equation and matrices of boundary condition. Existence of the solution is established in the sense of Fridrihs.

References

1. Vragov V. N. Boundary value problem for non-classical mathematical physics equations. Novosibirsk, 1983. — 84 p. (in Russian).

2. Ptashnyck B. I. Ill-posed boundary value problems for partial differential equations. — Kyiv: Naukova Dumka, 1984. — 264 p. (in Russian).

3. Nahushev A. M. Problem displacement for partial differential equation. — M.: Nauka, 2006. — 287 p. (in Russian).

4. Zhestkov S. V. On construction multiperiodic solution of half-linear hyperbolic system equation in the partial derivative with the help characteristics // Diff. equation. — 1984, V.20, No 9, pp. 1630–1632. (in Russian).

5. Abdikalikova G. A. On solvability of one linear boundary value problem for equations in partial derivative // Vestnik Eurasian National University by L. N. Gumilev. — 2008, No 4 (65), pp. 54–62. (in Russian).

6. Dzhumabaev D. S. The quality unique solvability linear boundary value problem for ordinary differential equations // J. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 29 (1989), No 1, pp. 50–66. (in Russian).

COMBINATORIAL STRUCTURE OF THE LOCAL ERROR FOR EXPONENTIAL SPLITTING METHODS

W. Auzinger

Institute for Analysis and Scientific Computing Vienna University of Technology, Vienna, Austria, EU

w.auzinger@tuwien.ac.at

For the numerical integration of evolution equations of the form

$$u'(t) = H(u(t)) = A(u(t)) + B(u(t)), u(0) \text{ given},$$

operator splitting is a popular and efficient approach. The general form of one step $u_i \mapsto u_{i+1}$, with stepsize h, of an s-stage splitting scheme is given by iterated application of subflows,

$$u_{i+1} = \mathcal{S}(h, u_i) = \mathcal{S}_s(h, \mathcal{S}_{s-1}(t, ..., \mathcal{S}_1(h, u_i)) \approx \Phi_H(h, u_i),$$

with the stages

$$\mathcal{S}_j(h, v) = \Phi_B(b_j h, \Phi_A(a_j h, v), \quad j = 1...s.$$

For a method, of order p, the local error satisfies

$$\mathcal{S}(h, u) - \Phi(h, u) = \mathcal{C}h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}).$$

We briefly discuss

(i) conditions on the coefficients a_j, b_j such that order p is obtained,

(ii) the structure of the leading term $\mathcal{C}h^{p+1}$ of the local error in terms of higher-order commutators of A and B,

(iii) a representation of the local error as the basis for rigorous a priori estimates,

(iv) an asymptotically correct a posteriori estimate for the local error.

Concerning (iii), we describe the recursive combinatorial structure in more detail, together with its extension to more general splitting schemes where the operator H is split into three parts instead of two.

We also briefly consider the extension of (iii) to the nonlinear case, which remains studied in detail for higher-order methods.

References

1. W. Auzinger, W. Herfort, Local error structures and order conditions in terms of Lie elements for exponential splitting schemes, ASC Report No. 23/2013, Institute for Analysis and Scientific Computing, Vienna University of Technology.

2. W. Auzinger, O. Koch, M. Thalhammer, Defect-based local error estimators for splitting methods, with application to Schrödinger equations, Part II. Higher-order methods for linear problems, J. Comput. Appl. Math. 255 (2014), 384–403

ν-METHODS FOR ECONOMIC SOLVING OF ILL-POSED PROBLEMS

W. Erb[1], E. V. Semenova[2], E. A. Volynets[2]
[1]*Institute of Mathematics, University of Luebeck, Germany;*
[2]*Institute of Mathematics, NAN of Ukraine, Kiev, Ukraine*
erb@math.uni-luebeck.de, semenovaevgen@gmail.com

In the Hilbert space X we consider an operator equation of the first kind

$$Ax = f, \qquad f \in Range(A) \tag{1}$$

Let instead of f we are given $f_\delta \in X: \quad \|f - f_\delta\| \le \delta$. We assume that linear operator A is compact and in X there is such orthonormal basis $E = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ that for all $m = 1, 2, ...$ and some fixed $r = 1, 2, ...$ it holds true

$$\|(I - P_m)A\| \le m^{-r}, \quad \|A(I - P_m)\| \le m^{-r}, \tag{2}$$

where P_m is orthogonal projector on linear span of m elements of basis E.

Moreover, let the normal solution x^+ of (1) (i.e. the solution of (1) with minimal norm in X) satisfies the assumption

$$x^+ \in \mathrm{M}_{\nu,\rho}(A) = \left\{ u: \ u = |A|^{\nu} v, \quad \|v\| \le \rho \right\},$$

where $|A| = (A^*A)^{1/2}$ and unknown parameter $\nu \in [0, \nu_1]$, $\nu_1 \in (1, \infty]$.

As it is well-known, the accuracy of recovering of solutions x^+ filling the set $\mathrm{M}_{\nu,\rho}(A)$ cannot be less than $O(\delta^{\nu/\nu+1})$. Our goal is to work out an efficient approach to finite-dimensional solution of (1) which is economic in the sense of information expenses and guarantees the optimal order of accuracy $O(\delta^{\nu/\nu+1})$. For this as regularized projection method we take approximate solution $\hat{x}_k$ as $\hat{x}_k = R_k(A_{n(k)})P_{2^n} f_\delta$. Here

$$R_k = \frac{J_1(1) - J_{k+1}(1 - 2y)}{yJ_1(1)},$$

where $J_{k+1}(y)$ is Jacobi polynomial of degree $k+1$, that satisfies standard conditions for fixed $\nu_* \ge \nu_1$ (i.e. we construct co-called ν-method);

$$A_{n(k)} = \sum_{k=1}^{2n(k)} (P_{2^k} - P_{2^{k-1}})AP_{2^{2n}} + P_1 A P_{2^{2n}}.$$

The discrepancy principle is taken as a stopping rule. Proposed approach for solving (1) generalizes the respective algorithm from [1].

Theorem. Let $(2^{r+3} + 1)2^{-2nr} n \le \delta / (4\rho k)$. Then the proposed above algorithm achieves the optimal order of accuracy for recovering the smooth solution of (1).

Corollary. To construct the solution $\hat{x}_k$ we need $O(\delta^{-(\nu+2)/(\nu+1)r}\log^{1+1/r}\delta^{-1})$ of (Ae_j, e_i), $(f_\delta,\ e_i)$ inner products.

We have established that our method is more economical than previous one with standard Galerkin discretization.

References

1. Solodky S. G., Volonets E. A. Adaptive scheme of discretization for one semiiterative method in solving ill-posed problems // Ukr. Math. Vestnik **7**, (2010), 553–569.

POLYNOMIAL DYNAMICAL SYSTEMS: LIMIT CYCLE PROBLEMS

V. A. Gaiko
National Academy of Sciences of Belarus United Institute of Informatics Problems, Minsk, Belarus
valery.gaiko@gmail.com

The global qualitative analysis of polynomial dynamical systems is carried out. To control the global bifurcations of limit cycle in planar systems, it is necessary to know the properties and combine the effects of all of their rotation parameters. It can be done by means of the development of new bifurcational geometric methods based on the Wintner — Perko termination principle stating that the maximal one-parameter family of multiple limit cycles terminates either at a singular point which is typically of the same multiplicity (cyclicity) or on a separatrix cycle which is also typically of the same multiplicity (cyclicity).

If we do not know the cyclicity of the termination points, then, applying canonical systems with field rotation parameters, we use geometric properties of the spirals filling the interior and exterior domains of limit cycles. Using this method, we solve, e.g., the problem of the maximum number of limit cycles surrounding a singular point for an arbitrary planar polynomial system and Hilbert's Sixteenth Problem for the general Liénard polynomial system with an arbitrary (but finite) number of singular points. Applying a similar approach, we study also three-dimensional polynomial dynamical systems and, in particular, complete the strange attractor bifurcation scenario in the classical Lorenz system connecting globally the homoclinic, period-doubling, Andronov — Shilnikov, and period-halving bifurcations of its limit cycles.

ON UNIQUENESS OF SOLUTIONS OF THE HOMOGENEOUS DIRICHLET PROBLEM FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN A BANACH SPACE ON A SEMIAXIS

V. M. Gorbachuk
National Technical University «KPI», Kyiv, Ukraine
v_horbach@yahoo.com

Consider the Dirichlet problem

$$y''(t) - By(t) = 0, t \geq 0, \tag{1}$$

$$y(0) = 0, \tag{2}$$

where B is a weakly positive operator in a Banach space X, that is, B is a closed linear operator with dense domain in X, such that $\rho(B) \supset (-\infty, 0)$ ($\rho(.)$ is the resolvent set of an operator), and

$$\exists M > 0, \ \forall \lambda > 0 : \ \lambda \left\| (B + \lambda I)^{-1} \right\| \leq M.$$

If $0 \in \rho(B)$, then the operator B is called positive.

As is well known, for a weakly positive operator B, the powers $B^{\alpha}, \alpha \in (0,1)$, are defined, and the operator $A = -B^{1/2}$ generates a bounded analytic C_0-semigroup. We denote this semigroup by $\{e^{At}\}_{t \geq 0}$.

It turns out to be that the set of all solutions $y(t)$ of problem (1)–(2) forms an infinite-dimensional linear space whose elements are described by the formula

$$y(t) = \frac{\operatorname{sh} At}{A} g = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} A^{2k} g,$$

where g is an arbitrary entire vector of A.

The problem arises of finding the conditions on behavior at ∞ of $y(t)$ under which problem (1)–(2) has only a trivial solution $(y(t) \equiv 0)$ in the class of vector-valued functions satisfying these conditions. The following assertions give an answer to this question.

Theorem 1. *Let B be a positive operator in X, and*

$$\omega(A) = \lim_{t \to \infty} \frac{\ln \left\| e^{At} \right\|}{t}.$$

If for a solution $y(t)$ of problem (1)–(2), *the estimate*

$$\forall t \in (0, \infty) : \left\| y(t) \right\| \leq c e^{\omega t}, \qquad 0 < c = c(\omega) = const,$$

holds true with some $\omega < -\omega(A)$, then $y(t) \equiv 0$.

Theorem 2. *Suppose B is a weakly positive normal operator in a Hilbert space X and $y(t)$ is a solution of problem* (1)–(2). *If*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists c = c(\varepsilon) > 0, \forall t \in (0, \infty) : \left\| y(t) \right\| \leq c e^{\varepsilon t},$$

then $y(t) \equiv 0$.

PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR DIFFERENTIAL-OPERATOR EQUATION

P. I. Kalenyuk [1, 2], I. V. Kohut [1], G. Kuduk [3]

[1]*Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine,*

[2]*University of Rzeszów, Rzeszów, Poland,*

[3]*Wólka Niedźwiedzka, Poland*

kalenyuk@gmail.com, ikohutua@yahoo.com, gkuduk@onet.eu

We propose a method of solving a problem with inhomogeneous integral conditions for homogeneous differential-operator equation with abstract operator in a linear space. Namely, by means of the differential-symbol method [1], we construct the solution of this problem in the form of Stieltjes integral over a certain measure.

Let A be a given linear operator acting in the linear space H and, for this operator, arbitrary powers

$$A^n,\ n = 2, 3, \dots,$$

be also defined in H.

We consider the problem

$$\left[\frac{d}{dt} - a(A)\right]^2 U(t) = 0, \quad t \in (0,h), \tag{1}$$

$$\int_0^h U(t)dt = \varphi_1, \qquad \int_0^h t\,U(t)\,dt = \varphi_2, \tag{2}$$

where $\varphi_1, \varphi_2 \in H$, $(0,h) \subset \mathbb{R}$, $h > 0$, $U\colon (0;\ h) \to H$ is an unknown vector-function, $a(A)$ is an abstract operator with entire symbol $a(\lambda) \neq \text{const}$.

Suppose that vectors φ_1, φ_2 can be represented in the form

$$\varphi_k = \int_{\mathbb{C}\setminus M} R_{\varphi_k}(\lambda)x(\lambda)d\mu_{\varphi_k}(\lambda), \quad k \in \{1,2\},$$

where $R_{\varphi_1}(\lambda), R_{\varphi_2}(\lambda)$ are certain linear operators in H, $\mu_{\varphi_1}(\lambda), \mu_{\varphi_2}(\lambda)$ are certain measures,

$$M = \left\{\lambda \in \mathbb{C}\colon\ \Delta(\lambda) = 0\right\},\ \Delta(\lambda) = \frac{\left(e^{a(\lambda)h} - 1\right)^2 - h^2a^2(\lambda)e^{a(\lambda)h}}{a^4(\lambda)}.$$

For this case, we prove that the formal solution of problem (1), (2) can be expressed in the form

$$U(t) = \int_\Lambda R_{\varphi_1}(\lambda)\left\{\widehat{T}_1(t,\lambda)x(\lambda)\right\}d\mu_{\varphi_1}(\lambda) + \int_\Lambda R_{\varphi_2}(\lambda)\left\{\widehat{T}_2(t,\lambda)x(\lambda)\right\}d\mu_{\varphi_2}(\lambda),$$

where $\widehat{T}_1(t,\lambda)$, $\widehat{T}_2(t,\lambda)$ are special solutions of ordinary differential equation

$$\left[\frac{d}{dt} - a(\lambda)\right]^2 T = 0\,.$$

Reference

1. *P. I. Kalenyuk, Z. M. Nytrebych.* Generalized scheme of separation of variables. Differential-symbol method. — Lviv: Publishing house of Lviv Polytechnic National University, 2002. — 292 p.

CONDITIONS OF REGULARITY WITH RESPECT TO SOME COMPONENTS OF THE LINEAR EXTENSION OF A DYNAMICAL SYSTEM

D. Pączko
Opole University of Technology, Opole, Poland
d.paczko@po.opole.pl

Consider a system of differential equations of the form:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= A_{11}(x)y_1 + A_{12}(x)y_2 + A_{13}(x)y_3, \\ \frac{dy_2}{dt} &= A_{21}(x)y_1 + A_{22}(x)y_2 + A_{23}(x)y_3, \\ \frac{dy_3}{dt} &= A_{31}(x)y_1 + A_{32}(x)y_2 + A_{33}(x)y_3, \end{aligned} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

where $y_i \in \mathbb{R}^{n_i}$,$n_1 + n_2 + n_3 = n$,A_{ij} are the matrices of appropriate dimensions from $C^0(\mathbb{R}^m)$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ \dots, f_m(x))$ is a vector function defined for all $x \in \mathbb{R}^m$ and it satisfies the Lipschitz condition. Let us denote $A(x) = \begin{bmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) & A_{13}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) & A_{23}(x) \\ A_{31}(x) & A_{32}(x) & A_{33}(x) \end{bmatrix}$.

It is well known (see [1], [2]) that a system in the form (1) is called regular if there exists a unique Green's function for this system. In addition, it is also known that a system in the form (1) will have a unique Green's function if and only if non-degenerated quadratic form V exists, whose derivative with respect to this system is positive definite.

The following theorem is true.

Theorem.1 *Let there exist three symmetrical* n*-dimensional matrices* $S(x)$, $\overline{S}(x)$, $\tilde{S}(x) \in C'(\mathbb{R}^m, f)$*, that satisfy the following inequalities:*

$$\left\langle \left[\dot{S}(x) + S(x)A(x) + A^T(x)S(x) \right] y, y \right\rangle \geqslant \| C_1(x)y \|^2,$$
$$\left\langle \left[\dot{\overline{S}}(x) + \overline{S}(x)A(x) + A^T(x)\overline{S}(x) \right] (C_2(x) + C_3(x))y, (C_2(x) + C_3(x))y \right\rangle \geqslant \| C_2(x)y \|^2,$$
$$\left\langle \left[\dot{\tilde{S}}(x) + \tilde{S}(x)A(x) + A^T(x)\tilde{S}(x) \right] C_3(x)y, C_3(x)y \right\rangle \geqslant \| C_3(x)y \|^2,$$

for some $n \times n$-dimensional matrices $C_i(x) \in C^0(\mathbb{R}^m)$,$i = 1, 2, 3$, such that

$$C_i(x)C(x) \equiv C(x)C_i(x), i = 1, 2, 3, \det C(x) \neq 0, \| C^{-1}(x) \| \leq c = \text{const} < \infty,$$

where $C(x) = C_1(x) + C_2(x) + C_3(x)$. Then, the derivative of quadratic form

$$V_p = p^3 \langle S(x)y, y \rangle + p \langle \overline{S}(x)y, y \rangle + \langle \tilde{S}(x)y, y \rangle,$$

with respect to the system (1) for sufficiently large values of parameter $p > 0$ will be positive definite.

References

1. Yu. A. Mitropolsky, A. M. Samoilenko, V. L. Kulik, Investigation of dichotomy of linear systems of differential equations using Lyapunov functions, Naukova Dumka, Kiev, 1990.

2. Yu. A. Mitropolsky, A. M. Samoilenko, V. L. Kulik, Dichotomies and stability in non-autonomous linear systems, Taylor & Francis Inc, London, 2003.

LIE GROUP CLASSIFICATION OF THE GENERALIZED KOMPANEETS EQUATIONS

O. M. Patsiuk
Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine
patsyuck@yahoo.com

We consider such class of the generalized Kompaneets equations (GKEs):

$$u_t = \frac{1}{x^2}\cdot\left[x^4\left(u_x + f(u)\right)\right]_x, \qquad (t,x)\in R_+\times R_+, \tag{1}$$

where $f(u)$ is an arbitrary smooth function of the variable u. Using the Lie-Ovsiannikov algorithm, the group classification of the class under study is carried out. It is shown that the kernel algebra of the full groups of the GKEs is the one-dimensional Lie algebra $\langle \partial_t \rangle$. The main results are formulated in such theorems.

Theorem 1. *The group of the equivalence transformations* $\tilde{G}$ *of the class of GKEs (1) consists of the following transformations:*

$$\bar{t} = t + A, \qquad \bar{x} = Bx, \qquad \bar{u} = C_1 u + C_2, \qquad \bar{f} = \frac{C_1}{B} f, \tag{2}$$

where A, B, C_1, C_2 are arbitrary real constants with $BC_1 \neq 0$.

Theorem 2. *All possible maximal algebras of invariance of the GKEs (1) with some fixed function* $f(u)$ *are described in Table 1. Any other equation of the form (1) with nontrivial Lie symmetry maps to one of the equations given in Table 1 by means of the equivalence transformations of the form (2).*

Table 1. The group classification of the GKEs (1)

No	$f(u)$	Basis of $A^{\max}$
1	e^u	$\partial_t,\ x\partial_x - \partial_u$
2	$u^k\left(k\neq 0, 1, \frac{4}{3}\right)$	$\partial_t,\ x\partial_x - \frac{1}{k-1}u\partial_u$
3	$u^{\frac{4}{3}}$	$\partial_t,\ x\partial_x - 3u\partial_u,\ 2t\partial_t + \left(3t + \ln x\right)x\partial_x - 3(1 + 3t + \ln x)u\partial_u$
4	u	$\partial_t,\ u\partial_u,\ \phi(t,x)\partial_u$[1]
5	1	$\partial_t,\ x\partial_x + u\partial_u,\ \left(x+u\right)\partial_u,\ 2t\partial_t + \left(\ln x - 3t\right)x\partial_x - \left(\ln x - 3t\right)x\partial_u,$ $4t^2\partial_t + 4tx\ln x\partial_x - \left[\left(\left(\ln x + 3t\right)^2 + 2t\right)\left(x+u\right) + 4tx\ln x\right]\partial_u,$ $2tx\partial_x - \left[\left(\ln x + 3t\right)\left(x+u\right) + 2tx\right]\partial_u,\ \psi(t,x)\partial_u$[2]
6	0	$\partial_t,\ x\partial_x,\ u\partial_u,\ 2t\partial_t + \left(\ln x - 3t\right)x\partial_x,\ 2tx\partial_x - \left(\ln x + 3t\right)u\partial_u,$ $4t^2\partial_t + 4tx\ln x\partial_x - \left[\left(\ln x + 3t\right)^2 + 2t\right]u\partial_u,\ \psi(t,x)\partial_u$[2]

[1] The function $\phi(t,x)$ is an arbitrary smooth solution of the equation $u_t = x^2u_{xx} + x\left(x+4\right)u_x + 4xu.$

[2] The function $\psi(t,x)$ is an arbitrary smooth solution of the equation $u_t = x^2u_{xx} + 4xu_x$.

GROUND STATES OF SINGULARLY PERTURBED OPERATORS WITH OSCILLATING COEFFICIENTS: CONCENTRATION ON FIXED POINTS AND LIMIT CYCLES OF THE EFFECTIVE DRIFT

A. P. Rybalko, V. O. Rybalko

Simon Kuznets Kharkov National University of Economics, B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of NASU Kharkiv, Ukraine

n_rybalko@yahoo.com, v_rybalko@ilt.kharkov.ua

The effect of slow and fast oscillations in the singularly perturbed spectral problem is studied. The eigenvalue problem

$$\varepsilon a^{ij}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+b^j\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}+c\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)u=\lambda u \qquad (1)$$

in a smooth bounded domain $\Omega\subset R^N$ with Dirichlet condition $u=0$ on $\partial\Omega$ is considered. The coefficients $a^{ij}(x,y)$, $b^j(x,y)$, $c(x,y)$ in (1) are supposed to be Y-periodic in the second variable ($Y=(0,1)^N$ being a periodicity cell); a^{ij} satisfy the uniform ellipticity condition; $\varepsilon>0$ is a small parameter.

The asymptotic behavior of the first eigenvalue λ_ε (the eigenvalue with the maximal real part) and the corresponding eigenfunction u_ε of (1) as $\varepsilon\to 0$ is studied under the assumption that the integral curves of the so-called effective drift have finite number of hyperbolic fixed points and hyperbolic limit cycles. A fixed point or a limit cycle responsible for the first eigenpair asymptotic is determined, and the limits of λ_ε and the scaled logarithmic transformation of u_ε are identified.

The methods developed are based on the vanishing viscosity techniques applied to the singularly perturbed Hamilton-Jacobi equation for the scaled logarithmic transformation of u_ε and blow-up analysis near fixed points and limit cycles.

SIMULATION OF THE EFFECTS OF DELAY ON THE DYNAMICS OF PENDULUM SYSTEM WITH LIMITED EXCITATION

A. Yu. Shvets, A. M. Makaseyev
NTUU "Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine
alex.shvets@bigmir.net, makaseyev@ukr.net

Dynamical system "pendulum — source of limited excitation" [1–2] with taking into account various factors of delay is considered. Mathematical model of the system is a system of ordinary differential equations with delay. The approaches that reduce the mathematical model of the system to a three-dimensional system [3] and a fifteen-dimensional system of differential equations without delay are proposed. The influence of various factors of delay on steady-state regimes of the system "pendulum – source of limited excitation" is investigated.

The maps of dynamical regimes, phase-parametric characteristics and dependences of maximum non-zero Lyapunov's characteristic exponent of the delay are constructed and analyzed. The essential influence of the delay on origin, evolution and extinction of deterministic chaos in the system is shown. The scenarios of transition from steady-state regular regimes to chaotic ones are identified. We ascertain that for small values of the delay it is sufficient to use three-dimensional mathematical model, whereas for relatively high values of the delay the fifteen-dimensional mathematical model should be used.

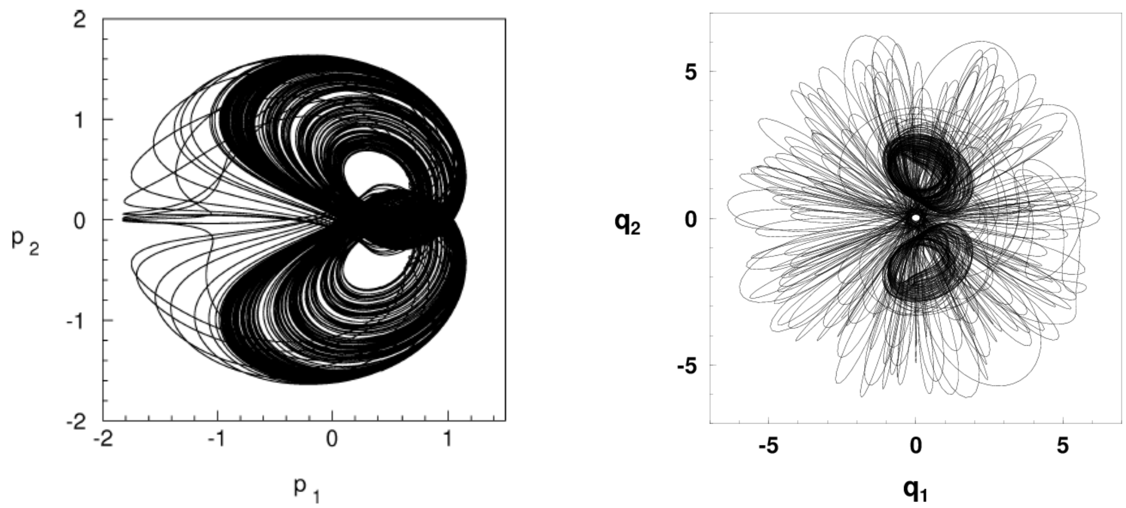
References

1. Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu., Regular and chaotic dynamics of systems with limited excitation, R&C Dynamics, Moscow — Izhevsk, 2008, 280 p.
2. Shvets A. Yu., Makaseyev A. M., Chaotic Oscillations of Nonideal Plane Pendulum Systems, Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal, No. 1, 2012, pp. 195–204.
3. Shvets A. Yu., Makaseyev A. M., Delay Factors and Chaotization of Non-ideal Pendulum Systems, Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal, No. 4, 2012, pp. 633–642.

SCENARIOS OF TRANSITION TO DETERMINISTIC CHAOS IN SOME NON-IDEAL HYDRODYNAMIC SYSTEMS

A. Yu. Shvets, V. A. Sirenko
NTUU "Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine
alex.shvets@bigmir.net, sir_vasiliy@ukr.net

Non-ideal, in Sommerfeld — Kononenko sense, hydrodynamic system "tank with a fluid — electromotor" is considered. The mathematical model of such system is constructed in [1]. The main attention is given to the study of regular and chaotic attractors considered hydrodynamic system, in particular the scenarios of transition from regular to chaotic regimes, as well as scenarios of transitions from one type of chaotic attractor to another type of chaotic attractors [2]. It is shown that this system has a large variety of regular and chaotic dynamics. New features of scenarios of transition from regular to chaotic regimes and between chaotic (hyper-chaotic) regimes are revealed. Particularly, a new type of chaotic (Fig. a) and hyper-chaotic (Fig. b) attractors whose trajectories include intermittency between two "coarse grained" laminar and one turbulent phase is identified.



a *b*

References

1. Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu. Regular and chaotic dynamics of systems with limited excitation, Moskow-Izhevsk, RCD, 2008.

2. Shvets A. Yu., Sirenko V. O. Peculiarities of Transition to Chaos in Nonideal Hydrodynamic Systems, Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal, 2012, No. 2, pp. 185–192.

К УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Б. К. Абенов

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

babenov@mail.ru

Получено эффективное условие абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейных регулируемых систем в простом критическом случае путем оценки несобственных интегралов вдоль решения системы. Эффективность предлагаемого метода показана на примере.

Постановка задачи. Уравнение движения регулируемых систем в простом критическом случае имеет вид:

$$\begin{gathered}\dot{x} = Ax + B\phi(\sigma),\\ \dot{\eta} = \phi(\sigma), \sigma = Dx + E\eta,\ x(0) = x_0, \eta(0) = \eta_0, t \in I = [0,\infty),\end{gathered} \tag{1}$$

где A, B, D, E — постоянные матрицы порядков $n \times n,\ n \times 1,\ 1 \times n,\ 1 \times 1$ соответственно, матрица A — гурвицева, т. е. $\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0, j = \overline{1,n},\ \lambda_j(A)$ — собственные значения матрицы A.

Функция

$$\begin{gathered}\phi(\sigma) \in \Phi_0 = \{\phi(\sigma) \in C(\mathbb{R}^1,\ \mathbb{R}^1) \big|\ \phi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \bar{\phi}(\sigma),\ 0 \le \bar{\phi}(\sigma)\sigma < \mu_0\sigma^2,\ \sigma \ne 0,\\ \forall\sigma,\ \sigma \in R^1,\ \bar{\phi}(0) = 0,\ \left|\bar{\phi}(\sigma)\right| \le \bar{\phi}_*,\ 0 < \bar{\phi}_* < \infty\},\end{gathered} \tag{2}$$

где ε >0 – сколь угодно малое число. Заметим, что

$$\begin{gathered}\bar{\phi}(\sigma) \in \Phi_1 = \{\bar{\phi}(\sigma) \in C(R^1,\ R^1) \big|\ 0 \le \bar{\phi}(\sigma)\sigma < \mu_0\sigma^2,\ \sigma \ne 0,\ \forall\sigma,\ \sigma \in R^1,\\ \bar{\phi}(0) = 0,\ \left|\bar{\phi}(\bar{\sigma})\right| \le \bar{\phi}_*,\ 0 \le \bar{\phi}_* < \infty\}.\end{gathered} \tag{3}$$

Встречающиеся на практике системы автоматического управления относятся к системам с ограниченными ресурсами, для таких систем функция $\phi(\sigma)$ удовлетворяет условиям (2), (3).

Поскольку величина $\phi_*, 0 < \phi_* < \infty,\ \ \varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число, то включения (2), (3) содержат все нелинейности из сектора $[0, \mu_0]$.

Положения равновесия системы (1), (2) определяются из решения алгебраических уравнений $Ax_* + B\phi(\sigma_*) = 0, \phi(\sigma_*) = 0, \sigma_* = Dx_* + E\eta_*$.

Так как матрица A — гурвицева, функция $\phi(\sigma) \in \Phi_0$ обращается в нуль только при $\sigma = 0$, то в случае, когда $E \ne 0$ система (1), (2) имеет единственное положение равновесия $(x_* = 0,\ \eta_* = 0)$, где $\sigma_* = 0$.

Полагаем, что в достаточно малой окрестности точки $\sigma = 0$, функцию $\phi(\sigma)$ можно аппроксимировать линейной функцией $\phi(\sigma) = \mu\sigma$. Иными словами, при $\left|\sigma\right| < \delta$, где $\delta > 0$ — достаточно малое число, функция

$\phi(\sigma) = \mu\sigma, \;\; \varepsilon \le \mu, \; \varepsilon > 0$. Тогда тривиальное решение системы (1), (2), равное $x_* = 0, \; \eta_* = 0$, асимтотически устойчиво в малом, если матрица

$$A_1(\mu) = \begin{pmatrix} A + B\mu D & B\mu E \\ \mu D & \mu E \end{pmatrix}, \qquad 0 < \varepsilon \le \mu < \bar{\mu}_0, \; \bar{\mu}_0 \ge \mu_0$$

гурвицева.

Ставится задача: найти новое эффективное условие абсолютной устойчивости положения равновесия $x_* = 0, \; \eta_* = 0$ системы (1), (2), которое позволяет в пространстве конструктивных параметров системы выделить область шире, чем известные критерии.

Отметим что:

1) постановка задачи абсолютной устойчивости решений уравнений с дифференциальным включением отличается от постановки задачи на устойчивость по Ляпунову;

2) целесообразно для исследования абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (2) разработать совершенно новый метод, отличный от второго метода Ляпунова.

В работе изложен совершенно новый подход к исследованию абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (2).

Уравнения движения системы с помощью неособых преобразований сведены к специальному виду; получены эквивалентные тождества вдоль решений системы относительно переменных нелинейности в системе, оценка решения нелинейной системы; изучены асимптотические свойства функций, связанных с ограниченностью несобственного интеграла.

Получено новое представление квадратичной формы относительно фазовых переменных в виде суммы двух слагаемых (первое слагаемое является квадратичной формой, приведенной к диагональному виду, а второе слагаемое – полным дифференциалом функции по времени).

На основе оценки несобственных интегралов вдоль решения системы доказаны теоремы об абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейной системы.

Список литературы

1. Айсагалиев С. А. К теории абсолютной устойчивости регулируемых систем // Дифференциальные уравнения. — Минск — Москва. — 1994. — Т. 30, № 5. — С.748–757.

2. Айсагалиев С. С. Теория регулируемых систем. — Алматы: Қазақ университеті, 2000. — С.234.

3. Айсагалиев С. А. Теория устойчивости динамических систем. – Алматы: Қазақ университеті, 2012. — С. 216.

4. Aisagaliev S. A., Kalimoldayev M. N. Certain problems of synchronization theory // Journal Inverse Ill-Posed Problems. — 2013. — No. 21. — P. 159–175.

К УПРАВЛЯЕМОСТИ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ

С. А. Айсагалиев, А. П. Белогуров

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

aibels@yandex.ru

Рассматриваются вопросы управляемости процессов, описываемых параболическим уравнением с распределенным управлением из заданного множества. Предлагается метод решения указанных задач путем построения минимизирующих последовательностей.

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый внутри области

$$Q = \left\{0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\right\}$$

следующим уравнением:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \mu(x,t) + v(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющий на границе Q начальному и граничным условиям

$$u(0,x) = \phi(x), \qquad \frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u(t,1)}{\partial x} + \alpha u(t,1) = 0, \tag{2}$$

где $\mu(x,t) \in L_2(Q,R^1)$, $\phi(x) \in L_2(I_1,R^1)$, $I_1 = \left\{x \in R^1 \,/\, 0 \le x \le 1\right\}$ — заданные функции, α — заданное число, $v(x,t)$ — управление, причем

$$v(x,t) \in V = \left\{ v(x,t) \in L_2(Q,R^1) \,/\, \iint\limits_Q \left|v(x,t)\right|^2 dxdt \le \nu^2 \right\}. \tag{3}$$

Задача 1 *(задача управляемости).* Найти управление $v(x,t) \in V$, которое переводит систему (1), (2) из начального состояния $u(0,x) = \phi(x)$, $x \in I_1$ в заданное конечное состояние $u(x,T) = \psi(x)$, $x \in I_1$ в момент времени T, где $\psi(x) \in L_2(I_1,R^1)$ — заданная функция.

Задача 2 *(задача управляемости с минимальной нормой).* Найти управление $v(x,t) \in L_2(Q,R^1)$ с минимальной нормой, которое переводит систему (1), (2) из начального состояния $u(0,x) = \phi(x)$ в состояние $u(x,T) = \psi(x)$.

Решение задачи 2 может быть получено из метода решения задачи 1. Задача управляемости для процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, исследована в [1–3]. Интерес представляет поиск нового конструктивного метода решения задачи 1, ориентированного на применение ЭВМ.

Интегральное уравнение. Решение уравнения (1) с условиями (2) через функцию источника можно представить в виде

$$u(x,t) = \int_0^1 G(x,\xi,t)\phi(\xi)d\xi + \int_0^t \int_0^1 G(x,\xi,t-\tau)\big[\mu(\xi,\tau) + v(\xi,\tau)\big]d\xi\, d\tau\,, \quad (4)$$

где функция

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 a^2 t} \cdot \frac{\cos\lambda_n x \ \ \cos\lambda_n \xi}{\omega_n^2},$$

λ_n — положительные корни уравнения $\lambda\,\mathrm{tg}\,\lambda = \alpha$, величины

$$\omega_n^2 = \int_0^1 \cos^2 \lambda_n x dx = \frac{\lambda_n^2 + \alpha^2 + \alpha}{2(\lambda_n^2 + \alpha^2)}, \quad n = 1, 2, \ldots\ .$$

Из (4) при $t = T$ имеем

$$u(x,T) = \psi(x) = \int_0^1 G(x,\xi,t)\phi(\xi)d\xi + \int_0^T \int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)\mu(\xi,\tau)d\xi\, d\tau + \int_0^T \int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)d\xi\, d\tau$$

Отсюда следует, что искомое управление $v(\xi,\tau) \in L_2(Q,R^1)$ является решением интегрального уравнения

$$\int_0^T \int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)d\xi\, d\tau = \psi_1(x),\ \ x \in I_1, \quad (5)$$

где $\psi_1(x) = \psi(x) - \int_0^1 G(x,\xi,t)\phi(\xi)d\xi - \int_0^T \int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)\mu(\xi,\tau)d\xi\, d\tau, \quad x \in I_1$

— известная функция.

Теперь решение задачи управляемости сводится к поиску решения интегрального уравнения (5), удовлетворяющего условию (3).

Преобразование интегрального уравнения. Пусть функция

$$f(x,\tau) = \int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)d\xi, \quad (x,\tau) \in Q. \quad (6)$$

Тогда из (5) следует, что

$$\int_0^T f(x,\tau)d\tau = \psi_1(x), \quad x \in I. \quad (7)$$

Следующая теорема позволяет найти общее решение интегрального уравнения (7) относительно неизвестной функции $f(x,\tau)$, $(x,\tau) \in Q$.

Теорема 1. Общее решение интегрального уравнения (7) определяется по формуле

$$f(x,\tau) = \frac{1}{T}\psi_1(x) + p(x,\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T p(x,\tau)d\tau, \quad (x,\tau) \in Q,$$

где $p(x,\tau) \in L_2(Q, R^1)$ — произвольная функция.

Список литературы

1. Айсагалиев С. А. Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1991. — Т.27, №9. — С. 1476–1486.

2. Айсагалиев С. А. Общее решение одного класса интегральных уравнений // Матем. журнал. — 2005. — №4. — С. 7–13.

3. Айсагалиев С. А., Айсагалиев Т. С. Методы решения краевых задач. — Алматы: Казак университетi, 2002. — 348 с.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ О ВДАВЛИВАНИИ ШТАМПА В МНОГОСЛОЙНОЕ ОСНОВАНИЕ

И. А. Александров
Запорожский национальный университет, Запорожье, Украина
heepper@gmail.com

Рассмотрим статическую трёхмерную контактную задачу о вдавливании штампа с плоской подошвой Ω в многослойное основание при наличии кулонова трения. Первоначально касаясь основания своей подошвой, штамп взаимодействует с основанием, совершая заданное поступательное перемещение $\bar{\Delta} = \left(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\right)$ в некоторой правой внешней неподвижной системе координат $\tilde{x}\,\tilde{y}\,\tilde{z}$. Многослойное основание представляет собой пакет плоскопараллельных однородных изотропных слоев, лежащий на упругом или жёстком полупространстве. Соседние слои спаяны.

Введём правую декартову систему координат xyz с началом на поверхности основания. Ось z направим внутрь основания по нормали к его поверхности. Отметим, что оси z и $\tilde{z}$ сонаправлены. Для того, чтобы сформулировать условия контактного взаимодействия тел, рассмотрим определённую на Ω вектор функцию $p(s) = \left(p_1(s), p_2(s), p_3(s)\right)$, задающую распределение удельной контактной нагрузки, действующей на основание, и определённую на Ω вектор функцию $v(s) = \left(v_1(s), v_2(s), v_3(s)\right)$, задающую относительное смещение противолежащих поверхностных точек основания и штампа (здесь номера 1, 2 и 3 соответствуют направлениям осей *z*, *x* и *y*). Условия рассматриваемой задачи выражаются следующими соотношениями:

$$\begin{cases} p_1(s) \geq 0,\ v_1(s) \geq 0,\ p_1(s)v_1(s) \geq 0, \\ \sqrt{p_2^2(s) + p_3^2(s)} \leq \mu p_1(s), \\ p_2(s)\sqrt{v_2^2(s) + v_3^2(s)} + \mu p_1(s) v_2(s) = 0, \\ p_3(s)\sqrt{v_2^2(s) + v_3^2(s)} + \mu p_1(s) v_3(s) = 0; \quad s \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

где положительная константа μ есть коэффициент трения.

Связь между $p(s)$ и $v(s)$ можно выразить равенствами

$$v_i(s) = \sum_{j=1}^{3} A_{ij}(p_j)_s - \Delta_i \quad \forall i = \overline{1, n}, \tag{2}$$

где $A_{ij} : L_1(\Omega) \to L_1(\Omega)$ есть линейные интегральные операторы влияния поверхностных нагрузок на поверхностные перемещения многослойного основания. Доказано [1], что для неизвестных функций $p_1(s), p_2(s), p_3(s) \in L_1(\Omega)$ система соотношений (1)-(2) эквивалентна следующей системе нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} p_1(s) = h\left(p_1(s) - E\left(\sum_{j=1}^{3} A_{1j}(p_j)_s - \Delta_1\right)\right), \\ p_2(s) = q\left(p_2(s) - E\left(\sum_{j=1}^{3} A_{2j}(p_j)_s - \Delta_2\right), p_3(s) - E\left(\sum_{j=1}^{3} A_{3j}(p_j)_s - \Delta_3\right), \mu h(p_1(s))\right), \\ p_3(s) = q\left(p_3(s) - E\left(\sum_{j=1}^{3} A_{3j}(p_j)_s - \Delta_3\right), p_2(s) - E\left(\sum_{j=1}^{3} A_{2j}(p_j)_s - \Delta_2\right), \mu h(p_1(s))\right), \\ s \in \Omega, \end{cases} \quad (3)$$

где E — произвольная положительная константа, а функции h и q имеют вид

$$h(x) = \begin{cases} x, \ \textit{если} \ x \geq 0; \\ 0, \ \textit{если} \ x < 0; \end{cases} \quad q(x,y,z) = \begin{cases} x, \ \textit{если} \ \sqrt{x^2+y^2} \leq z; \\ x\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ \textit{если} \ \sqrt{x^2+y^2} > z. \end{cases}$$

Таким образом, рассматриваемая контактная задача сведена к решению системы нелинейных интегральных уравнений (3) относительно неизвестных функций $p_1(s), p_2(s), p_3(s)$ пространства $L_1(\Omega)$.

Для задания интегральных операторов $A_{ij} : L_1(\Omega) \to L_1(\Omega)$ можно использовать следующие, полученные в рамках теории многослойных оснований, соотношения [2]:

$$A_{ij}(p_j)(x,y) = \int_{\Omega} K_{ij}(x-x', y-y')p_j(x',y')dx'dy', \ \ i,j = \overline{1,3};$$

$$K_{11}(x-x', y-y') = \frac{1+v}{\pi E_1}\frac{1-v_1}{r} - \frac{1-v_1^2}{\pi E_1}\int_0^{\infty} a_1(p)e^{-2ph}J_0(pr)dp,$$

$$K_{21}(x-x', y-y') = \frac{1+v_1}{\pi E_1}\frac{1-2v_1}{2r^2} + \frac{1-v_1^2}{\pi E_1}\frac{x-x'}{r}\int_0^{\infty} b_1(p)e^{-2ph}J_1(pr)dp,$$

$$K_{22}(x-x', y-y') = \frac{1+v_1}{\pi E_1}\left(\frac{1}{r} - \frac{v\left(y-y'\right)^2}{r^3}\right) - \frac{1-v_1^2}{\pi E_1}\left(\int_0^{\infty} c_1(p)e^{-2ph}J_0(pr)dp - \right.$$

$$\left. -\int_0^{\infty}\left(c_1(p) - b_1(p)\right)e^{-2ph}\left(\frac{J_1(pr)}{pr} - \frac{\left(x-x'\right)^2}{r^2}\left(J_0(pr) - \frac{2J_1(pr)}{pr}\right)\right)dp\right),$$

$$K_{32}(x-x', y-y') = \frac{1+v_1}{\pi E_1}\frac{v_1\left(x-x'\right)\left(y-y'\right)}{r^3} - \frac{1-v_1^2}{\pi E_1}\frac{\left(x-x'\right)\left(y-y'\right)}{r^2}.$$

$$\cdot\left(\int_0^\infty \left(c_1(p)-b_{\tau 1}(p)\right)e^{-2ph}\left(J_0(pr)-\frac{2J_1(pr)}{pr}\right)dp\right),$$

$$K_{12}(x-x',y-y')=-K_{21}(x-x',y-y'),\ \ K_{23}(x-x',y-y')=K_{32}(x-x',y-y'),$$

$$K_{33}(x-x',y-y')=K_{22}(y-y',x-x'),\ \ K_{13}(x-x',y-y')=-K_{21}(y-y',x-x'),$$

$$K_{31}(x-x',y-y')=K_{21}(y-y',x-x'),\ r=\sqrt{\left(x-x'\right)^2+\left(y-y'\right)^2}\,.$$

В этих соотношениях E_1, v_1 есть модуль Юнга и коэффициент Пуассона верхнего слоя основания, h есть высота этого слоя, $J_\alpha(x)$ есть функция Бесселя первого рода и $a_1(p)$, $b_1(p)$, $c_1(p)$, $b_{\tau 1}(p)$ есть модифицированные функции податливости для верхнего слоя основания [2].

Список литературы

1. Александров А. И. Решение задач контактного взаимодействия упругих тел с использованием нелинейных операторных уравнений / А. И. Александров. — Днепропетровск, 1989. — 74 с. — (Препринт / АНУССР. Ин-т технической механики; 89-2).

2. Приварников А. К. Упругие многослойные основания / А. К. Приварников, В. Д. Ламзюк. — Днепропетровск, 1985. — 162с. — Деп. в ВИНИТИ 23.12.85, № 8789 — В.

Р-АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ З ХАРАКТЕРИСТИКОЮ $p = x^k y^e$

І. М. Александрович, О. Ю. Клименко
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна
klimenko.alexandraa@gmail.com

P-аналітичні функції з такими характеристиками пов'язані з біосесиметричними рівняннями потенціалу та з узагальненим біосесиметричним рівнянням потенціалу, інтегральним зображенням розв'язків яких присвячена робота [1].

В даній роботі розглядається диференціальне зображення p-аналітичних функцій з характеристикою $p = x^k y^e$.

Теорема 1. Для того, щоб p-аналітичну функцію $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x,y) + i\tilde{v}(x,y)$ можна було подати у вигляді

$$\tilde{f}(z) = \omega_1 \frac{\partial u}{\partial x} + w_1 \frac{\partial u}{\partial y} + \omega_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + w_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \ , \tag{1}$$

необхідно й достатньо, щоб існував ненульовий розв'язок рівняння

$$\frac{d}{d\overline{z}}\left(\frac{1}{P} \frac{dP}{dz} \right) - \overline{P}P = 0 \ , \tag{2}$$

Тут $u(x,y)$ — гармонічна функція, $\omega_k, w_k\,(k = 1,2)$ — довільні функції від z, $\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = F(z)$ — аналітична функція від z,

$$P = -\frac{1}{2}\frac{d\,lnp}{dz}, \frac{d}{dz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Якщо характеристика має вигляд $p(x,y) = p_1(x)\,p_2(y)$, то матиме місце наступна теорема.

Теорема 2. Для того, щоб $p_1(x)\,p_2(y)$-аналітичну функцію можна було подати у вигляді лінійної комбінації (1), достатньо, щоб

$$p_1(x) = q_i(x), p_2(y) = q_i(y), (i = 1,2,3),$$

де $q_1(\xi) = \gamma \ \mathrm{th}^{\pm 2}(a\xi + b), q_2(\xi) = \gamma \ \mathrm{tg}^{\pm 2}(a\xi + b), q_3(\xi) = \gamma(a\xi + b)^{\pm 2}$ $(\gamma - const > 0, a\,i\,b - \text{сталі}, a > 0)$.

Зокрема, зображення $x^2 y^2$-аналітичної функції $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x,y) + i\tilde{v}(x,y)$ через довільну аналітичну функцію

$$F(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

матиме вигляд

$$\tilde{f}(z) = \left(\frac{1}{\Delta^+ y} + i \frac{x^3}{\Delta^+} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(-\frac{1}{\Delta^+ x} + \frac{y^3}{\Delta^+} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ixy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} , \qquad (3)$$

де $\Delta^+ = x^2 + y^2$.

Задача. Нехай G — верхня півплощина. Знайти функцію $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ x^2y^2-аналітичну в області G, неперервну на межі G, за винятком, можливо, точки (0, 0), яка задовольняє крайову умову

$$\tilde{v}(x, 0) = x\beta(x),\ x \in \mathbb{R},$$

де $x\beta(x)$ — відома неперервна обмежена функція від x. При $|x| \to \infty$

$$\beta(x) = O\left(\frac{1}{|x|^\alpha} \right), \alpha > 0 .$$

Розв'язок задачі шукаємо у вигляді (3). Задовольняючи крайову умову, одержимо

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} = \beta(x) .$$

Відтворивши функцію $F(z)$ за її дійсною частиною за формулою Шварца, одержуємо розв'язок задачі у замкнутій формі.

Список літератури

1. Александрович І. М., Сидоров М. В. Інтегральні зображення $x^k y^e$-аналітичних функцій та їх формули обернення // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2013. — №1 (111). — С.24–34.

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНІЄЇ КВАЗІЛІНІЙНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

Р. В. Андрусяк, О. В. Пелюшкевич

Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів, Україна

ru.andrusyak@gmail.com, olpelushkevych@ukr.net

В області

$$\Omega_T = \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^2 : s_1(t) < x < s_2(t), 0 < t < T, s_1(0) = s_2(0) = 0 \right\},$$

розглянемо гіперболічну систему квазілінійних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + a_{11}(x,t,u)\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + a_{13}(x,t,u)\dfrac{\partial u_3}{\partial x} + a_{14}(x,t,u)\dfrac{\partial u_4}{\partial t} = b_1(x,t,u), \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + a_{22}(x,t,u)\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + a_{23}(x,t,u)\dfrac{\partial u_3}{\partial x} + a_{24}(x,t,u)\dfrac{\partial u_4}{\partial t} = b_2(x,t,u), \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} = b_3(x,t,u), \\ \dfrac{\partial u_4}{\partial x} = b_4(x,t,u), \end{cases} \tag{1}$$

де $u = u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t), u_4(x,t))$ — шукані функції, а a_{ij}, b_i — відомі дійснозначні функції.

Нехай має місце початкова умова

$$u(0,0) = u^0, \tag{2}$$

причому виконується нерівність

$$a_{11}(0,0,u^0) < s_1'(0) < 0 < s_2'(0) < a_{22}(0,0,u^0).$$

Доповнимо систему (1) крайовими умовами вигляду

$$\begin{aligned} u_1(s_2(t),t) &= K_1(t, u_1(s_1(t),t), u_2(s_2(t),t)), \\ u_2(s_1(t),t) &= K_2(t, u_1(s_1(t),t), u_2(s_2(t),t)), \\ u_3(s_1(t),t) &= K_3^-(t, u_1(s_1(t),t), u_2(s_2(t),t)), \\ u_3(s_2(t),t) &= K_3^+(t, u_1(s_1(t),t), u_2(s_2(t),t)), \\ u_4(s_1(t),t) &= K_4(t, u_1(s_1(t),t), u_2(s_2(t),t)). \end{aligned} \tag{3}$$

Використавши метод характеристик і принцип Банаха про нерухому точку, встановлено умови існування і єдиності локального узагальненого розв’язку задачі (1)–(3).

ПРО ЕЛІПТИЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ У ПРОСТОРАХ ХЕРМАНДЕРА

А. В. Аноп
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
ahlv@ukr.net

Доповідь присвячена загальній теорії еліптичних крайових задач (ЕКЗ) у гільбертових просторах Хермандера H^{ϕ}, $\phi \in RO$. Для них показником гладкості служить вимірна функція $\phi : \left[1, \infty\right) \to \left(0, \infty\right)$, RO-змінна на ∞ за В. Авакумовичем. Ця властивість значить, що $c^{-1} \leq \phi(\lambda t) / \phi(t) \leq c$ для довільних $t \geq 1, \lambda \in \left[1, a\right]$ і деяких сталих $a > 1$ і $c \geq 1$ (a і c не залежать від t і λ, але можуть залежати від ϕ). Ці простори утворюють розширену соболєвську шкалу (р.с.ш.). Р.с.ш. на $\mathbb{R}^n$ складається з гільбертових просторів

$$H^{\phi}(\mathbb{R}^n) := \{w \in S'(\mathbb{R}^n):\ \phi\left(\left\langle \xi \right\rangle\right) \hat{w}(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n, d\xi)\},$$

$$\left\| w \right\|_{\phi} := \left\| \phi\left(\left\langle \xi \right\rangle\right) \hat{w}(\xi) \right\|_{L_2(R^n, d\xi)},$$

і означається на евклідових областях і гладких компактних многовидах стандартним чином. Тут $\left\langle \xi \right\rangle := \left(1 + \left| \xi^2 \right|\right)^{1/2}$, а $\hat{w}$ — перетворення Фур'є повільно зростаючого розподілу w.

Отримані такі результати про властивості ЕКЗ в р. с. ш. [1—4]:

— теореми про нетеровість операторів, породжених ЕКЗ на р. с. ш.;

— апріорні оцінки розв'язків ЕКЗ у просторах Хермандера;

— теореми про глобальну і локальну регулярність розв'язків ЕКЗ в р.с.ш.;

— нові достатні умови неперервності узагальнених частинних похідних ЕКЗ, зокрема умови класичності розв'язків;

— теореми про ізоморфізм, породжені ЕКЗ з параметром та апріорні оцінки їх розв'язків.

Ці результати встановлені спільно з О. О. Мурачем.

Список літератури

1. Аноп А. В. Еліптичні крайові задачі в многозв'язній області в розширеній соболєвській шкалі // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — Т.10, № 2. — С. 37–59.

2. Аноп А. В., Мурач А. А. Регулярные эллиптические краевые задачи в расширенной соболевской шкале // Укр. мат. журнал. — 2014. — Т. 66, № 5.

3. Аноп А. В. Загальна еліптична крайова задача в розширеній соболєвській шкалі // Доповіді НАН України. — 2014. — № 5.

4. Anop A. V., Murach A. A., Parameter-elliptic problems and interpolation with a function parameter // Methods Funct. Anal. Topology. — 2014. — V. 20, no. 2.

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ЛАНЦЮЖКА РІВНЯНЬ БОГОЛЮБОВА ДЛЯ НЕСИМЕТРИЧНОЇ ОДНОМІРНОЇ СИСТЕМИ ВИДІЛЕНОЇ ЧАСТИНКИ У ФОРМІ РОЗКЛАДУ ЗА КУМУЛЯНТАМИ

Б. П. Антонюк

Східноєвропейський національний університет ім. Лесі Українки, Луцьк Україна

bogdan.antonyuk78@gmail.com

Сучасна математична фізика вивчає властивості і поведінку макроскопічних тіл на основі властивостей і законів руху мікрочастинок, з яких вони складаються. Рух окремих мікрочастинок може підпорядковуватись законам класичної або квантової механіки. Для створення моделей таких тіл широко використовується ланцюжок рівнянь Боголюбова — нескінченна система інтегро-диференціальних рівнянь (ієрархія ББГКІ). Відомо, що внаслідок граничних переходів, з неї можна вивести феноменологічні рівняння руху статистичних систем, наприклад, кінетичні рівняння, рівняння гідродинаміки, рівняння дифузії.

Розглянемо одновимірну систему виділеної частинки в термостаті. Побудуємо кумулянтне представлення розв'язків задачі Коші ланцюжка рівнянь Боголюбова цієї системи. Зауважимо, що досліджується несиметрична багаточастинкова система, тобто система з несиметричним гамільтоніаном відносно перестановок аргументів, що характеризують кожну з частинок. Розв'язок задачі Коші для цього рівняння визначається розкладом за групами (кластерами) зростаючого числа частинок у формі ряду ітерацій або певного функціонального ряду, методом нерівноважних кластерних розкладів.

У абстрактному вигляді, використовуючи еволюційний оператор $U_{(n_1,n_2)}$, розв'язок задачі Коші матиме вигляд:

$$F_{s_2+1+s_1}(t, x_{-s_2}, \dots, x_{s_1}) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=n_1+n_2} \int_{(R^1\times R^1)^{n_1+n_2}} dx_{-(n_2+s_2)} \dots dx_{-(s_2+1)} dx_{s_1+1} \dots dx_{s_1+n_1} \times$$

$$\times U_{(n_2,n_1)}\left(t, x_{-(n_2+s_2)}, \dots, x_{s_1+n_1}\right) \times F_{s+n}\left(0, x_{-(n_2+s_2)}, \dots, x_{s_1+n_1}\right). \quad (1)$$

Отриманий таким чином розв'язок є коректним, тобто ряди в просторі сумовних функцій збіжні. Розв'язок задачі Коші для ланцюжка рівнянь Боголюбова у формі розкладу за кумулянтами визначається формулою:

$$F_{|Y|}(t,Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{n=n_1+n_2 \\ n_1,n_2\geq 0}} \int_{(R^1\times R^1)^{n_1+n_2}} d(X\setminus Y) \sum_{P:X_Y=\bigcup_i X_i} (-1)^{|P|-1} \prod_{X_i\subset P} S_{|X_i|}(-t, X_i) \times F_{|X|}(0, X),$$

де $d(X \setminus Y) = dx_{-(n_2+s_2)} \dots dx_{-(s_2+1)} dx_{s_1+1} \dots dx_{s_1+n_1}$, або в операторному вигляді:

$$F(t) = (1-a^{+})^{-1}(1-a^{-})^{-1}\mathsf{A}(t)F(0) =$$
$$= (1-a^{+})^{-1}(1-a^{-})^{-1}\left(1-\big(1+S(-t)\big)^{-1}\right)F(0)$$

Причому, дане зображення є еквівалентним зображенню (1). Для $F(0) \in L^1_{\alpha,0}$ — це сильний розв'язок, а для довільних початкових даних — слабкий.

ОБРАЩЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Е. А. Аршава

Харьковский национальный университет строительства и архитектуры, Харьков, Украина

elarshava@mail.ru

Изучается задача обращения векторных интегральных операторов методом операторных тождеств в пространстве $L_m^2(0,\omega)$, которое состоит из вектор-функций $\vec{f}(x) = [f_1(x), f_2(x), ...f_m(x)]$, $\left\|\vec{f}\right\|_m = \left(\sum\limits_{k=1}^{m}\int\limits_0^\omega \left|f_k(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}$, $m = 2$.

Теорема 1. Для любого ограниченного оператора, который действует в $L_m^2(0,\omega)$, вида

$$S\vec{f} = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\frac{d}{dx}\right)\int\limits_0^\omega S(x,t)\vec{f}(t)dt, \alpha = \overline{\alpha} \neq 0,$$

верно представление

$$\left(A_0 S - S A_0^*\right)\vec{f} = \int\limits_0^\omega \left\{M_1(x) + \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}M_2(x) + N_1(t) + \frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}N_2(t)\right\}\vec{f}(t)dt,$$

где

$$A_0\vec{f} = \left(\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t (1-e^{\alpha(\xi-t)})f_1(\xi)d\xi, \qquad \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t (1-e^{\alpha(\xi-t)})f_2(\xi)d\xi\right)_T,$$

$S(x,t)$ – матрица, элементы которой принадлежат $L_{mxm}^2(0,\omega)$ и удовлетворяют уравнению

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]s_{ij}(x,t) = 0,$$

$$M_1(x) = S(x,0),\ M_2(x) = S'(x,0),\ N_1(t) = -S(0,t),\ N_2(t) = -S'(0,t).$$

Следствие 1. Если оператор S имеет ограниченный обратный T, тогда

$$\left(TA_0 - A_0^* T\right)\vec{f} = \int\limits_0^\omega R(x,t)\vec{f}(t)dt, \text{ где } R(x,t) = \sum_{i=1}^4 P_i(t)Q_i(x),$$

P_i, Q_i — 2×2-матрицы ($i = \overline{1,4}$), которые удовлетворяют соотношениям

$$S^*P_1 = E_m, S^*P_2 = \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}E_m, S^*P_3 = N_1^*, S^*P_4 = N_2^*,$$

$$SQ_1 = M_1, SQ_2 = M_2, SQ_3 = E_m, SQ_4 = \frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}E_m.$$

Из теоремы 1 и следствия 1 вытекает

Теорема 2. Если оператор S ограничен вместе со своим обратным T и существуют матрицы P_i, Q_i $(i = \overline{1,4})$, которые удовлетворяют вышеуказанным соотношениям, то для оператора $T = S^{-1}$ верно представление

$$T\vec{f} = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\frac{d}{dx}\right)\int_0^{\omega}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi(x,t)\vec{f}(t)dt.$$

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Ф.А. Асроров
Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Киев, Украина
far@ukr.net

Рассмотрим неоднородную систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi),\ \dfrac{dx}{dt} = P(t,\varphi)x + f(t,\varphi,x), t \ne \tau_i, \Delta x\Big|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi)x + I_i(\varphi,x)\end{cases}, \quad (1)$$

где $t \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{Z}, \varphi \in \Im_m, \Im_m$ — m-мерный тор, $a(t,\varphi), f(t,\varphi,x), P(t,\varphi)$ — непрерывные (кусочно-непрерывные с разрывами первого рода при $t = \tau_i$) по t, непрерывные и 2π-периодические по φ_ν, $\nu = \overline{1,m}$, ограниченные при всех $t \in \mathbb{R}$ векторные и матричные функции соответственно, функция $a(t,\varphi)$ удовлетворяет условию Липщица по $\varphi \in \Im_m$ равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$. Функции $B_i(\varphi)$ і $I_i(\varphi,x)$ — равномерно ограниченные по i матрицы и векторы, $\det(E + B_i) \ne 0$ для любого $\varphi \in \Im_m$. Допустим также, что функции $f(t,\varphi,x)$ и $I_i(\varphi,x)$ удовлетворяют условию Липщица

$$\left\| f(t,\varphi',x') - f(t,\varphi'',x'')\right\| + \left\| I_i(\varphi',x') - I_i(\varphi'',x'')\right\| \le L\left(\left\|\varphi' - \varphi''\right\| + \left\| x' - x''\right\|\right) \quad (2)$$

для всех $t \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}, \varphi', \varphi'' \in \Im_m, x', x'' \in \mathbb{R}^n$.

Кроме того, считаем, что функции $f(t,\varphi,x)$, и $I_i(\varphi,x)$ ограничены при $x = 0$, то есть

$$\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im_m}\left\| f(t,\varphi,0)\right\| + \sup_{i\in Z}\max_{\varphi\in\Im_m}\left\| I_i(\varphi,0)\right\| \le M. \quad (3)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть система уравнений (1) такова, что выполняются соотношение (2) и при всех $t \in \mathbb{R}, \varphi \in \Im_m, \left\|x'\right\| \le h, \left\|x''\right\| \le h$ неравенство (3). Предположим, что соответствующая ей система уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi),\ \dfrac{dx}{dt} = P(t,\varphi)x,\quad t \ne \tau_i,\ \Delta x\Big|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi)x\end{cases}$$

имеет функцию Грина — Самойленко $G(t,s,\varphi)$ удовлетворяющую неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\| G(t,s,\varphi)\right\| ds + \sum_{-\infty<\tau_i<\infty}\left\| G(t,\tau_i + 0,\varphi)\right\| \le K.$$

Тогда можно указать такое положительное число $L_0 \le \dfrac{1}{2K}$, что если $h \ge 2KM$, то для любого $L \le L_0$ система уравнений (1) имеет интегральное множество $x = u(t, \varphi)$, $t \in R$, $\varphi \in \Im_m$.

Список литературы

1. Асроров Ф. А., Фекета П. В. Обмежені розв'язки лінійних неоднорідних систем з імпульсною дією // Наук. вісн. Ужгород. ун.-ту. Сер. матем. і інформ. — 2010. — Вип. 20. — С. 4–12.

2. Асроров Ф. А., Перестюк Н. А. Функция Грина — Самойленко и существование интегральних множеств линейных расширений неавтономных систем // Укр. мат. журн. — 1994. — Т. 46, № 8. — С. 1067–1071.

3. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 304 с.

4. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — К.: Вища шк, 1987. — 288 с.

СИЛА КАЗИМИРА МІЖ ДВОМА ОДНАКОВИМИ ПЛОЩИННО-ПАРАЛЕЛЬНИМИ ШАРАМИ

І. О. Баликін
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
illyabalykin@gmail.com

Останнім часом великий інтерес викликають дослідження нелінійних хвиль в шаруватих структурах різного типу та характер взаємодії між ними. Актуальною є проблема теоретичного дослідження характеру локалізації нелінійних стаціонарних хвиль, що розповсюджуються в ангармонійному середовищі вздовж площинно-паралельних шарів. Такі явища описуються нелінійним рівнянням Шредінгера з дельта-подібними потенціалами.

При наявності двох точкових дефектів, які розташовані на відстані $2a$ один від одного, нелінійне рівняння Шредінгера для змінної u має вигляд [1]

$$i\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\lambda\left[\delta\left(z+a\right)+\delta\left(z-a\right)\right]\left|u\right|^2 u. \tag{1}$$

Шукаючи його розв’язок у вигляді $u\left(z,t\right)=u\left(z\right)e^{-i\omega t}$ зводимо рівняння (1) до стаціонарного рівняння

$$u''\left(z\right)-\varepsilon u\left(z\right)=-\lambda\left[\delta\left(z+a\right)+\delta\left(z-a\right)\right]u^3\left(z\right), \tag{2}$$

де прийнято $\varepsilon=\sqrt{-\omega}$.

Зв’язок неоднорідного рівняння (2) шукаємо як розв’язок відповідного лінійного однорідного рівняння

$$u''\left(z\right)-\varepsilon u\left(z\right)=0, \tag{3}$$

яке задовольняє крайові умови

$$u\left(z\right)|_{\pm a+0}=u\left(z\right)|_{\pm a-0}\,,\qquad u'\left(z\right)|_{\pm a+0}-u'\left(z\right)|_{\pm a-0}=-\lambda u^3\left(z\right)|_{\pm a}\,. \tag{4}$$

Враховуючи, що $u\left(z\right)\to 0$ при $z\to\pm\infty$, матимемо розв’язки рівняння (3) на відповідному проміжку осі z:

$$\begin{aligned} u_1\left(z\right)&=B_1e^{\varepsilon z}, && z\in\left(-\infty,-a\right),\\ u_3\left(z\right)&=A_3e^{-\varepsilon z}+B_3e^{\varepsilon z}, && z\in\left(-a,+a\right),\\ u_2\left(z\right)&=A_2e^{-\varepsilon z}, && z\in\left(a,+\infty\right), \end{aligned} \tag{5}$$

а задовольняючи граничні умови (4), отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} A_3e^{\varepsilon a}+B_3e^{-\varepsilon a}=U_1,\\ A_3e^{-\varepsilon a}+B_3e^{\varepsilon a}=U_2,\\ -A_3\varepsilon e^{\varepsilon az}+B_3\varepsilon e^{-\varepsilon a}=U_1-\lambda\dfrac{U_1^{\,3}}{\varepsilon},\\ A_3\varepsilon e^{-\varepsilon a}-B_3\varepsilon e^{\varepsilon a}=U_2-\lambda\dfrac{U_2^{\,3}}{\varepsilon}. \end{cases}$$

де $B_1 e^{-\varepsilon a} = A_3 e^{\varepsilon a} + B_3 e^{-\varepsilon a} = U_1$, $A_3 e^{-\varepsilon a} + B_3 e^{\varepsilon a} = A_2 e^{-\varepsilon a} = U_2$.

Розв'язуючи систему знайдемо коефіцієнти

$$B_1 = e^{\varepsilon a} U_1, \quad A_2 = e^{\varepsilon a} U_2, \quad A_3 = e^{\varepsilon a}\left(U_2 - \frac{\lambda}{2\varepsilon} U_2^{\,3}\right),\ B_3 = e^{\varepsilon a}\left(U_1 - \frac{\lambda}{2\varepsilon} U_1^{\,3}\right)$$

а, отже, і розв'язки рівняння Шредінгера [2]

$$u_1(z) = B_1 e^{\varepsilon z} = U_1 e^{\varepsilon a} e^{\varepsilon z},\ u_2(z) = A_2 e^{-\varepsilon z} = U_2 e^{\varepsilon a} e^{-\varepsilon z},$$

$$u_3(z) = A_3 e^{-\varepsilon z} + B_3 e^{\varepsilon z} = \left(U_2 - \frac{\lambda}{2\varepsilon} U_2^{\,3}\right) e^{\varepsilon a} e^{-\varepsilon z} + \left(U_1 - \frac{\lambda}{2\varepsilon} U_1^{\,3}\right) e^{\varepsilon a} e^{\varepsilon z},$$

які виражаються через потужність U_1 і U_2 світлових потоків у хвилеводах.

При цьому реалізується один із трьох можливих стаціонарних станів:

• синфазний симетричний стан (SS) з однаковою потужністю світлових потоків у двох хвилеводах;

• антисиметричний стан (A) з однаковою щільністю потоків у хвилеводах, але з протилежною фазою поля в них;

• неоднорідний стан (SN) з однаковою фазою, але з різними щільностями світлових потоків у хвилеводах.

Для кожного з названих станів знайдено силу Казиміра між двома однаковими площинно-паралельними шарами:

$$F_{SS} = -\frac{4\varepsilon^3}{\lambda} e^{-2a\varepsilon} \frac{1 - 2a\varepsilon + e^{-2a\varepsilon}\left(1 + 4a\varepsilon\right)}{\left(1 + e^{-2\varepsilon a}\right)^4},$$

$$F_A = \frac{4\varepsilon^3}{\lambda} e^{-2a\varepsilon} \frac{1 - 2a\varepsilon - e^{-2a\varepsilon}\left(1 + 4a\varepsilon\right)}{\left(1 - e^{-2\varepsilon a}\right)^4},$$

$$F_{SN} = -\frac{4\varepsilon^3}{\lambda} e^{-8a\varepsilon} \frac{1 - 8a\varepsilon - e^{-2a\varepsilon}\left(1 - 4a\varepsilon\right)}{\left(1 - e^{-4\varepsilon a}\right)^4}.$$

Здобуті результати можуть бути корисними в нелінійній оптиці, фізиці ангармонійних кристалів, теорії магнітовпорядкованих середовищ і таке інше.

Автор висловлює подяку своєму науковому керівникові В. С. Герасимчуку.

Список літератури

1. Богдан М. М., Герасимчук И. В., Ковалев А. С. Динамика и устойчивость локализованных мод в нелинейных средах с точечными дефектами // ФНТ. — 1997. — Т. 23, № 2. — С. 197–207.

2. Хмара К. Точний розв'язок нелінійного рівняння Шредінгера в системі з багатьма дельта-подібними потенціалами // Магістерська дисертація. — К.: НТУУ «КПІ, 2010. — 68 с.

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ С ОСЦИЛЛЯТОРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Г. Г. Барановская, Л. В. Барановская
НТУУ «Киевский политехнический институт», Киев, Украина
lesia@baranovsky.org

В различных задачах квантовой механики [1], связанных с гармоническим осциллятором (применяются в биофизике для описания электронного состояния молекул и процессов переноса заряда), приходится вычислять интегралы типа

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x)\, x^m \psi_k(x)\, dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x) \frac{d^m}{dx^m} \psi_k(x)\, dx.$$

Волновая (ортонормированная) функция гармонического осциллятора определяется из основного уравнения квантовой механики (уравнения Шредингера) и имеет вид

$$\psi_n(x) = N_n H_n(x)\, e^{-x^2/2},$$

где нормировочные коэффициенты $N_n = \dfrac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}$, полиномы Чебышева-Эрмита $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$.

Проблема заключается не только в том, что нет явных выражений для полиномов Эрмита, но и в том, что даже, если бы они существовали бы, не понятно как ими воспользоваться для больших индексов.

Для полиномов Эрмита хорошо изучены их свойства и есть следующие рекуррентные соотношения [2]

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x),\; H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0.$$

В настоящей работе доказаны рекуррентные соотношения для волновых функций

$$x \cdot \psi_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(x) + \sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(x),$$
$$\frac{d\psi_n(x)}{dx} = \sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(x) - \sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(x),$$

которые используются для вычисления данных интегралов.

Список литературы

1. Ландау Л. Д. Квантовая механика (нерелятивистская теория) / Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. — Изд. 6-е. — М. : Физматлит, 2004. — 800 с. — («Теоретическая физика», Т. III).

2. Корн Г. Справочник по математике / Корн Г., Корн Т. – М. : Наука, 1978.

ЗАДАЧА ОПТИМІЗАЦІЇ СТАРТОВОЇ МНОЖИНИ, ФІНАЛЬНОЇ МНОЖИНИ ТА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

І. В. Бейко
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
ivan.beyko@gmail.com

Розглядається задача відшукання оптимального керування

$$\overline{u}(t) \in U\,,\; U = \{u \mid g(u) \le 0\},$$

яке при наявності фазових обмежень $\psi(x) \le 0$ переводить керовану систему

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t))$$

із заданого початкового стану $x(t_0) \in X^0$ у заданий фінальний стан $x(t_f) \in X^f$, де стартова множина X^0 визначається початковою точкою $x(0)$ та перетином термінальної множини $X(t_0, x(0))$ із множиною $\{x \mid \varphi^0(x) = 0\}$, а фінальною множиною X^f є множина тих точок $x(t_f)$, для яких існує допустиме керування, що переводить керовану систему із точки $x(t_f)$ у задану точку $x(T) = x^T$. Оптимальне керування обчислюється як оптимальне по швидкодії керування для оптимальних початкового $x(t_0)$ та кінцевого $x(t_f)$ фазових станів, тобто, за допомогою розв'язування при заданих $x(t_0)$ та $x(t_f)$ крайової задачі для π-системи

$$\overline{u}(t) = \arg\max_{u \in U}(q(t)), f(x(t), u)),$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), \overline{u}(t)),\; \frac{dq(t)}{dt} = -[f_x'(x(t), \overline{u}(t))]^T q(t).$$

У частинному випадку мінімізації значення $\int_{t0}^{t1} u(t)dt$ за умов

$$f(x(t), u(t)) = A(t)x(t) + B(t)u(t),\; U \subset R,\; x(t^0) = a,\; x(t^1) = b,$$

початкове значення $q(t_0)$ визначає єдиний розв'язок системи

$$\frac{dq(t)}{dt} = -A^T(t)q(t)$$

і тому значення $\overline{u}(t)$ обчислюється поступово для моментів часу t із найбільшими значеннями $B^T(t)q(t)$ аж до отримання рівності

$$\int_{t0}^{t1} B^T(t)q(t)\overline{u}(t)dt = (q(t^1), b) - (q(t^0), a),$$

де $q(t^0)$ обчислюється як максимізатор значення $\int_{t0}^{t1} \overline{u}(t)dt$, наприклад, обчислюється за допомогою ітераційного оновлення:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)\overline{u}(t).\ z(t^1) = b - x(t^1),\ \frac{dz(t)}{dt} = -A^T(t)z(t),$$

$$q(t^0) := q(t^0) + \lambda z(t^0),\ \lambda \cong \arg\max_{\lambda} \int_{t0}^{t1} \overline{u}(t)dt.$$

Оптимальний вибір фінальної множини X^f направлений на зменшення ризику «небажаної зустрічі»

$$\forall i \in I \mid x_i(\overline{\overline{T}}) - y_i(\overline{\overline{T}}) \mid \leq \varepsilon$$

для об'єкту

$$\frac{dy(t)}{dt} = g(y(t), v(t)),\ v(t) \in V = \{v \mid g_V(v) \leq 0\}.$$

У цьому випадку обчислюється екстремальне по швидкодії керування $u = \overline{\overline{u}} : R \to R^{n_u}$ системою

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)),$$

яке для заданих множин

$$X^0 \subset R^{n_x},\ Y^0 \subset R^{n_y},\ I \subset \{1, 2, ..., n_x\},$$

для заданого числа $\varepsilon > 0$, для заданої системи

$$\frac{dy(t)}{dt} = g(y(t), v(t))$$

і для заданих початкових станів $x(t_0) \in X^0, y(t_0) \in Y^0$ забезпечує виконання нерівностей $\forall i \in I \mid x_i(\overline{\overline{T}}) - y_i(\overline{\overline{T}}) \mid \leq \varepsilon$ в мінімаксний момент часу

$$\overline{\overline{T}} = \inf_{u(\cdot)\in U} \max_{v(\cdot)\in V} T_{uv},\ T_{uv} = \min\{t \mid x_i(t) = y_i(t), i \in I\}.$$

Для цього випадку в умовах існування екстремального керування $\overline{\overline{u}}$ значення $\overline{\overline{u}}(t)$ обчислюється для кожного моменту часу t як розв'язок оптимізаційних задач

$$\overline{\overline{u}}(t) = \arg\max_{u\in U}(q(t)), f(x(t), u)),$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), \overline{\overline{u}}(t)),\ \frac{dq(t)}{dt} = -[f_x'(x(t), \overline{\overline{u}}(t))]^T q(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = g(y(t), \overline{\overline{v}}(t)),\ \frac{dw(t)}{dt} = -[g_y'(y(t), \overline{\overline{v}}(t))]^T w(t),$$

$$\overline{\overline{v}}(t) = \arg\max_{v\in V}(w(t), g(y(t), v)),$$

$$\forall i \in I\ \ q_i(\overline{\overline{T}}) = w_i(\overline{\overline{T}}),\ \forall i \notin I\ \ q_i(\overline{\overline{T}}) = w_i(\overline{\overline{T}}) = 0,$$

$$x(t_0) = \arg\max_{x\in X^0}(q(t_0), x),\ \ y(t_0) = \arg\max_{y\in Y^0}(w(t_0), y),$$

$$\forall i \in I\ \ x_i(\overline{\overline{T}}) = y_i(\overline{\overline{T}}).$$

СХЕМА РОЗВ'ЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З РОЗРИВНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

О. М. Бердник
Національний авіаційний університет, Київ, Україна
o_berdnik@mail.ru

Дослідження процесів теплової конвекції є актуальною проблемою гідромеханіки та теплообміну, оскільки вони часто зустрічаються в багатьох задачах практики. Зокрема, розвиток авіації та ракетно-космічної техніки стимулював всебічне вивчення вимушеної конвекції. При цьому процеси передачі тепла та руху рідини тісно пов'язані один з одним.

Більшість робіт по дослідженню потоків рідини та газів з дозвуковими швидкостями присвячено систематизації та аналізу експериментальних даних [1]. Результати досліджень, як правило, узагальнюються у вигляді універсальних залежностей в широкому інтервалі режимних та геометричних параметрів [2]. Не менш актуальними залишаються і результати фундаментальних досліджень, оскільки сприяють пошуку ефективних конструкцій чи оптимальних режимів роботи теплообмінного устаткування. Часто елементами теплообмінників є канали різної форми. Застосування ребер на внутрішній поверхні каналу вважається доцільним в ряді випадків, особливо при ламінарному режимі течії теплоносія [2].

Виявлення властивостей течії в'язкої нестисливої рідини в кільцевому каналі з рівномірно розподіленими перешкодами на стінках потребує моделювання взаємодії останніх з потоком. Розглядаючи ділянку гідродинамічної стабілізації, зробимо припущення, що вплив проникного шару перешкод на рух рідини можна описати розподіленою об'ємною силою [3]:

$$f_* = -k\rho n(r) d_i U\,,$$

де k — емпіричний коефіцієнт (м/с); ρ – густина (кг / м^3); d_i — діаметр перешкоди (м); $n(r)$ — концентрація перешкод на одиницю площі циліндричної поверхні радіуса r (м$^{-2}$); $U = U(r)$ — складова швидкості потоку вдовж каналу (м/с).

Тоді, поділивши умовно перетин каналу на три області:

$$D_1 : R_1 \le r \le R_1 + h;\ D_2 : R_1 + h < r < R_2 - h;\ D_3 : R_2 - h \le r \le R_2,$$

де R_1, R_2 — відповідно, внутрішній та зовнішній радіуси кільця, h – висота виступів, в безрозмірній постановці (хвилька — ознака безрозмірності) задача про стабілізований рух рідини в кільцевому каналі з розвинутою поверхнею зводитиметься до пошуку розв'язку диференціальним рівняння з розривною правою частиною (A_1, A_2 — безрозмірні щільності перешкод відповідно на меншій та більшій поверхнях кільцевого каналу, $\tilde{h}$ — безрозмірна товщина шару перешкод, $\tilde{r} = r / R_2$; $r_0 = R_1 / R_2$):

$$\frac{1}{\tilde r}\frac{d}{d\tilde r}\left(\tilde r\frac{d\tilde U}{d\tilde r}\right) = -1 + \begin{cases} \dfrac{A_1\cdot\tilde U}{\tilde r}, & \tilde r\in[r_0,\ r_0+\tilde h]; \\ 0, & \tilde r\in(r_0+\tilde h,\ 1-\tilde h); \\ \dfrac{A_2\cdot\tilde U}{\tilde r}, & \tilde r\in[1-\tilde h,\ 1]; \end{cases} \tag{1}$$

При цьому межовими є умови прилипання:

$$\tilde U(r_0) = \tilde U(1) = 0\,. \tag{2}$$

Умовами ж спряження трьох областей потоку відповідно до фізичного змісту задачі (неперервність швидкості та тертя на межі поділу областей) будуть:

$$\tilde U_1 = \tilde U(r_0+\tilde h-0) = \tilde U(r_0+\tilde h+0),\ \tilde U_2 = \tilde U(1-\tilde h-0) = \tilde U(1-\tilde h+0); \tag{3}$$

$$\tilde\tau_1 = \tilde\tau(r_0+\tilde h-0) = \tilde\tau(r_0+\tilde h+0),\quad \tilde\tau_2 = \tilde\tau(1-\tilde h-0) = \tilde\tau(1-\tilde h+0). \tag{4}$$

Хід розв'язку задачі (1)–(4) пропонується здійснити за наступною схемою:

1) з рівняння (1), враховуючи межові умови для $\tilde r\in(r_0+\tilde h,\ 1-\tilde h)$, знайти $\tilde U(\tilde r) = f(\tilde r,\tilde U_1,\tilde U_2)$;

2) обчислити $\tilde\tau_1$, $\tilde\tau_2$ для $\tilde D_2 : r_0+\tilde h < r < 1-\tilde h$ за формулою

$$\tilde\tau(\tilde r) = \frac{1}{2}\frac{d\tilde U(\tilde r)}{d\tilde r}$$

та результатом п.1;

нехай $\tilde\tau_1 = \phi_1(r_0+\tilde h,\tilde U_1,\tilde U_2)$, $\tilde\tau_2 = \phi_2(1-\tilde h,\tilde U_1,\tilde U_2)$;

3) знайти розв'язки рівняння (1) для областей $\tilde D_1 : r_0 \le r \le r_0+\tilde h$ та $\tilde D_3 : 1-\tilde h \le r \le 1$ з відповідними межовими умовами, тоді:

для $\tilde D_1$: $\tilde U(\tilde r) = f_1(\tilde r,\tilde U_1,\tilde U_2,A1,\tilde h)$, $\tilde D_3$: $\tilde U(\tilde r) = f_2(\tilde r,\tilde U_1,\tilde U_2,A2,\tilde h)$;

4) користуючись вже відомим для $\tilde\tau(\tilde r)$ співвідношенням та виразами, отриманими в п.3, обчислити значення:

$$\tilde\tau_1 = \frac{1}{2}\frac{df_1(r_0+\tilde h,\tilde U_1,\tilde U_2,A1,\tilde h)}{d\tilde r},\ \tilde\tau_2 = \frac{1}{2}\frac{df_2(1-\tilde h,\tilde U_1,\tilde U_2,A1,\tilde h)}{d\tilde r};$$

5) вважаючи $A1$, $A2$, $\tilde h, r_0$ відомими, прирівняти вирази для $\tilde\tau_1$, $\tilde\tau_2$, отримані в п.2 та п. 4 і розв'язати систему рівнянь відносно невідомих $\tilde U_1$, $\tilde U_2$.

Реалізувати представлену схему розв'язку даної задачі можна з використанням сучасних обчислювальних засобів. Будуючи ж безрозмірні профілі швидкості та тертя, ми отримуємо можливість подальшого чисельного дослідження залежності характеристик потоку від параметрів розвинутої поверхні. А в перспективі даний алгоритм може бути використаний при моделюванні турбулентного режиму.

Список літератури

1. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / Под ред. М. О. Штейнберга. — 3-е изд., перераб. и доп. —М.: Машиностроение, 1992. — 672 с.

2. Интенсификация теплообмена. Успехи теплопередачи, 2 / Под ред. проф. А. А. Жукаускаса и проф. Э. К. Калинина. — Вильнюс: Мокслас, 1988. — 188 с.

3. Бердник О. М. Про вплив неоднорідного шару перешкод на стабілізований потік рідини в круглій трубі / О. М. Бердник // Матеріали X міжнародної науково-технічної конференції «АВІА-2011». — К.: НАУ, 2011. — Т.1. — С. 6.72–6.75.

УЧЁТ ПОПЕРЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ РАСЧЁТЕ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ РАЗВЕТВЛЁННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Е. И. Беспалова, Г. П. Урусова

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

metod@inmech.kiev.ua

В современной технике широко распространены конструкции, которые моделируются неоднородными анизотропными многослойными оболочками вращения с разветвлённой формой меридиана (корпуса ракет, элементы паровых и газовых турбин, вращающиеся валы с насаженными дисками и т. д.). В местах разветвления конструкций, где происходит контакт разных по своим свойствам оболочек, возникают значительные локальные напряжения. Для их достоверного описания в данном сообщении использована неклассическая оболочечная модель, учитывающая все виды поперечной деформации — поперечные сдвиги и поперечное обжатие.

Согласно принятой модели перемещения i-го слоя оболочки аппроксимируются по толщине в следующем виде [1, 2]:

$$u_{\gamma}^{i}(s,\theta,\gamma) = u(s,\theta) + \gamma\psi_{s}(s,\theta),$$

$$u_{\theta}^{i}(s,\theta,\gamma) = v(s,\theta) + \gamma\psi_{\theta}(s,\theta),$$

$$u_{\gamma}^{i}(s,\theta,\gamma) = w(s,\theta) + \gamma\psi_{\gamma}(s,\theta)$$

(s,θ,γ — координаты, изменяющиеся по меридиану, в окружном направлении и по толщине оболочки соответственно; u_s, u_θ, u_γ — перемещения точек оболочки в направлениях координатных осей; u, v, w — перемещения точек поверхности $\gamma = 0$; ψ_s, ψ_θ — полные углы поворота первоначально прямолинейного элемента; ψ_γ – поперечная нормальная деформация; $i = \overline{1, N}$, N — количество слоёв).

Выбранная модель математически представлена в неодносвязных областях двумерными краевыми задачам, которые сводятся с помощью рядов Фурье по θ к одномерным задачам 12-го порядка по переменной s. Последующее их решение проводится методом ортогональной прогонки с автоматическим удовлетворением условиям сопряжения в точках разветвления оболочек.

На конкретных примерах показана необходимость учёта поперечного обжатия при определении напряжённо-деформированного состояния разветвлённых конструкций.

Предложенный подход позволяет в рамках двумерной оболочечной модели учесть пространственные эффекты в местах контакта оболочек.

Список литературы

1. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Голуб Г. П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жёсткостью. — К. : Наук. думка, 1987. – 216 с.

2. Elena Bespalova E., Urusova G. Vibration of highly inhomogeneous Shells of revolution under static loading // Journal of Mechanics of Materials and Structures. — 2008. — 3, №7. — P. 1299–1313.

ПРО ВИРОДЖЕННЯ РЕОЛОГІЧНИХ ТІЛ

Є. М. Бицань, Т. Є. Плаксіна
Інститут геофізики НАН України, Київ, Україна
byzan@ukr.net

Коливальні процеси в фізичних середовищах є затухаючими внаслідок непружності останніх. Непружність враховується за допомогою різних реологічних моделей, які включають в розрахункову модель поряд з пружними елементами в'язкі і пластичні. В реології найчастіше застосовують дво- та триелементні реологічні тіла. Розширення спектру часів післядії та часів релаксацій вимагає використовувати реологічні тіла високих порядків. Реологічне тіло з довільним числом елементів утворюється об'єднанням реологічних тіл з меншим числом елементів. Зв'язок між напругою і деформацією записується в узагальненому вигляді таким чином:

$$P\sigma = Q\varepsilon,$$

де P і Q — лінійні диференціальні вирази (ЛДВ) з постійними коефіцієнтами.

Зауважимо, що може статись, що в результаті об'єднання кількох реологічних тіл утворюється реологічне тіло m-го рангу, яке задовольнятиме певному реологічному рівнянню в залежності від його типу і роду, але можуть бути реологічні тіла, які задовольнятимуть подібному реологічному рівнянню, але матимуть меншу кількість реологічних елементів, ніж в побудованому. Таке реологічне тіло назвемо виродженим. Щоб воно було невиродженим потрібно, щоб часи релаксацій і часи післядії реологічних тіл — доданків відрізнялись між собою, а приєднання виконувалися з дотриманням умови балансу

$$\delta_e + \delta_c = 1,$$

де $\delta_e = \left| n_N - n_H \right|$ — різниця між числом пружних і в'язких елементів, а $\delta_c = \left| n_I - n_{-} \right|$ — різниця між кількістю паралельних та послідовних включень.

Реологічним тілам рангу k відповідають чотири різних видів їхніх реологічних рівнянь, які запишуться в узагальненому вигляді таким чином: N_{2k-1}, N_{2k}, H_{2k} і H_{2k+1}, і які поділяють реологічні тіла певного рангу k на два типи — квазіпружні (H_{2k} і H_{2k+1}), які мають адитивну константу (АК) в ЛДВ Q, і квазів'язкі (N_{2k-1} і N_{2k}), які не мають АК в ЛДВ Q, і кожне з яких поділяється на два роди в залежності від того, мають ЛДВ Q та P однаковий порядок — N_{2k-1} і H_{2k} (І рід), чи порядок ЛДВ P на одиницю менше від порядку ЛДВ Q — N_{2k} і H_{2k+1} (ІІ рід). Тут введені такі позначення: N – квазів'язкі, а H – квазіпружні реологічні тіла, k – їхній ранг, показник внизу, який назвемо індексом реологічного тіла, і для невироджених реологічних тіл співпадає з кількість елементів в них, і це можна вважати показником їхньої невиродженості.

НОВАЯ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ ЛОКАЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНЫХ ГЕОМИГРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Т. Ю. Благовещенская, В. М. Булавацкий, А. В. Гладкий
Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, Киев, Украина
dept175@gmail.ru

Проблема повышения степени адекватности классических количественных моделей процессов геомиграции в системах со сложной пространственно-временной структурой, для которых характерны эффекты памяти, пространственной нелокальности и самоорганизации является весьма актуальной для современной геоинформатики и геоэкологии. В связи с этим в настоящее время происходит пересмотр основных положений классической теории переноса в геопористых средах, в частности, значительный прогресс в этом направлении достигнут с использованием формализма интегро-дифференцирования дробного порядка. Поскольку в указанных выше случаях систем со сложной пространственно-временной структурой рассматриваемые математические модели базируются на системах дифференциальных уравнений дробного порядка, то отсюда следует, что моделируемые геомиграционные процессы являются существенно нелокальными во времени и пространстве.

В настоящем сообщении излагается методика построения новой дробно-дифференциальной математической модели для изучения локально-неравновесных во времени изотермических процессов геомиграции в насыщенной солевыми растворами геопористой среде с учетом химического осмоса и ультрафильтрации. При построении математической модели использованы обобщения законов Дарси и Фика для моделирования фильтрационно-консолидационного процесса в геопористом массиве, насыщенном солевым раствором с учетом временной нелокальности, осмоса и ультрафильтрации.

Поставлена соответствующая предложенной модели краевая задача для системы двух дифференциальных уравнений дробного порядка по временной переменной и (с использованием метода конечных интегральных преобразований) получено ее аналитическое решение путем сведения к совокупности двух краевых задач для дробно-дифференциального аналога классического уравнения диффузии.

Предложенная математическая модель и полученные результаты дают возможность учета на аналитическом уровне новых важных факторов, не учитываемых соответствующими классическими математическими моделями и тесно связанных с наличием существенной временной нелокальности процесса геомиграции солевых растворов.

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ДИФУЗІЇ В НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ

С. Г. Блажевський

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

appl-dpt@chnu.edu.ua

Одна із задач моделювання дифузійних процесів в кусково-однорідному обмеженому середовищі з м'якими межами приводить до побудови обмеженого в області $D_2 = \{(t,r) : t \in (0,\infty), r \in I_2 = (-\infty, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3), R_3 < \infty\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} = f_1(t,r), r \in (-\infty, R_1) \\ &\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - B_\alpha[u_2] = f_2(t,r), r \in (R_1, R_2), \gamma_j^2 \geq 0 \\ &\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3 - \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} = f_3(t,r), r \in (R_2, R_3), R_3 < \infty, \end{aligned} \tag{1}$$

за нульовими початковими умовами, крайовими умовами

$$\lim_{r \to -\infty} \frac{\partial^k u_1}{\partial r^k} = 0, k = 0,1, \; L_{22}^3 [u_3(t,r)]\Big|_{r=R_3} = g_R(t), \tag{2}$$

та умовами спряження

$$\left(L_{j1}^k [u_k(t,r)] - L_{j2}^k [u_{k+1}(t,r)]\right)\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}; j,k = 1,2. \tag{3}$$

У системі (1) беруть участь диференціальні оператори Фур'є $L_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2}$ та Ейлера $B_\alpha = r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (2\alpha + 1) r \frac{\partial}{\partial r} + \alpha^2, 2\alpha + 1 > 0.$

У рівностях (2), (3) беруть участь диференціальні оператори

$$L_{jk}^m = \left(\alpha_{jk}^m + \delta_{jk}^m \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jk}^m + \gamma_{jk}^m \frac{\partial}{\partial t}, \; j,k = 1, 2, m = \overline{0,3}.$$

Наявність в крайових умовах та умовах спряження диференціального оператора $\frac{\partial}{\partial t}$ означає, що межа середовища м'яка по відношенню до відбиття хвиль, які породжуються в дифузійному процесі.

Інтегральне зображення аналітичного розв'язку крайової задачі (1)–(3) побудовано методом скінченного гібридного інтегрального перетворення типу Фур'є — Ейлера — Фур'є із спектральним параметром на обмеженій справа декартовій півосі.

ПРО РЕДУКЦІЮ РІВНЯННЯ ЕЙКОНАЛА

А. С. Богатирчук, І. І. Юрик
Національний університет харчових технологій, Київ, Україна
an1952@ukr.net

Рівняння ейконала

$$u_t^2 - u_{x_1}^2 - u_{x_2}^2 - u_{x_3}^2 = 1$$

інваріантно відносно конформної групи $C(1,4)$ простору Мінковського $\mathbb{R}_{1,4}$ з метрикою $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$, де $x_4 = u$. Відображення $x_i = x_i(y_1, ..., y_4)$, $i = 0, 1, ..., 4$ області $U \subset \mathbb{R}_{1,4}$ в U називається конформним, якщо

$$\frac{\partial x_k}{\partial y_k} g^{kl} \frac{\partial x_l}{\partial y_\beta} = \lambda(x),$$

де $\lambda(x) \neq 0$, $x = x(x_1, ..., x_4)$, $g_{0,0} = -g_{1,1} = ... = -g_{4,4} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$, якщо $\alpha \neq \beta$.

Як відомо, одним з ефективних методів побудови розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь математичної фізики є метод симетрійної редукції, що дає можливість зводити диференціальне рівняння з частинними похідними до звичайного диференціального рівняння. Застосування цього методу зв'язано з задачею опису зв'язних підгруп групи інваріантності або підалгебр відповідної алгебри Лі. Нами запропонований метод для класифікації підалгебр алгебри інваріантності $AC(1,4)$ рівняння ейконала, базис якої породжують геперотори псевдоповоротів $J_{\alpha\beta}$, трансляцій P_α, нелінійних конформних перетворень K_α і дилатацій D, $(\alpha, \beta = 0, 1, ..., 4)$ з точністю до $C(1,4)$-еквівалентності. Дві підалгебри $A_1, A_2 \subset AC(1,4)$ називаються еквівалентними, якщо для деякого $g \in C(1,4)$ підалгебри gA_1g^{-1} і A_2 мають одні і ті ж інваріанти. Класифікація всіх підалгебр проводилась по рангам. Дві максимальні підалгебри A_1 і A_2 даного рангу r еквівалентні тоді і тільки тоді, коли A_1 і A_2 $C(1,4)$-спряжені. В класі всіх підалгебр алгебри $AC(1,4)$ які еквівалентні між собою, існує з точністю до $C(1,4)$-спряженості тільки одна максимальна підалгебра. Запропонований метод, за допомогою якого, підалгебри такого роду повністю описані. Ідея методу полягає в розкладі простору трансляцій в ортогональну суму підпросторів і на розбитті множини всіх підалгебр алгебри $AC(1,4)$ на класи, кожен з яких характеризується ізотропним рангом.

Використовуючи підалгебри рангу три алгебри $AC(1,4)$ побудовані анзаци, які редукують рівняння ейконала до звичайного диференціального рівняння. В результаті побудовані широкі класи точних розв'язків.

ЧИСЛОВИЙ МЕТОД КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ ІДЕНТИФІКАЦІЇ КОЕФІЦІЄНТА ПРОВІДНОСТІ

А. Я. Бомба, Л. Л. Крока

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне, Україна,

abomba@ukr.net , l_kroka@ukr.net

Розглядається задача математичного моделювання стаціонарних процесів, що описуються еліптичними диференціальними рівняннями дивергентного типу другого порядку (наприклад, математичні моделі, виведені на основі законів Ома, Дарсі) за умови ідентифікації коефіцієнта провідності.

Нехай G — однозв'язна криволінійна область в $\mathbb{R}^2$, обмежена кусково-гладкою кривою ∂G . Необхідно визначити функцію квазіпотенціалу $\varphi(x,y)$ за умови ідентифікації коефіцієнта провідності $\kappa(x,y)$, для яких відома сукупність прямих задач:

$$\operatorname{div}\left(\kappa\cdot\operatorname{grad}\varphi\right)=0;$$

$$\varphi(M)=\varphi_*\,,\ \ \int\limits_{AM}\kappa\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial n}dl=\tilde{\psi}(M),\ M\in AB\,;\ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{AD}=0,$$

$$\varphi(P)=\tilde{\varphi}(P),\ \ P\in AD\,;\ \varphi(T)=\varphi^*\,,\ \ T\in CD\,;$$

$$\int\limits_{AN}\kappa_0\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial n}dl=Q,\ N\in BC\,;\ \partial G=\{(x,y):f\left(x,y\right)=0\},$$

де $\vec{n}$ — вектор нормалі до відповідної кривої; Q — потік векторного поля через G ; $\tilde{\varphi}(x,y)$, $\tilde{\psi}(x,y)$ — визначені неперервні обмежені функції ($\varphi_*\le\tilde{\varphi}(x,y)\le\varphi^*$, $0\le\tilde{\psi}(x,y)\le Q$); $\partial G=AB\cup BC\cup CD\cup DA$ ($\forall A,B,C,D\in\partial G$).

Запропоновано підхід до розв'язання поставленої задачі, побудований на основі числових методів комплексного аналізу (див. напр. [1, 2]). Відповідний алгоритм реалізовано шляхом поетапної параметризації (почергового фіксування) параметрів «квазіконформної подібності в малому», коефіцієнтів провідності, граничних та внутрішніх вузлів сітки [1, 2] з використанням ідей методу блочної ітерації (див., напр., [3]). Проведено комп'ютерний експеримент щодо ідентифікації коефіцієнта електричної провідності на базі даних електроімедансної томографії.

Список літератури

1. Бомба А. Я.. Методи комплексного аналізу : Монографія / А. Я. Бомба, С. С. Каштан, Д. О. Пригорницький, С. В. Ярощак. — Рівне : НУВГП, 2013. — 415 с.

2. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький. — К. : Наукова думка, 2007. — 308 с.

3. Ортега Д. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Д. Ортега, В. Рейнболдт. — М. : Мир, 1975. — 558 с.

НАГРЕВАНИЕ ТРУБКИ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ КОЄФФИЦИЕНТЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В. О. Бородін

Національний університет харчових технологій, Київ, Україна

matemat@nuft.edu.ua

Варка каши это теплообменный процесс, при котором происходит и массообмен — происходит экстрагирование, сорбция, растворение. Часть растворимых веществ (белки, углеводы, минеральные соли, экстрактивные и красящие вещества, витамины) переходит в жидкость. Весь процесс варки можно разбить на два этапа. Первый этап состоит в нагревании жидкости до температуры кипения, второй — в нагревании продукта до требуемой температуры. На первом этапе нагревание жидкости происходит благодаря конвекции и теплопроводности в жидкости, при котором вследствие увеличения количества растворимых веществ состав жидкости меняется. Второй этап — перенос теплоты от поверхности продукта к его центральной части осуществляется теплопроводностью по капиллярам продукта, заполненного жидкостью. Состав жидкости в капиллярах меняется со временем. Поэтому представляет интерес изучение нагревания заполненной жидкостью трубки с теплоизолирующей боковой поверхностью, у которой коэффициент теплопроводности жидкости меняется со временем.

Процесс распространения тепла в жидкости в трубке, расположенной на оси Ox, $0 \le x \le l$, описывается функцией $u = u(x;t)$, которая определяет температуру жидкости в сечении x в момент времени t. Тепловые потоки, характеризуемые теплопроводностью, определяются законом Фурье: количество тепла протекающее через сечение x за промежуток времени $(t; t + \triangle t)$ равно

$$\triangle Q = -k(t)\frac{\partial u}{\partial x} \cdot S \cdot \triangle t,$$

где $k(t)$ — коэффициент теплопроводности, зависящий от состава жидкости, и который будет меняться в связи с изменением со временем состава жидкости, S — площадь сечения трубки.

Количество тепла поступившее на элемент внутренности трубки $(x; x + \triangle x)$ за время $\triangle t$ равно

$$\triangle Q = k(t)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot S \cdot \triangle t\bigg|_{x+\triangle x} - k(t)\frac{\partial u}{\partial x}\cdot S\cdot\triangle t\bigg|_{x} \approx k(t)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{x+\theta\cdot\triangle x}\cdot S\cdot\triangle t, \qquad (0 \le \theta \le 1).$$

Это тепло идёт на нагревание элемента внутренности трубки $(x; x + \triangle x)$ на величину $\triangle u$: $\triangle Q = c \cdot \rho \cdot S \cdot \triangle u$, где c — теплоёмкость жидкости, ρ — плотность жидкости. Приравняем количество тепла

$$k(t)\cdot\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x+\theta\cdot\Delta x}\cdot S\cdot\Delta t=c\cdot\rho\cdot S\cdot\Delta u.$$

При переходе к пределу $\Delta t\to 0$, $\Delta x\to 0$ получим $k(t)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=c\cdot\rho\cdot\frac{\partial u}{\partial t}$.

Обозначим $a^2(t)=\frac{k(t)}{c\cdot\rho}$, получим уравнение теплопроводности с коэффициентом теплопроводности зависящим от времени:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},0\le x\le l,0\le t<\infty. \qquad (1)$$

Второй этап нагревания при варке каши (подвод тепла по капиллярам) сводится к краевой задачи для уравнения теплопроводности. Рассмотрим одну из краевых задач. Найти решение уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0\le x\le l,\ 0\le t<\infty, \qquad (2)$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x;0)=\varphi(x),\ 0\le x\le l, \qquad (3)$$

$$u(0;t)=T_0,\ u(l;t)=T_1. \qquad (4)$$

Сделаем замену

$$U(x;t)=u(x;t)-\left(T_0+\frac{T_1-T_0}{l}x\right),\ \varphi_1(x)=\varphi(x)-\left(T_0+\frac{T_1-T_0}{l}x\right).$$

Функция $U(x;t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2(t)\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad (5)$$

и условиям

$$U(x;0)=\varphi_1(x),\ 0\le x\le l \qquad (6)$$

$$U(0;t)=t,U(l;t)=0. \qquad (7)$$

Краевую задачу (5), (6), (7) решим методом разделения переменных.

Решение уравнения

$$U_t'=a^2(t)\cdot U_{x^2}''$$

удовлетворяющее условиям

$$U(0;t)=0,\ U(l;t)=0$$

будем искать в виде $U\left(x;t\right)=X\left(x\right)\cdot T\left(t\right)$, где $X\left(x\right)$ — функция только переменной x, $T\left(t\right)$— функция только t. Подставим функцию в уравнение получим

$$\frac{1}{a^2\left(t\right)}\cdot\frac{T'}{T}=\frac{X''}{X}=-\lambda^2,$$

где λ — постоянная, поскольку первая часть равенства зависит только от t, а вторая только от x. Граничные условия дают $X\left(0\right)=0,\ X\left(l\right)=0$.

Для нахождения функции $X\left(x\right)$ получили краевую задачу

$$X''+\lambda^2X=0,\ X\left(0\right)=0,\ X\left(l\right)=0.$$

Нетривиальное решение возможно при $\lambda_n=\dfrac{\pi n}{l}$, $n=1,2,...,$ которым соответствуют собственные функции $X_n\left(x\right)=\sin\dfrac{\pi n}{l}x.$

Функции $T_n\left(t\right)$ будут находиться из уравнения

$$\frac{1}{a^2\left(t\right)}\cdot\frac{T_n'}{T_n}=-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2.$$

Решим уравнение разделением переменных,

$$\frac{dT_n}{T_n}=-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\cdot a^2\left(t\right)\cdot dt,\ T_n=C_ne^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2A\left(t\right)},$$

где $A\left(t\right)=\int\limits_0^t a^2\left(t\right)dt, C_n=const.$

Каждая из функций

$$U_n\left(x;t\right)=C_ne^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2t}\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x$$

удовлетворяет уравнению и нулевым краевым условиям. Функцию, которая дополнительно удовлетворяет начальному условию (6) ищем в виде

$$U_n\left(x;t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2A\left(t\right)}\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Коэффициент C_n находим из условия (6)

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{\pi nx}{l}=\varphi_1\left(x\right).$$

Следовательно

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_1(t)\sin\frac{\pi n}{l}t\,dt,\; n = 1, 2, \ldots.$$

Решение краевой задачи (5)–(7) имеет вид

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l \varphi_1(t)\sin\frac{\pi n}{l}t\,dt \cdot e^{\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 A(t)} \cdot \sin\frac{\pi n x}{l}\;.$$

Выполняя линейную замену найдём решение $u(x,t)$ краевой задачи (2)–(4).

Список литературы

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической функции / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 2004. — 798 с.

2. Поперечний А.М. Процеси та апарати харчових виробництв / А. М. Поперечний. — К., 2007. — 380 с.

ПРО ЗАДАЧУ З КРАЙОВИМИ ПЕРІОДИЧНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ЗАПІЗНЕННЯМ

Ю. Є. Бохонов

Інститут прикладного системного аналізу НАН та Міносвіти України, Київ, Україна

bochonoff@yandex.ru

Знаходження періодичних розв'язків диференціального рівняння з запізненням

$$\ddot{x} = f(t, x(t), x(t-\delta), \dot{x}(t), \dot{x}(t-\delta)) \qquad (1)$$

еквівалентне розв'язанню крайової задачі для нього:

$$x(0) = x(T), \; \dot{x}(0) = \dot{x}(T) \qquad (2)$$

Функція $f(t,x,u,y,v)$ неперервна і обмежена, $\left|f(t,x,u,y,v)\right| \le M$, на $D = (-\infty,\infty)\times[a,b]\times[a,b]\times[c,d]\times[c,d]$, періодична по t з періодом T і задовольняє умовам

$$\begin{gathered}\left|f(t,x_1,u_1,y_1,v_1) - f(t,x_2,u_2,y_2,v_2)\right| \le \\ \le K_0\left|x_1-x_2\right| + \tilde{K}_0\left|u_1-u_2\right| + K_1\left|y_1-y_2\right| + \tilde{K}_1\left|v_1-v_2\right|\end{gathered} \qquad (3)$$

Вказані константи задовольняють умовам

$$q = \frac{T}{2}\sqrt{\left(\frac{T^2}{243}+\frac{1}{16}\right)\left(K_0^2+K_1^2\right)} < 1 \; . \qquad (4)$$

$$M \le \min\left(\frac{18\sqrt{3}}{T^2}(b-a), \; \frac{4}{T}(c-d)\right) \qquad (5)$$

Теорема. При виконанні умов (3)–(5) періодичний з періодом T розв'язок $x = \varphi(t, x_0)$ задачі (1)–(2) існує тоді і тільки тоді, коли існує значення x_0, яке задовольняє рівнянню

$$\int_0^T f(\xi, \varphi(\xi, x_0), \dot{\varphi}(\xi, x_0))\, d\xi = 0,$$

Список літератури

1. Бохонов Ю. Є. Про один підхід до знаходження періодичних розв'язків нелінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2011. — №3.

ПОЧАТКОВО-КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ІЗ ЗАЛЕЖНИМИ ВІД ЧАСУ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Т. Ю. Бохонова
Національний авіаційний університет України, Київ, Україна
bochonoff@yandex.ru

Розглядається еволюційне рівняння у банаховому просторі X з оператором A, визначеним на залежній від часу області $D\left(A\right)$, щільній в X :

$$\begin{aligned} &\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t), \\ &\partial_1 u(t) + \partial_0 u(t) = g(t), \\ &u(0) = u_0 \end{aligned} \tag{1}$$

Відома функція $f(t)$ та невідома $u(t)$ набувають значення в X. Розв'язок (1) шукають у вигляді

$$u(t) = w(t) + v(t),$$

де

$$v(t) = e^{-A^{(1)}t}u_0 + \int_0^t e^{-A^{(1)}(t-\tau)} f(\tau)d\tau$$

Запроваджують допоміжну функція $W(\lambda, t)$ як розв'язок задачі

$$\begin{aligned} &\frac{dW(\lambda,t)}{dt} + A\,W(\lambda,t) = 0, \\ &\partial_1 W(\lambda,t) = -\partial_0(\lambda)\,u(\lambda) + g(\lambda), \\ &W(\lambda,0) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

Теорема. Розв'язок $u(t)$ задачі (1) із залежними від t граничними умовами може бути отриманий з використанням розв'язку задачі (2) з незалежними від t граничними умовами за допомогою інтеграла Дюгамеля у вигляді

$$w(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t W(\lambda, t-\lambda)d\lambda = \int_0^t \frac{d}{dt}W(\lambda, t-\lambda)d\lambda$$

Остаточно, розв'язок задачі (1) має вигляд

$$u(t) = e^{-A^{(1)}t}u_0 + \int_0^t e^{-A^{(1)}(t-\tau)} f(\tau)d\tau + \int_0^t \frac{d}{dt}W(\lambda, t-\lambda)d\lambda$$

Список літератури

1. V. L. Makarov, L. P.Gavrilyuk, V. B. Vasilyk, T. Yu. Bokhonova. Exponentially convergent Duhamel's like algorithms for differential equations with operator coefficient with evolution domains in Banach spaces. SIAM Journal on Applied Mathematics. Math. Comp., 76, 2007, pp. 1895–1923.

ІСНУВАННЯ АНАЛІТИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ СИНГУЛЯРНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ БРІО ТА БУКЕ

Д. В. Буряк, Н. В. Крапива
Одеський національний політехнічний університет, Одеса, Україна
dv_buryak@ukr.net, scherbinskaya@gmail.com

Розглядається сингулярне при $z \to 0$ диференціально-операторне рівняння типу Бріо та Буке

$$z\,w' = \left[a + a_0\left(z\right)\right]w - \left[b + b_0\left(z\right)\right]z^{L+n+1} + f\left(\, z,\, z^L w,\, V_n\left(z,w\right)\,\right) \qquad (1)$$

та «скорочене», відповідно до нього, рівняння

$$z\,w' = aw - bz^{L+n+1}, \qquad (2)$$

де $0 \le n \in \mathbb{Z}; a,\, b \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} a \ne 0,\, b \ne 0; L \in \mathbb{R}_+ : \left(L > \operatorname{Re} a\right) \vee \left(L < \operatorname{Re} a - \left(n+1\right)\right);$ $z \in \bar{D}$; область $D = \left\{0 < \left|\, z \,\right| < \Delta_0, \arg z \in \left(T_1, T_2\right); \Delta_0, T_1, T_2 = \mathrm{const}, \Delta_0 \approx 0\right\}$ розглядається на поверхні Рімана логарифмічної функції; $a_0\left(z\right),\ b_0\left(z\right)$ — аналітичні функції в області D, $a_0\left(z\right), b_0\left(z\right) \in \mathbb{C}^n(\bar{D})$, $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\in D}} a_0^{(j)}\left(z\right) = \lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\in D}} b_0^{(j)}\left(z\right) = 0,\, j = \overline{0,n}$; $f\left(z,\, z^L w,\, V_n\left(z, w\right)\right)$ — функціональний оператор, що визначений на класі функцій, які асимптотично дорівнюють при $z \to 0$ відповідним розв'язкам рівняння (2); V_n – є відображення, взагалі кажучи, нелінійне, яке кожній функції $\tilde{w} \in B$ (B — деякий клас аналітичних в D та n разів неперервно-диференційованих у $\bar{D}$ функцій) ставить у відповідність деяку однозначну функцію від z та w.

Зауважимо, що для рівняння (1), при зроблених припущеннях, принциповим є те, що функції $a_0\left(z\right),\ b_0\left(z\right)$ та оператор $f\left(z,\, z^L w,\, V_n\left(z, w\right)\right)$ можуть бути взагалі не визначені по z в повному околі точки $z = 0$ або можуть мати особливості в цій точці (точка $z = 0$ може бути точкою розгалуження и тому функції $a_0\left(z\right),\ b_0\left(z\right)$ не розкладаються в околі точки $z = 0$ в степеневий ряд).

Одержані достатні умови на функціональний оператор, при яких існують аналітичні в D та n разів неперервно-диференційовані в $\bar{D}$ розв'язки рівняння (1), які асимптотично дорівнюють при $z \to 0$ розв'язкам «скороченого» рівняння (2) та задовольняють оцінкам: $\left|w^{(j)}\left(z\right)\right| \le \delta \left|\, z \,\right|^{L+n+1-j}, j = \overline{0,\, n+1}, 0 < \delta = \mathrm{const}$. Крим того, доведено, що при $L \in \mathbb{R}_+$: $L > \operatorname{Re} a$ існує хоча б один такий розв'язок, при $L \in \mathbb{R}_+ : L < \operatorname{Re} a - \left(n+1\right)$ існує, принаймні, однопараметричне сімейство таких розв'язків.

БАГАТОТОЧКОВА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ ВИРОДЖЕНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

М. Б. Віра

Ніжинський державний університет ім. Миколи Гоголя, Ніжин, Україна

VyraMaryna@mail.ru

Досліджується можливість побудови асимптотики розв'язку крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon),$$

$$\sum_{i=1}^{p} M_i x(t_i,\varepsilon) = d(\varepsilon),$$

в якій $x(t,\varepsilon)$ — шуканий n-вимірний вектор, $t \in [t_1;t_p]$; $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ — малий дійсний параметр; $A(t,\varepsilon)$, $B(t)$ — квадратні матриці n-го порядку з дійсними або комплекснозначними елементами; $d(\varepsilon), f(t,\varepsilon)$ — відповідно l- та n-вимірний вектори-стовпці; $M_i, i=\overline{1,p}$ – сталі матриці розмірністю $l\times n$; матриця $B(t)$ тотожно вироджена на відрізку $[t_1;t_p]$.

Виходячи з теорії асимптотичного інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженою матрицею при похідній, розробленої у працях А. М. Самойленка, М. І. Шкіля, В. П. Яковця [1], запропоновано метод побудови асимптотики розв'язків даної крайової задачі.

Розроблено алгоритм побудови асимптотики відповідних розв'язків у випадках простого і кратного спектра граничної в'язки матриць $A(t,0)-\lambda B(t)$. Крім того, розглянуто критичний випадок, коли гранична в'язка має нульове власне значення. У кожному із розглянутих випадків знайдено умови існування і єдиності розв'язку даної крайової задачі, а також умови, за виконання яких вона має багатопараметричну сім'ю розв'язків.

Виведено асимптотичні оцінки для побудованих розв'язків; розроблено алгоритм визначення коефіцієнтів відповідних асимптотичних розвинень у явному вигляді.

Список літератури

1. Самойленко А. М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець. — К. : Вища школа, 2000. — 294 с.

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ q-АНАЛІТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Н. О. Вірченко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

Багато якісних та апаратних властивостей аналітичних функцій комплексної змінної властиві також функціям, що визначаються еліптичними системами загальнішого вигляду, ніж система Коші — Рімана. Апарат узагальнених аналітичних функцій знайшов широке застосування у задачах теорії пружності, у гідромеханіці, теорії фільтрації та ін.

Вперше Пікар, а пізніше Бельтрамі вказали на аналогію між аналітичними функціями комплексної змінної і розв'язками еліптичних систем рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} a_1 u_x + a_2 u_y + a_3 v_x + a_4 v_y = 0, \\ b_1 u_x + b_2 u_y + b_3 v_x + b_4 v_y = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де $a_i b_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ — задані функції від x і y.

Пізніше Л. Берс, А. Гельбарт, М. А. Лаврентьєв, І. М. Векуа, Г. М. Положій, Б. В. Шабат та ін. вивчали певні класи узагальнених аналітичних функцій і зв'язані з ними еліптичними системами.

Г. М. Положій запровадив (p, q)-аналітичні функції, які справджують системі рівнянь [1]:

$$pu_x + qu_y - v_y = 0, \quad -qu_x + pu_y + v_x = 0, \tag{2}$$

де p і q — деякі задані функції змінних x, y, $p(x, y) > 0$.

p-аналітичні функції (у (2) $q = 0$) добре вивчені багатьма авторами.

Розглянемо q-аналітичні функції, які справджують системі рівнянь:

$$u_x = \frac{1}{q} v_x,$$

$$u_y = \frac{1}{q} v_y, \quad q(x, y) > 0. \tag{3}$$

Нехай $q = x^l$, $l = const > 0$. Справедлива

Теорема. Якщо в області D задана аналітична функція комплексної змінної $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, має на нескінченності нуль l-го порядку, тоді функція $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, визначена рівність:

$$\tilde{f}(z) = (-1)^m \int\limits_x^\infty [v(t, y)x^{1-l} - itx^l(u(t, y))](t^2 - x^2)^{\frac{l}{2}-1} dt, \tag{4}$$

буде x^l-аналітичною в області D, має нуль на нескінченності, причому $\tilde{u}(x, y)$ на нескінченності має нуль вище l-го порядку.

D — область, що лежить у правій півплощині $z = x + iy$, обмежена кривою, монотонною по y, що проходить через нескінченно віддалену точку.

Список літератури

1. Положий Г. Н. Теория и применение p-аналитических и (p, q)-аналитических функций / Г. Н. Положий. — К.: Наукова думка, 1973. — 424 с.

АПРОКСИМАЦІЙНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

О. О. Власій, Р. М. Тацій

Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника, Івано-Франківськ,

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, Львів, Україна

olesyav@ukr.net

Математичне моделювання фізичних процесів, які відбуваються у системах дискретно-неперервної природи [1], приводить до узагальнених рівнянь виду

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\left(a_{ij}y^{(n-i)}\right)=\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{m-r}f_r^{(r)}, \qquad (1)$$

де $a_{00}^{-1}(x)$ — вимірна і обмежена на $[a;b]\subset\mathbb{R}$ функція, $a_{ij}(x)\in L_2[a;b]$ при $i\cdot j=0, a_{ij}(x)=b_{ij}{}'(x)$ при $i\cdot j\neq 0$, $b_{ij}(x)$, $f_r(x)\in BV^{+}[a;b]$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$, $r=\overline{0,m-1}, BV^{+}[a;b]$ — простір неперервних справа функцій обмеженої на $[a;b]$ варіації.

Рівняння (1) розглядається разом з початковими умовами

$$y^{[i]}(a)=\hat{y}_0^{[i]},\ \hat{y}_0^{[i]}\in\mathbb{R},\ i=\overline{0,q-1},\ q=n+m, \qquad (2)$$

де $y^{[i]}(a)$ — значення квазіпохідних [2] $y^{[i]}(x)$ в точці $x=a$.

Потреби практики викликають підвищений інтерес до розробки методів знаходження наближених розв'язків рівнянь такого типу. Розглядається рівняння

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\left(a_{ij}^{\nu}y_{\nu}^{(n-i)}\right)^{(m-j)}=\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{m-r}\left(f_r^{\nu}\right)^{(r)}, \qquad (3)$$

де коефіцієнти $a_{ij}^{\nu}(x)$ при $i\cdot j=0$ отримані внаслідок застосування L-апроксимації, а $a_{ij}^{\nu}(x)$при $i\cdot j\neq 0$ та $f_r^{\nu}(x)$ — внаслідок застосування D-апроксимації [2] до відповідних коефіцієнтів рівняння (1), $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$, $r=\overline{0,m-1}$.

Встановлено, що розв'язок $y_{\nu}(x)$ рівняння (3), який задовольняє початкову умову $y_{\nu}^{[i]}(a)=\hat{y}_0^{[i]}$, $i=\overline{0,q-1}$, разом зі своїми квазіпохідними $y_{\nu}^{[i]}(x)$, $i=\overline{0,q-1}$, рівномірно на $\left[a;b\right]$ збігається до розв'язку задачі (1), (2) та його квазіпохідних відповідно.

Список літератури

1. Корнеев С. А. Техническая теория стержней. Применеие обобщенных функций: уч. пос. / С. А. Корнеев. — Омск: Изд-во ОмГТУ, 2011. — 84 с.

2. Узагальнені квазідиференціальні рівняння / Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, В. В. Мазуренко, О. О. Власій. — Дрогобич: Коло, 2011. — 301 с.

ЗНАХОДЖЕННЯ МІСЦЕПОЛОЖЕННЯ ДЖЕРЕЛА ЗАБРУДНЕННЯ ДЛЯ ДВОВИМІРНОЇ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ КОНВЕКТИВНОГО МАСОПЕРЕНОСУ ДО СИСТЕМИ ГОРИЗОНТАЛЬНИХ ДРЕН

А. П. Власюк, О. М. Багнюк

Міжнародний економіко-гуманітарний університет
ім. акад. Степана Дем'янчука, Рівне, Україна
A.P.Vlasyuk.rv@gmail.com, O.Bagnyuk.@gmail.com

Розглядається задача конвективно-дифузійного перенесення забруднень в деякому однорідному ґрунтовому середовищі при фільтрації до системи горизонтально розміщених дрен та наявності вільної поверхні ґрунтових вод BC від деякого точкового джерела потужності Q, розміщеного в точці $M\left(x_0, y_0\right)$. Фрагмент розглядуваної області у вигляді криволінійного чотирикутника $ABCD$ представлений на (рис.1).

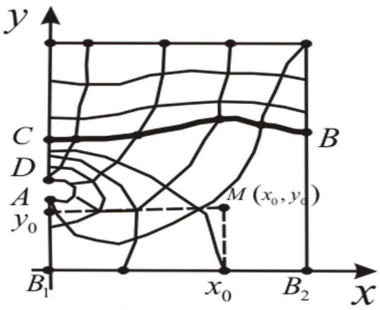


Рис.1. *Розміщення джерела забруднення в криволінійному-чотирикутнику*

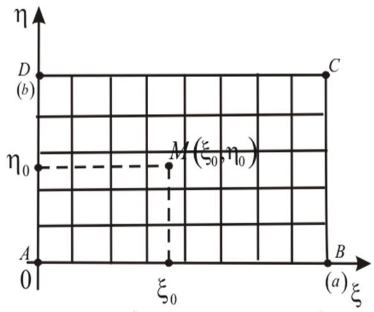


Рис.2. *Образ джерела забруднення в параметричному прямокутнику*

Потрібно при заданих вхідних даних $Q > 0, D > 0, \gamma > 0$ та значеннях концентрації, заміряних в заданих точках $M_i\left(x_i, y_i\right)$: $\bar{C}_i = c\left(x_i, y_i, t_k\right)$, $i = \overline{1, N}, i = \overline{1, K}$, знайти координати $\left(x_0, y_0\right)$ точки M місцеположення джерела забруднень в заданій області, концентрація $c\left(x, y, x_0, y_0, t\right)$ від якого визначається із розв'язку наступної крайової задачі:

$$D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right) - V_x \frac{\partial c}{\partial x} - V_y \frac{\partial c}{\partial y} - \gamma c - \sigma \frac{\partial c}{\partial t} = -Q\delta\left(x - x_0\right)\delta\left(y - y_0\right)\delta\left(t - t_0\right), \quad (1)$$

$$c\left(x, y, x_0, y_0, t\right)\Big|_{\Gamma} = 0, \qquad c\left(x, y, x_0, y_0, 0\right) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$h\Big|_{AD} = H_1, \; h\Big|_{CD} = H_2, \; \frac{\partial h}{\partial n}\Big|_{AB \cup CD} = 0, \quad (4)$$

де h — п'єзометричний напір, V_x, V_y — компоненти швидкості фільтрації.

Для розв'язання задачі (1)–(4) використано числове конформне відображення криволінійного чотирикутника з чотирма відміченими на його контурі точками A, B, C, D, які при відображенні переходять у вершини прямокутника, на параметричний прямокутник в області комплексного потенціалу $\left(\xi,\eta\right)$ з сторонами a і b, що здійснюється за допомогою пари спряжених гармонічних функцій $x = x\left(\xi,\eta\right)$, $y = y\left(\xi,\eta\right)$ [1].

У результаті застосування конформних відображень до (1), (2), отримаємо

$$\frac{D}{J}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial\eta^2}\right)-\frac{V_x}{J}\frac{\partial c}{\partial\xi}-\frac{V_y}{J}\frac{\partial c}{\partial\eta}-\lambda c-\sigma\frac{\partial c}{\partial t}=-Q\delta\left(\xi-\xi_0\right)\delta\left(\eta-\eta_0\right)\delta\left(t-t_0\right)$$

$$c\left(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0,t\right)\big|_{\Gamma}=0,\; c\left(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0,0\right)=0,$$

де $J = J\left(\xi,\eta\right)$ — якобіан конформного відображення.

Функція Гріна цієї задачі, після усереднення якобіана в прямокутнику, на основі [2] представляється як:

$$c\left(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0,t\right)=$$

$$=\exp\left[\frac{V_x}{2D}\left(\xi-\xi_0\right)-\frac{V_y}{2D}\left(\eta-\eta_0\right)-\left(\frac{V_x^2+V_y^2}{4D\sigma}+\frac{\gamma}{\sigma}\right)\left(t-t_0\right)\right]U\left(\xi,\eta,t\right),$$

де

$$U\left(\xi,\eta,t\right)=\frac{4}{ab}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}F\left(m,n\right)\exp\left[-Dt\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)\right]\sin\frac{n\pi\xi}{a}\sin\frac{m\pi\eta}{b},$$

$$F\left(m,n\right)=Q\sin\frac{n\pi\xi_0}{a}\sin\frac{m\pi\eta_0}{b}\,D'=\frac{D}{\sigma\overline{J}\left(\xi_*,\eta_*\right)},$$

$\overline{J}\left(\xi_*,\eta_*\right)$ — усереднене значення якобіана в параметричному прямокутнику.

Отримано числові розв'язки даної задачі трьома алгоритмами (методом функції Гріна, інтегральних рівнянь, які зводяться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, та методом спряжених рівнянь). Розроблені алгоритми отримання числових розрахунків програмно реалізовані з використанням сучасних технологій програмування, на основі чого проведені чисельні експерименти та здійснено їх аналіз.

Список літератури

1. Власюк А. П. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двух- и трехсвязных областей / А. П. Власюк, В. Г. Михальчук // (Препр. №2). – К.,1991. — 56 с.

2. Снеддон И. Преобразования Фурье. — М.: ИЛ., 1955. — 668 с.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗМІНИ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ҐРУНТОВОГО МАСИВУ ПРИ НАГНІТАННІ В НЬОГО В'ЯЖУЧОГО РОЗЧИНУ З УРАХУВАННЯМ МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ КОМБІНОВАНИМ МЕТОДОМ РАДІАЛЬНИХ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ ТА ЧИСЕЛЬНИХ КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

А. П. Власюк, Т .А. Дроздовський

Міжнародний економіко-гуманітарний університет ім. акад. Степана Дем'янчука, Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна

A.P.Vlasyuk.rv@gmail.com , taras.drozdovskyi@gmail.com

Розглядається задача математичного та комп'ютерного моделювання зміни напружено-деформованого стану (НДС) ґрунтової основи гідротехнічної споруди (ГТС) в процесі нагнітання в неї під тиском в'яжучого розчину та з урахуванням процесу фільтраційного перенесення солей (рис. 1). Межа фронту нагнітання γ характеризується в момент часу t кривою $\gamma(t)$, яка розділяє ґрунтову основу на дві підобласті G_1 (область нагнітання) та G_2. Ґрунтове середовища області G_1 характеризується сталими значеннями параметрів Ламе λ_1, μ_1, а G_2 — $\lambda_2(c), \mu_2(c)$ залежними від концентрації солей c. Потрібно розрахувати зміну напружено-деформованого стану (НДС) ґрунтового масиву в областях G_1 і G_2.

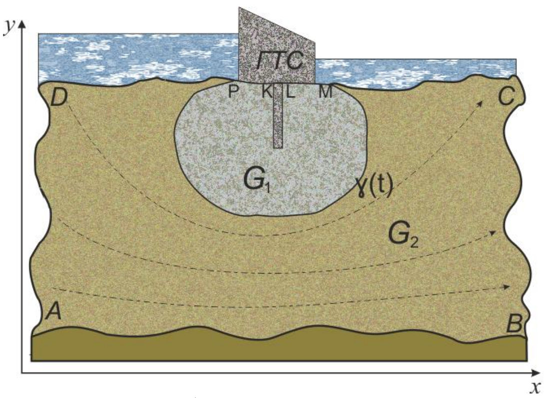


Рис. 1. Ґрунтова основа ГТС

Математична модель задачі в загальноприйнятих позначеннях описується наступною крайовою задачею [3]:

$$\mu\Delta U+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)+2\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right]=X_i, \quad (1)$$

$$\mu\Delta V+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\left[\frac{\partial\lambda}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)+2\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial y}+\frac{\partial\mu}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right]=Y_i, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}\left(k(x,y,m)\cdot\operatorname{grad}\, h\right)=0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}\left(D(c)\cdot\operatorname{grad} c\right)-\mathrm{v}(c)\cdot\operatorname{grad} c-\gamma_1\cdot(c-C_m)=m\frac{\partial c}{\partial t}, \quad (4)$$

при наступних крайових умовах

$$c(x,y,0)=C_0(x,y),\ \left.\frac{\partial c}{\partial n}\right|_{AB\cup\gamma(t)}=0,\ \left.c\right|_{ADP\cup BCM}=l_c(x,y,t),$$

$$\left.\frac{\partial h}{\partial n}\right|_{PK\cup LM\cup AB}=0, \quad (5)$$

$$h\big|_{KL} = H_{\max},\ h\big|_{\gamma(t)} = -y,\ h\big|_{ADP\cup BCM} = H_1(x,y,t),$$

$$\frac{\partial\gamma(t)}{\partial t} = \frac{k}{m}\left(\operatorname{grad} h, \vec{n}\right)\vec{n}, \tag{6}$$

$$U\big|_{AB} = V\big|_{AB} = 0,\ \sigma_n\big|_{\Gamma} = \tau_s\big|_{\Gamma} = 0,\ [U]\big|_{\gamma(t)} = [V]\big|_{\gamma(t)} = 0,$$

$$[\sigma_n]\big|_{\gamma(t)} = [\tau_s]\big|_{\gamma(t)} = 0. \tag{7}$$

Тут: $\mathbf{u} = (U,V)$ — вектор зміщень, X_i, Y_i — компоненти масової сили в підобласті G_i, $i = 1,2$, $\Gamma = \partial G / AB$ – частина межі області G.

Чисельний розв'язок крайової задачі (1)–(7) знайдено безсітковим методом радіальних базисних функцій [2] у поєднанні з методом чисельних конформних відображень [1] у вигляді

$$u_n(X,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} a_j\varphi_j(r_j,\varepsilon),\ v_n(X,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} b_j\varphi_j(r_j,\varepsilon),$$

$$h_n(X,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} d_j\varphi_j(r_j,\varepsilon),\ c_n(X,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} g_j\varphi_j(r_j,\varepsilon),$$

де $\varphi_j(r_j,\varepsilon)$ — деяка неперервна або кусково-неперервна радіальна базисна функція; a_j, b_j, d_j, g_j $j = \overline{1,n}$ – невідомі параметри.

З рівнянь (1)–(4), крайових умов (5)-(7) при застосуванні методу колокації в точках, отримано три СЛАР для обчислення невідомих a_j, b_j, d_j, g_j, $j = \overline{1,n}$. Їх розв'язок отримано методом Гауса. Множину колокаційних вузлів $M_j = (x_j, y_j)$, $j = \overline{1,n}$ отримано методом чисельних конформних відображень [1].

Проведені чисельні експерименти на основі розробленого обчислювального алгоритму та програмного забезпечення дало можливість здійснити оцінку зміни НДС ґрунтової основи гідротехнічної споруди унаслідок нагнітання в'яжучого розчину, що може бути використано для оцінки несучої здатності ґрунтів основи, стійкості і надійності споруди.

Список літератури

1. Власюк А. П. Дроздовський Т. А. Комп'ютерна генерація конформних і квазіконформних різницевих сіток в областях складної геометричної форми / Тез. доп. XVI Міжнар. Конф. Прийняття рішень в умовах невизначеності. — Ялта, 2010. — С.153–156.

2. Власюк А. П. Мартинюк П. М. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування грунтів в умовах тепломасопереносу методом радіальних базисних функцій: Монографія. — Рівне: НУВГП, 2010. — 277 с.

3. Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. — К.: 1991. — 432 с.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЕРТИКАЛЬНОЇ МІГРАЦІЇ РАДІОНУКЛІДІВ В НЕНАСИЧЕНОМУ ПОРИСТОМУ СЕРЕДОВИЩІ ПРИ НАЯВНОСТІ ФІЛЬТРІВ-ВЛОВЛЮВАЧІВ У НЕЛІНІЙНОМУ ВИПАДКУ

А. П. Власюк, В. В. Жуковський

Міжнародний економіко-гуманітарний університет ім. акад. Степана Дем'янчука, Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна

A.P.Vlasyuk.rv@gmail.com, ZeonET@gmail.com

Математичну модель задачі вертикальної міграції радіонуклідів в шарі ґрунту з біпористими сорбентами, що містять наночастинки в загальноприйнятих позначеннях у нелінійному випадку можна описати наступною крайовою задачею [1]:

$$\sigma_1 \frac{\partial c_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_1 \frac{\partial c_1}{\partial x} \right) - \upsilon_x \frac{\partial c_1}{\partial x} - \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2,$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 D_2 \frac{\partial c_2}{\partial R} \right) + \gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 - \theta \frac{\partial q}{\partial t},$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_0 \frac{\partial q}{\partial r} \right),$$

$$\mu(h)\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial h}{\partial x}) - \nu\frac{\partial c}{\partial x},\ \upsilon_x = -k\frac{\partial h}{\partial x} + \nu\frac{\partial c}{\partial x},$$

$$\left.\frac{\partial q(x,r,t)}{\partial r}\right|_{r=0} = 0,\ q(x,r,t)\big|_{r=R_n} = k_e \cdot c_2(x,t),$$

$$\left.\frac{\partial c_2(x,r,t)}{\partial R}\right|_{r=0} = 0,\ c_2(x,r,t)\big|_{r=R_p} = c_1(x,t),$$

$$l_1 c_1(0,t) = \tilde{C}_1^1(t),\ \ l_2 c_1(l,t) = \tilde{C}_1^2(t),$$

$$l_3 c_2(0,t) = \tilde{C}_2^1(t),\ \ l_4 c_2(l,t) = \tilde{C}_2^2(t),$$

$$h(0) = \tilde{H}_1, h(l) = \tilde{H}_2,$$

$$c_1(x,0) = \tilde{C}_1^0(x),\ c_2(x,0) = \tilde{C}_2^0(x),\ q(x,r,0) = \tilde{Q}^0(x,r).$$

Список літератури

1. Власюк А. П. Математичне моделювання вертикальної міграції радіонуклідів у каталітичному пористому середовищі при наявності фільтрів-вловлювачів у лінійному випадку / А. П. Власюк, В. В. Жуковський // Матеріали XIX Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики», 3–4 жовтня 2013 року, Львів, 2013. — С. 41–42.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ТЕПЛО-МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ҐРУНТОВОГО МАСИВУ ПРИ НАЯВНОСТІ СИЛ ЗВ'ЯЗНОСТІ

А. П. Власюк, Н. А. Федорчук

Міжнародний економіко-гуманітарний університет ім. акад. Степана Дем'янчука, Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна

A.P.Vlasyuk.rv@gmail.com, N.A.Fedorchuk@mail.ru

Математичну модель задачі напружено-деформованого стану (НДС) ґрунтового масиву з урахуванням тепло-масоперенесення та наявності сил зв'язності у двовимірному випадку в загальноприйнятих позначеннях можна описати наступною крайовою задачею:

$$\mu(c,T)\Delta U+(\lambda(c,T)+\mu(c,T))\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\left[\frac{\partial\lambda(c,T)}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial\mu(c,T)}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial\mu(c,T)}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right]-(2\lambda(c,T)+2\mu(c,T))\alpha_T\frac{\partial T}{\partial x}=X,$$

$$\mu(c,T)\Delta V+(\lambda(c,T)+\mu(c,T))\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\left[\frac{\partial\lambda(c,T)}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial\mu(c,T)}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial\mu(c,T)}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right]-(2\lambda(c,T)+2\mu(c,T))\alpha_T\frac{\partial T}{\partial y}=Y,$$

$$X=\frac{dp}{dx}+f_1(c),\ Y=\gamma_{\text{зв}}+\frac{dp}{dy}+f_2(c),$$

$$\nabla\cdot(\mathrm{D}(c,T)\nabla c)-\upsilon\nabla c-\gamma(c-C_m)+\nabla\cdot(\mathrm{D_T}\nabla T)=n_p\frac{\partial c}{\partial t},$$

$$\nabla\cdot(\lambda_{\mathrm{T}}\nabla T)-\rho c_\rho\upsilon\nabla T=c_T\frac{\partial T}{\partial t},$$

$$\upsilon=-\mathrm{K}(c,T)\nabla h+\nu_{\mathrm{c}}(c)\nabla c+\nu_{\mathrm{T}}\nabla T,\quad div\,\vec{\upsilon}+\frac{\partial n}{\partial t}=0,$$

$$\varepsilon_x=\frac{\partial U}{\partial x},\ \varepsilon_y=\frac{\partial V}{\partial y},\ \varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right),$$

$$\sigma_x=\frac{\theta}{1+\nu}\left(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y\right)-\alpha_T\overline{T}\theta,\ \sigma_y=\frac{\theta}{1+\nu}\left(\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x\right)-\alpha_T\overline{T}\theta,$$

$$\tau_{xy}=2\mu(c,T)\varepsilon_{xy}$$

та з відповідними крайовими умовами для напору, концентрації солей, температури та зміщень. Тут: $(x,y)\in\Omega$, t — час, $t>0$; $f_1(c)$, $f_2(c)$ — функції, які виражають вплив щільності ґрунту на його НДС за рахунок сил зв'язності.

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СОЛЕПЕРЕНЕСЕННЯ ПРИ СУМІСНІЙ НЕСТАЦІОНАРНІЙ ФІЛЬТРАЦІЇ ТА ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННІ В НАСИЧЕНО-НЕНАСИЧЕНИХ ҐРУНТАХ В ЛІНІЙНІЙ ПОСТАНОВЦІ

А. П. Власюк, Т. П. Цвєткова

Міжнародний економіко-гуманітарний університет ім. акад. Степана Дем'янчука, Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна

A.P.Vlasyuk.rv@gmail.com, Tsvetkova@ukr.net

Здійснено математичне моделювання солеперенесення при сумісній нестаціонарної фільтрації сольових розчинів та вологоперенесенні у насичено-ненасиченому ґрунтовому середовищі.

Математична модель розглядуваної задачі у даних областях водонасичення, у загальноприйнятих позначеннях описується наступною крайовою задачею [1]:

$$\frac{\partial\left(D_1\dfrac{\partial c_1}{\partial x}\right)}{\partial x}-v_1\frac{\partial c_1}{\partial x}-\gamma_1(c_1-C_1^*)^{\alpha_1}=\sigma_1\frac{\partial c_1}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(k_1\frac{\partial h_1}{\partial x})-\nu_1\frac{\partial c_1}{\partial x}=a\frac{\partial h}{\partial t}, \tag{2}$$

$$v_1=-k_1\frac{\partial h_1}{\partial x}+\nu_1\frac{\partial c_1}{\partial x}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\left(D_2\dfrac{\partial c_2}{\partial x}\right)}{\partial x}-v_2\frac{\partial c_2}{\partial x}-\gamma_2(c_2-C_2^*)^{\alpha_2}=\sigma_2\frac{\partial c_2}{\partial t}, \tag{4}$$

$$\mu\frac{\partial h_2}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(k_2\frac{\partial h_2}{\partial x})-\nu_2\frac{\partial c_2}{\partial x}, \tag{5}$$

$$v_2=-k_2\frac{\partial h_2}{\partial x}+\nu_2\frac{\partial c_2}{\partial x} \tag{6}$$

при відповідних крайових умовах на межах областей фільтрації та вологоперенесення, а також умовах спряження на вільній поверхні.

Чисельний розв'язок крайової задачі (1)–(6) знайдено методом скінченних різниць з використанням монотонної різницевої схеми.

Список літератури

1. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных середах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К.: Наук. думка, 1991. — 432 с.

ТРИТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

І. І. Волянська, В. С. Ільків

Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна

i.volyanska@i.ua , ilkivv@i.ua

В області $\mathcal{D}$, яка є декартовим добутком відрізка $[0,T]$, $T>0$, на одновимірний тор Ω, розглянуто задачу із триточковими умовами по змінній t для диференціального рівняння третього порядку зі сталими коефіцієнтами

$$Lu = \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + a_{21}\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + a_{12}\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + a_{03}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a_{20}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \\ + a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + a_{02}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{10}\frac{\partial u}{\partial t} + a_{01}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{00}u = 0, \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi_1(x), \quad u(\frac{T}{2},x) = \varphi_2(x), \quad u(T,x) = \varphi_3(x), \tag{2}$$

де $\vec{a} = (a_{21}, a_{12}, a_{03}, a_{20}, a_{11}, a_{02}, a_{10}, a_{01}, a_{00}) \in \mathbb{C}$, $u = u(t,x)$ — шукана функція, а $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — задані функції змінної x. Вигляд області $\mathcal{D}$ накладає умови 2π-періодичності за змінною x на функції u та $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Під розв'язком задачі (1), (2) будемо розуміти функцію $u = u(t,x)$, яка задовольняє рівняння (1) і умови (2) та належить до простору $\mathbf{E}^{3,q}_{\beta,\tau}(\mathcal{D})$.

Розв'язність задачі досліджується у шкалах просторів $\{\mathbf{E}^{q}_{\beta,\tau}(\Omega)\}_{q\in\mathbb{R}}$ і $\{\mathbf{E}^{3,q}_{\beta,\tau}(\mathcal{D})\}_{q\in\mathbb{R}}$, де $\mathbf{E}^{q}_{\beta,\tau}(\Omega)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$,— гільбертів простір функцій $\psi = \psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k e^{ikx}$, з нормою

$$\| \psi \|^2_{\mathbf{E}^{q}_{\beta,\tau}(\Omega)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{k}^{2q} e^{2\tilde{k}(\beta t+\tau)} \mid \psi_k \mid^2, \qquad \tilde{k} = \sqrt{1+k^2},$$

а $\mathbf{E}^{3,q}_{\beta,\tau}(\mathcal{D})$, $a \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$ — банахів простір функцій $u = u(t,x)$ таких, що похідні

$$\frac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r}, \; r = 0,1,2,3,$$

для кожного $t \in [0,T]$ належать до просторів $\mathbf{E}^{q-r}_{\beta,\tau}(\Omega)$ відповідно і неперервні за змінною t у цих просторах. Квадрат норми функції u у просторі $\mathbf{E}^{3,q}_{\beta,\tau}(\mathcal{D})$

обчислюється за формулою

$$\| u \|^2_{\mathbf{H}^{3,q}_{\beta,\tau}(\mathcal{D})} = \sum_{r=0}^{3} \max_{[0,T]} \| \frac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r} \|^2_{\mathbf{E}^{q-r}_{\beta,\tau}(\Omega)} .$$

Задача (1), (2) у разі багатовимірного тора Ω є некоректною за Адамаром, а її розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку. У роботі показано, що задача з однією просторовою змінною є коректною за Адамаром, а відповідні знаменники обмежені знизу. Встановлено достатні умови існування та необхідні і достатні умови єдиності розв'язку задачі у просторі $\mathbf{E}^{3,q}_{\beta,\tau}(\mathcal{D})$, якщо праві частини $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ умов (2) належать просторам зі шкали $\{\mathbf{E}^{q}_{\beta,\tau}(\Omega)\}_{q\in\mathbb{R}}$.

КРАЙОВА ОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ШАРУ З НАСКРІЗНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

В. І. Гавриш, Я. П. Драґан, С. І. Качан, В. Б. Валяшек
Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна
ikni.pz@gmail.com

Моделювання процесів теплопровідності є важливим розділом теоретичних і практичних досліджень. Побудова розв’язків для задач теплоперенесення має наукове, практичне та економічне значення. Температурні режими конструкцій значною мірою визначають їхні якісні та кількісні параметри і характеризуються температурними полями, або величинами, які визначаються з цих полів. Розподіл температури у просторі та часі отримують, досліджуючи математичні моделі явища теплоперенесення як результат аналітичного або чисельного розв’язування крайових задач чи проведення експерименту з фізичною моделлю. У деяких випадках математичне моделювання є єдиним джерелом інформації про температурні поля конструкцій. Жодне з явищ перенесення не дає таких багатих і глибоких відомостей про коливання ґратки, про збуджені стани електронів та їхню взаємодію з ґраткою в напівпровідниках, як теплопровідність. У зв’язку з цим розглядається ізотропний в сенсі теплофізичних властивостей шар товщиною $2l$, в якому знаходиться чужорідне наскрізне циліндричне включення з радіусом R, віднесений до циліндричної системи координат (r, φ, z) із початком у центрі включення. На поверхні

$$L_R = \left\{(R, \varphi, z) : 0 \le \varphi \le 2\pi, \left|z\right| \le 2l\right\}$$

включення відбувається ідеальний тепловий контакт. Шар нагрівається тепловим потоком, який зосереджено в крузі радіуса R межової поверхні $z = -l$. Інша межова поверхня шару $z = l$ є теплоізольованою.

Розподіл температури $t(r, z)$ у наведеній системі отримується розв’язанням рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r\lambda(r)\frac{\partial t}{\partial r}] + \lambda(r)\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 \qquad (1)$$

з крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{z=l} = 0,\ \lambda_0 \left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{z=-l} = -q_0\, S\_(R - r), \quad \left.t\right|_{r\to\infty} = t_c, \left.\frac{\partial t}{\partial r}\right|_{r\to\infty} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial r}\right|_{r\to\infty} = 0, \qquad (2)$$

де $\lambda(r) = \lambda_1 + (\lambda_0 - \lambda_1) \cdot S\_(R - r)$ — коефіцієнт теплопровідності неоднорідного шару; λ_1, λ_0 — коефіцієнти теплопровідності основного матеріалу та включення; q_0 — поверхнева густина теплового потоку; $S\_(\zeta)$ — асиметрична одинична функція.

Запропоновано методику розв’язування крайової задачі (1),(2).

ГАМІЛЬТОНОВА СТРУКТУРА (1|1+1)-ВИМІРНОЇ СУПЕРСИМЕТРИЧНОЇ мКП-ІЄРАРХІЇ НА РОЗШИРЕНОМУ ФАЗОВОМУ ПРОСТОРІ

О. Є. Гентош
ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
ohen@ua.fm

Відомо, що алгебра Лі супер-інтегро-диференціальних операторів допускає три розклади у пряму суму двох підалгебр Лі, які дають можливість побудувати на її спряженому просторі три різні (1|1+1)-вимірні ієрархії гамільтонових потоків Лакса: суперсиметричну ієрархію Кадомцева — Петвіашвілі (КП), модифіковану суперсиметричну ієрархію Кадомцева — Петвіашвілі (мКП) та суперсиметричну ієрархію Гаррі — Дима (ГД).

У попередніх публікаціях доповідачем розглядалась проблема існування гамільтонового зображення для суперсиметричної КП-ієрархії, доповненої відповідними еволюціями власних функцій асоційованих спектральних задач, яку було розв’язано за допомогою деякого перетворення Беклунда на розширеному фазовому просторі. У доповіді, що пропонується, використовуючи перетворення Беклунда, яке пов’язує суперсиметричні КП- та мКП-ієрархії на розширених фазових просторах і породжене перетворенням подібності на спряженому просторі алгебри Лі супер-інтегро-диференціальних операторів, встановлено існування гамільтонового зображення для розширеної суперсиметричної мКП-ієрархії у вигляді:

$$\begin{aligned}
&L_{t_n} = [L^n_{\geq 1},\, L],\\
&q_{1,t_n} = L^n_{\geq 1} q_1, \quad \phi^*_{1,t_n} = -D_\theta^{-1}(L^n_{\geq 1})^* D_\theta \phi^*_1,\\
&q_{i,t_n} = L^n_{\geq 1} q_i, \quad q^*_{i,t_n} = -D_\theta^{-1}(L^n_{\geq 1})^* D_\theta q^*_i, \quad i = \overline{2,N},\\
&\phi_{j,t_n} = L^n_{\geq 1}\phi_j, \quad \phi^*_{j,t_n} = -D_\theta^{-1}(L^n_{\geq 1})^* D_\theta \phi^*_j, \quad j = \overline{2,M},
\end{aligned}$$

де

$$L := f_1^{-1} l f_1 = \partial^p + \sum\nolimits_{0<m<2p} v_m D_\theta^m + q_1 + D_\theta^{-1}\phi_1^* D_\theta + \sum\nolimits_{i=2}^N q_i D_\theta^{-1} q_i^* D_\theta + {}$$
$$+ \sum\nolimits_{j=2}^M \phi_j D_\theta^{-1}\phi_j^* D_\theta,$$

$$l := \partial^p + \sum\nolimits_{0\leq k<2p} u_k D_\theta^k + \sum\nolimits_{i=1}^N f_i D_\theta^{-1} f_i^* + \sum\nolimits_{j=1}^M \varphi_j D_\theta^{-1}\varphi_j^*,$$

$$v_{2r}, u_{2s}, q_1, q_i, q_i^*, f_i, \varphi_j^* \in C^\infty(\Lambda_0\times\Lambda_1;\Lambda_0),$$

$$v_{2r+1}, u_{2s+1}, \phi_1^*, \phi_j, \phi_j^*, f_i^*, \varphi_j \in C^\infty(\Lambda_0\times\Lambda_1;\Lambda_1),$$

$$r = \overline{1,p-1},\ s = \overline{0,p-1},\ p,N,M\in\mathbb{N},\ i=\overline{2,N},\ j=\overline{2,M},\ \partial := \partial/\partial x,$$

$$D_\theta := d/d\theta + \theta\, d/dx,\ (x,\theta)\in\Lambda_0\times\Lambda_1,$$

$\Lambda := \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ — алгебра Грассмана над полем $\mathbf{C}$, нижній індекс «≥ 1» позначає суто диференціальну частину супер-інтегро-диференціального оператора, $t_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}_+$,— еволюційні параметри.

Гамільтонову структуру для додаткових симетрій розширеної суперсиметричної мКП-ієрархії отримано як результат композиції двох відображень: перетворення Беклунда на розширеному фазовому просторі суперсиметричної КП-ієрархії та перетворення Беклунда, породженого перетворенням подібності.

ПРО АСИМПТОТИКУ РЕШЕНИЙ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г. А. Гержановская
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова, Одесса, Украина
hello_greta@mail.ru

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)\left|y\right|^{\sigma_0}\left|y'\right|^{\sigma_1} f\left(y, y'\right), \tag{1}$$

где $\alpha_0 \in \left\{-1,1\right\}$, $p : \left[a,\omega\right[\to \left]0,+\infty\right[$ $\left(-\infty < a < \omega \le +\infty\right)$ — непрерывная функция $\sigma_0 + \sigma_1 \ne 1$, $f : \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \to \left]0,+\infty\right[$ — непрерывно–дифференцируемая функция, $Y_i \in \left\{0,+\infty\right\}$, Δ_{Y_i} — промежуток либо $\left[y_0^i; Y_i\right[$, либо $\left]Y_i; y_0^i\right]$ (при $Y_i = +\infty$ $\left(Y_i = -\infty\right)$ считаем $y_i^0 < 0$ $\left(y_i^0 > 0\right)$ соответственно) $\left(i = 0,1\right)$, $\lim\limits_{z_i \to Y_i} \dfrac{z_i \dfrac{\partial f\left(z_1, z_2\right)}{\partial z_i}}{f\left(z_1, z_2\right)} = 0$, равномерно по z_j, $i \ne j$, $i, j = 1,2$.

Определение. Решение y уравнения (1) будем называть $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ — решением, если

$$y^{(i)} : \left[t,\omega\right[\to \Delta_{Y_i},\ \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)} = Y_i \ \left(i = 0,1\right),\ \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left(y'\left(t\right)\right)^2}{y''\left(t\right)y\left(t\right)} = \lambda_0.$$

$P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решения для частных случаев уравнения (1) ранее детально исследовались (см., например, [1]).

Получена следующая теорема.

Теорема. *Для существования у уравнения (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- решений, где $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0,1\right\}$ необходимо, а если $\lambda_0 = \sigma_1 - 1$ либо $\left(\sigma_1 - 1\right)\left(\sigma_0 + \sigma_1 - 1\right) > 0$, то и достаточно выполнения условий:*

$$\pi_\omega\left(t\right)y_1^0 y_0^0 \lambda_0\left(\lambda_0 - 1\right) > 0,\ \ \pi_\omega\left(t\right)y_1^0 \lambda_0\left(\lambda_0 - 1\right) > 0, \ \textit{при}\ t \in \left[a,\omega\right[,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} y_0^0\left|\pi_\omega\left(t\right)\right|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}} = Y_0,\ \lim_{t\uparrow\omega} y_1^0\left|\pi_\omega\left(t\right)\right|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}} = Y_1,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega\left(t\right)I'\left(t\right)}{I\left(t\right)} = \frac{1 - \sigma_1 - \lambda_0\sigma_0}{\lambda_0 - 1}.$$

Более того, для каждого такого решения имеют место следующие асимптотические представления при $t \uparrow \omega$,

$$\frac{y(t)^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{f^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\left(t,y(t),y'(t)\right)} = J(t)\left|1-\sigma_1-\lambda_0\sigma_0\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\left(1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}\right)y_0^1\left(1+o(1)\right),$$

$$\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}\left(1+o(1)\right),$$

где

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \textit{при } \omega = +\infty, \\ t-\omega & \textit{при } \omega < +\infty, \end{cases} \quad I(t) = \alpha_0\int_{A_\omega}^{t} p(\tau)\,d\tau,$$

$$J(t) = \int_{B_\omega}^{t}\left|I(\tau)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}d\tau,$$

A_ω, B_ω *выбираются таким образом, чтобы соответствующие интегралы стремились либо к* 0*, либо к* $+\infty$.

Список литературы

1. Евтухов В. М., Белозерова М. А. Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка // Укр. мат. журнал. — 2008. — Т. 60, №3. — С. 310–331.

СТІЙКІСТЬ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ З ЯВНОЮ ОРГАНІЗАЦІЄЮ ОБЧИСЛЕНЬ

А. В. Гладкий, Ю. А. Гладка

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України,

Київський національний торговельно-економічний університет, Київ, Україна

gladky@ukr.net, julya-04@mail.ru

У роботі розглядаються питання побудови схем розщеплення для дослідження процесів розповсюдження забруднення в атмосфері. Для чисельного розв'язання нестаціонарних рівнянь конвективної дифузії запропоновано підхід, що використовує ідею розщеплення [1] з подальшим використанням явних різницевих схем розрахунку.

Одну із схем розщеплення для задач конвективної дифузії розглянемо на прикладі двовимірного рівняння

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} + v\frac{\partial C}{\partial y} + \sigma C = \mu\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right) = f, \tag{1}$$

причому компоненти вектора швидкості задовольняють умову нестисливості. Для розв'язання (1) запропоновано наступну чотирикрокову різницеву схему:

$$\overset{1}{\phi}{}_t^n + L_1 \overset{1}{\phi}{}^{n+1} - \frac{1}{4} f^n = 0,\ \overset{1}{\phi}{}^n = \phi^n = \phi(x,y,t_n), \tag{2}$$

$$\overset{2}{\phi}{}_t^n + L_2 \overset{2}{\phi}{}^{n+1} - \frac{1}{4} f^n = 0,\ \overset{2}{\phi}{}^n = \overset{1}{\phi}{}^{n+1}, \tag{3}$$

$$\overset{3}{\phi}{}_t^n + L_3 \overset{3}{\phi}{}^{n+1} - \frac{1}{4} f = 0,\ \overset{3}{\phi}{}^n = \overset{2}{\phi}{}^{n+1}, \tag{4}$$

$$\overset{4}{\phi}{}_t^n + L_4 \overset{4}{\phi}{}^{n+1} - \frac{1}{4} f = 0,\ \overset{4}{\phi}{}^n = \overset{3}{\phi}{}^{n+1},\ \overset{4}{\phi}{}^{n+1} = \phi^{n+1}, \tag{5}$$

де різницеві оператори визначаються певними диференціальними операторами рівняння (1).

Досліджено питання апроксимації та стійкості явних двошарових різницевих схем розщеплення (2)–(5). Зазначимо, що реалізація запропонованого підходу розв'язання просторових нестаціонарних рівнянь конвективної дифузії на багатопроцесорних обчислювальних системах із розподіленою пам'яттю в значній мірі скорочує часові витрати порівняно із послідовними алгоритмами.

Має місце наступне твердження.

Теорема. Різницеві схеми явного розрахунку (2)-(5) рівномірно стійкі за початковими даними.

Список літератури

1. Гладкий А. В. Основи математичного моделювання в екології / А. В. Гладкий, І. В. Сергієнко, В. В. Скопецький, Ю. А. Гладка. — К. : НТУУ «КПІ», 2009. — 240 с.

ДИНАМІЧНІ ЗАДАЧІ ПРО РЕАКЦІЮ ШАРУВАТОГО ЗАЗДАЛЕГІДЬ НАПРУЖЕНОГО НАПІВПРОСТОРУ НА РУХОМЕ НАВАНТАЖЕННЯ

Ю. П. Глухов
Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна
gluchov.uriy@gmail.com

У рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями [1] розглянуті постановки і метод розв'язку плоских усталених задач про збурення багатошарової попередньо напруженої основи поверхневим навантаженням, що рухається з постійною швидкістю.

Для розглянутих постановок в просторі зображень Фур'є отримані аналітичні розв'язки задач:

- для пружної смуги, що лежить на пружному напівпросторі,
- для пружної смуги, що лежить на жорсткій основі,
- для багатошарової пружної смуги, що лежить на пружному напівпросторі,
- для багатошарової пружної смуги, що лежить на жорсткій основі;
- для пластини і пружного шару на жорсткій основі.

В просторі зображень Фур'є отримані рекурентні формули для представлення розв'язку задач для шаруватої основи з будь-якою кількістю шарів.

Розв'язок задач отримано в загальному вигляді для стисливого та нестисливого матеріалів з довільним пружним потенціалом для теорії скінчених і двох варіантів малих початкових деформацій, для випадків нерівних і рівних коренів характеристичних рівнянь, для різних умов сполучення елементів шаруватого середовища і для будь-якої швидкості руху навантаження.

На основі отриманих результатів проведені чисельні дослідження впливу початкових деформацій на значення коренів характеристичних рівнянь та на напружено-деформований стан багатошарового середовища.

Початкові (залишкові) напруження істотно впливають на значення параметрів, що характеризують напружено-деформований стан шаруватих конструкцій.

Чисельні дослідження виконані в рамках теорії скінчених початкових деформацій для стисливого матеріалу з гармонічним потенціалом і для нестисливого матеріалу з потенціалом типу Бартенєва — Хазановича.

Список літератури

1. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями / А. Н. Гузь. — К. : «А.С.К», 2004. — 672 с.

КРАЙОВА ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДРУГОГО РОДУ ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАНОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Т. П. Гой, І. Я. Савка
Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника, Івано-Франківськ,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
tarasgoy@yahoo.com, s-i@ukr.net

В області $Q_T^p = (0,T) \times \Omega_{2\pi}^p$, де $T > 0$, а $\Omega_{2\pi}^p$ — p-вимірний тор, утворений шляхом ототожнення протилежних граней паралелепіпеда $\{x \in \mathbb{R}^p : 0 \le x_s \le 2\pi, s = \overline{1,p}\}$, розглядаємо крайову задачу

$$\prod_{j=1}^{n} (D_t - \lambda_j B(D_x)) u(t,x) = f(t,x), \qquad (t,x) \in Q_T^p, \quad (1)$$

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n} B_{jr}(D_x) \Big(\mu_1 D_t^{j-1} u(t,x)\,|_{t=0} + \mu_2 D_t^{j-2} u(t,x)\,|_{t=0} + \\ + \mu_3 D_t^{j-1} u(t,x)\,|_{t=T} - \mu_2 D_t^{j-2} u(t,x)\,|_{t=T} \Big) = \varphi_r(x), r = \overline{1,n}, x \in \Omega_{2\pi}^p,\end{gathered} \quad (2)$$

де $D_t = \dfrac{\partial}{\partial t}, D_x = (-i\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -i\frac{\partial}{\partial x_p}), (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n,$ $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{C}$, $B_{jr}(D_x)$ — диференціальний вираз не вище $(n-j)$-го порядку, $B(D_x)$ — довільний диференціальний вираз, для якого справджується оцінка

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^p) \qquad c_1 (1 + |k|)^{m_1} \le |B(k)| \le c_2 (1 + |k|)^{m_2},$$

$$k = (k_1, \dots, k_p), \quad |k| = |k_1| + \dots + |k_p|, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{N}, \quad c_1, c_2 > 0.$$

Кожна умова з (1) містить інтеграл $D_t^{-1} u(t,x) \equiv \int_0^t u(\tau, x) d\tau.$

Вигляд області Q_T^p накладає умови 2π-періодичності за просторовими змінними $x_1, \dots, x_p$ на шуканий розв'язок $u(t,x)$, а також на функції $f(t,x)$, $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$. Задача (1), (2) є некоректною за Адамаром, а її розв'язність у певних функціональних просторах пов'язана з проблемою малих знаменників [1]. Встановлені умови коректної розв'язності задачі (1), (2) у просторі експоненційного типу для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ і довільних фіксованих чисел T, μ_1, μ_2, μ_3.

Список літератури

1. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. — К.: Наукова думка, 2002. — 416 с.

ПРО НЕВАРІАЦІЙНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

С. О. Горбонос
Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара, Дніпропетровськ, Україна
gorbonos.so@gmail.com

Розглядається задача оптимального керування параболічною системою з необмеженими коефіцієнтами:

$$\begin{gathered} y_t - div(\nabla y + A(x)\nabla y) = f \text{ на } \Omega \times [0,T], \\ y = 0 \text{ на } \Gamma_1 \times [0,T],\ \frac{\partial y}{\partial \nu_A} = u \text{ на } \Gamma_2 \times [0,T], \\ y(t_0, x) = y_0 \in L^2(\Omega) \text{ на } \Omega \\ I(u,y) = \left\| y - y_d \right\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \left\| u \right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))} \to \inf \end{gathered} \tag{1}$$

де Ω — обмежена відкрита множина простору $\mathbb{R}^N$, а її межа $\partial\Omega$ складається з двох частин, які не перетинаються $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Тут u — керування і $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$, $y_d \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ і $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ — задані розподілення, а A — матриця потоку. Характерною особливістю даного класу задач є той факт, що матриця потоку є кососиметричною, а її коефіцієнти належать до простору $L^2(\Omega)$. В результаті, відповідна початково-крайова задача не є коректною за Адамаром. Залучаючи L^∞-апроксимацію матриці потоку, можна встановити умови, за яких оптимальний розв'язок задачі (1) вдається наблизити розв'язками відповідних L^∞-апроксимованих задач [1]. Крім того, для даної задачі можуть існувати розв'язки, які не можна отримати, застосовуючи L^∞-апроксимацію матриці потоку. Таким чином, дана робота ставить за мету запропонувати новий підхід для апроксимації оптимальних розв'язків задачі (1), який би базувався на певному типі перфорації області та залученні граничних фіктивних керувань.

Нехай $\varepsilon > 0$ і $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — множина підобластей множини Ω така, що $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus Q_\varepsilon$, де $Q_\varepsilon =$замикання$\left\{ x \in Q : \left\| A(x) \right\|_{S^N} := \max\limits_{i,j=1,\dots,N} \left| a_{ij}(x) \right| \geq \varepsilon^{-1} \right\}$.

Далі введемо послідовність задач оптимального керування пов'язаних з множинами Ω_ε:

$$I_\varepsilon(u,v,y) = \left\| y - y_d \right\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\varepsilon))} + \left\| u \right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))} + \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \left\| v \right\|^2_{L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon))} \to \inf, \tag{2}$$

$$
\left.\begin{array}{c}
y_t - div(\nabla y + A(x)\nabla y) = f \text{ на } \Omega_\varepsilon \times [0,T], \\
y(t_0, x) = y_0 \in L^2(\Omega) \text{ на } \Omega_\varepsilon, \\
\cdot y = 0 \text{ на } \Gamma_1 \times [0,T],\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu_A} = u \text{ на } \Gamma_2 \times [0,T] \\
\dfrac{\partial y}{\partial \nu_A} = v \text{ на } \Gamma_\varepsilon \times [0,T],
\end{array}\right\}. \qquad 3)
$$

де $v \in L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon))$ — фіктивне керування. Для цієї задачі мають місце наступні результати.

Теорема 1. Нехай $y_d \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ і $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ — задані функції, $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$— послідовність перфорованих підмножин множини Ω пов'язаних з матрицею A. Тоді задача $\left\langle \inf\limits_{(u,y)\in\Xi} I(u,y) \right\rangle$ буде варіаційною границею послідовності задач (2)–(3), коли параметр $\varepsilon \to 0$.

Теорема 2. Нехай $\left\{(u_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0)\right\}_{\varepsilon>0}$ — послідовність оптимальних розв'язків задачі (2)–(3). Тоді єдиний оптимальний розв'язок $\left(u^0, y^0\right)$ задачі оптимального керування (1) досягається в наступному сенсі:

$$
u_\varepsilon^0 \to u^0 \text{ слабо в } L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)),\ y_\varepsilon^0 \to y^0 \text{ слабо в } L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\varepsilon))
$$

$$
\inf_{(u,y)\in\Xi} I(u,y) = I(u^0,y^0) = \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(u_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0).
$$

Таким чином, встановлено, що розв'язок задачі (1) можна наблизити оптимальними розв'язками задач оптимального керування (2)–(3).

Список літератури

1. Горбонос С. О. Варіаційні розв'язки задачі оптимального керування з необмеженими коефіцієнтами. / Горбонос С. О., Когут П. І. // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Моделювання. — 2013. — Вип. 5. — С. 69–83.

2. Salsa. Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory. — Milan : Springer-Verlag, 2008.

3. Zhikov V. V. Remarks on the uniqueness of a solution of the Dirichlet problem for second-order elliptic equations with lower-order terms // Functional Analysis and Its Applications — 2004 , — No. 3 . — P. 173–183.

4. Kogut P. I. On attainability of optimal solutions for linear elliptic equations with unbounded coefficients / Kogut P. I., Kupenko O. P. // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Моделювання — 2012. — Вип. 4. — С. 63–82.

5. Kogut P. I. Optimal Control Problems for Partial Differential Equations on Reticulated Domains: Approximation and Asymptotic Analysis. / Kogut P. I., Leugering G. — Birkhäuser, Boston, 2011. — 636 p.

6. Горбонос С. А. Об аппроксимации решений одного класса задач оптимального управления для параболического уравнения с неограниченными коэффициентами // Проблемы управления и информатики. — 2014.

БАГАТОІНТЕРВАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ШТУРМА — ЛІУВІЛЛЯ З СИНГУЛЯРНИМИ ПОТЕНЦІАЛАМИ

А. С. Горюнов
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
goriunov@imath.kiev.ua

Досліджено властивості операторів, що відповідають багатоінтервальним крайовим задачам Штурма — Ліувілля з потенціалами, що є розподілами. Зокрема, вони можуть бути мірами Радона.

Отримано конструктивний опис самоспряжених, максимальних дисипативних, максимальних акумулятивних розширень симетричного мінімального оператора в прямій сумі просторів, а також його узагальнених резольвент в термінах однорідних крайових умов канонічного вигляду.

Крім того, доведено, що кожне дійсне максимальне дисипативне (максимальне акумулятивне) розширення є самоспряженим і дано опис таких розширень.

При доведенні використовується техніка просторів граничних значень симетричних диференціальних операторів та регуляризація формального виразу Штурма — Ліувілля за допомогою квазіпохідних Шина — Цеттла.

Результати доповіді було отримано спільно з В. А. Михайлецем. Вони поширюють роботу [1] на багатоінтервальний випадок.

Список літератури

1. Goriunov A. S., Mikhailets V. A. Regularization of singular Sturm — Liouville equations // Meth. Funct. Anal. Topol. — 2010. — **16**, №. 2. — P. 120–130.

2. Горюнов А. С. Багатоінтервальні крайові задачі Штурма — Ліувілля з потенціалами-розподілами // Доп. НАН України. — 2014 (подано до друку).

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕКРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В УТОЧНЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

А. Я. Григоренко, Т. Л. Ефимова, Ю. А. Коротких

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины,
Киевский национальный университет строительства и архитектуры,
Киев, Украина
Tolikovna@bigmir.net

Цилиндрические оболочки с некруговым поперечным сечением находят широкое применение в качестве конструктивных элементов в авиастроении, судостроении, ракетно-космической технике, гражданском и промышленном строительстве. Для оценки прочности и надежности отмеченных оболочечных конструкций необходимо иметь информацию об их динамических характеристиках свободных колебаний, что дает возможность избежать резонансных режимов эксплуатации. В последнее время широкое применение в различных сферах находят композитные материалы, которые обладают анизотропными свойствами. Этот факт обуславливает необходимость учета анизотропии и приводит к необходимости применения уточненных моделей, которые учитывают влияние деформации поперечного сдвига, для расчета свободных колебаний соответствующих оболочечных конструкций. Применение уточненной модели позволяет повысить точность расчетов свободных колебаний нетонких анизотропных некруговых цилиндрических оболочек. В случае переменной толщины оболочки исходная краевая задача на собственные значения описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами, решение которой связано с большими трудностями вычислительного характера.

В данном сообщении авторами проведено решение задач о свободных колебаниях нетонких некруговых цилиндрических оболочек с различными граничными условиями на краях в уточненной постановке на основании модели Миндлина — Тимошенко.

Для решения сформулированной задачи в докладе предлагается эффективный численно-аналитический подход, который состоит из двух этапов. На первом этапе исходная система дифференциальных уравнений в частных производных с помощью сплайн-аппроксимации и метода коллокации сводится к одномерной задаче. На втором — полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска. Особенностью применяемой численно-аналитической методики является возможность решения задач для переменной жесткости оболочки произвольного характера, а также при различных типах анизотропии материала оболочки.

Приведены результаты решения задач о свободных колебаниях замкнутых некруговых цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением. Расчеты проводились для следующих граничных условий: шарнирного опирания и жесткого закрепления торцов оболочки. Изучено влияние характера поперечного сечения цилиндрической оболочки и граничных условий на поведение спектра собственных частот. Достоверность полученных в работе результатов проверялась с помощью индуктивных приемов.

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕНО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОРТОТРОПНЫХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

А. Я. Григоренко, М. В. Романишин

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

Mikhail.Romanishyn@yandex.ru

Наряду с оболочками вращения широкое применение в качестве элементов конструкций современной техники находят конические оболочки, в частности, в машиностроении, авиа и кораблестроении. В случаях переменной толщины оболочки, использования композитных материалов или сложной нагрузки использование классической теории для исследования напряженно-деформированного состояния может привести к значительным погрешностям.

Толщина изменяется в окружном направлении по закону:

$$H(\theta) = H_0\left(1 + \alpha\left(6 \cdot \frac{\theta^2}{\pi^2} - 6 \cdot \frac{\theta}{\pi} + 1\right)\right)$$

Расчет напряженно-деформированного состояния таких оболочек предлагается выполнять с привлечением уточненной теории оболочек типа Тимошенко, основанной на гипотезе прямой линии. Исследование динамических характеристик данного класса оболочек связано с большими вычислительными трудностями, так как исходная модель описывается системой дифференциальных уравнений высокого порядка в частных производных с переменными коэффициентами. Решение задачи о напряженном состоянии ортотропных конических оболочек переменной в поперечном сечении толщины выполняется на основании нетрадиционного подхода. Этот подход заключается в сведении двумерной задачи к одномерной с помощью метода сплайн-коллокации и решения последней устойчивым методом дискретной ортогонализации.

На торцах оболочки рассматриваются следующие граничные условия: жесткое закрепление, шарнирное опирание и их комбинации.

С помощью предложенной методики были исследованы ортотропные замкнутые конические оболочки переменной в окружном направлении толщины, изготовленные из волокнистого стеклопластика с ортогонально уложенными слоями. Проводится анализ влияния характера изменения толщин, механических и геометрических параметров, граничных условий на распределение спектра собственных частот рассматриваемых конических оболочек.

ГІПЕРБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ В НАПІВОБМЕЖЕНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ КЛИНОВИДНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБЛАСТЯХ

А. П. Громик, І. М. Конет

Подільський державний аграрно-технічний університет,
Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка,
Кам'янець-Подільський, Україна
gapon74@mail.ru, konet51@ukr.net

Розглядається задача побудови обмеженого на множині

$$D = \left\{ \left(t, r, \varphi, z \right); \; t > 0; \; r \in \left\langle a; b \right\rangle; \varphi \in \left(0; \varphi_0 \right); 0 < \varphi_0 < 2\pi; \right.$$
$$\left. z \in \mathrm{I}_n^+ \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} \mathrm{I}_j = \bigcup_{j=1}^{n+1} \left(l_{j-1}; l_j \right), \; l_0 \geq 0; \; l_k < l_{k+1}, \; l_{n+1} = \infty \right\}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь гіперболічного типу 2-го порядку [1]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j\left(t, r, \varphi, z \right);$$
$$z \in \mathrm{I}_j; \; j = \overline{1, n+1}$$

з відповідними початково-крайовими умовами та умовами спряження [2]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right] \Bigg|_{z=l_k} = \omega_{jk}\left(t, r, \varphi \right); j = 1, 2; k = \overline{1, n}.$$

Щодо проміжку $\left\langle a; b \right\rangle$ розглянуто випадки:

1) $\left\langle a, b \right\rangle = \left(0; +\infty \right)$; 2) $\left\langle a, b \right\rangle = \left(R_0; +\infty \right), R_0 > 0$;

3) $\left\langle a, b \right\rangle = \left(0; R \right), R < +\infty$; 4) $\left\langle a, b \right\rangle = \left(R_0; R \right)$.

Інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків досліджуваних задач одержано методом інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна). Побудовані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі й можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків коливних процесів у кусково-однорідних середовищах.

Проведено аналіз одержаних розв'язків в залежності від типу крайових умов на гранях клина (Діріхле — Діріхле, Діріхле — Неймана, Неймана-Діріхле, Неймана — Неймана).

Список літератури

1. Перестюк М.О. Теорія рівнянь математичної фізики / М. О. Перестюк, В. В. Маринець. — К.: Либідь, 2006. — 424 с.

2. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах / І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2013. — 120 с.

ВИЗНАЧЕННЯ НЕВІДОМИХ ПАРАМЕТРІВ У ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ З ВИРОДЖЕННЯМ

Н. М. Гузик

Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів, Україна

hryntsiv@ukr.net

В області

$$Q_T = \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$$

розглядається обернена задача визначення коефіцієнтів

$$a = a(t), \ b = b(t), \quad a(t) > 0, \quad 0 \le t \le T$$

в параболічному рівнянні

$$u_t = a(t)t^{\beta}u_{xx} + b(t)u_x + c(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), x \in [0;h], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u_x(0,t) = \mu_1(t), \ u_x(h,t) = \mu_2(t), \ t \in [0,T] \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$u(0,t) = \mu_3(t), \ t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\int_0^h u(x,t)\,dx = \mu_4(t), \ t \in [0,T]. \tag{5}$$

Встановлено умови існування та єдиності розв'язку (a,b,u) задачі (1)–(5) у просторах Гельдера. Для доведення існування розв'язку задачі (1)–(5) використано теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, єдиність базується на властивостях розв'язків однорідних інтегральних рівнянь Вольтера другого роду. Дослідження проведено у випадку слабкого виродження, коли $0 < \beta < 1$.

ПРО АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ

Н. Л. Денисенко
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
natalia_den@bigmir.net

Розглядається система диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{+\infty} B_i(t)x(\lambda_i t), \tag{1}$$

у випадку, коли $0 < \lambda_i < 1$ при $i = 1,\dots,j$, $\lambda_i > 1$ при $i = j+1, j+2,\dots$, ($j \in \mathbb{N}$); $t \in \mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$; A — стала $(n \times n)$-матриця, $B_i(t)$, $i = 1,2,\dots$,— дійсні матричні функції розмірності $n \times n$; і досліджуються асимптотичні властивості неперервно диференційовних розв'язків. Має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) всі власні значення $a_i(A)$, $i = \overline{1,n}$, матриці A такі, що

$$\operatorname{Re} a_i(A) < 0 \text{ *при* } i = 1,\dots,p\ ; \quad \operatorname{Re} a_j(A) > 0 \text{ *при* } j = p+1,\dots,n,\ 0 < p \le n;$$

тобто існують проектори $P_1 = \operatorname{diag}(E_p, 0)$, $P_2 = \operatorname{diag}(0, E_{n-p})$, $P_1 + P_2 = E$ такі, що $\exists K > 0, \alpha > 0$:

$$| e^{At}P_1 | \le Ke^{-\alpha t} \quad \text{при} \quad t \ge 0,$$
$$| e^{At}P_2 | \le Ke^{\alpha t} \quad \text{при} \quad t \le 0;$$

2) всі елементи матриць $B_i(t)$, $i = 1,2,\dots$, є неперервними обмеженими при $t \in \mathbb{R}$ функціями і $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} | B_i(t) | \le b_i < \infty, \quad i = 1,2,\dots,$

де $| B(t) | = \max\limits_{1\le k\le n} \sum\limits_{l=1}^{n} | b_{kl}(t) |$ *для матричної функції* $B(t) = (b_{kl}(t))$;

3) $\dfrac{2K}{\alpha}\sum\limits_{i=1}^{+\infty} b_i < 1.$

Тоді справедливі твердження:

1) існує сім'я неперервно диференційовних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+ = [0,+\infty)$ розв'язків $x(t) = x(t,c)$, де $c = (c_1,\dots,c_p,0,\dots,0)$, c_i, $i = \overline{1,p}$, – довільні сталі, системи рівнянь (1), *які прямують до нуля при $t \to +\infty$;*

2) існує сім'я неперервно диференційовних обмежених при $t \in \mathbb{R}^- = (-\infty,0]$ розв'язків $x(t) = x(t,c)$, де $c = (0,\dots,0,c_{p+1},\dots,c_n)$, c_i, $i = \overline{p+1,n}$,— довільні сталі, системи рівнянь (1)*, які прямують до нуля при $t \to -\infty$.*

ГЛОБАЛЬНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ВИРОДЖЕНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ НАПІВЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Т. О. Дерев'янко
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
taras_derevianko@ukr.net

В області $\prod = (0,l)\times(0,T)$ розглянемо напівлінійну вироджену систему гіперболічних рівнянь першого порядку

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t;\omega) + \lambda(x,t;\omega)\frac{\partial y}{\partial x}(x,t;\omega) = f(y,z,x,t;\omega) + g(y,z,x,t;\omega)\dot{w}(t;\omega),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,t;\omega) = \tilde{f}(y,z,x,t;\omega) + \tilde{g}(y,z,x,t;\omega)\dot{w}(t;\omega),$$

де $y:\prod\times\Omega \to \mathbb{R}^n, z:\prod\times\Omega\to\mathbb{R}^m$ — вектор-функції розв'язку; λ — відображення з $\overline{\prod}\times\Omega$ на простір $n\times n$ дійснозначних матриць:

$$\lambda(x,t;\omega) = \mathrm{diag}(\lambda_1(x,t;\omega),\lambda_2(x,t;\omega),\ldots,\lambda_n(x,t;\omega));$$

$f,\tilde{f}:\mathbb{R}^n\times\prod\times\Omega\to\mathbb{R}^n$ — задана нелінійна функція; $g,\tilde{g}$ — відображення з $\overline{\prod}\times\mathbb{R}^n\times\Omega$ на простір дійснозначних матриць; $\dot{w}$ — білий шум.

Розглянемо наступні множини

$$I_0 = \{i\in\overline{1,n} \mid \lambda_i(x,t;\omega) > 0, (x,t;\omega)\in\prod\times\Omega\},$$

$$I_l = \{i\in\overline{1,n} \mid \lambda_i(x,t;\omega) < 0, (x,t;\omega)\in\prod\times\Omega\},$$

причому $m_1 = \mathrm{card}(I_0), m_2 = \mathrm{card}(I_l)$.

Для системи визначимо початкові та крайові умови:

$$y(x,0;\omega) = y^0(x;\omega), (x;\omega)\in[0,l]\times\Omega,$$

$$y_i(0,t;\omega) = \gamma_i^0(y_{j\notin I_0}(0,t),t;\omega), i\in I_0, (t;\omega)\in[0,T]\times\Omega,$$

$$y_i(l,t;\omega) = \gamma_i^l(y_{j\notin I_l}(l,t),t;\omega), i\in I_l, (t;\omega)\in[0,T]\times\Omega,$$

$$z(0,t;\omega) = \gamma(y_{j\notin I_0}(0,t),t;\omega), (t;\omega)\in[0,T]\times\Omega,$$

де $y^0:[0,l]\in\Omega\to\mathbb{R}^n$, $\gamma^0,\gamma:\mathbb{R}^{n-m_1}\times\mathbb{R}\times\Omega$, $\gamma^l: R^{n-m_2}\times\mathbb{R}\times\Omega$,— нелінійні функції.

Список літератури

1. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейних уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука,1978. — 592 с.

2. Turo J. Study of first order stochastic partial differential equations using integral contractors // Applicable analisys. — **70**, No. 3–4, pp. 281–291.

ЗАСТОСУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ТЕОРІЇ НЕТОНКИХ ОБОЛОНОК І ПЛАСТИН ДЛЯ РОЗРАХУНКУ НДС ТОВСТОСТІННИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ З КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРУЖЕНЬ НЕКАНОНІЧНОЇ ФОРМИ

Б. І. Дзира, Д. Г. Чорнописький
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ,
Івано-Франківський ТУ нафти і газу, Івано-Франківськ, Україна

На основі аналітичного наближеного розв'язку тривимірних задач теорії пружності в довільній криволінійній системі координат x^1, x^2, x^3 у вигляді розкладу вектора переміщень $\mathbf{u}$ та напружень $\mathbf{P}$ згідно [2,3] рядами Фур'є — Лежандра

$$\mathbf{u}(x^1,x^2,x^3)=\sum_{k=0}^{N}\overset{k}{\mathbf{u}}(x^1,x^2)P_k(\zeta),\ \mathbf{P}^i(x^1,x^2,x^3)=\sum_{k=0}^{N}\sqrt{\frac{a}{g}}\,\overset{k}{\mathbf{P}^i}(x^1,x^2)P_k(\zeta)$$

та варіаційного принципу Лагранжа

$$-\iiint_{\Omega}(\mathbf{P}^i\frac{\partial\delta\mathbf{u}}{\partial x^i}-\Phi\delta\mathbf{u})dV+\iint_{S^+}\mathbf{P}_{(n_3^+)}\delta\mathbf{u}^+dS^++\iint_{S^-}\mathbf{P}_{(n_3^-)}\delta\mathbf{u}^-dS^-+\iint_{\Sigma_l}\tilde{\mathbf{P}}_{(l)}\delta\mathbf{u}d\Sigma=0$$

із використанням векторної апроксимації скінченно-різницевими аналогами (метод криволінійних сіток [1]) основних рівнянь і співвідношень отримано відносно невідомих моментів компонент $(\overset{k}{u}_1,\overset{k}{u}_2,\overset{k}{u}_3)$ вектора переміщень

$$\overset{k}{\mathbf{u}}(x^1,x^2)=\overset{k}{u}_1\mathbf{e}^1+\overset{k}{u}_2\mathbf{e}^2+\overset{k}{u}_3\mathbf{e}^3$$

у вузлових точках базової серединної поверхні параметризації S алгебраїчну систему рівнянь блокової структури

$$\overset{k-2}{Q}_{i,j}\overset{k-2}{U}_{i,j}+\overset{k-1}{Q}_{i,j}\overset{k-1}{U}_{i,j}+\overset{k}{Q}_{i,j}\overset{k}{U}_{i,j}+\overset{k+1}{Q}_{i,j}\overset{k+1}{U}_{i,j}+\overset{k+2}{Q}_{i,j}\overset{k+2}{U}_{i,j}=\overset{k}{F}_{i,j},$$

де вектор-стовпці $\overset{k}{U}_{i,j}=\left(\overset{k}{u}_1,\overset{k}{u}_2,\overset{k}{u}_3\right)_{i,j}^{-1},\ \overset{k}{F}_{i,j}=\left(\overset{k}{F}_1,\overset{k}{F}_2,\overset{k}{F}_3\right)_{i,j}^{-1}$ — відомі праві частини.

Для розв'язання системи рівнянь використано метод блокових ітерацій Зейделя. Точність розв'язку системи визначається умовою $\left|\overset{k}{\mathbf{u}}{}_{i,j}^{(s)}-\overset{k}{\mathbf{u}}{}_{i,j}^{(s-1)}\right|\le\varepsilon$

Ефективність запропонованого числового методу для розрахунку НДС товстостінних елементів конструкцій підтверджена його порівнянням з малим числом вузлів сітки із даними тестових задач у випадку згину товстих плит, які допускають точні аналітичні розв'язки. Отримано числові значення величини концентрації напружень у товстих ізотропних і ортотропних циліндричних оболонках з концентраторами у вигляді окремих локальних виїмок або отворів.

Список літератури

1. Гоцуляк Е. А., Ермишев В. Н., Жадрасинов Н. Т. Сходимость метода криволинейных сеток в задачах теории оболочек // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1981. — Вып. 39. — С. 80–84.

2. Векуа И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. — М.: Наука, 1982. — 285 с.

3. Хома И. Ю. Обобщенная теория анизотропных оболочек. — К.: Наук. думка, 1986. — 170 с.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕЗАМКНУТОЙ ПОЛУПРОЗРАЧНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЕЙ

В. А. Дорошенко, А. А. Стрельницкий

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, Украина

o.stral@i.ua

Математическое моделирование задачи возбуждения сосредоточенными монохроматическими источниками щелевых конических антенн с полупрозрачными стенками сводится к решению смешанной краевой задачи уравнения Гельмгольца для незамкнутой конической границы. Сложность решения этой краевой задачи сопряжена, в частности, с наличием сингулярностей границы (вершина конуса и рёбра щелей), где нормали неопределены. Граница представляет собой тонкую круговую коническую поверхность с вершиной в начале введенной сферической системы координат.

Вдоль образующих конуса прорезаны от вершины расширяющиеся периодические щели. Задача заключается в нахождении функции Грина, удовлетворяющей уравнению Гельмгольца вне конуса, а на конусе смешанным краевым условиям, содержащим параметр полупрозрачности и производную второго порядка относительно радиальной пространственной координаты, условиям на бесконечности и ограниченности энергии. Существующие строгие аналитические методы не позволяют найти решение рассматриваемой задачи, а использование численных методов значительно затруднено из-за поверхностных сингулярностей. В работе предложен аналитико-численный метод решения рассматриваемой краевой задачи, который основан на использовании интегральных преобразований Конторовича-Лебедева с ядром в виде функции Макдональда и методам рядов Фурье. Вследствие применения интегрального преобразования исходная краевая задача сводится к паре определённых на щелях и конической границы функциональных уравнений относительно коэффициентов Фурье функции Грина. Искомые коэффициенты принадлежат гильбертову пространству бесконечных последовательностей, что обусловлено требованием выполнения условия ограниченности энергии.

Полученные функциональные уравнения преобразовываются к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода фредгольмовского типа относительно неизвестных коэффициентов. В силу свойств матричного оператора этой системы решение её может быть получено как аналитически (в некоторых предельных случаях конической границы), так и численно. В случае узких щелей и узких конических лент приведены численные решения, что позволило изучить спектр краевой задачи, структуру решения, а также влияние на него щелей и поверхностных свойств конуса, которые определяются параметром полупрозрачности. Приведены графические зависимости коэффициентов Фурье от произвольных геометрических размеров щелей и параметра полупрозрачности.

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГІДРООБ'ЄМНИХ ТА ГІДРОДИНАМІЧНИХ ПЕРЕДАЧ

Є. І. Дружинін, А. С. Бєломитцев

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Харків, Україна

druzhinin_e_i@ukr.net, andr_belomytsev@mail.ru

У доповіді наводиться єдиний підхід до одержання на базі інтегральних критеріїв математичних моделей динамічних характеристик гідрооб'ємних та гідродинамічних передач (ГОП та ГДП), які у поєднанні з диференціальними механізмами (ДМ) входять до складу гідромеханічних силових передач транспортних засобів, що міцно увійшли в сучасну практику зарубіжного та вітчизняного машинобудування.

Зазвичай ГОП і ГДП в поєднанні з ДМ використовуються в системах турбонаддуву двигунів внутрішнього згоряння, а також для забезпечення більш високих якісних показників розвороту транспортних засобів. До динамічних характеристик ГОП та ГДП відносять їх інерційні, дисипативні та пружні характеристики, а також моменти, що діють на ротори гідромашин ГОП і ГДП з боку робочої рідини. Що стосується динаміки робочої рідини ГОП і ГДП, то її можна описати звичайними диференційними рівняннями та рівняннями в частинних похідних, наприклад телеграфними рівняннями, вирішення яких можуть бути в свою чергу представлені в Д'Аламберовій формі, тобто у вигляді суперпозиції прямій і зворотній хвиль тиску та швидкості рідини, що рухаються. Таким чином, вирішення задачі одержання на базі інтегральних критеріїв математичних моделей динамічних характеристик ГОП і ГДП є наукоємною проблемою і має важливе значення в практичному аспекті.

Єдиний підхід до моделювання динамічних характеристик ГОП і ГДП допускає принципову можливість оцінки взаємного впливу різних по фізичній природі механічних та гідродинамічних процесів на стадіях проектування і доведення дослідних зразків гідромеханічних систем, що має важливе значення для забезпечення подальшої якісної експлуатації силових передач транспортних засобів в цілому.

Пропонований універсальний підхід до моделювання динаміки дискретно-континуальних моделей ГОП і ГДП, описуваних системами звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь в частинних похідних, дозволяє визначити динамічні характеристики гідромеханічних силових передач транспортних засобів, включаючи тиски і швидкості робочої рідини ГОП і ГДП.

Вказаний підхід може бути застосований для вирішення завдань аналізу скільки завгодно складних за структурою лінійних та нелінійних моделей силових передач при будь-якому рівні деталізації математичного опису елементів ГОП і ГДП та у будь-яких режимах їх функціонування.

ПРО ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Т. О. Заболотько

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

zabolotkota@meta.ua

При математичному моделюванні деяких реальних процесів виникають параболічні рівняння зі зростаючими на нескінченності коефіцієнтами. Важливою характеристикою таких рівнянь і, взагалі, всіх параболічних рівнянь є фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК). Знання властивостей цього розв'язку дозволяє довести теореми про коректну розв'язність задачі Коші, інтегральне зображення і різноманітні властивості розв'язків.

Розглядається рівняння вигляду

$$L\left(t,\partial_t,\partial_x\right)u\left(t,x\right) := \partial_t u\left(t,x\right) - \sum_{|k|\le 2b} a_k\left(t\right)\partial_x^k u\left(t,x\right) -$$

$$-a\sum_{j=1}^{n}\partial_{x_j}\left(x_j u\left(t,x\right)\right) = 0, \left(t,x\right)\in \Pi_{\mathrm{T}}, \tag{1}$$

де $b\in\mathbb{N}, a\in\mathbb{R},\ \Pi_{\mathrm{T}} := \left\{\left(t,x\right)\in\mathbb{R}^{n+1}\,\middle|\,t\in\left(0,\mathrm{T}\right],\ \ x:=\left(x_1,\dots,x_n\right)\in\mathbb{R}^n\right\}$, T — додатне число; $a_k, |k|\le 2b,$ — комплекснозначні функції, які визначені в $\overline{\Pi}_{\mathrm{T}}$.

Припустимо, що виконуються такі умови:

1) рівняння (1) рівномірно параболічне за І. Г.Петровським у $\overline{\Pi}_{\mathrm{T}}$, тобто

$$\exists\delta>0\ \ \forall\left(t,x\right)\in\overline{\Pi}_{\mathrm{T}}\ \ \forall\sigma\in\mathbb{R}^n : \mathrm{Re}\sum_{|k|=2b} a_k\left(t,x\right)\left(i\sigma\right)^k \le -\delta\left|\sigma\right|^{2b},$$

де i — уявна одиниця;

2) функції $a_k, |k|\le 2b,$ в $\overline{\Pi}_{\mathrm{T}}$ неперервні, обмежені та задовольняють умову Гельдера в такому розумінні:

$$\exists \mathrm{H}>0\ \ \exists\alpha\in\left(0,1\right]\ \ \forall\left\{\left(t,x\right),\left(\tau,y\right)\right\}\subset\overline{\Pi}_{\mathrm{T}} :$$

$$\left|a_k\left(t,x\right)-a_k\left(\tau,y\right)\right| \le \mathrm{H}\left(\left(q\left(h\right)\right)^{\alpha/2b} + \left|e^{ah}x-y\right|^{\alpha}\right),$$

де $h=t-\tau$, коли $t\ne\tau$, і h — довільне додатне число, якщо $t=\tau$,

$$q\left(h\right) := \begin{cases} \dfrac{1}{2ab}\left(e^{2abh}-1\right), a\ne 0,\\ h, a=0.\end{cases}$$

За вказаних умов для рівняння (1) доведено існування ФРЗК Z, одержано оцінки функції Z і її похідних, установлено інші властивості ФРЗК.

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ ЗА ДОПОМОГОЮ R КЕРУЮЧИХ ДІЙ

А. Л. Заворотний, В. С. Касьянюк
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна
veda.sia@mail.ru

У роботах Н. Н. Красовського [1], А. Г. Бутковського [2] показано, що розв'язок задачі оптимального керування лінійними системами, що описується звичайними диференційними рівняннями та лінійними системами з розподіленими параметрами, можуть бути зведені до класичної проблеми моментів [1], зокрема, деякі з них — до скінченої проблеми моментів. Розглянемо випадок, коли дані спотворені шумом.

Маємо систему лінійних інтегральних рівнянь першого роду

$$\int_D \sum_{i=1}^{r} q_{ki}(t)\, u_i(t)\, dt = c_k,\ k = \overline{1,n}, \tag{1}$$

де c_k можуть містити випадкові похибки. В такому випадку математична модель для оцінки керуючих дій («керм») з (1) має вигляд

$$y = Gu + \nu, \tag{2}$$

де $y = (c_1, \dots, c_n)^{\mathrm{T}}$ — вектор даних; $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))^{\mathrm{T}}$, $u_i(t) \in L_2[D]$ — шукане керування; $G = \int_D g(t)\cdot dt$, $g(t) = (q_{k,i}(t))_{k,i=1}^{n.r}$ — матриця, що характеризує перехідну функцію системи, $q_{k,i}(t) \in L_2[D]$; $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)^{\mathrm{T}}$ — вектор шумів, заданих випадковими величинами, про які відомо, що перший момент $M(\nu) = 0$ та коваріаційна матриця $M(\nu\nu^*) = R$, $\det R \neq 0$.

Запропонований авторами підхід полягає у знаходженні такого керування $\hat{u}(t)$, яке має одночасно незменшуваний рівень шумового фону (дисперсію) та величину операторної нев'язки, що характеризує артефакт («хибний сигнал»). Для цього, подіявши на рівняння (2) лінійним оператором $B = (b_1, \dots, b_n)$, перетворимо його до вигляду

$$By - \Pi_t^{\lambda} u = \left(BG - \Pi_t^{\lambda}\right) u + B\nu, \tag{3}$$

де $\Pi_t^{\lambda}\cdot = \int_D \pi_t^{\lambda}(\xi)\cdot d\xi$, $\pi_t^{\lambda}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda}, |\xi - t| \le \varepsilon \\ 0, |\xi - t| > \varepsilon \end{cases}$, причому $\Pi_t^{\lambda} u \xrightarrow[\lambda \to 0]{} u(t)$

З рівності (3) видно, що величина By може бути прийнята за оцінку керування $u\left(t\right)$: $\hat{u}\left(t\right)=\Pi_t^\lambda u$, якщо B знайти з умови мінімізації двох добутків з правої частини (3), перший з яких є артефактом шуканої оцінки, другий — її шумовим фоном, причому величина артефакту залежить від невідомої величини — керування $u\left(t\right)$.

Для розв'язку цієї задачі авторами був запропонований Парето-оптимальний підхід [3], який полягає у знаходженні оператора B як розв'язку задачі двокритеріальної мінімізації за Парето

$$\begin{cases}\phi\left(B\right)=\left\|BG-\Pi_t^\lambda\right\|^2\to\min\limits_B\\ h\left(B\right)=\left\|B\nu\right\|^2\to\min\limits_B\end{cases}.\tag{4}$$

Тут $\phi\left(B\right)$ та $h\left(B\right)$ — операторна нев'язка та рівень шумового фону (дисперсія) відповідно.

Розв`язок задачі (4) приводить до континуальної множини «рівноправних» оцінок $\hat{u}\left(t\right)$, що задається формулою

$$\hat{u}\left(t\right)=\Pi_t^\lambda g^*\left(K+\alpha R\right)^{-1}y,\ K=\int\limits_D g\left(t\right)g^*\left(t\right)dt,\ +0\le\alpha<\infty.\tag{5}$$

Тут α — параметр Парето-оптимізації, за допомогою якого можна встановлювати необхідне співвідношення між критеріями оптимізації, які, як було з`ясовано в ході розв`язання задачі (4), мають протилежні тенденції щодо зростання при зміні параметра Парето-оптимізації. При зростанні α від $+0$ до ∞ $h\left(B\right)$ монотонно спадає до 0, а $\phi\left(B\right)$ монотонно зростає до $\left\|\Pi_t^\lambda\right\|^2$ і має хоча б одну точку перегину.

Аналогічним чином можна підходити до розв'язання задачі оптимального фінітного керування лінійною динамічною системою із зосередженими параметрами, яка описується системою диференційних рівнянь

$$x'(t)=Ax(t)+Bu(t)+\psi(t),\ t\in[a,b],$$

де $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$, $B=(b_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ — матриці, елементи яких не залежать від t, $x(t)$, $\psi(t)$ і $u(t)$ — вектор-функції стану, збурення і керування системи. Ця система після заміни змінних і перетворення Фур'є зводиться до системи інтегральних відносно $u(t)$ рівнянь, для розв'язання якої використовуються алгоритми, наведені вище.

Список літератури

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 428 с.

2. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1965. — 474 с.

3. Бєлов Ю. А., Касьянюк В. С. Математичні методи і алгоритми обробки в задачі інтерпретації непрямих вимірювань. — К.: Науковий світ, 2000. — 79 с.

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ ВАРІАЦІЙНОЇ НЕРІВНОСТІ

Н. В. Задоянчук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
ninellll@i.ua

Основним об'єктом дослідження є наступна задача оптимального керування для виродженої параболічної варіаційної нерівності з керуванням у правій частині:

$$I\left(u,y\right)=\frac{1}{2}y-\frac{y_{ad}}{\sqrt{\rho}}_{L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega,\rho dx\right)\right)}+\frac{1}{2}u_{L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega,\rho^{-1}dx\right)\right)}\to inf, \tag{1}$$

$$\int_0^T\int_\Omega \dot{v}\left(v-y\right)\rho dxdt+\int_0^T\int_\Omega\left(\nabla y,\nabla\left(v-y\right)\right)_{R^N}\rho dxdt\geq$$

$$\int_0^T\int_\Omega f\left(v-y\right)dxdt+\int_0^T\int_\Omega u\left(v-y\right)dxdt, \tag{2}$$

$$v\in K,\dot{v}\in L^2\left(0,T;(W_0^{1,2}\left(\Omega,\rho dx\right)^*\right),v\left(0,x\right)=0,$$

$$u\in U_d,y\in K, \tag{3}$$

$$y\left(0,x\right)=0,x\in\Omega. \tag{4}$$

Тут Ω — деяка непорожня відкрита підмножина простору $\mathbb{R}^N$, $N\geq 3$, $f\in L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega,\rho^{-1}dx\right)\right)$і $y_{ad}\in L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega,\rho dx\right)\right)$ — задані розподілення, $L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega,\rho dx\right)\right)$ і $L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega,\rho^{-1}dx\right)\right)$ — вагові гільбертові простори, пов'язані з виродженою вагою $\rho\in L^1\left(\Omega\right)$, $W_0^{1,2}\left(\Omega,\rho dx\right)$ — множина усіх функцій $y\in W_0^{1,1}\left(\Omega\right)$, для яких виконуються умови: $\rho y^2\in L^1\left(\Omega\right),\rho\left|\nabla y\right|^2\in L^1\left(\Omega\right)$,$(W_0^{1,2}\left(\Omega,\rho dx\right)^*$ — спряжений простір до $W_0^{1,2}\left(\Omega,\rho dx\right)$, K — замкнена опукла підмножина простору $L^2\left(0,T;W_0^{1,2}\left(\Omega,\rho dx\right)\right)$, множина U_d визначається наступним чином:

$$U_d=\left\{u\in L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega,\rho^{-1}dx\right)\right):u-u_{0L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega,\rho^{-1}dx\right)\right)}\leq R\right\},$$

де $u_{L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega,\rho^{-1}dx\right)\right)}=\int_0^T\int_\Omega\frac{u^2}{\rho}dxdt, u_0\in L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega,\rho^{-1}dx\right)\right)$.

Характерною рисою вироджених параболічних нерівностей є та обставина, що проблема їх розв'язності суттєво залежить від властивостей вагової функції ρ. Той факт, що ця функція може бути необмеженою на області Ω чи досягати нуля на підмножинах нульової міри Лебега, означає, що пов'язаний із нерівністю (2) диференціальний оператор втрачає властивості, які зазвичай використовуються при дослідженні розв'язності задач типу (1)–(4). В межах даного дослідження знайдено достатні умови на вагову функцію ρ, за яких за допомогою нерівності Харді — Пуанкаре доведено розв'язність задачі (1)–(4).

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА СО СПЕЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ В ЯДРЕ

С. М. Заикина

Волгоградский государственный университет, Волгоград, Россия

svetzai@inbox.ru

Многие прикладные задачи приводят к необходимости рассматривать интегральные уравнения со специальными функциями в ядрах.

Рассмотрим интегральный оператор, содержащий обобщённую конфлюэнтную гипергеометрическую функцию ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}$ [1]

$$\int_0^x g(t)f(x-t)\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-b(st)^{\gamma})dt = F(x),$$

где $0 < x < \infty$; $0 < x < \infty$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\tau - \beta < 1$.

Непосредственными вычислениями убеждаемся в справедливости равенства

$$L\left\{F(x);s\right\} = \tilde{L}\left\{g(t);s\right\} \cdot L\left\{f(z);s\right\}.$$

Доказана

Теорема. *При условии* $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\tau - \beta < 1$, $h(x) \in L(0;+\infty)$ *интегральное уравнение Вольтерра первого рода*

$$\int_0^x g(t)(x-t)^{\gamma-1}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-b(st)^{\gamma})dt = h(x),$$

имеет решение

$$g(t) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty x^{\gamma-1}t^{-1}\,K(xt)\cdot L\left\{h(y);x\right\}dx\,,$$

где

$$K(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{x^s}{\xi(s)}\,ds\,,$$

$$\xi(s) = {}_2\Psi_1\left[\left.\begin{matrix}(a,\tau);\,(s,\gamma)\\(c,\beta)\end{matrix}\right| -b\right].$$

При доказательстве теоремы применяется формула обращения для интегрального преобразования $\tilde{L}\left\{g(t);s\right\}$ [1].

Список литературы

1. *Вірченко Н. О., Заїкіна С. М.* Про нові узагальнені інтегральні перетворення. — Доповіді НАН України. — 2010. — № 5. — С. 11–17.

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОПЕРЕЖАЮЩЕ-ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

А. Н. Зарубин

Орловский государственный университет, Орел, Россия

aleks_zarubin@mail.ru

Уравнение смешанного эллиптико-гиперболического опережающе-запаздывающего типа с параллельными линиями вырождения

$$U_{xx}(x,y)+\operatorname{sgn} y(2h-y)U_{yy}(x,y)=$$
$$=\left[R_x^{\tau}H(x)+R_x^{-\tau}H(2\tau-x)\right]\left[H\left((2h-y)(y-h)\right)U(x,y-h)+\right.$$
$$\left.+H\left(y(h-y)\right)U(x,y+h)+H\left(y(y-2h)\right)U(x,2h-y)\right],\qquad(1)$$

$0<\tau,h\equiv const,H(\xi)$ — функция Хевисайда; R_x^{Θ} — оператор сдвига по $x:R_x^{\Theta}q(x)=q(x-\Theta)$; рассмотрим в области $D=D^+\cup D^-\cup I_0\cup I_1$, где

$$D^+=\left\{(x,y):0<x<2\tau,\ 0<y<2h\right\}=\bigcup_{k,n=0}^{1}D_{kn}^+\cup J_0\cup J_1$$

и $D^-=\bigcup_{k,n=0}^{1}D_{kn}^-$ – эллиптическая и гиперболическая части области D, причем

$$D_{kn}^+=\left\{(x,y):k\tau<x<(k+1)\tau,nh<y<(n+1)h\right\}(k,n=0,1),$$
$$D_{kn}^-=\left\{(x,y):(-1)^n(2nh-y)+k\tau<x<(-1)^n(y-2nh)+(k+1)\tau,\right.$$
$$\left.-2nh-\tau/2<(-1)^n y<-2nh\right\}(k,n=0,1),$$

а

$$J_0=\left\{(x,y):x=\tau,0<y<2h\right\},J_1=\left\{(x,y):0<x<2\tau,y=h\right\},$$
$$I_n=\bigcup_{k=0}^{1}I_{kn},$$

где

$$I_{kn}=\left\{(x,y):k\tau<x<(k+1)\tau,y=2nh\right\}(n=0,1).$$

Пусть $D_{kn}=D_{kn}^+\cup D_{kn}^-\cup I_{kn}\,(k,n=0,1)$ и $D_k=\bigcup_{n=0}^{1}D_{kn}\,(k=0,1)$.

Задача T. Найти в области D функцию

$$U(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D \setminus J_0) \cap C^2(D \setminus (J_0 \cup J_1 \cup I_0 \cup I_1)),$$

удовлетворяющую уравнению (1), краевым условиям

$$U(0,y) = U(2\tau, y) = 0, \;\; 0 \le y \le 2h,$$

$$U\Big(x, 2nh - (-1)^n (x - k\tau)\Big) = \psi_{kn}(x), k\tau \le x \le (2k+1)\tau / 2 \; (k, n = 0,1),$$

условиям сопряжения

$$U(x, 2nh+) = U(x, 2nh-) = \omega_n(x), \;\; 0 \le x \le 2\tau \; (n = 0,1),$$

$$U_y(x, 2nh+) = U_y(x, 2nh-) = \nu_n(x), \;\; 0 < x < 2\tau, x \ne \tau \; (n = 0,1),$$

условиям согласования $\psi_{0n} = 0 \quad (n = 0,1)$, где $\psi_{kn}(x)$ — заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

Теорема. Если функции

$$\psi_{kn}(x) \in C[k\tau, (2k+1)\tau / 2\;] \cap C^2(k\tau, (2k+1)\tau / 2\;)(k, n = 0,1),$$

абсолютно интегрируемы на $[k\tau, (2k+1)\tau / 2\;](k = 0,1), \psi'_{kn}(x)$ при $x \to k\tau(k = 0,1)$ допускает интегрируемую особенность, $\psi_{0n}(0) = 0$, то существует единственное при $h \le 1/2, \tau \le 1/\sqrt{2}$ решение $U(x,y)$ задачи T.

Единственность решения задачи T следует из полученных в $D^- u D^+$ на $y = 2kh, 0 < x < 2\tau(k = 0,1)$ неравенств соответственно

$$\beta_k = (-1)^k \int_0^{2\tau} \omega_k(x) \nu_k(x) dx \ge 0 (k = 0,1) \; u \beta_0 + \beta_1 \le 0,$$

$$\beta_0 + \beta_1 + \iint_{D^+} \Big[\big(1 - 2\tau^2 H(x - \tau)\big) U_x^2(x,y) +$$

$$+ \big(1 - 4h^2 H(\tau - x) H(y - h)\big) U_y^2(x,y) + U^2(x,y)\Big] dx dy \le 0.$$

Вопрос **существования решения** задачи T в области

$$D_{00} = D_{00}^+ \cup D_{00}^- \cup I_{00}$$

редуцируется к разрешимости разностного уравнения

$$\left(1 + i R_x^{2ih}\right)\left(\nu(x) + \int_0^x \nu(t) \frac{\partial}{\partial x} I_0\left(i\sqrt{t(x-t)}\right) dt\right) = q(x),$$

где $q(x) \in C^1(0, \tau)$.

СИНГУЛЯРНИЙ РОЗВ'ЯЗОК СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ВАРІАНТА МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ НЕТОНКИХ ПЛАСТИН

А. Г. Зеленський

Придніпровська державна академія будівництва та архітектури, Дніпропетровськ, Україна

a.zelensky@mail.ru

У роботі [1] наведена система диференціальних рівнянь 12-го порядку із частинними похідними, яка отримана на основі варіанта математичної теорії нетонких пружних пластин при статичному поперечному навантаженні:

$$L_{i,1}u_1 + L_{i,2}v_1 + L_{i,3}u_3 + L_{i,4}v_3 + L_{i,5}w_1 + L_{i,6}w_3 = L_{iq}\,,\ (i = 1,\ 2,\ ...,\ 6), \quad (1)$$

де u_1, ..., w_3 — шукані функції двох незалежних змінних; $L_{i,1}$, ..., $L_{i,6}$ — диференціальні оператори 2-го та 1-го порядку; L_{iq} — функції інтенсивності зовнішнього поперечного навантаження.

Сингулярний розв'язок будується для однорідної системи (1). Шляхом певних перетворень вона зведена до двох незалежних однорідних систем: одна (четвертого порядку) залежить від двох вихрових функцій, а інша (восьмого порядку) — від функцій $w_1(x,y)$ і $w_3(x,y)$. Операторним методом остання система зведена до одного диференціального рівняння восьмого порядку із частинними похідними відносно деякої шуканої функції $\Phi(x,y)$:

$$\nabla^2\nabla^2(K_{4\Pi}\nabla^4 + K_{2\Pi}\nabla^2 + K_{0\Pi})\Phi = 0, \quad (2)$$

де $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$; $K_{4\Pi}$, $K_{2\Pi}$, $K_{0\Pi}$ — сталі.

Сингулярний розв'язок рівняння (2) знаходиться послідовним його інтегруванням, використовуючи при цьому метод зниження порядку диференціального рівняння [2]. Шукані функції u_1, ..., w_3 визначаються за відповідними залежностями, які отримані із (1).

Список літератури

1. Зеленський А. Г. Моделі і методи аналітичної теорії нетонких пластин та пологих оболонок при статичному навантаженні / А. Г. Зеленський // Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури. Зб. наук. праць. — 2011. — № 1–2. — С. 21–30.

2. Зеленський А. Г. Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними в теорії пластин середньої товщини / А. Г. Зеленський // Вісник Дніпропетр. ун-ту. — 2011. — Т. 19, №7. Серія механіка. В. 15, Т. 1. — С. 81–89.

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Е. Зернов, И. В. Келюх
Южноукраинский национальный педагогический университет имени К. Д. Ушинского, Одесса, Украина
zernov.o@gmail.com, user85085@mail.ru

Рассматриваются задачи Коши

$$\alpha_1(t)x'(t) = f_1(t,x(g(t)),y(g(t)),x'(h(t)),y'(h(t))), \tag{1}$$

$$y'(t) = f_2(t,x(g(t)),y(g(t)),x'(h(t)),y'(h(t))), \tag{2}$$

$$x(0) = 0,\ y(0) = 0 \tag{3}$$

и

$$\alpha_1(t)x'(t) = f_1(t,x(g(t)),y(g(t)),x'(h(t)),y'(h(t))) \tag{4}$$

$$\alpha_2(t)y'(t) = f_2(t,x(g(t)),y(g(t)),x'(h(t)),y'(h(t))) \tag{5}$$

$$x(0) = 0,\ y(0) = 0 \tag{6}$$

где $x:(0,\tau)\to\mathbb{R}, y:(0,\tau)\to\mathbb{R}$ — неизвестные функции, $\alpha_i:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ — непрерывные функции, $\lim\limits_{t\to+0}\alpha_i(t)=0,\ i\in\{1,2\}$, $f_i : D\to\mathbb{R}$ — непрерывные функции, $i\in\{1,2\}$, $D\subset(0,\tau)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $g:(0,\tau)\to(0,+\infty)$, $h:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ — непрерывные функции, $0<g(t)\le t$, $0<h(t)\le t$, $t\in(0,\tau)$.

Формулируются эффективные достаточные условия, при которых у каждой из задач (1)–(3) и (4)–(6) имеется непустое множество непрерывно дифференцируемых решений

$$x:(0,\sigma)\to\mathbb{R}, y:(0,\sigma)\to\mathbb{R},$$

где $\sigma\in(0,\tau)$ — достаточно мало, обладающих определенными свойствами при $t\in(0,\sigma)$. Обсуждается вопрос и о числе таких решений. Для каждого из найденных решений исследовано и поведение первых производных при $t\in(0,\sigma)$

О СУЩЕСТВОВАНИИ И АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ НЕЯВНОГО ВИДА

А. Е. Зернов, Ю. В. Кузина
Южноукраинский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского,
Военная академия, Одесса, Украина
zernov.o@gmail.com, yuliak@te.net.ua

Рассматривается задача Коши

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0,\ x(0) = 0,$$

где $x : (0, \tau) \to \mathbb{R}$ — неизвестная функция, $F : D \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $D \subset (0, \tau) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Решением данной задачи называется непрерывно дифференцируемая функция $x : (0, \sigma) \to \mathbb{R}$, $\sigma \in (0, \tau)$ которая тождественно удовлетворяет рассматриваемому дифференциальному уравнению при всех $t \in \left(0, \sigma\right)$ и, кроме того, удовлетворяет условию

$$\lim_{t \to +0} x(t) = 0.$$

Формулируются достаточные условия, при выполнении которых у рассматриваемой задачи существует непустое множество решений $x : \left(0, \sigma\right) \to \mathbb{R}$ ($\sigma \in (0, \tau)$, σ — достаточно мало), каждое из которых обладает свойством

$$x(t) = \varphi(t)\ (1 + o(1))\ ,\quad t \to +0,$$

где $\varphi : (0, \sigma) \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, которая строится по условию задачи. $\varphi(t) \to 0,\quad t \to +0.$

Определяется количество таких решений, так же исследуется асимптотическое поведение первых производных указанных решений при $t \to +0$. В ходе исследований используются качественные методы теории дифференциальных уравнений и теории функций.

Приводятся конкретные примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ В ПЕРІОДИЧНИХ СТРУКТУРАХ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ БІГАРМОНІЙНИМ ОПЕРАТОРОМ

Г. М. Зражевський, **В. Ф. Зражевська**
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
zgrig@univ.kiev.ua, vera.zrazhevska@gmail.com

У пропонованій роботі розглянуто ряд одно та двовимірних задач, які стосуються знаходженню розв’язків у вигляді хвиль, що поширюються, в механічних періодичних системах, з бігармонійною головною частиною диференціального оператора. Запропоновано аналітичні та чисельні процедури знаходження та аналізу розв’язку.

Перша частина роботи присвячена розв’язанню одновимірних задач теорії поширення хвиль в нескінченних балках Бернуллі, що мають фізичну та геометричну періодичну структуру. Геометрична періодичність обумовлюється зміною характеристик поперечного перерізу та періодично розташованими опорами різного модельного вигляду. Розглянуто консольні, шарнірні опори та опори з імпедансними характеристиками. На періодичність опор накладено кусково постійну періодичність зміни інерції поперечного перерізу. Така механічна система, при гармонійному збуренні, описується диференціальним рівнянням Гельмгольця з диференціальним оператором четвертого порядку. Одновимірність задачі дозволяє шляхом використання теореми Флоке та побудови функції Гріна звести задачу до заходження розв’язку однорідної системи 8-го порядку. Умова існування нетривіального періодичного з мультиплікатором Флоке розв’язку призводить до алгебраїчного рівняння 4-го порядку. Відносна простота визначника системи дозволила довести існування розв’язків, що зв’язані співвідношенням інверсії. Аналітично доведено, що наявні комплексно спряжені корені рівні за модулем одиниці. Це дозволило сформулювати простий критерій визначення вікон прозорості без знаходження коренів рівняння. Проведено аналіз деформації областей прозорості в залежності від зміни характеристик періодичності. Показано, що в граничних випадках розв’язки сполучаються неперервним чином. Проаналізовано фазові зсуви в областях прозорості.

У другій частині роботи розглянуто поширення хвиль в двовимірній одно періодичній нескінченній пластині-плиті, що описується моделлю Кіргофа. Задача вочевидь зводиться до рівняння Гельмгольця з бігармонійним оператором в нескінченній полосі з періодичними коефіцієнтами. Бічні границі пластини вважаються консольно закріпленими. Періодичність обумовлюється кусково постійною періодичною зміною циліндричної жорсткості вздовж центральної осі плити. Безпосереднє використання теореми Флоке в цьому випадку вочевидь неможливе. Для знаходження розв’язку був використаний метод часткової дискретизації з використанням тригонометричних функцій (після розбиття розв’язку на симетричну та антисиметричну частини) як базисних функцій, що дозволяють автоматично задовольняти граничні умови. Для мінімізації нев’язки використаний метод Гальоркіна. Розв'язки будувались для різних частин періоду та використовувалась стандартна процедура зшивання на межі розділу згідно з методом часткових областей. Застосування до редукованої системи диференціальних рівнянь теореми Флоке призвело до отримання нескінченної системи алгебраїчних рівнянь. Ортогональність базисних функцій обумовила блокову структуру системи за модальними числами. Аналітично проаналізовано алгебраїчні рівняння щодо мультиплікатору та доведено, що комплекно спряжені корені рівні за модулем одиниці. Сформульовано простий критерій визначення вікон прозорості без знаходження коренів рівняння для конкретного модального числа. Проведено аналіз деформації областей прозорості в залежності від зміни характеристик періодичності. Продемонстровано, яким чином змінюються фазові та амплітудні характеристики хвилі в зонах прозорості в залежності від безрозмірних параметрів періодичності. Далі показано, що одноперіодична плита є частковим випадком двоперіодичної нескінченної пластини з кінематично зафіксованим мультиплікатором поширення збурення в поперечному напрямку. Показано зв'язок мультиплікаторів Блоха з частковими мультиплікаторами Флоке в цьому випадку.

Результати роботи можуть бути використані при моделюванні та розрахунку електромеханічних пристроїв, що використовують пружні елементи в якості перетворювачів сигналу.

ПРО ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ ДИСКРЕТНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є НА НЕРІВНОМІРНІЙ СІТЦІ

Г. М. Зражевський, **В. Ф. Зражевська**

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
zgrig@univ.kiev.ua, vera.zrazhevska@gmail.com

Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) є класичним потужним математичним апаратом, що застосовується практично в усіх областях механіки та фізики [1, 2]. Значна кількість механічних та фізичних моделей як детермінованих, так і стохастичних побудована з використанням ДПФ. Особливість побудови таких моделей полягає в тому, що на основі вихідної інформації будується спектр, що інформаційно еквівалентний поведінці системи в актуальному просторі [1, 2]. Отже, основою моделі виступають саме спектральні коефіцієнти. Але, в багатьох задачах спектральний розклад може інтерпретуватись, як відрізок ряду Фур'є апроксимації заданої чи шуканої функції. Отже, з іншої точки зору, ДПФ є потужним апаратом теорії наближення функцій. В якості типового прикладу можна навести тригонометричні розклади розв'язання лінійних граничних задач механіки методом часткових областей. Такі апроксимації повністю вкладаються в рамки теорії зважених нев'язок [3, 4]. Це дозволяє використати ідеї та підходи до побудови алгоритмів ДПФ альтернативний математичний апарат чисельних методів.

Слід зауважити, що при розв'язанні багатьох задач повинна використовуватись нерівномірна сітка розбиття в актуальному просторі. Це може бути викликано як наприклад, неможливістю отримання спостережень на регулярній основі, що є типовим для фізичних явищ, так і вимогами точності розв'язання задач, коли функції мають нерівномірні градієнти, наприклад в задачах контактної механіки в околі точок зміни типу граничних умов. В той же час, класична схема ДПФ передбачає саме розклади на рівномірній сітці. Необхідність застосування нерівномірних сіток обумовила велику кількість наукових праць, в яких розглянуті різні підходи до побудови елементів ДПФ на нерівномірних сітках [1, 2, 5, 6]. При цьому, основна увага приділяється визначенню достатніх умов повноти спектральної інформації в залежності від характеристик сітки та побудови оцінок спектру потужності. Цієї інформації, як правило, достатньо для побудови детермінованих та стохастичних моделей та оцінки їх адекватності [5, 6]. В деяких випадках, наприклад при наближеному розв'язанні граничних задач, цього недостатньо, оскільки основна теорема апроксимації для отримання коректного наближення розв'язку вимагає граничного прямування до точного розв'язку. Відомі результати, в загальному випадку не дають змогу забезпечити виконання цієї вимоги для випадку нерівномірної сітки.

Таким чином, в даному дослідженні пропонується новий підхід до побудови ДПФ на нерівномірній сітці на основі методу зважених нев'язок. За основу обрано 3 методи – метод Гальоркіна, метод точкової колокації, що є широковживаними в механіці та фізиці, а також метод найменших квадратів, що широко використовується в фізиці та теорії часових рядів.

У першій частині дослідження, строго математично показано, що класичне використання скінченних тригонометричних сум для побудови ДПФ на рівномірній сітці еквівалентне методу колокацій, методу Гальоркіна та методу найменших квадратів (в останніх двох випадках еквівалентність досягається при використанні складених квадратурних формул трапецій для отримання дискретного квадратичного функціоналу, що підлягає мінімізації).

У другій частині, ці результати узагальнюються на випадок нерівномірної сітки. Всі три методи в цьому випадку демонструють відмінність та вимагають індивідуального підходу. Так, показано, що матриця апроксимації в колокаційному підході стає погано обумовленою, а коефіцієнти апроксимації (що є взагалі кажучи, коефіцієнтами інтерполяції) не є спектральними коефіцієнтами. В цьому випадку, запропоновано та математично обґрунтовано новий метод, що базується на аналітичному (полігармонійному) продовженні апроксимованої функції на доповненій області визначення. Показано, що в цьому випадку обумовленість системи не змінюється, але коефіцієнти апроксимації є точними значеннями спектральних коефіцієнтів. Запропоновано алгоритм регуляризації матриці апроксимації. Для випадку мінімізації середньоквадратичного дискретного функціоналу, окрім методу доповнення запропоновано також більш ефективний метод, що базується на доповненій складеній квадратурній формулі. В цьому випадку система є регулярною та гарно обумовленою. На частинних прикладах продемонстровано ефективність використання запропонованих методів для отримання спектру функції з нерівномірним градієнтом на нерівномірній сітці. Результати свідчать про суттєве підвищення точності отримання спектральних коефіцієнтів в порівнянні з використанням рівномірної сітки.

Список літератури

1. Дженкинс Г. Ваттс В. Спектральный анализ и его приложения. Т. 1. — М.: Мир, 1971. — 316 с.

2. Марпл-младший С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. — М.: Мир, 1990. — 265 с.

3. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. — М.: Мир, 1986. — 318 с.

4. Витязев В. В. Анализ неравномерный временных рядов. — С.-Пб.: Изд-во С.-Петербургского университета, Учебное пособие. — 68 с.

5. Vityasev V. V. Time Interferometer: a new tool of spectral analysis of time series. Astron. and Astrophys. Trans., 1994 Vol. 5, pp. 177–210.

6. Roberts D. H., Lehar J., Dreher J.W. Time Series. Analisis with CLEAN. I. Derivation of a Spectrum. Astrophys. J., 1987 No. 4, pp. 968–989.

ОБЩАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕСУЩЕГО ОСТОВА БЕЗРИГЕЛЬНОЙ СТВОЛЬНО-КАРКАСНОЙ КОНСТРУКТИВНОЙ СИСТЕМЫ ВЫСОТНОГО ЗДАНИЯ

В. К. Иноземцев, О. В. Иноземцева, Р. В. Мищенко

Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина, Саратов, Россия

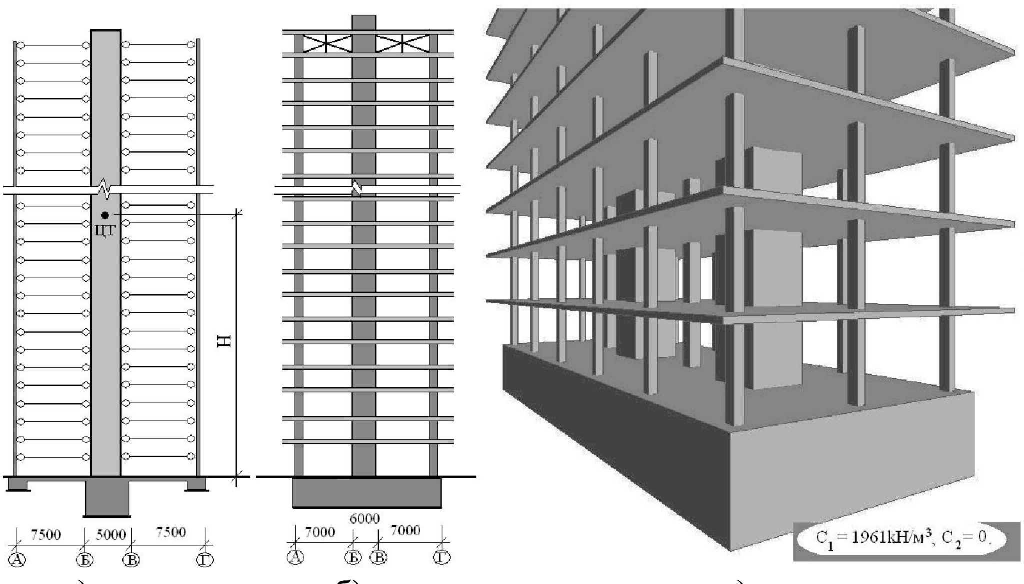
mdt@sstu.ru

В качестве примера рассмотрим задачу бифуркационной устойчивости системы в виде несущего остова ствольно-каркасной конструктивной системы высотного здания и деформируемого основания.

Для несущего остова ствольно-каркасной конструктивной системы сопряжения элементов каркаса (ригелей) со стволом шарнирное (Рис. 1а). Общая устойчивость, как и восприятие горизонтальных (ветровых) нагрузок обеспечивается ядром жесткости (стволом несущего остова).

Другой вариант конструктивной системы несущего остова — ствольно-каркасная, безригельная (рис.1б). Общая устойчивость несущего остова обеспечивается колоннами, диафрагмами жесткости в виде ствола и горизонтальными жесткими дисками перекрытий и покрытия (рис. 1б).

Расположение вертикальных связей в плане здания в виде стволов симметрично расположенных относительно центральной оси перпендикулярной направлению с наименьшим центральным моментом инерции площади подошвы фундаментной плиты (рис. 1б). Размеры стволов указаны на рис. 1б. Жесткость основания под фундаментной плитой примем в соответствии с гипотезой Винклера: C_1=1961kH/м^3, C_2=0. Вертикальные размеры указаны на рис. 1в. Размеры фундаментной плиты в плане 20000×50000 мм.



а) б) в)

Рис. 1

Рассмотрим общую устойчивость высотного здания относительно оси с наименьшим центральным моментом инерции площади основания фундаментной плиты.

Введем понятие вириала (V) сил тяжести относительно центра тяжести основания фундаментной плиты согласно [2], который будет выражать параметрическую нагрузку системы:

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} H_i \cdot \sum_{i=1}^{N} P_i; \tag{1}$$

где: P_i, H_i — вес (16455kH) и высота (5м) этажа здания.

В соответствии с [2,3] критическое значение вириала будет равно:

$$V_{kp} = C_1 J_{oc}; \tag{2}$$

Здесь: J_{oc} — наименьший центральный момент инерции площади основания фундаментной плиты.

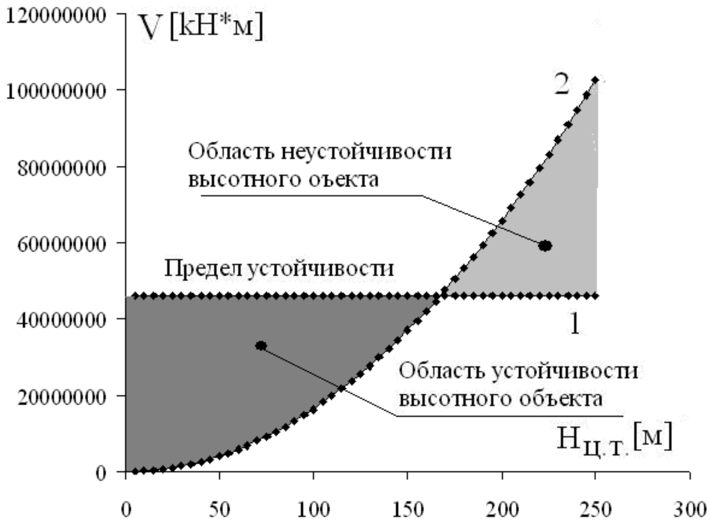


Рис. 2

На рис. 2 сопоставляются вириал (V) сил тяжести относительно центра тяжести основания фундаментной плиты согласно (1) и критическое значение вириала по (2). Это позволяет найти критическую высоту здания

Список литературы

1. Высотные здания /Tall buildings 1/06.

2. Коллатц Л. Задачи на собственные значения / Л. Коллатц. — М.: Наука, Гл. ред. физ. мат. лит., 1978.

3. Ржаницын А. Р. К вопросу о теоретическом весе стержневых конструкций; Сборник под ред. А. А. Гвоздева, И. М. Рабиновича М. М. Филоненко-Бородича, Исследования по теории сооружений, вып. IV(1949).

ОБЩАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕСУЩЕГО ОСТОВА РИГЕЛЬНОЙ СТВОЛЬНО-КАРКАСНОЙ КОНСТРУКТИВНОЙ СИСТЕМЫ ВЫСОТНОГО ОБЪЕКТА

В. К. Иноземцев, О. В. Иноземцева, Р. В. Мищенко
Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина, Саратов, Россия
mdt@sstu.ru

Одна из важных проблем для системы «высотный объект — деформируемое основание» — обеспечение его общей устойчивости. Под общей устойчивостью будем понимать устойчивость исходного строго вертикального состояния равновесия каркаса здания по отношению к смежным равновесным состояниям, характеризующимся эксцентриситетами центра сил тяжести. Потеря устойчивости исходного вертикального состояния равновесия может быть обусловлена не только жесткостными характеристиками каркаса здания, но и жесткостью деформируемого основания здания. Это тем более вероятно, так как для такого объекта основание является наиболее слабым конструктивным звеном. На ограниченном по площади пятне застройки на основание действует значительное давление от веса здания, а грунтовая среда основания значительно более деформативная, чем конструкционные материалы каркаса здания, такие как сталь и железобетон [1].

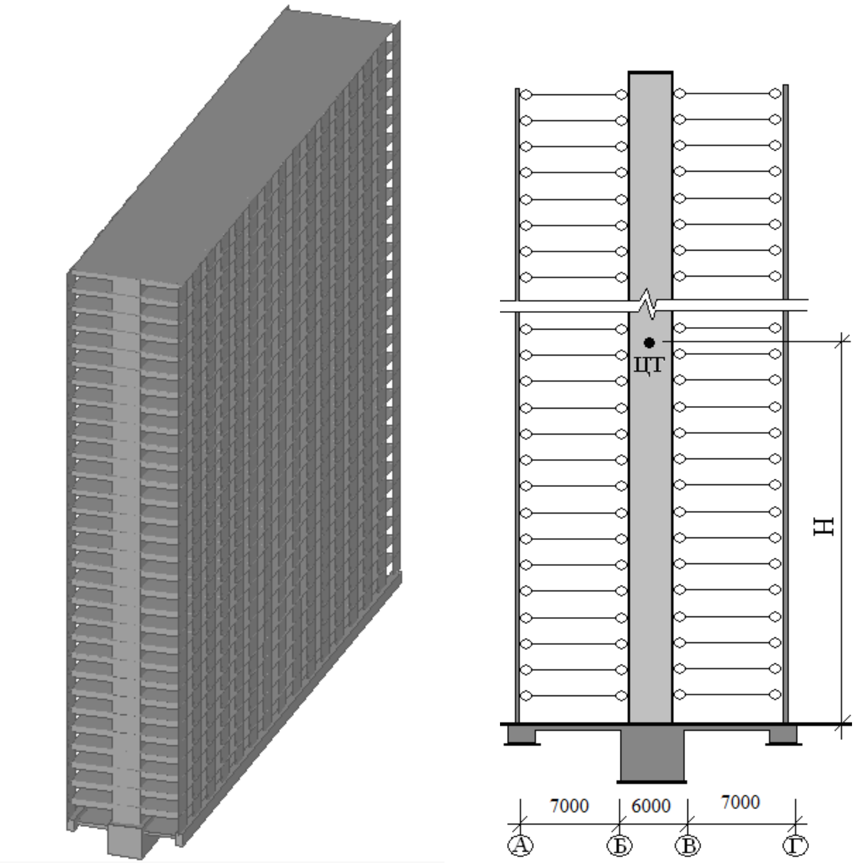
Для несущего остова ствольно-каркасной конструктивной системы сопряжения элементов каркаса (ригелей) со стволом шарнирное (рис. 1а). Общая устойчивость, как и восприятие горизонтальных (ветровых) нагрузок обеспечивается ядром жесткости (стволом несущего остова).

Для остова ствольно-каркасной конструктивной системы с шарнирным сопряжением элементов каркаса (ригелей) со стволом (рис. 1 а,б) возникает вопрос общей устойчивости ствола, фундамент которого взаимодействует с основанием с жесткостью C_1 [kH/м^3]. Потеря общей устойчивости ствола несущей системы вызовет деформации крена, что окажет неблагоприятное воздействие на узлы сопряжения элементов и геометрию каркаса.

Рассмотрим пример конструктивной системы несущего остова — ствольно-каркасная, ригельная (Рис.1 а). Общая устойчивость несущего остова обеспечивается пилонами, диафрагмами жесткости в виде ствола и горизонтальными жесткими дисками перекрытий и покрытия (рис. 1 б).

Размеры сечений вертикальных изменяются по высоте здания. Жесткость основания под фундаментной плитой примем в соответствии с гипотезой Винклера: C_1=6000 [kH/м^3], C_2=0. Вертикальные размеры указаны на рис. 2. Размеры фундаментной плиты в плане 6000×60000 мм.

Рассмотрим общую устойчивость высотного здания относительно оси с наименьшим центральным моментом инерции площади основания фундаментной плиты.



а) б)

Рис. 1

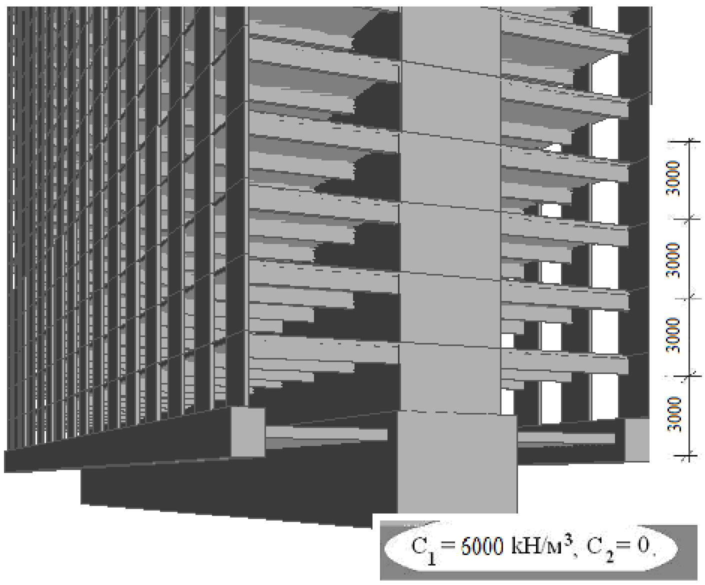
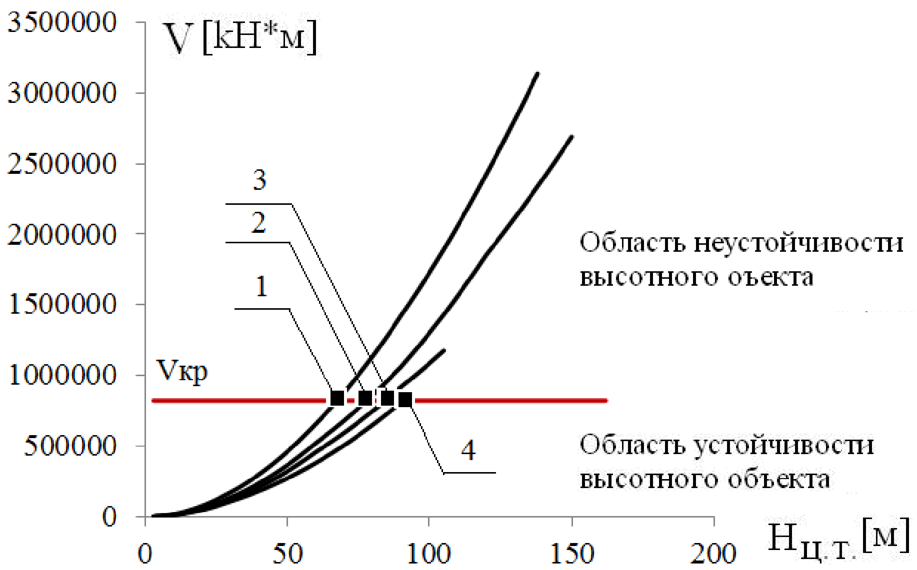


Рис. 2



Этажность 1 - 90 этажей; 2 - 50 этажей; 3 - 35 этажей; 4 - 30 этажей.

Рис. 3

На рис. 3 показаны графики изменения вириала V при различной высоте центра сил тяжести здания и критическое значение вириала.

Из графиков на рис. 3 видно, что при данном варианте несущего остова высотного здания его общая устойчивость будет обеспечена при высоте только до 90 метров.

Список литературы

1. Высотные здания/Tall buildings 1/06.

2. Коллатц Л. Задачи на собственные значения / Л. Коллатц. М.: Наука, Гл. ред. физ. мат. лит., 1978.

3. Ржаницын А. Р. К вопросу о теоретическом весе стержневых конструкций; Сборник под ред. А. А. Гвоздева, И.М. Рабиновича М. М. Филоненко-Бородича, Исследования по теории сооружений, вып. IV(1949).

БИФУРКАЦИОННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ «ВЫСОТНЫЙ ОБЪЕКТ — СЛОЙ ОСНОВАНИЯ» ПРИ ТЕХНОГЕННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ НА СВОЙСТВА ОСНОВАНИЯ

В. К. Иноземцев, О. В. Иноземцева, В. В. Семко

Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина, Саратов, Россия

mdt@sstu.ru

Рассматривается бифуркационный подход к решению задач общей устойчивости системы «высотный объект — слой основания» в условиях техногенных воздействий на свойства основания. К таким объектам, например, относятся регенераторы стекловаренных печей, представляющие собой относительно жесткие сооружения с высоко расположенным центром тяжести на фундаментных плитах, взаимодействующих со слоем основания в условиях высокотемпературного техногенного воздействия. Опоры железнодорожных эстакад, представляющих собой плоские рамные конструкции с высокорасположенным центром тяжести на фундаментных плитах, взаимодействующих со слоем основания, подвергающимся агрессивному воздействию технологических жидких сред.

Очевидно, что общая устойчивость такой системы во многом зависит от деформационных свойств основания, как наиболее слабого в деформационном смысле звена данной системы. Здесь особенно важно рассмотреть вопрос общей устойчивости системы в связи с внешними техногенными воздействиями, снижающими жесткостные свойства основания в процессе его эксплуатации.

В основе математической модели основания предлагается использовать классические уравнений равновесия Навье, записанные в инкрементальной форме [1]. В этом случае бифуркационный критерий устойчивости деформируемых упругопластических систем [2] можно распространить на новый класс задач общей устойчивости процесса деформирования систем «высотный объект – слой основания», записывая условия ее равновесия для «возмущенного» состояния.

Инкрементальная форма физических уравнений деформируемой среды основания на основе деформационной теории пластичности следует из условия, что коэффициент пропорциональности компонент девиатора напряжений компонентам девиатора деформаций λ определяется не только напряженным состоянием в точках объема деформируемый среды, но и состоянием ее физических параметров. Если изменение λ вызывается не только изменением напряженно-деформированного состояния $\Delta\lambda_\sigma$, но и возмущением физических параметров модели деформируемой среды $\Delta\lambda_p$, то:

$$\Delta\lambda = \Delta\lambda_\sigma + \Delta\lambda_p \tag{1}$$

Тогда искомыми величинами инкрементальной теории являются приращения компонент тензоров напряжений $(\Delta\sigma_{ij})$ и деформаций (Δe_{ij}), а полные тензоры напряжений и деформаций получаются суммированием найденных на предыдущих этапах нагружения приращений напряжений и деформаций:

$$\Delta\sigma_{ij} = \Delta\sigma_{ij}(\Delta e_{ij}, e_{ij}, \sigma_{ij}). \tag{2}$$

В линеаризованном виде данные соотношения могут быть записаны следующим образом:

$$\Delta\sigma_{ij} = J_{ijkl}\Delta e_{kl} + \Phi_{ij} \qquad \Delta e_{ij} = F_{ijkl}\Delta\sigma_{kl} + \Lambda_{ij} \tag{3}$$

где: $J_{ijkl}, \Phi_{ij}, F_{ijkl}, \Lambda_{ij}$ — функции переменных состояний (параметров деформируемой среды основания, являющихся постоянными на данном шаге). Приращения в инкрементальных теориях отсчитываются от текущих значений переменных состояния. Инкрементальная модель позволяет свести проблему устойчивости сооружения к задаче о собственных значениях. При этом на основе метода дискретизации [3] получаем неоднородную алгебраическую систему, позволяющую исследовать бифуркационную устойчивость системы «высотный объект – слой основания»:

$$L\begin{Bmatrix}\Delta W\\ \Delta U\end{Bmatrix} - PB\begin{Bmatrix}\Delta W\\ \Delta U\end{Bmatrix} = \Delta PD\begin{Bmatrix}W\\ U\end{Bmatrix} + \Delta\lambda C\begin{Bmatrix}W\\ U\end{Bmatrix} \tag{4}$$

Здесь: $\begin{Bmatrix}\Delta W\\ \Delta U\end{Bmatrix}$ — столбец приращений неизвестных (собственная функция), P — собственное значение при «замораживании» параметров возмущения ($\Delta P = 0; \quad \Delta\lambda = 0$), L, B, D и C — матрицы коэффициентов алгебраической задачи. Из равенства нулю, определителя алгебраической системы (4), следует значение бифуркационной критической нагрузки общей устойчивости высотного объекта. Система уравнений (4) позволяет при изменении параметров нагрузки и физических свойств среды основания системы «высотный объект – слой основания» прослеживать процесс нелинейного деформирования системы с малым начальным несовершенством, и исследовать ее общую устойчивость, определяя критическую нагрузку из условия $Э \to \infty$ (Э — эксцентриситет центра сил тяжести высотного объекта).

Список литературы

1. Иноземцев В. К. Математическая модель деформирования геомассивов. Применительно к деформационным процессам в основаниях сооружений / В. К. Иноземцев, В. И. Редков. — Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2006. – 412 с.
2. Клюшников В. Д. Устойчивость упруго-пластических систем / В.Д. Клюшников. — М.: Наука, 1980. — 240 с.
3. Коллатц Л. Задачи на собственные значения / Л. Коллатц. — М.: Наука, 1978.

ОБЩАЯ БИФУРКАЦИОННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И ДЕФОРМАЦИИ КРЕНА СИСТЕМЫ «ВЫСОТНЫЙ ОБЪЕКТ — ДЕФОРМИРУЕМОЕ ОСНОВАНИЕ»

В. К. Иноземцев, О. В. Иноземцева, В. В. Семко
Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина, Саратов, Россия
mdt@sstu.ru

Очевидно, что для высотного объекта (здания или сооружения) одна из важных проблем это его бифуркационная устойчивость, обеспечивающая общую устойчивость исходного строго вертикального состояния равновесия по отношению к смежным равновесным состояниям, характеризующимся эксцентриситетами центра сил тяжести. Если общая устойчивость высотного объекта обеспечена, то «несовершенства» строительного производства в виде кренов и деформаций не получат значительного развития [1,2].

В качестве примера рассмотрим плоскую расчетную схему (Рис. 1).

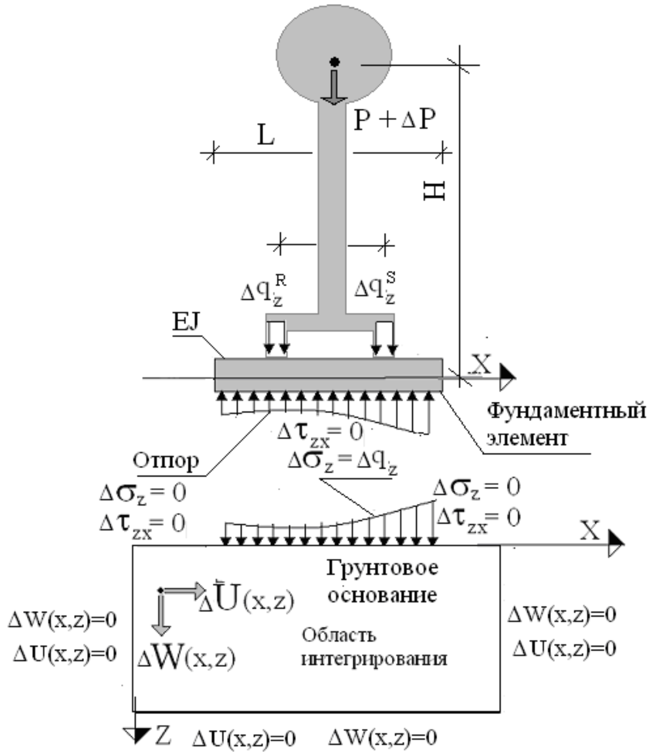


Рис. 1.

Для построения компьютерной модели, запишем относительно приращений геометрические и статические уравнения для плоской задачи, следующие из фундаментальной системы уравнений механики деформируемого твердого тела:

$$\Delta e_1 = \frac{\partial \Delta U}{\partial x}; \quad \Delta e_3 = \frac{\partial \Delta W}{\partial z}; \quad \Delta e_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta W}{\partial x} + \frac{\partial \Delta U}{\partial z}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial \Delta\sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \Delta\sigma_{13}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \Delta\sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \Delta\sigma_3}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Компьютерную модель задачи общей устойчивости для системы «высотный объект – деформируемое основание» будем строить, рассматривая уравнения «возмущенного» равновесия системы в приращениях. Тогда приращение «отпора» основания на j-ом шаге нагружения будет равно:

$$-\Delta q_{\text{отпора}} = \Delta q_z = EJ\frac{d^4\Delta W_j}{dx^4} - \begin{cases} 0 \\ \Delta q_R(\Delta W_j^{R,S}, \sum\limits_{i=1}^{j}\Delta W_i^{R,S}, \Delta V_j, \sum\limits_{i=1}^{j}\Delta V_i,) \\ 0 \\ \Delta q_S(\Delta W_j^{R,S}, \sum\limits_{i=1}^{j}\Delta W_i^{R,S}, \Delta V_j, \sum\limits_{i=1}^{j}\Delta V_i) \\ 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$\Delta M_{\text{изг}}\Big|_{\Gamma} = EJ\frac{d^2\Delta W}{dx^2}\Bigg|_{\Gamma} = 0; \qquad \Delta Q\Big|_{\Gamma} = EJ\frac{d^3W}{dx^3}\Bigg|_{\Gamma} = 0. \tag{4}$$

Здесь Δq_R, Δq_S — приращение давления под левой и правой опорами высотного объекта (рис. 1), $\Delta W_j^{R,S}$ — приращение осадок под правой и левой опорами высотного объекта; $\sum\limits_{i=1}^{j}\Delta W_i^{R,S}$ — накопленные осадки под правой и левой опорами высотного объекта; $\Delta V_j\left(\Delta P_j,\ H\right)$ — приращение вириала нагрузок высотного объекта [3]; $\sum\limits_{i=1}^{j}\Delta V_i\left(P_j,\ H\right)$ — значение вириала, накопленное на предыдущих шагах по нагружению; ΔP_j, P_j — приращение и накопленная на j-ом шаге нагрузка, H — высота центра сил тяжести объекта, $\Delta M_{\text{изг}}$, ΔQ — приращение изгибающего момента и перерезывающей силы по торцам фундаментной плиты.

На основании (1–4) и метода конечных разностей [1] получаем неоднородную алгебраическую систему, позволяющую исследовать бифуркационную устойчивость системы «высотный объект — деформируемое основание»:

$$L\begin{Bmatrix}\Delta W \\ \Delta U\end{Bmatrix} - \lambda B\begin{Bmatrix}\Delta W \\ \Delta U\end{Bmatrix} = \Delta\lambda B\begin{Bmatrix}W \\ U\end{Bmatrix} \tag{5}$$

Здесь: $\begin{Bmatrix}\Delta W \\ \Delta U\end{Bmatrix}$ — столбец приращений неизвестных метода сеток (собственная функция), λ — собственное значение, L и B матрицы коэффициентов алгебраической задачи. Из равенства нулю, определителя алгебраической системы (5), следует значение бифуркационной критической нагрузки общей устойчивости высотного объекта. Система уравнений (5) позволяет прослеживать процесс нагружения системы «высотный объект — деформируемое основание» с малым начальным несовершенством и находить критическую нагрузку из условия Э $\to \infty$ (Э — эксцентриситет центра сил тяжести высотного объекта).

В качестве модельного примера рассмотрим деформации крена высотного объекта с использованием компьютерной модели на основе линеаризованных уравнений устойчивости системы «высотный объект — деформируемое основание» (5). Сопоставим результаты расчета по компьютерным моделям МОНОМАХ и ЛИРА [4] (Рис. 2, 3).

Отметим, что результаты расчетов деформаций крена высотного объекта (рис. 2) совпадают на начальном участке. При приближении уровня нагружения к бифуркационной критической нагрузке результаты расчета существенно различаются.

Кривая 2 на рис. 2 в отличие от кривой 1 асимптотически приближается к уровню соответствующему бифуркационной критической нагрузке потери устойчивости исходного строго вертикального положения равновесия идеализированного высотного объекта (при $Э_0=0$). На рис. 3 показано поведение решений, для высотного объекта с начальными несовершенствами $(Э_0 \neq 0)$ в окрестности точки бифуркации исходного равновесного состояния идеализированного ($Э_0=0$) высотного объекта.

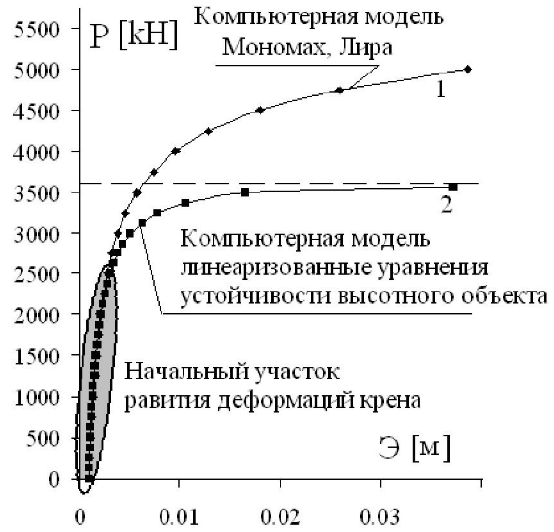


Рис. 2.

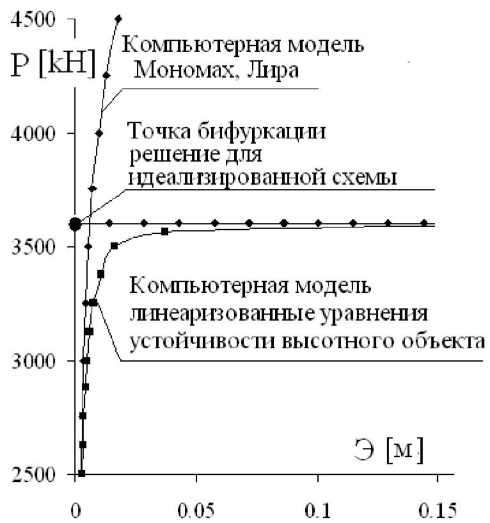


Рис. 3

Таким образом: полная для оценки деформации крена высотного объекта (здания или сооружения), связанной с деформационными процессами (в том числе и с их устойчивостью) в основании высотного объекта, необходимо использование нелинейных уравнений статики, записываемых для «возмущенного» состояния равновесия системы «высотный объект — деформируемое основание».

Список литературы

1. Коллатц Л. Задачи на собственные значения / Л. Коллатц. М.: Наука, 1978.
2. Высотные здания /Tall buildings 1/06.
3. Ржаницын А. Р. К вопросу о теоретическом весе стержневых конструкций; Сборник под ред. А. А. Гвоздева, И. М. Рабиновича М. М. Филоненко-Бородича, Исследования по теории сооружений, вып. IV(1949).
4. Городецкий А. С., Батрак Л. Г., Городецкий Д. А., Лазнюк М. В., Юсипенко С. В. Расчет и проектирование конструкций высотных зданий из монолитного железобетона (проблемы, опыт, возможные решения и рекомендации, компьютерные модели, информационные технологии) — К.: Факт, 2004. — 106 с.

ПРО КЛАСИЧНИЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ВИРОДЖЕНОГО РІВНЯННЯ КОЛМОГОРОВА, КОЕФІЦІЄНТИ ЯКОГО НЕ ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ЗМІННИХ ВИРОДЖЕННЯ

С. Д. Івасишен [1,3], І. П.Railway Мединський[2,3]

[1]*НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ,*
[2]*Національний університет «Львівська політехніка»,*
[3]*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна*
ivasyshen_sd@mail.ru, dpm.mip@polynet.lviv.ua

У 1934 А. М. Колмогоров, узагальнюючи відомі на той час моделі броунівського руху, прийшов до класичного рівняння дифузії з інерцією — спеціального диференціального рівняння з частинними похідними ультрапараболічного типу. Це рівняння і його різноманітні узагальнення вивчались багатьма авторами [1]. Основна увага при цьому приділялась побудові, одержанню точних оцінок і дослідженню різних властивостей фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК) за якомога слабших припущень на коефіцієнти рівнянь. На жаль, на сьогоднішній час точних результатів, що стосуються класичних ФРЗК для вироджених рівнянь Колмогорова з коефіцієнтами, залежними від усіх змінних, майже немає. Доповідь присвячена випадку, коли коефіцієнти рівняння не залежать від змінних виродження.

Вважається, що просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з двох груп змінних: основної групи $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ і групи змінних виродження $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, де $x_l := (x_{l1}, \ldots, x_{l n_l})$, $l \in \{1,2\}$, $1 \le n_2 \le n_1$, $n = n_1 + n_2$.

Розглядається рівняння вигляду

$$\left(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x_1)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} - \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x_1)\partial_{x_{1j}} - a_0(t,x_1)\right) u(t,x) = 0,$$
$$t \in (0,T], \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

за таких припущень:

$$\exists \delta > 0 \quad \forall (t,x_1) \in [0,T] \times \mathbb{R}^{n_1} \quad \forall \sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1}:$$
$$\operatorname{Re} \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x_1)\sigma_{1j}\sigma_{1l} \ge \delta \sum_{j=1}^{n_1} \sigma_{1j}^2;$$

a_{jl}, a_j і a_0 — обмежені й неперервні на $[0,T] \times \mathbb{R}^{n_1}$ комплекснозначні функції, які задовольняють таку умову Гельдера:

$$\exists H > 0 \quad \exists \alpha \in (0,1] \quad \forall t \in [0,T] \quad \forall \{x_1, y_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1}:$$
$$|a(t,x_1) - a(t,y_1)| \le H|x_1 - y_1|^{\alpha},$$

де a — будь-який із коефіцієнтів a_{jl}, a_j і a_0.

Для рівняння (1) побудовано ФРЗК Z та досліджено його властивості, зокрема одержано такі оцінки похідних від функції Z:

$$\left|\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2} Z\left(t,x;\tau,\xi\right)\right| \le C\left(t-\tau\right)^{-\left(n_1+3n_2+\left|k_1\right|+3\left|k_2\right|\right)/2} \times$$

$$\times \exp\left\{-c\left(\frac{\left|x_1-\xi_1\right|^2}{t-\tau}+\frac{\left|x_2+\left(t-\tau\right)x_1'-\xi_2\right|^2}{\left(t-\tau\right)^3}\right)\right\},$$

$$0 \le \tau < t \le T,\ \left\{x,\xi\right\} \subset \mathbb{R}^{n_1},\ \left|k_1\right|+2\left|k_2\right| \le 2,$$

де $k_l := \left(k_{l1},\dots,k_{ln_l}\right)$ — n_l-вимірний мультиіндекс, $\left|k_l\right| := k_{l1}+\dots+k_{l\mathrm{n}_l}$, $l \in \left\{1,2\right\}$, $x_1' := (x_{11},\dots,x_{1n_2})$, C і c — додатні сталі.

Список літератури

1. Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. — 2004. — V. 152. — 390 p.

ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ З R-ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНОЮ ФУНКЦІЄЮ В ЯДРІ

А. М. Ізбаш
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
annet.ua28@gmail.com

У даній роботі буде подано розв'язок інтегрального рівняння Вольтерра 1-го роду з r r-гіпергеометричною функцією ${}_rF^{\tau,\beta}(a,b;c;z)$ в ядрі. Для розв'язання цього інтегрального рівняння отриманого у загальній формі використаємо апарат теорії дробового інтегро-диференціювання. Також використаємо властивості композиції дробових інтегралів.

Подамо розв'язок інтегрального рівняння:

$$\int_0^x f(t)(x-t)^{c-1}\,{}_rF^{\tau,\beta}\left(a,b;c;1-\frac{x}{t}\right)dt = \varphi(x), \quad (1)$$

де $\varphi(x) = \Gamma(c)\,\mathrm{g}(x), 0 < x < d, 0 < d \le \infty; \mathrm{Re}\,c > 0, \mathrm{Re}\,b > 0$.

Нехай $\mathrm{h}(x) = \mathrm{I}^{-c}\varphi(x)$, де $h\left(x\right)$ є локально інтегрованою функцією, тоді $\mathrm{I}^b h(x)$ також є локально інтегрованою. Доведемо, що:

$$\mathrm{I}^{b-c}\varphi(x) = \mathrm{I}^b h(x). \quad (2)$$

Якщо $\mathrm{Re}\,b > \mathrm{Re}\,c$, то в силу властивості композиції дробових інтегрлів можна записати:

$$\mathrm{I}^b h(x) = \mathrm{I}^{b-c}\mathrm{I}^c h(x) = \mathrm{I}^{b-c}\varphi(x).$$

Якщо $\mathrm{Re}\,b < \mathrm{Re}\,c$, тоді в силу тієї ж властивості отримуємо:

$$\varphi(x) = \mathrm{I}^c h(x) = \mathrm{I}^{c-b}\mathrm{I}^b h(x).$$

Якщо $\mathrm{Re}\,b = \mathrm{Re}\,c$, то застосовуємо властивість композиції двічі отримуємо:

$$\mathrm{I}^{1+b-c}\varphi(x) = \mathrm{I}^{1+b-c}\mathrm{I}^c h(x) = \mathrm{I}^{1+b} h(x) = \mathrm{I}^1\mathrm{I}^b h(x),$$

оскільки $\mathrm{I}^b h(x)$ — локально інтегрована, то після диференціювання маємо:

$$\mathrm{I}^{-1}\mathrm{I}^{1+b-c}\varphi(x) = \mathrm{I}^b\,\mathrm{h}(x) = \mathrm{I}^{b-c}\varphi(x),$$

Таким чином отримуємо, що рівняння

$$\mathrm{I}^b x^a f(x) = x^a \mathrm{I}^b\,\mathrm{h}(x) \quad (3)$$

має розв'язок $f(x) \in Q_q\,(q < \min(0, \mathrm{Re}\,a))$, де Q_q — це клас всіх таких функцій $f(x)$, для яких $x^q f(x)$ — локально інтегрована на $[0,d)$.

Для функції $x^a f(x) = x^{a-q}x^q f(x)$, використовуючи (2) та (3) отримуємо розв'язок рівняння (1) у формі:

$$f(x) = x^{-a}\mathrm{I}^{-b}x^a\mathrm{I}^b\,\mathrm{h}(x) = x^{-a}\mathrm{I}^{-b}x^a\mathrm{I}^{b-c}\varphi(x).$$

Список літератури

1. N. Virchenko, «On the generalized confluent hypergeometric function and its application», Fract. Calculus and Appl. Anal., vol. 9, no. 2, pp. 101–108, 2006.

2. Вірченко Н. А., Царенко В. Н. Дробные интегральные преобразования гипергеометрического типа. — К. — 216 с.

3. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск.: Наука и техника. — 1987. — 688 с.

УМОВИ ОДНОЗНАЧНОЇ РОЗВ'ЯЗНОСТІ НЕЛОКАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО РІВНЯННЯ У ПРОСТОРАХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ — ТЕЙЛОРА

В. С. Ільків, Н. І. Страп
Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна
ilkivv@i.ua, n.strap@i.ua

Нехай $\mathcal{S}$ однозв'язна область проколотої у нулі комплексної площини і

$$\mathcal{D}^p = [0,T] \times \mathcal{S}^p,$$

де $T > 0$, $p \geq 2$.
Введемо множину

$$\mathcal{N} = \{\nu_k = (\nu_{k1}, \ldots, \nu_{kp}) \in \mathbb{R}^p : k \in \mathbb{Z}^p\},$$

яку будемо використовувати при означенні просторів і називати *спектром* функції. На елементи множини $\mathcal{N}$ накладемо наступні умови:

при $k \neq r$ виконується нерівність $\nu_k \neq \nu_r$, тобто відображення $k \mapsto \nu_k$ є бієктивним відображенням $\mathbb{Z}^p$ на множину $\mathcal{N}$;

$\tilde{\nu}_k \to \infty$ при $k \to \infty$, де $\tilde{\nu}_k = \sqrt{1 + \nu_{k1}^2 + \ldots + \nu_{kp}^2}$.

Позначимо $\mathbf{H}\mathcal{N}_q(\mathcal{S}^p)$, $q \in \mathbb{R}$,— гільбертів простір функцій

$$\psi(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \psi_k z^{\nu_k}$$

зі спектром $\mathcal{N}$ та скалярним добутком

$$(\psi, \varphi)_{\mathbf{H}\mathcal{N}_q(\mathcal{S}^p)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \tilde{\nu}_k^{2q} \psi_k \overline{\varphi}_k,$$

який стандартним чином породжує норму

$$\| \psi \|^2_{\mathbf{H}\mathcal{N}_q(\mathcal{S}^p)} = (\psi, \psi)_{\mathbf{H}\mathcal{N}_q(\mathcal{S}^p)};$$

а $\mathbf{H}\mathcal{N}_q^n(\mathcal{D}^p)$, $q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$,— банахів простір функцій $u = u(t,z)$ таких, що похідні

$$\frac{\partial^r u(t,z)}{\partial t^r} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k^{(r)}(t) z^{\nu_k}, \; r = 0, 1, \ldots, n,$$

для кожного $t \in [0,T]$ належать до просторів $\mathbf{H}\mathcal{N}_{q-r}(\mathcal{S}^p)$ відповідно і неперервні за t у цих просторах. Квадрат норми у просторі $\mathbf{H}\mathcal{N}_q^n(\mathcal{D}^p)$ дає формула

$$\| u \|^2_{\mathbf{H}\mathcal{N}^n_q(\mathcal{D}^p)} = \sum_{r=0}^{n} \max_{[0,T]} \| \frac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r} \|^2_{\mathbf{H}\mathcal{N}_{q-r}(\mathcal{S}^p)}.$$

В області $\mathcal{D}^p$ розглянуто задачу з двоточковими неоднорідними нелокальними умовами для диференціально-операторного рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\sum_{s_0+|s|\le n} a_{s_0,s} B^s \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = f,$$

$$\mu \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\Big|_{t=0} - \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\Big|_{t=T} = \varphi_m, \qquad m = 0,1,\dots,n-1,$$

де $s = (s_1,\dots,s_p) \in \mathbb{Z}^p_+$, $|s| = s_1 + \dots + s_p$, $a_{s_0,s} \in \mathbb{C}$, $a_{n,0} = 1$, u — шукана функція, а $f, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$ — задані функції. Оператор

$$B = (B_1, B_2, \dots, B_p)$$

складений з операторів узагальненого диференціювання $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, степені яких визначено формулами

$$B^0_j u \equiv u, \; B^l_j u = B_j(B^{l-1}_j u) \; (j = 1,\dots,p, \; l = 1,\dots,n),$$

а $B^s = B_1^{s_1} \dots B_p^{s_p}$.

У роботі встановлено умови однозначної розв'язності задачі у шкалі $\{\mathbf{H}\mathcal{N}^n_q(\mathcal{D}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$ просторів функцій зі спектром $\mathcal{N}$. Побудовано формули для розв'язку, а також проведено аналіз малих знаменників, який грунтується на метричному підході. На основі отриманих оцінок знизу малих знаменників встановлено достатні умови існування розв'язку задачі у просторі $\mathbf{H}\mathcal{N}^n_q(\mathcal{D}^p)$ з довільним дійсним параметром q. Встановлено обернену залежність між швидкістю зростання спектру $\mathcal{N}$ і гладкістю правих частин — функції f з простору $\mathbf{H}\mathcal{N}^0_{q-n}(\mathcal{D}^p)$ та функцій $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ з шкали просторів $\{\mathbf{H}\mathcal{N}_q(\mathcal{S}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$.

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКАМИ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З НЕЛОКАЛЬНОЮ УМОВОЮ І ВИРОДЖЕННЯМ

І. М. Ісарюк
Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
isaryuk_inna@mail.ru

Нехай $t_0, t_1, ..., t_N, T$ — фіксовані додатні числа, $t_k < T,\ k = \{1, ..., N\}$; $x = (x_1,\ ...\ , x_n)$ — точка з простору $\mathbb{R}^n$, $\Omega_j = \{x \,|\, x \in \mathbb{R}^n, x_j = 0\}$, $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \Omega_j$, D — обмежена область простору $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D, така, що $\partial D \bigcap \Omega_j \neq \varnothing$.

В області $Q = [0, T) \times D$ розглянемо задачу знаходження функцій $u(t, x;\ p(t, x), q(x)),\ p(t, x)$ і $q(x)$, які реалізують мінімум функціоналу

$$I(p, q) = \int_0^T dt \int_D F_1(t, x; u(t, x; p(t, x), q(x)), p(t, x))dx + \int_D F_2(x; u(T, x; p(T, x), q(x)), q(x))dx \quad (1)$$

на класі функцій (u, p, q), де $(p, q) \in V \equiv \{(p, q) \,|\, p(t, x) \in C^{\alpha}(Q), p_1(t, x) \leq p(t, x) \leq p_2(t, x);$ $q(x) \in C^{2+\alpha}(D), q_1(x) \leq q(x) \leq q_2(x)\}$, а $u(t, x; p(t, x), q(x))$ при $(t, x) \in Q^{(0)} = Q \setminus Q_{(0)}$, $Q_{(0)} = \{(t, x) \in Q \,|\, t = t_0, x \in D\}$ є розв'язком задачі Діріхле

$$\left[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t, x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(t, x)\partial_{x_i} - a_0(t, x)\right] u(t, x) = f(t, x; p(t, x)), \quad (2)$$

$$u(0, x; p(t, x), q(x)) + \sum_{j=1}^{N} b_j(t_j, x) u(0, x; p(t_j, x), q(x)) = \phi(x; q(x)), \quad (3)$$

$$u(t, x; p(t, x), q(x))\big|_{\Gamma} = g(t, x). \quad (4)$$

Порядок особливості коефіцієнтів рівняння характеризують функції $s_1(a_i^{(1)}, t)$ та $s_2(a_i^{(2)}, x_i)$, де $s_1(a_i^{(1)}, t) = |t - t_0|^{a_i^{(1)}}$, якщо $|t - t_0| \leq 1$ і $s_1(a_i^{(1)}, t) = 1$, при $|t - t_0| \geq 1$; $s_2(a_i^{(2)}, x_i) = |x_i|^{a_i^{(2)}}$, якщо $|x_i| \leq 1$; $s_2(a_i^{(2)}, x_i) = 1$, при $|x_i| \geq 1$.

Для довільного вектора $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ виконується нерівність

$$\pi_1 |\xi|^2 \leq \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t, x) s_1(\beta_i^{(1)} + \beta_j^{(1)}, t) s_2(\beta_i^{(1)}, x_i) s_2(\beta_j^{(1)}, x_j) \xi_i \xi_j \leq \pi_2 |\xi|^2$$

та $|a_i(t, x) s_1(\mu_i, t_i) s_2(\mu_i, x_i)| \leq \mathrm{const}$, де π_1, π_2 — фіксовані додатні сталі, $\beta_i \in (-\infty; \infty)$, $\mu_i \leq 0,\ i = \{0, 1, ..., n\}$.

При виконанні певних обмежень на дані задачі (1)–(4) встановлено необхідні та достатні умови існування оптимального розв'язку поставленої задачі.

ІНТЕГРУВАННЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАГІЧНИМИ МАТРИЦЯМИ КОЕФІЦІЄНТІВ

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

aleksei_kalaida@comcast.net , akalayda@i.com.ua

Розглянемо нормальну систему двох лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by, \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned} \tag{1}$$

з s – магічною матрицею коефіцієнтів, тобто при умові

$$a + c = b + d = \mu. \tag{2}$$

З (1) дістаємо рівняння

$$\dot{x} + \dot{y} = \mu(x + y) \Rightarrow x + y = C_1 \exp(\int (a + c)dt),\ \forall\ C_1. \tag{3}$$

Виразивши з (3)

$$y = C_1 \exp(\int (a + c)dt) - x$$

та підставивши результат у перше рівняння системи (1), матимемо рівняння

$$\dot{x} = (a - b)x + C_1 b \exp(\int \mu dt),$$

а отже, і загальний розв'язок системи

$$x = C_1 \exp(\int (a - b)dt) \int (b \exp(b + c)dt)dt + C_2 \exp(\int (a - b)dt), \forall C_2,$$

$$y = C_1 \left(\exp(\int (a + c)dt) - \exp(\int (a - b)dt) \int (b(\exp \int (b + c)dt)dt \right) -$$
$$-C_2 \exp(a - b)dt.$$

Якщо матриця системи (1) r-магічна, тобто виконується рівність

$$a + b = c + d = \nu,$$

а отже, рівність

$$a - c = -(b - d) = \rho,$$

то з системи (1) маємо

$$\dot{x} - \dot{y} = (a - c)(x - y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - y = C_1 \exp(\int (a - c)dt) \Rightarrow y = x - C_1 \exp(\int (a - c)dt),$$

$$\dot{x} = (a + b)x - C_1 b \exp(\int (a - c)dt) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = (-C_1 \int (b \exp(-\int (b + c)dt)dt + C_2) \exp(\int (a + b)dt),$$

а отже, загальний розв'язок системи (1) матиме вигляд

$$x = (-C_1 \int b(\exp(-\int (b + c)dt)dt + C_2) \exp(\int (a + b)dt),$$

$$y = -C_1 \left(\exp(\int (a - c)dt) + \exp(\int (a + b)dt) \int b(\exp(-\int (b + c)dt)dt \right) +$$
$$+C_2 \exp(\int a + b)dt.$$

Аналогічно система трьох рівнянь

$$\dot{x} = ax + by + cz,$$
$$\dot{y} = a_1 x + b_1 y + c_1 z,$$
$$\dot{z} = a_2 x + b_2 y + c_2 z$$

з s-магічною матрицею коефіцієнтів, тобто при умові

$$a + a_1 + a_2 = b + b_1 + b_2 = c + c_1 + c_2 = \mu,$$

за допомогою рівності $x + y + z = C_1 \exp(\int \mu dt)$ зводиться до двох рівнянь

$$\dot{x} = (a - c)x + (b - c)y + C_1 c \exp(\int \mu dt),$$
$$\dot{y} = (a_1 - c_1)x + (b_1 - c_1)y + C_1 c_1 \exp(\int \mu dt)$$

при умові $a_2 = b_2$ теж з s-магічною матрицею

$$(a - c + a_1 - c_1 = b - c + b_1 - c_1 \Rightarrow a + a_1 = b + b_1),$$

а отже, точно інтегровною.

Аналогічно інтегруються — рекурентно — такі системи і n рівнянь.

ПРО ДОСЛІДЖЕННЯ НА СТІЙКІСТЬ ОДНОГО КЛАСУ НОРМАЛЬНИХ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

О. Ф. Калайда
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net, akalayda@i.com.ua

Розглянемо векторне n-компонентне лінійне однорідне рівняння

$$y' = P(x)y,\ x \geq x_0, \tag{1}$$

та знайдемо один клас інтегровних рівнянь цього типу.

Для цього дамо одне узагальнення методу Ейлера розв'язування рівнянь зі сталими коефіцієнтами. А саме, шукатимемо розв'язки рівняння (1) у вигляді

$$y = Xe^{\int \lambda(x)dx} \tag{2}$$

з невідомими функцією λ та <u>сталим</u> вектором X.

Підставивши (2) в (1), матимемо рівність

$$P(x)X = \lambda(x)X, \tag{3}$$

тобто спектральну алгебричну задачу для матриці $P(x)$. Розв'язавши цю задачу, тобто розв'язавши алгебричне рівняння (відносно $\lambda(x)$)

$$\det(P(x) - \lambda(x)E) = 0 \Rightarrow \lambda_j(x),\ j = \overline{1, k},\ k \leq n, \tag{4}$$

та лінійні алгебричні рівняння (відносно X)

$$P(x)X = \lambda_j(x)X \Rightarrow X_j - \mathrm{const},$$

знаходимо власні значення λ_j та відповідні їм власні вектори $X_j - \mathrm{const}$ матриці $P(x)$, а отже, згідно (2), і частинні розв'язки

$$y_j(x) = X_j e^{\int \lambda_j(x)dx} \tag{5}$$

рівняння (1), а при $k = n$ — і його загальний розв'язок

$$y(x) = Y(x)C,\ Y(x) = (X_1 e^{\int \lambda_1(x)dx} \ldots X_n e^{\int \lambda_n(x)dx}),\ \forall C = (C_1 \ldots C_n)^T - \mathrm{const}. \tag{6}$$

При $k < n$ у випадку нормальної матриці $P(x)$ загальній розв'язок рівняння (1) теж складається з частинних розв'язків виду (5), тобто має вигляд (6) (оскільки жорданова форма матриці $P(x)$ у цьому випадку діагональна). В супротивному випадку з жорданової клітки (вона не являється діагональною) випливає, що фундаментальна матриця розв'язків рівняння (1) складається з елементів

$$x^i e^{\int \lambda_j(x)dx},\ j = \overline{1, k},\ i = \overline{0, r_j - 1} \tag{7}$$

(r_j – кратність кореня $\lambda_j(x)$ рівняння (4)).

За структурою загального розв'язку рівняння (1) тепер легко сформулювати ознаки стійкості, асимптотичної стійкості, та нестійкості його розв'язків.

Зауважимо, що клас рівнянь (1) зі змінною матрицею $P(x)$ коефіцієнтів не порожній. За побудовою, це мусять бути матриці, усі елементи яких вичерпуються елементами їх одного рядка (наприклад, матриці-циркулянти).

ТЕОРІЯ ФРОБЕНІУСА ДЛЯ ВЕКТОРНИХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

О. Ф. Калайда
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net , akalayda@i.com.ua

Відома теорія Фробеніуса розроблена для скалярних рівнянь другого порядку. Що ж стосується векторних рівнянь, причому довільного порядку, то, як відомо, така теорія відсутня. Тут в загальному викладається така теорія

Розглянемо векторне лінійне однорідне диференціальне рівняння

$$\sum_{j=0}^{m} A_j(x) x^{m-j} y^{(m-j)} = 0 \tag{1}$$

mn-го сумарного порядку, де $A_j(x)$ — квадратні матриці n-го порядку — аналітичні функції в околі точки $x = 0$, y — вектор-функція. Як і у випадку скалярного рівняння, розв'язок рівняння (1) будуємо, згідно з згаданим методом (сингулярним методом степеневих рядів [1]), у вигляді степеневого ряду

$$y(x) = x^{\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{2}$$

з невідомими скаляром σ та сталими векторами a_k. Підставивши (2) в (1) (з попередніми розвиненнями матриць $A_i(x)$ в ряди Тейлора) та прирівнявши в одержаній тотожності коефіцієнти при однакових степенях x, перш за все дістанемо так зване розв'язуюче рівняння методу ($A_{j,0}$ – перший коефіцієнт Тейлора матриць $A_j(x)$)

$$\Lambda(\sigma) a_0 = 0,\ \Lambda(\sigma) = \sum_{j=0}^{m} A_{j,0} \prod_{i=0}^{m-j} (\sigma - i) \tag{3}$$

відносно σ, a_0 та відповідні рекурентні рівняння відносно решти невідомих в (2) коефіцієнтів a_k. Оскільки в (3), за побудовою, $a_0 \neq 0$, то рівняння (3) — це є узагальнена алгебрична спектральна задача. Отже, для значень σ_i параметра σ (власних чисел даної спектральної задачі) маємо алгебричне рівняння

$$\det \Lambda(\sigma) = 0 \Rightarrow \sigma_i,$$

а для нетривіальних розв'язків $a_{0,\,i} = a_0(\sigma_i)$ (власних векторів даної спектральної задачі) рівняння (3) — лінійні алгебричні рівняння

$$\Lambda(\sigma_i) a_0 = 0 \Rightarrow a_0(\sigma_i).$$

Аналогічний вигляд має схема методу й у випадку рівнянь з різними старшими порядками m_i [1] в кожній компоненті рівняння (1)

$$\sum_{j=0}^{m} A_j(x) y^{[m-j]} = 0,\ y^{[m]} = (y_i^{(m_i)})^T.$$

Так можна побудувати розв'язки векторних рівнянь типу Бесселя та інших.

Список літератури

1. Ляшко И. И. Математический анализ. В 3-х частях Ч. 3 / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, А. Ф. Калайда. — К. : Вища школа, 1987. — 344 с.

ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛОКАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЧАФФЕ — ІНФАНТЕ

А. І. Кандрьонкін

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна

kandr08@mail.ru

В даній роботі досліджено якісну поведінку розв'язків рівняння Чаффе — Інфанте з нелокальним нелінійним доданком, що не забезпечує єдності розв'язку задачі Коші:

В обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ з гладкою межею розглядається задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial t}{\partial u} = \Delta u - \lambda(u^3 - u) + \displaystyle\int_\Omega f(x, u(t, x))dx, \\ u\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

де $\lambda \succ 0$ константа, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є функцією типу Каратеодорі, причому

$$\left|f(x, v)\right| \le C_1(x) + C_2(x)\left|v\right|,$$

де $C_1(x) \in L^1(\Omega)$, $C_2(x) \in L^2(\Omega)$ задані невід'ємні майже скрізь функції. При цьому на функцію f не накладається умов ліпшицевості або монотонності, що не дозволяє стверджувати єдиність розв'язку.

Лема. Для довільного $u_0 \in H \subset L_2(\Omega)$ задача (1) має принаймні один розв'язок такий, що $u(0) = u_0$. Тоді можна показати, що

$$G(t, u_0) = \left\{u(t) \quad \middle| u \in W, u(0) = 0\right\}$$

є многозначною напівгрупою (m-напівпотоком). Основним результатом є доведення існування у m-напівпотоку G глобального атрактору. Позначимо множину всіх розв'язків (1) на $(0, +\infty)$ через W.

Теорема 1. Нехай виконується нерівність

$$a\lambda_1 \succ \left\|C_2\right\|,$$

де $\lambda_1 \succ 0$ це перше власне значення оператора $-\Delta$ в $H_0^1(\Omega)$. Тоді для m-напівпотоку G існує глобальний атрактор $A \subset H$, який є компактною, зв'язною, стійкою підмножиною фазового простору H і складається з обмежених повних траєкторій.

Доведення даної теореми спирається на нерівність Пуанкаре енергетичну нерівність для $u(t)$, та доведення зв'язності пучка розв'язків задачі (1).

Список літератури

1. Kapustyan O. V., Melnik V. S., Valero J., Yasinsky V. V. Global attractors of multivalued dynamical systems and evolution equations without uniqueness. — Kyiv : Naykova dumka, 2008.

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТРИВИМІРНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ КОНВЕКЦІЇ — ДИФУЗІЇ ДО СИСТЕМИ ТИПУ НАВ'Є — СТОКСА

Т. О. Карпалюк
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
tamarakarpalyuk@ukr.net

Розглянемо одну з модифікацій системи Нав'є — Стокса:

$$\begin{aligned}&\vec{u}_0+\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}-\Delta\vec{u}=-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p,\\&\rho_0+\operatorname{div}\left(\rho\vec{u}\right)=0,\\&p=f\left(\rho\right),\end{aligned}\tag{1}$$

де $\vec{u}\in\mathbb{R}^n$ — векторне поле швидкостей, $\rho=\rho\left(x\right)$ — густина, $p=p\left(x\right)$ — тиск рідини, $x=\left(x_0,\vec{x}\right)$, $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $f\left(\rho\right)$ — довільна гладка функція. Система (1) моделює багато гідродинамічних процесів, але тільки такі, в яких співпадає кількість незалежних просторових змінних і розмірність векторного поля.

У даній роботі запропоновано метод узагальнення системи конвекції-дифузії таким чином, щоб отримана система мала різну розмірність векторного поля та кількість незалежних просторових змінних, крім того, повторювала б симетрійні властивості системи Нав'є — Стокса.

Розглянемо систему рівнянь конвекції-дифузії

$$U_0=\Delta U+F^a\left(U\right)U_a,\tag{2}$$

де $U\in\mathbb{R}^m$, $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $F^a\left(U\right)$ — довільні функціональні матриці розмірності $m\times m$, $a=\overline{1,n}$.

У роботі [1] досліджено інваріантність системи (2) при $m=3$, $n=1$ відносно узагальненої алгебри Галілея

$$\begin{aligned}AG_2\left(1,1\right)=<\partial_0,\partial_1,G=x_0\partial_1+Q_1,D=2x_0\partial_0+x_1\partial_1+Q_2,\\ \Pi=x_0^2\partial_0+x_0x_1\partial_1+x_1Q_1+x_0Q_2+Q_3>.\end{aligned}\tag{3}$$

Серед інших отримано систему

$$\begin{aligned}&u_0^1+u^1u_1^1-u_{11}^1-\varphi\left(u^2-\frac{(u^1)^2}{2}\right)_1=0,\\&u_0^2+u^1u_1^2-u_{11}^2-\varphi u^1\left(u^2-\frac{(u^1)^2}{2}\right)_1+2\left(u^2-\frac{(u^1)^2}{2}\right)u_1^1=0,\\&u_0^3+u^1u_1^3-u_{11}^3=0,\end{aligned}\tag{4}$$

де $\varphi=\varphi\left(u^3\right)$ — довільна гладка функція, яка інваріантна відносно алгебри (3) при $Q_1=\partial_{u^1}+u^1\partial_{u^2}$, $Q_2=-u^1\partial_{u^1}-2u^2\partial_{u^2}$, $Q_3=\partial_{u^2}$. Узагальнимо систему (4) наступною системою

$$
\begin{gathered}
u_0^1 + u^1 u_1^1 - u_{11}^1 - \varphi\left(u^2 - \frac{(u^1)^2}{2} \right)_1 = f^1 p_1, \\
u_0^2 + u^1 u_1^2 - u_{11}^2 - \varphi u^1 \left(u^2 - \frac{(u^1)^2}{2} \right)_1 + 2\left(u^2 - \frac{\left(u^1\right)^2}{2} \right) u_1^1 = f^2 p_1, \qquad (5) \\
u_0^3 + u^1 u_1^3 - u_{11}^3 = f^3 p_1, \\
\rho_0 + \partial_1 \left[\vec{g}, \vec{u} \right] = 0, \\
p = f\left(\rho\right)
\end{gathered}
$$

де $\vec{g} = \left(g^1, g^2, g^3 \right)$, f^a, g^a — довільні гладкі функції аргументу ρ. Справедливе наступне твердження.

Теорема. Якщо система (5) має вигляд

$$
\begin{gathered}
u_0^1 + u^1 u_1^1 - u_{11}^1 - \varphi\left(u^2 - \frac{(u^1)^2}{2} \right)_1 = 0, \\
u_0^2 + u^1 u_1^2 - u_{11}^2 - \varphi u^1 \left(u^2 - \frac{(u^1)^2}{2} \right)_1 + 2\left(u^2 - \frac{(u^1)^2}{2} \right) u_1^1 = c_1 \rho^2 p_1, \quad (6) \\
u_0^3 + u^1 u_1^3 - u_{11}^3 = c_2 p_1, \\
\rho_0 + \left(u^1 \rho \right)_1 + \left(u^3 \rho^2 \right)_1 = 0, \\
p = f\left(\rho\right),
\end{gathered}
$$

де c_i — довільні сталі, то вона інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея, базисні генератори якої задаються формулами

$$
\begin{gathered}
\partial_0, \partial_1, G = x_0 \partial_1 + \partial_{u^1} + u^1 \partial_{u^2}, D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 - u^1 \partial_{u^1} - 2u^2 \partial_{u^2} - \rho \partial_\rho, \\
\Pi = x_0^2 \partial_0 + x_0 x_1 \partial_1 + x_1 \left(\partial_{u^1} + u^1 \partial_{u^2} \right) - x_0 \left(u^1 \partial_{u^1} + 2u^2 \partial_{u^2} + \rho \partial_\rho \right) + \partial_{u^2}.
\end{gathered}
$$

Оскільки система (6) узагальнює систему рівнянь (1) не тільки за формою, а й має аналогічні симетрійні властивості — задовольняє принципу відносності Галілея, то вона претендує на опис реальних процесів гідродинаміки.

Аналогічні результати також отримано для випадку $m = 3$, $n = 2$.

Список літератури

1. Сєров М. І., Карпалюк Т. О. Інваріантність системи рівнянь конвекції дифузії відносно узагальненої алгебри Галілея у випадку тривимірного векторного поля // Математичний вісник НТШ. — 2010. — Т. 7. — С. 200–221.

2 Жадан Т. О. Інваріантність системи рівнянь дифузії-конвекції відносно узагальненої алгебри Галілея // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. — 2004. – Вип. 12. — С. 70–75.

О МЕТОДЕ СВЯЗАННЫХ УРАВНЕНИЙ В ТЕОРИИ ВОЛНОВЕДУЩИХ СТРУКТУР СО СЛОЖНОЙ ВНУТРЕННЕЙ СРЕДОЙ

А. И. Киреева, И. П. Руденок, А. П. Поздняков

Волгоградский архитектурно-строительный университет, Волгоград, Россия

alexasia3125@mail.ru

Каждые несколько лет по мере достижения успехов в ряде областей оптоэлектроники и интегральной оптики усиливается интерес к изучению волновых процессов в сложных волноведущих средах различной физической природы и композиционных структурах на их основе. В последнее время это относится к гибридным интегральным схемам, лазерам с многопериодической обратной связью и сверхструктурам. Заметное место среди них занимают структуры с композицией анизотропных и градиентных магнитооптических сред. Здесь по-прежнему актуально исследование ключевых моментов, касающихся механизмов связи мод смешанного волнового спектра в системах, состоящих из нескольких анизотропноградиентных магнитодиэлектрических плёнок, разделённых обычной диэлектрической средой. В случае двух планарных волноводов диэлектрическая проницаемость такой комбинированной структуры можно записать:

$$\tilde{\varepsilon}\left(q_0,q_1,\ldots,q_n,x,y\right)=\varepsilon\left(x,y\right)+\Delta\vec{\vec{\varepsilon}}\left(q_0,q_1,\ldots,q_n,x,y\right),\qquad(1)$$

$$\Delta\vec{\vec{\varepsilon}}\left(q_0,q_1,\ldots,q_n,x,y\right)=\Delta\vec{\vec{\varepsilon}}_1\left(q_0,q_1,\ldots,q_n,x,y\right)+\Delta\vec{\vec{\varepsilon}}_2\left(q_0,q_1,\ldots,q_n,x,y\right),$$

где $\Delta\vec{\vec{\varepsilon}}_1\left(q_0,q_1,\ldots,q_n,x,y\right),\Delta\vec{\vec{\varepsilon}}_2\left(q_0,q_1,\ldots,q_n,x,y\right)$ — тензоры диэлектрической проницаемости первой и второй волноведущей плёнки; $q_0,q_1,\ldots,q_n$ — параметры градиентности элементов этого тензора, элементы которых зависят от пространственных координат. В качестве независимой структуры возьмём два несимметричных анизотропноградиентных волновода. Тогда электрический и магнитный векторы мод дискретного и непрерывного спектра можно записать:

$$\overset{\vee}{\vec{E}}_\nu=\vec{E}_\nu\,e^{j(\omega t-\gamma_\nu z)}+\sum_{-}^{+}\int_0^\infty\vec{E}\left(\rho\right)e^{j(\omega t-\gamma z)}\,d\rho,\qquad(2)$$

$$\overset{\vee}{\vec{H}}_\nu=\vec{H}_\nu\,e^{j(\omega t-\gamma_\nu z)}+\sum_{-}^{+}\int_0^\infty\vec{H}\left(\rho\right)e^{j(\omega t-\gamma z)}\,d\rho,\ \nu=1,2$$

Электромагнитное поле (2) (возьмём для сокращения выкладок только дискретную часть) удовлетворяет уравнениям Максвелла в виде:

$$\left[\tilde{\nabla},\vec{H}_\nu\right]-j\gamma_\nu\left[\vec{n},\vec{H}_\nu\right]-j\omega\left[\varepsilon_c(x,y)+\Delta\vec{\vec{\varepsilon}}_1(q_0,q_1,\ldots,q_n,x,y)\vec{E}\right]=0,$$

$$\left[\tilde{\nabla},\ \vec{E}_\nu\right]-j\omega\left[\vec{n},\ \vec{E}_\nu\right]+j\omega\mu\ \vec{H}_\nu=0,\qquad(3)$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор по координатной оси Oz; $\tilde{\nabla}$ — поперечная составляющая вектора «набла»; γ_ν — продольное волновое число; μ — магнитная проницаемость.

Так как планарные волноводы сформированы на единой подложке, то полное поле можно представить в виде суперпозиции собственных волн с переменными амплитудными коэффициентами:

$$\overset{\vee}{\vec{E}}_\nu = C_1(z)\vec{E}_1 + C_2(z)\vec{E}_2, \tag{4}$$

$$\overset{\vee}{\vec{H}}_\nu = C_1(z)\vec{H}_1 + C_2(z)\vec{H}_2,$$

которое удовлетворяет уравнениям:

$$\begin{aligned} [\nabla,\ \overset{\vee}{\vec{H}}] &= j\omega\,\tilde{\varepsilon}\left(q_0, q_1, \ldots, q_n, x, y\right)\overset{\vee}{\vec{E}} = 0, \\ [\nabla,\ \overset{\vee}{\vec{E}}] &= -j\omega\,\mu\,\overset{\vee}{\vec{H}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Подставляя равенства (4) в уравнения (5) после преобразований получаем:

$$\begin{gathered} \frac{\partial C_1}{\partial z}\left[\vec{n},\ \vec{H}_1\ \right] - j\omega\,\Delta\,\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}_2\left(q_0, q_1, \ldots, q_n, x, y\right)\ C_1\ \vec{E}_1 + \\ + \frac{\partial C_2}{\partial z}\left[\vec{n},\ \vec{H}_2\ \right] - j\omega\,\Delta\,\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}_1\left(q_0, q_1, \ldots, q_n, x, y\right)\ C_2\ \vec{E}_2 = 0, \\ \frac{\partial C_1}{\partial z}\left[\vec{n},\ \vec{E}_1\ \right] + \frac{\partial C_2}{\partial z}\left[\vec{n},\ \vec{E}_2\ \right] = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Умножаем первое уравнение на $\vec{E}_1^*$ и $\vec{E}_2^*$, второе на $\vec{H}_1^*$ и $\vec{H}_2^*$, затем вычитаем получившееся второе выражение из первого с одновременным интегрированием по всему поперечному сечению структуры. При этом получаем обобщённые связанные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_1}{\partial z} + \alpha_1\frac{\partial C_2}{\partial z} - j\omega\,\alpha_2 C_1 - j\omega\,\alpha_3 C_2 = 0, \\ \frac{\partial C_2}{\partial z} + \beta_1\frac{\partial C_1}{\partial z} - j\omega\,\beta_2 C_2 - j\omega\,\beta_3 C_1 = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

в которой некоторые коэффициенты определяются выражениями:

$$\alpha_1 = \frac{\iint\limits_\infty \left(\vec{n}\left[\vec{E}_1^*, \vec{H}_2\right] + \vec{n}\left[\vec{E}_2, \vec{H}_1^*\right]\right) dx\,dy}{\iint\limits_\infty \left(\vec{n}\left[\vec{E}_1^*, \vec{H}_1\right] + \vec{n}\left[\vec{E}_1, \vec{H}_1^*\right]\right) dx\,dy},$$

$$\beta_3 = \frac{\iint\limits_\infty \Delta\,\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}_2\left(q_0, q_1, \ldots, q_n, x, y\right)\vec{E}_1, \vec{E}_2^*\ dx\,dy}{\iint\limits_\infty \left(\vec{n}\left[\vec{E}_2^*, \vec{H}_2\right] + \vec{n}\left[\vec{E}_2, \vec{H}_2^*\right]\right) dx\,dy}.$$

Полученная система уравнений (7) включает в себя различные частные случаи, которые в настоящее время активно используются при анализе волноведущих свойств композиционных структур.

О СИСТЕМЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБСТВЕННЫХ ВОЛН СМЕШАННОГО СПЕКТРА В ТЕОРИИ СВЯЗАННЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ СТРУКТУР

А. И. Киреева, И. П. Руденок, А. П. Поздняков

Волгоградский архитектурно-строительный университет, Волгоград, Россия

alexasia3125@mail.ru

Пусть дана волноведущая система, которая состоит из двух анизотропно-градиентных слоёв, разделённых однородной диэлектрической прослойкой. Необходимо исследовать процессы взаимодействия и перекачки мод дискретного и непрерывного спектров различной поляризации. Распределение диэлектрической проницаемости представленной системы запишем в виде суммы, состоящей из трёх частей:

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_C(x) + \delta\varepsilon_1(q_0, q_1, \ldots, q_n, x) + \delta\varepsilon_2(q_0, q_1, \ldots, q_n, x), \qquad (1)$$

где $\varepsilon_C(x)$ — диэлектрическая проницаемость окружающей среды, $\delta\varepsilon_{1(2)}(q_0, q_1, \ldots, q_n, x) = \varepsilon_{1(2)}(q_0, q_1, \ldots, q_n, x) - \varepsilon_C(x)$ — диэлектрические проницаемости двух волноведущих слоёв, которые имеют вид:

$$\varepsilon_{1(2)}(q_0, q_1, \ldots, q_n, x) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(q_0, q_1, \ldots, q_n, x) & 0 & \varepsilon_{13}(q_0, q_1, \ldots, q_n, x) \\ 0 & \varepsilon_{22}(q_0, q_1, \ldots, q_n, x) & 0 \\ \varepsilon_{31}(q_0, q_1, \ldots, q_n, x) & 0 & \varepsilon_{33}(q_0, q_1, \ldots, q_n, x) \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

здесь $q_0, q_1, \ldots, q_n$ – параметры градиентности поперечных распределений диэлектрической проницаемости элементов тензора (2). Воспользуемся системой магнитных и электрических волн двух невозмущённых планарных волноводов:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \omega^2 \mu\ \varepsilon_{22}(q_0, q_1, \ldots, q_n, x) = 0, \qquad (3)$$

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{33}(q_0, q_1, \ldots, q_n, x) \cdot \tau(q_0, q_1, \ldots, q_n, x) \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + \varepsilon_{11}(q_0, q_1, \ldots, q_n, x) \cdot \tau(q_0, q_1, \ldots, q_n, x) \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \\
\tau(q_0, q_1, \ldots, q_n, x)\left[\varepsilon_{11}(q_0, q_1, \ldots, q_n, x) + \varepsilon_{31}(q_0, q_1, \ldots, q_n, x)\right] \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial z} + \\
+\left[\tau(q_0, q_1, \ldots, q_n, x) \frac{d\varepsilon_{11}(q_0, q_1, \ldots, q_n, x)}{dx} - \varepsilon_{11}(q_0, q_1, \ldots, q_n, x) \frac{d\tau(q_0, q_1, \ldots, q_n, x)}{dx}\right] \frac{\partial H_y}{\partial x} + \\
+\left[\tau(q_0, q_1, \ldots, q_n, x) \frac{d\varepsilon_{31}(q_0, q_1, \ldots, q_n, x)}{dx} - \varepsilon_{31}(q_0, q_1, \ldots, q_n, x) \frac{d\tau(q_0, q_1, \ldots, q_n, x)}{dx}\right] \frac{\partial H_y}{\partial z} + \\
+\omega^2 \mu\ \tau^2(q_0, q_1, \ldots, q_n, x) H_y = 0.
\end{gathered} \qquad (4)$$

Получим интегродифференциальные связанные уравнения для магнитных волн, когда две планарные структуры имеют различные материальные характеристики. Тогда сопутствующие произвольные распределения поля системы можно представить в виде ортогональных мод волноводов. Поперечную составляющую электрического поля можно представить в виде:

$$E_y = \sum_m C_m \cdot E_{y,m}^{(1)} + \sum_\nu D_\nu \cdot E_{y,\nu}^{(2)} + \sum \int_0^\infty A(\alpha) \cdot E_y^{(1)}(\alpha)\, d\alpha + \sum \int_0^\infty B(\rho) \cdot E_y^{(2)}(\rho)\, d\rho, \quad (5)$$

где знак суммы распространяется на чётные и нечётные моды дискретного и непрерывного спектра; α, ρ — внешние поперечные волновые числа мод непрерывного спектра. Подставим выражение (5) в приведённое волновое уравнение и получим:

$$\begin{aligned}
&\sum_m \left[\frac{\partial^2 C_m}{\partial z^2} - 2j\gamma_m \frac{\partial C_m}{\partial z} + C_m \cdot \omega^2 \mu\, \delta\, \varepsilon_2 (q_0, q_1, \ldots, q_n, x) \right] E_{y,m}^{(1)} + \\
&+ \sum \int_0^\infty \left[\frac{\partial^2 A(\alpha)}{\partial z^2} - 2j\gamma(\alpha) \frac{\partial A(\alpha)}{\partial z} + A(\alpha) \cdot \omega^2 \mu\, \delta\, \varepsilon_2 (q_0, q_1, \ldots, q_n, x) \right] \cdot E_y^{(1)}(\alpha)\, d\alpha + \\
&+ \sum_\nu \left[\frac{\partial^2 D_\nu}{\partial z^2} - 2j\tilde{\gamma}_\nu \frac{\partial D_\nu}{\partial z} + D_\nu \cdot \omega^2 \mu\, \delta\, \varepsilon_1 (q_0, q_1, \ldots, q_n, x) \right] E_{y,\nu}^{(2)} + \\
&+ \sum \int_0^\infty \left[\frac{\partial^2 B(\rho)}{\partial z^2} - 2j\gamma(\rho) \frac{\partial B(\rho)}{\partial z} + B(\rho) \cdot \omega^2 \mu\, \delta\, \varepsilon_1 (q_0, q_1, \ldots, q_n, x) \right] \cdot E_y^{(2)}(\rho)\, d\rho = 0.
\end{aligned} \quad (6)$$

При получении этих уравнений использовался тот факт, что собственные волны дискретного и непрерывного спектра удовлетворяют волновому уравнению для первого и второго волновода с представленной сложной средой. Другие составляющие электрического и магнитного поля легко найти из равенств, следующих из уравнений Максвелла. Проинтегрируем уравнения (6) по всему поперечному сечению, используем соотношение ортогональности и получим:

Умножая на $E_{y,l}^{(1)}$, получим:

$$\frac{\partial^2 C_l}{\partial z^2} - 2j\gamma_l \frac{\partial C_l}{\partial z} + \sum_m C_m \Phi_{ml}(z) + \sum \int_0^\infty A(\alpha) F_l(\alpha, z)\, d\alpha + \sum_\nu D_\nu P_{\nu l}(z) +$$

$$+ \sum \int_0^\infty B(\rho) T_l(\rho, z)\, d\rho = 0.$$

Умножая на $E_y^{(1)}(\alpha')$, получим:

$$\frac{\partial^2 C(\alpha')}{\partial z^2} - 2j\gamma(\alpha')\frac{\partial C(\alpha')}{\partial z} + \sum_m C_m \Upsilon(\alpha', z) + \sum \int_0^\infty A(\alpha)\Psi(\alpha,\alpha')\,d\alpha + \sum_\nu D_\nu R(\alpha', z) +$$

$$+\sum \int_0^\infty B(\rho) Q(\rho,\rho')\,d\rho = 0.$$

Умножая на $E^{(2)}_{y,l}(\alpha')$, получим:

$$\frac{\partial^2 D_l}{\partial z^2} - 2j\tilde{\gamma}_l \frac{\partial D_l}{\partial z} + \sum_\nu D_\nu O_{\nu l}(z) +$$

$$+\sum \int_0^\infty B(\rho) Q_l(\rho, z)\,d\rho + \sum_m C_m \Pi_{ml}(z) + \sum \int_0^\infty A(\alpha) K_l(\alpha, z)\,d\alpha = 0.$$

Умножая на $E^{(2)}_y(\rho)$, получим:

$$\frac{\partial^2 B(\rho')}{\partial z^2} - 2j\tilde{\gamma}(\rho')\frac{\partial B(\rho')}{\partial z} + \sum_\nu D_\nu L_{\nu l}(\rho', z) +$$

$$+\sum \int_0^\infty B(\rho) M(\rho,\rho')\,d\rho + \sum_m C_m N(\alpha', z) + \sum \int_0^\infty A(\alpha) J(\alpha,\alpha')\,d\alpha = 0.$$

Выпишем некоторые коэффициенты:

$$\Phi_{ml}(z) = \frac{\gamma_l\, \omega^2\, \varepsilon_C\, \mu}{2\omega\,\mu\, P} \int_{-\infty}^{+\infty} E^{(1)*}_{y,l}\, \delta\, \vec{\vec{\varepsilon}}_2(q_0, q_1, \ldots, q_n, x)\, E^{(1)}_{y,m}\, dx,$$

$$F_l(\alpha, z) = \frac{\gamma_l\, \omega^2\, \varepsilon_C\, \mu}{2\omega\,\mu\, P} \int_{-\infty}^{+\infty} E^{(1)*}_{y,l}\, \delta\, \vec{\vec{\varepsilon}}_2(q_0, q_1, \ldots, q_n, x)\, E_y(\alpha)\, dx,$$

$$P_{\nu l}(z) = \frac{\tilde{\gamma}_l\, \omega^2\, \varepsilon_C\, \mu}{2\omega\,\mu\, P} \int_{-\infty}^{+\infty} E^{(1)*}_{y,l}\, \delta\, \vec{\vec{\varepsilon}}_1(q_0, q_1, \ldots, q_n, x)\, E^{(2)}_{y,\nu}\, dx,$$

$$T_l(\rho, z) = \frac{\tilde{\gamma}(\rho)\, \omega^2\, \varepsilon_C\, \mu}{2\omega\,\mu\, P} \int_{-\infty}^{+\infty} E^{(1)*}_{y,l}\, \delta\, \vec{\vec{\varepsilon}}_1(q_0, q_1, \ldots, q_n, x)\, E_y(\rho)\, dx.$$

Система связанных интегродифференциальных уравнений может быть использована для анализа взаимодействия волн дискретного и непрерывного спектра в многослойных, периодических структурах на основе фотонных кристаллических структур.

УТОЧНЕНИЙ МЕТОД ПОМ'ЯКШЕННЯ НЕВ'ЯЗОК ДЛЯ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ, ПОДАТЛИВОЇ НА ПОПЕРЕЧНІ ЗСУВИ ТА СТИСКАННЯ

О. О. Кільчинський, Є. В. Массалітіна

Державний економіко-технологічний університет транспорту,
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

Методи аналітичного розрахунку напружено-деформованого стану пластин і оболонок звичайно виходять із системи гіпотез [1], що ґрунтуються на певних припущеннях про геометрію деформування елемента нормалі до серединної поверхні пластини (оболонки) та постулюванні законів зміни напружень на площадках, паралельних до серединної поверхні тощо. Жодне з таких припущень не є несуперечливим. Ці суперечності виявляються при порівнянні наближеного і точного розв'язків задачі. При такому порівнянні може виявитись, що точність розрахунку напружень достатня, а переміщення знайдено з недопустимою похибкою, чи навпаки. Тому постає задача про внутрішні чинники пом'якшення нев'язок (неузгодженостей) між наближеним і еталонним розв'язками навіть тоді, коли точний розв'язок не знайдено. Виходячи з цього, в роботі [2] було запропоновано і апробовано на базі точного розв'язку для прямокутної пластини метод пом'якшення нев'язок, тобто мінімізації середньоквадратичних нев'язок для переміщень (напружень) по товщині пластини (оболонки). Нижче, у доповнення до результатів роботи [2], метод удосконалено і апробовано на базі відомого точного розв'язку для круглої пластини. Нехай кругла пружна пластина радіуса a і товщини h знаходиться під дією поверхневих навантажень. Віднесемо її до циліндричної системи координат (r, θ, z) з початком у геометричному центрі O пластини і віссю Oz по нормалі до серединної площини. Приймемо, що пластина має циліндричну анізотропію, центр якої співпадає з O. Пружний стан пластини в довільній точці (r, θ, z) оцінюватимемо на базі семи параметрів — двох тангенціальних переміщень u, v (по координатних лініях r, θ у серединній площин), переміщення w (по нормалі до серединної площини), кутів $\phi, \psi,$ що враховують деформації поперечних зсувів, та параметрів $\varepsilon, \chi,$ що враховують стискання елемента нормалі до серединної поверхні. Закон зміни переміщень у довільній точці (r, θ, z) пластини візьмімо у вигляді

$$u(z) = u + \phi z = u^{(1)}(z), \;\; v(z) = v + \psi z = v^{(1)}(z), \;\; w(z) = w + \varepsilon z + \frac{\chi}{2} z^2 = w^{(1)}(z), \quad (1)$$

де $u, v, w, \phi, \psi, \varepsilon, \chi$ — функції координат (r, θ) (точок серединної поверхні пластини), z —координата, що змінюється по нормалі до серединної поверхні $(-0,5h \leq z \leq 0,5h)$.

Підготовчі операції методу

1. З припущень (1) та співвідношень закону Гука отримуємо компоненти тензора вхідних (неврівноважених) напружень $T^{(1)}$:

$$\sigma_r(z)=\sigma_r^{(1)}(z),\ \ \tau_{r\theta}(z)=\tau_{r\theta}^{(1)}(z),\ \ \tau_{rz}(z)=\tau_{rz}^{(1)}(z), \sigma_\theta(z)=\sigma_\theta^{(1)}(z),$$
$$\tau_{\theta z}(z)=\tau_{\theta z}^{(1)}(z), \sigma_z(z)=\sigma_z^{(1)}(z) \qquad (2)$$

2. Інтегруванням по змінній z з рівнянь рівноваги в напруженнях виводимо рівняння рівноваги у зусиллях-моментах і вирази компонентів тензора вихідних (врівноважених) напружень $T^{(2)}$:

$$\sigma_r(z)=\sigma_r^{(1)}(z), \tau_{r\theta}(z)=\tau_{r\theta}^{(1)}(z), \tau_{rz}(z)=\tau_{rz}^{(2)}(z), \sigma_\theta(z)=\sigma_\theta^{(1)}(z),$$
$$\tau_{\theta z}(z)=\tau_{\theta z}^{(2)}(z), \sigma_z(z)=\sigma_z^{(2)}(z) \ (3)$$

3. Виходячи з диференціальних співвідношень між напруженнями і переміщеннями, інтегруванням по змінній z робимо зворотний хід і повертаємось від напружень $\tau_{rz}^{(2)}(z)$, $\tau_{\theta z}^{(2)}(z)$, $\sigma_z^{(2)}(z)$ знов до переміщень, які отримуємо тепер вигляді:

$$u(z)=u^{(2)}(z),\ \ v(z)=v^{(2)}(z),\ \ w(z)=w^{(2)}(z), \qquad (4)$$

де $u^{(2)}(z)$, $v^{(2)}(z) -$ поліноми п'ятого, а $w^{(2)}(z) -$поліном четвертого степеня.

4. За виразами (2),(3) та (1),(4) складаємо дві групи нев'язок (по напруженнях та по переміщеннях):

$$\Delta_1=\left|\sigma_z^{(2)}(z)-\sigma_z^{(1)}(z)\right|,\ \Delta_2=\left|\tau_{rz}^{(2)}(z)-\tau_{rz}^{(1)}(z)\right|,\ \Delta_3=\left|\tau_{\theta z}^{(2)}(z)-\tau_{\theta z}^{(1)}(z)\right|; \ (5)$$
$$\Delta_4=\left|w^{(2)}(z)-w^{(1)}(z)\right|,\ \Delta_5=\left|u^{(2)}(z)-u^{(1)}(z)\right|,\ \Delta_6=\left|v^{(2)}(z)-v^{(1)}(z)\right|. \quad (6)$$

5. Оптимальним підбором параметрів ε,χ та ϕ,ψ (окремо по групах нев'язок) мінімізуємо функціонали $I_k=\int\limits_{-0,5h}^{0,5h}\Delta_k^2dz\ \ (k=\overline{1-6})$ і виводимо кінцеві співвідношення: формули лінійної залежності параметрів ε,χ від тангенціальних зусиль і моментів, та параметрів ϕ,ψ — від відповідних перерізаючих зусиль. Кожній групі нев'язок, (5) чи (6), відповідає своя група кінцевих співвідношень. При визначенні напружень виходимо з співвідношень на основі нев'язок (5), при визначенні переміщень — (6).

По проведенні підготовчих операцій отримуємо замкнену систему з п'яти диференціальних рівнянь – двох третього порядку відносно функцій ϕ,ψ та трьох другого порядку відносно переміщень u,v,w, яку розв'язуємо звичайними методами. Зазначена система рівнянь дозволяє досліджувати пружний стан пластин в уточненій постановці, з врахуванням їх податливості на поперечні зсуви та стискання. Відповідні розрахунки стають особливо актуальними для пластин із анізотропних матеріалів та ізотропних товстих пластин.

Випробуємо метод при розрахунку переміщень однорідної круглої пластини розмірами $0\le r\le a\,;0\le\theta<2\pi\,;-0,5h\le z\le 0,5h$ під дією рівномірного поперечного навантаження інтенсивністю q (на площині $z=0,5h$). Приймемо, що на граничному контурі $r=a$ пластину закріплено і виконуються умови:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad , w = 0, \quad \frac{dw}{dr} = 0.$$

Для трансверсально ізотропної пластини з площинами ізотропії $z = \mathrm{const}$, відповідно до закону (1) нами було знайдено:

$$u^{(1)}(z) = \frac{qr}{16\mathrm{D}} a_1^{(1)}, \;\; w^{(1)}(z) = \frac{q}{64D}\left(b_0^{(1)} + b_1^{(1)} z + b_2^{(1)} z^2 \right),$$

$$a_1^{(1)} = a^2 - r^2 - \frac{h^2}{5}\left(\frac{\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'} + \frac{2}{1-\nu}\frac{G}{G'} \right),$$

$$b_1^{(1)} = \frac{8}{3}\frac{h^3}{1-\nu^2}\frac{E}{E'}\left[1 - \frac{2}{1-\nu}(\nu')^2 \frac{E}{E'} \right], \qquad (7)$$

$$b_1^{(1)} = \left(a^2 - r^2 \right)^2, \; b_1^{(1)} = \frac{8\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'}\left[r^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{10}\left(\frac{\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'} + \frac{8}{1-\nu}\frac{G}{G'} \right) \right],$$

де E, G, ν — пружні характеристики матеріалу у площині ізотропії, а E', G', ν' — для напрямків, перпендикулярних до площини ізотропії (коефіцієнт Пуассона ν' визначає скорочення у площині ізотропії при розтягненні в напрямку нормалі до неї), через D позначено жорсткість на згин: $D = Eh^3 \big/ 12(1-\nu^2)$.

Для ізотропної пластини ця сама задача має точний розв'язок [3] (знайдений за теорією товстих плит):

$$u(z) = \frac{qr}{16D}\left(a_1 z + a_3 z^3 \right), \;\; w(z) = \frac{q}{64D}\left(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_4 z^4 \right),$$

$$a_1 = a^2 - r^2 - \frac{2}{1-\nu}h^2, \quad a_3 = \frac{4}{3}\frac{2-\nu}{1-\nu}, \qquad (8)$$

$$b_0 = \left(a^2 - r^2 \right)^2, \; b_1 = \frac{8}{3}h^3\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}, \; b_2 = \frac{8}{1-\nu}\left[\nu\left(r^2 - \frac{a^2}{2} \right) + \frac{1}{2}\frac{h^2}{1-\nu} \right],$$

$$b_4 = -\frac{8}{3}\frac{1+\nu}{1-\nu},$$

де E, ν — модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона.

Для порівняння наближеного і точного розв'язків для одного й того ж (ізотропного) матеріалу у формулах (7) покладемо $E' = E, \; G' = G, \nu' = \nu$. Похибки наближеного розв'язку (7) отримаємо у вигляді:

$$\Delta_u = u^{(1)}(z) - u(z) = \frac{qr}{16D}\left(\frac{h^2}{5}z - \frac{4}{3}z^3 \right),$$

$$\Delta_w = w^{(1)}(z) - w(z) = \frac{q}{8D}\frac{1+\nu}{1-\nu}\left(\frac{1}{3}z^4 - \frac{h^2}{10}z^2 \right)$$

Як і в роботі [2], було встановлено, що середньоквадратичнні апроксимації точного розв'язку (8) розвиненнями за степенями z у формі закону (1) по всіх коефіцієнтах практично збігаються з наближеним розв'язком (7) (для ізотропного матеріалу). Зокрема лінійна апроксимація переміщення $u(z)$ збігається з функцією $u^{(1)}(z)$. Висока точність збігу всіх коефіцієнтів закону (1) у точного і наближеного розв'язків свідчить про можливості метода.

Список літератури

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. — М.: Наука, 1974. — 446 с.

2. Кільчинський О. О., Скрипка В. І. Про деформацію пластин, податливих на поперечні зсуви та стискання / Праці міжнародної наукової конференції «Питання оптимізації обчислень (ПОО XL)». — Київ, 2013. — С.116–117

ЕКОНОМІЧНИЙ АЛГОРИМТ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ІНТЕРГУВАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ІЗ СПІЗНЮЮЧИМСЯ АРГУМЕНТОМ

В. О. Клименко, О. І. Рабченюк
Національний авіаційний університет, Київ, Україна
kasandra_66@mail.ru

Спізнення зустрічається в багатьох моделях прикладної математики. Спізнення або відхилення аргумента може бути джерелом цілого ряду цікавих математичних ефектів, таких як періодичні розв’язки, народження із стаціонарного розв’язку граничного циклу і т. д.

Але інтегрування таких задач, особливо еволюційного характеру, є справою не простою. Оскільки класична теорія [2] полягає у тому, що на кожному кроці зростає розмірність еквівалентної системи звичайних диференціальних рівнянь, аргумент яких вже не відхиляється. Ця обставина накладає завищені вимоги на порядок чисельного методу, який застосовується до таких задач і точності обчислень правої частини диференціального рівняння. Як правило, рекомендується застосування методу Бутчера шостого порядку, програмування якого і подальше від лагодження програми вимагає значних комп’ютерних ресурсів.

В даній роботі запропоновано значно простіший і економніший алгоритм другого порядку. Цієї точності, з нашої точки зору, цілком достатньо у прикладних розрахунках, зважаючи на невисоку точність даних задач. Алгоритм сформульовано для рівняння виду:

$$y' = f\left(x, y\left(x\right), y\left(x - \tau\right)\right),$$

при $y\left(x\right) = \varphi\left(x\right)$ на відрізку $x_0 \le x \le x_0 + \tau$.

Список літератури

1. Эльсгольц Л. Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л. Э. Эльсгольц, С. Б. Норкин. — М. : Наука. — 296 с.

2. Хайрер Э. Решение обыновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер. – М. : Мир, 1980. — 512 с.

СИСТЕМА РІВНЯНЬ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ЧАСТИНІ ПОХІДНИХ І КРАТНОЮ ТОЧКОЮ ЗВОРОТУ

І. Г. Ключник

Кіровоградський державний педагогічний університет ім. Володимира Винниченка, Кіровоград, Україна

Klyuchnyk.i@mail.ru

Лінійна система диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних з точкою звороту першого порядку вперше розглядається в [1], для якої запропоновано асимптотичний метод інтегрування. Для цієї системи в [2] доведено існування і нескінченну диференційовність по дійсним змінним x, ε матричних функцій, які мають асимптотичні розвинення при $\varepsilon \to 0$ формальних рядів одержаних запропонованим в [1] асимптотичним методом. В [3, 4] одержано асимптотичний метод інтегрування систем лінійних диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних, які містять кратну точку звороту.

Розглядається система лінійних диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{gathered} y' = A(x)y + A_1(x)y_1, \\ \varepsilon y_1' = (B(x) + \varepsilon B_1(x))y_1 + \varepsilon B_2(x)y, \end{gathered} \tag{1}$$

де $y \in \mathbb{R}^p, y_1 \in \mathbb{R}^m, m$ — парне додатне число, $A(x), A_1(x), B_1(x), B_2(x)$ — голоморфні при $\left|x\right| \le x_0$ матриці, $B(x)$ — матриця вигляду $B(x) = x^q I_1 + N,$ q — ціле число I_1 — $(m \times m)$-матриця з єдиним ненульовим елементом $\{I_1\}_{m1} = 1, N$ — нільпотентна матриця.

Для системи (1) пропонується асимптотичний метод інтегрування, що полягає в зведені до системи, перша компонента якої задовольняє інтегро-диференціальне рівняння з коефіцієнтами, що є формальними рядами за степенями параметра, а інші компоненти виражаються через неї. Розв'язок одержаного інтегро-диференціального рівняння знаходиться у вигляді степеневого ряду.

Список літератури

1. Самойленко А. М. Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных // Укр. мат. журн. – 2002. — **54**, № 11. — С. 1505–1516.

2. Завізіон Г. В., Ключник І. Г. Асимптотичні розвинення розв'язку системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних // Вісник Донецького національного університету. Серія А: Природ. науки. — 2008. — № 2. — С. 16–23.

3. Ключник І. Г. Асимптотичні розв'язки системи диференціальних рівнянь з кратною точкою звороту // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 11. — С. 1516–1530.

4. Ключник І. Г. Лінійна система диференціальних рівнянь з кратною точкою звороту // Нелінійні коливання. — 2012. — **15**, № 2. — С. 178–193.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАССОВО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ И ВОЛНОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ УПРУГИЙ ТРУБОПРОВОД — ЖИДКОСТЬ

А. П. Коваленко
Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина
koval.ap@yandex.ua

При исследовании различного типа динамических процессов в упругих трубопроводах с жидкостью принципиальным есть вопрос определения характерных признаков, параметров, коэффициентов и других характеристик, которые влияют на динамические процессы в системе. В настоящей работе рассматривается задача об изучении динамических характеристик трубопровода с жидкостью при продольном осевом ударном нагружении на торце оболочки некоторой массой M. При этом достаточно протяженный трубопровод моделируется полубесконечной цилиндрической оболочкой радиуса R и с толщиной стенки оболочки h. Жидкость рассматривается в акустическом приближении.

Математическая модель поставленной задачи состоит в применении линейных уравнений движения оболочек по модели Тимошенко, поскольку при определенных условиях [1], задачу можно рассматривать в линейном приближении. Жидкость при некоторых ограничениях можно рассматривать в акустическом приближении. Такая математическая модель позволяет учитывать волновой характер возмущений в системе.

Для определения характерных величин системы задача рассматривается в безразмерном виде. За характерную длину L выбрано радиус оболочки, т. е. $L = R$, за характерное время T выбрана величина $T = R\sqrt{\dfrac{(1-\nu^2)\rho_1}{E}}$, а за характерную массу выбрана величина $M + m$. Здесь ν, E, ρ_1, m — коэффициент Пуассона, модуль Юнга, плотность материала оболочки и масса на торце оболочки соответственно.

Для решения поставленной задачи применяется интегральное преобразование Лапласа — Карсона по времени

$$f^*(p) = p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\,.$$

Тогда в пространстве изображений по Лапласу — Карсону задача запишется в следующем виде.

Система уравнений движения:

$$\begin{cases} U^*_{xx} - d_1^2U^* = \beta_{13}W^*_x; \\ \Psi^*_{xx} - d_2^2\psi^*_{tt} = \beta_{23}W^*_x; \\ W^*_{xx} - d^2W^* = \beta_{31}U^*_x + \beta_{32}\Psi^* + K_s p\varphi^*; \\ \varphi^*_{xx} + \varphi^*_{rr} + \varphi^*_r / r - \beta^2\varphi^* = 0. \end{cases}$$

Граничные условия будут:

$$x = 0: \ W^* = \Psi^* = 0, \ \varphi_x^* = pU^*,$$

$$p^2\left(U^* - V_0 / p\right) = 2\pi K_m K_h \left(U_x^* + \nu W^*\right) + \frac{2\pi}{\alpha_{33}} K_m K_s K_h p \int_0^1 \varphi^* r dr;$$

$$x = \infty: \quad U^* = W^* = \Psi^* = 0; \quad r = 1: \ \varphi_r^* = pW^*.$$

Здесь x, r, t — продольная, радиальная координаты оболочки и время соответственно; U, W, Ψ — продольное, радиальное перемещение стенок оболочки и тангенс угла наклона сечения по теории оболочек типа Тимошенко соответственно, φ — потенциал скоростей жидкости. Звездочкой помечены величины в пространстве изображений. Остальные обозначения согласно [2].

Уравнения движения, начальные и граничные условия записаны в безразмерном виде. Их анализ позволяет виделить характерные величины для данной задачи. Это следующие величины:

$$K_h = h / R, K_m = R^3\rho_1 / (M + m),$$

$$K_s = 2R\rho_0 / \left(h\rho_1 k^2(1-\nu)\right) = \left(2 / k^2 / (1-\nu)\right) \cdot K_\rho / K_h, \ K_\rho = \rho_0 / \rho_1.$$

Здесь ρ_0 плотность жидкости в состоянии покоя. Коэффициент K_s, который отражает взаимосвязь оболочки и жидкости, будем называть коэффициентом взаимосвязи. Вышеприведенные коэффициенты есть массово-геометрические характеристики системы. Эти параметры отражают существенные взаимосвязи в рассматриваемой системе.

Следует также отметить, что при таком выборе характерных размерных величин безразмерная скорость распространения продольных возмущений по стенке оболочки будет $C_p = 1$ (максимальная скорость в системе), а скорость распространения поперечных возмущений по стенке оболочки будет равна $C_v = \sqrt{k^2(1-\nu) / 2} \approx 0,5C_p = 0,5$. Скорость распространения возмущений в жидкости (скорость звука) равна $a \approx 0,25$.

Таким образом, анализ задачи в безразмерных величинах позволил выявить массово-геометрические характеристики для данной задачи как ее существенные параметры. Также это позволило оценить скорости распространения возмущений в системе.

Список литературы

1. Сагомонян Е. А. О распространении продольных волн в цилиндрической оболочке // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика, 1977. — № 1. — С. 111–112.

2. Коваленко А. П. Влияние массово-геометрических характеристик системы упругий трубопровод-жидкость на переходные процессы в трубопроводе при продольных динамических ударных нагрузках // Вестник Херсонского национального технического университета. Вып. 2 (47). — Херсон: ХНТУ, 2013. — С. 150–154.

СИМЕТРІЇ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ (2+1)-ВИМІРНОГО ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ КОЛМОГОРОВА

С. С. Коваленко, В. І. Стогній
[1]*Інститут математики НАНУ,*
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
kovalenko@imath.kiev.ua, valeriy_stogniy@mail.ru

Розглядається (2+1)-вимірне лінійне рівняння Колмогорова

$$u_t - u_{xx} + xu_y = 0, \quad (x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1, \tag{1}$$

де $u = u(t, x, y)$, $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, $u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Це рівняння було запропоновано А. М. Колмогоровим у 1934 р. для опису броунівського руху частинки [1]. Також для рівняння (1) А. М. Колмогоров побудував у явному вигляді такий фундаментальний розв'язок:

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \cdot \frac{\theta(t - t_0)}{(t - t_0)^2} \cdot \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{4(t - t_0)} - \frac{3}{(t - t_0)^3} \left(y - y_0 - (t - t_0)\frac{x + x_0}{2} \right)^2 \right], \tag{2}$$

де θ — функція Хевісайда.

За алгоритмом Береста — Аксьонова [2] знайдено алгебру інваріантності фундаментальних розв'язків рівняння (1). Доведено такі твердження.

Теорема 1. Рівняння

$$u_t - u_{xx} + xu_y = \delta(t - t_0, x - x_0, y - y_0), \tag{3}$$

яке описує фундаментальні розв'язки рівняння (1) (δ — функція Дірака), допускає нетривіальну 4-вимірну алгебру Лі L_4 операторів симетрії з таким набором базисних операторів:

$$Y_1 = 2(t - t_0)\partial_t + (x - x_0)\partial_x - (x_0(t - t_0) - 3(y - y_0))\partial_y - 4u\partial_u,$$

$$Y_2 = (t^2 - t_0^2)\partial_t + ((tx + 3y) - (t_0x_0 + 3y_0))\partial_x + (3(y - y_0)t - t_0x_0(t - t_0))\partial_y - \\ - (2(t - t_0) + x^2 - x_0^2)u\partial_u,$$

$$Y_3 = 3(t^2 - t_0^2)\partial_x + (t^3 - 3t_0^2 t + 2t_0^3)\partial_y - 3(tx - y - (t_0x_0 - y_0))u\partial_u,$$

$$Y_4 = 2(t - t_0)\partial_x + (t - t_0)^2\partial_y - (x - x_0)u\partial_u.$$

Теорема 2. Фундаментальний розв'язок (2) лінійного рівняння Колмогорова (1) є інваріантним відносно 4-параметричної групи перетворень, що відповідає алгебрі Лі L_4 операторів симетрії рівняння (3).

Список літератури

1. Kolmogoroff A.N. Zufallige Bewegungen (Zur Theorie der Brownischen Bewegung) / A.N. Kolmogoroff // Ann. Math. — 1934. — **35**, № 2. — P. 116–117.

2. Аксенов А. В. Симметрии линейных уравнений с частными производными и фундаментальные решения / А. В. Аксенов // Доклады АН СССР. — 1995. — **342**, № 2. — С. 151–153.

ПРО ПЕРІОДИЗАЦІЮ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНІЄЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

В. В. Ковальчук
Державний економіко-технологічний університет транспорту, Київ, Україна
kovaltchukvv@ukr.net

Дослідження міцності та стійкості деяких будівельних споруд приводять до аналізу динамічної поведінки перевернутого математичного маятника зі слідкуючою силою. Під слідкуючою розуміємо силу $\vec{P}$, яка залишається дотичною до зігнутої осі верхньої ланки маятника. Наявність такої сили породжує в лінеаризованих рівняннях збуреного руху члени з кососиметричною матрицею (неконсервативні позиційні сили).

Досліджуваний триланковий маятник є шестивимірною динамічною системою:

$$\dot{x} = f(x, c, P), x, f \in \mathbb{R}^6, c, P \in \mathbb{R}^1_+ \tag{1}$$

Тут c — жорсткість пружного закріплення верхнього кінця маятника), P — модуль слідкуючої сили. Саме ці параметри вважаємо суттєвими (керуючими) при визначенні областей стійкості вертикального положення рівноваги маятника.

При варіюванні керуючих параметрів проведений локальний аналіз топологічної структури фазового простору досліджуваної динамічної системи. Окрім області $D\left(6{,}0\right)$ асимптотичної стійкості важливе значення має область протягування у фазовому просторі, тобто множина

$$\left\{x_0\right\}: \lim_{t \to +\infty} x\,(t,\, c,\, P,\, x_0) = 0\,.$$

Незбурений розв'язок $x = 0$ системи (1) відповідає вертикальному положенню усіх ланок маятника. Визначення області протягування нульового розв'язку системи (1) дозволяє конкретизувати ті величини початкових збурень, які гарантують згасання з плином часу подальших збурень.

Для побудови границі області протягування як граничного циклу (стійкого чи нестійкого) застосовуємо апарат теорії динамічних систем. Розглядаючи поліноміальні апроксимації правих частин динамічної системи (1), обмежуємося першими трьома степенями відхилень змінних $x_i\left(i = 1, \ldots, 6\right)$ від їх незбурених значень. Ураховуємо характер зміни спектра матриці лінеаризації A при зміні керуючих параметрів і переходимо до базису із власних векторів матриці A. Тоді система рівнянь перетворюється до вигляду

$$\dot{\xi} = G\,\xi + Q\,(\xi),$$

де $Q(\xi) = \sum_{k=1}^{6}\sum_{l=1}^{6}\sum_{m=1}^{6} A^{(i)}_{klm}\xi_k\xi_l\xi_m + o\left(\left|\xi\right|^3\right).$

Застосовуючи пакет прикладних програм Maple, будуємо періодичний розв'язок у вигляді ряду, членами якого є періодичні функції часу, та отримуємо апроксимації граничних циклів.

ПРО РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОВИМІРНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРОМ У ПРОСТОРАХ СОБОЛЄВА

Т. І. Кодлюк
Тернопільський національний педагогічний університет ім. В. Гнатюка, Тернопіль, Україна
tanpask@ukr.net

Нехай $m, n \in \mathbb{N}, p \in [1, \infty]$. Розглянемо параметризовану числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ сім'ю тотальних відносно простору W_p^n неоднорідних крайових задач для системи m звичайних диференціальних рівнянь

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \quad t \in (a,b), \tag{1}$$

$$U_\varepsilon y(\cdot;\varepsilon) = c_\varepsilon, \tag{2}$$

де матриці-функції $A(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^{n-1})^{m\times m}$, вектор-функції $f(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{n-1})^m$, вектори $c_\varepsilon \in \mathbb{C}^m$, а лінійні неперервні оператори $U_\varepsilon : (W_p^n)^m \to \mathbb{C}^m$.

Кожен з цих операторів допускає однозначне представлення

$$U_\varepsilon y := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\varepsilon) y^{(k-1)}(a) + \int_a^b d\Phi(t;\varepsilon) y^{(n)}(t),$$

де $\Phi(\cdot;\varepsilon)$ неперервна справа на (a,b) матриця-функція обмеженої варіації на відрізку, $\Phi(a;\varepsilon) = 0$, а $\alpha_k(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$.

Теорема. *Нехай однорідна гранична крайова задача* $(\varepsilon = 0)$ *має лише тривіальний розв'язок і при* $\varepsilon \to 0+$ *виконуються такі умови:*

1) $\| A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0) \|_{n-1,p} \to 0$; 2) $\| f(\cdot;\varepsilon) - f(\cdot;0) \|_{n-1,p} \to 0$;

3) $c_\varepsilon \to c_0$; 4) $U_\varepsilon y \to U_0 y, \quad \forall y \in (W_p^n)^m$.

Тоді для достатньо малих ε *задачі (1), (2) мають єдиний розв'язок і справедливе граничне співвідношення*

$$\| y(\cdot;\varepsilon) - y(\cdot;0) \|_{n,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+,$$

де $\| \cdot \|_{n,p}$ — норма в просторі W_p^n.

Для випадку $p \in [1, \infty)$ твердження теореми доведено в [1].

Список літератури

1. Кодлюк Т. И. Решения одномерных краевых задач с параметром в пространствах Соболева / Т. И. Кодлюк, В. А. Михайлец // Український математичний вісник. – 2012. — № 4. — С. 546–559.

НЕЛІНІЙНІ ПОДОВЖНЬО-ПОПЕРЕЧНІ СТАЦІОНАРНІ ХВИЛІ У ПРУЖНИХ СТРИЖНЯХ

Н. Р. Коновалова

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

konovalovanr@gmail.com

Для дослідження хвильових рухів у пружних стрижнях, які описуються розв'язками системи нелінійних диференціальних рівнянь Кірхгофа

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c_1^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial W}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \\ \dfrac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \dfrac{1}{c_2^2}\dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \dfrac{S}{I}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}\dfrac{\partial W}{\partial x} + \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\partial W}{\partial x}\right)^2\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right), \end{cases} \quad (1)$$

де $U(x,t)$, $W(x,t)$ — невідомі функції відповідно подовжніх та поперечних зсувів довільної точки x осі стрижня в момент часу t, c_1, c_2, S, I — сталі, які характеризують фізичні властивості стрижня [1], застосовані ідеї метода еквівалентної лінеаризації для систем з зосередженими параметрами [2].

У випадку нескінченного стрижня після переходу до нової фазової змінної

$$\theta = kx - \omega t,$$

де $k, \omega = \mathrm{const}$, k — хвильове число, ω — частота, система (1) перетворюється в систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 U}{d\theta^2} = -\dfrac{c_1^2 k^3}{c_1^2 k^2 - \omega^2}\dfrac{dW}{d\theta}\dfrac{d^2 W}{d\theta^2}, \\ \dfrac{d^4 W}{d\theta^4} + \dfrac{\omega^2}{c_2^2 k^4}\dfrac{d^2 W}{d\theta^2} = \dfrac{S}{Ik}\left(\dfrac{dU}{d\theta}\dfrac{d^2 W}{d\theta^2} + \dfrac{d^2 U}{d\theta^2}\dfrac{dW}{d\theta} + \dfrac{3}{2}k\left(\dfrac{dW}{d\theta}\right)^2\dfrac{d^2 W}{d\theta^2}\right). \end{cases}$$

Після пониження порядку розв'язання системи зводиться до інтегрування нелінійного диференціального рівняння другого порядку

$$z'' + \beta^2 z = f(z), \quad (2)$$

де

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2 k^4},\ f(z) = -\frac{S\omega^2}{2I(c_1^2 k^2 - \omega^2)} z^3.$$

Згідно методу еквівалентної лінеаризації нелінійне рівняння (2) замінено відповідним лінійним рівнянням з деяким еквівалентним коефіцієнтом β_e:

$$z'' + \beta_e^2 z = 0,$$

точним аналітичним розв'язком якого є функція

$$z = a\sin\beta_e\theta,$$

де $\theta = kx - \omega t$, $\omega^2 = c_2^2 k^4$.

Методом Бубнова — Гальоркіна встановлено функціональну залежність еквівалентного коефіцієнта β_e від параметрів рівняння (2):

$$\beta_e^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2 k^4}\left(1 + \frac{3}{8} \cdot \frac{S c_2^2 k^4 a^2}{I(c_1^2 k^2 - \omega^2)}\right).$$

Дисперсійне співвідношення, яке встановлює зв'язок між частотою ω та хвильовим числом k для нелінійного рівняння має вигляд

$$\omega^2 = \frac{c_2^2 k^4}{1 + \frac{3}{8}\frac{S a^2 k^4 c_2^2}{I(c_1^2 k^2 - \omega^2)}}\ .$$

Для малих амплітуд a дисперсійне співвідношення, яке одержане методом еквівалентної лінеаризації, співпадає з відомими точним

$$\frac{\pi}{2}\omega = \frac{c_2 k^2 K(m)}{\sqrt{1 + m^2}}, \quad m^2 = \frac{S c_2^2 k^4 a^2}{I(c_1^2 k^2 - \omega^2)}$$

з точністю до других членів у розвиненні Стокса:

$$\omega = c_2 k^2 (1 - \frac{3}{6}\frac{S c_2^2 k^4 a^2}{I(c_1^2 k^2 - \omega^2)} + \ldots).$$

Список літератури

1. Каудерер Г. Нелинейная механика. — М., Изд.-во иностр.лит.,1961. — 777с.

2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Физматгиз, 1963. — 410 с.

3. Митропольский Ю. А., Березовский А. А., Коновалова Н. Р. Эквивалентная линеаризация систем с распределенными параметрами // Укр. мат. журн. — 1986. — 38, № 4. — С. 464–471.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ ПРИ РАСПОЗНАВАНИИ ОБРАЗОВ

Н. Г. Коновенко, В. В. Лычагин

ОНАПТ, Одесса, Украина,

ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

konovenko@ukr.net , valentin.lychagin@uit.no

В работе предложена схема для распознавания форм областей на плоскости, оснащенных некоторой геометрической структурой, аналогичная [3].

Мы приводим локальную классификацию дифференциальных 1-форм на плоскости относительно группы $SL_2(\mathbb{C})$ конформных дробно-линейных преобразований.

Для этого найдено поле рациональных конформных дифференциальных инвариантов. Именно такие инварианты, согласно [2], разделяют регулярные орбиты.

Рациональную функцию f, заданную на пространстве k-джетов, мы называем конформным (рациональным) дифференциальным инвариантом, порядка $\leq k$, если $X^{(\mathrm{k})}\left(f\right) = 0$ для всех векторных полей $X \in sl_2(\mathbb{C})$, где $X^{(\mathrm{k})}$ — поднятие векторного поля X в пространство k-джетов.

Множество всех конформных дифференциальных инвариантов образует поле.

Теорема 1. Дифференциальные инварианты первого порядка

$$J_1 = \frac{-v_x + u_y}{u^2 + v^2} \quad \text{и} \quad J_2 = \frac{u_x + v_y}{u^2 + v^2}$$

разделяют регулярные $SL_2(\mathbb{C})$ орбиты в пространстве J_1, где $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{u}, \mathrm{v})$ канонические координаты в $T^*\mathbb{R}^2$.

Применяя инвариантные дифференцирования

$$\delta = t^{-1}\left(u\frac{d}{dx} + v\frac{d}{dy}\right),$$

$$\tilde{\delta} = t^{-1}\left(-v\frac{d}{dx} + u\frac{d}{dy}\right),$$

где $t = u^2 + v^2$, к инвариантам первого порядка J_1 и J_2 мы получаем четыре независимых инварианта второго порядка

$$\delta(J_1),\ \tilde{\delta}(J_1),\ \delta(J_2),\ \tilde{\delta}(J_2).$$

Мы показываем, что функции

$$R = \frac{K_1^2 + K_2^2}{t^2} \quad \text{и} \quad \Phi = \frac{K_1(\mathrm{u}^2 - \mathrm{v}^2) + 2uvK_2}{K_2(\mathrm{u}^2 - \mathrm{v}^2) - 2uvK_1}$$

также являются конформными дифференциальными инвариантами второго порядка. При этом $K_1 = \mathrm{Re}\ \mathrm{K}$ и $K_2 = \mathrm{Im}\ \mathrm{K}$, где

$$K = \frac{-2w\Delta^2(w) + 3(\Delta(w))^2}{w^4}$$

— функция, найденная в [1].

Теорема 2.

1. Конформные дифференциальные инварианты порождаются инвариантами J_1, J_2, R, Φ и двумя инвариантными дифференцированиями δ и $\tilde{\delta}$.
2. Эти инварианты разделяют регулярные орбиты.

Пусть F — конформный дифференциальный инвариант, а γ — дифференциальная 1-форма. Обозначим $F(\gamma)$ — значение этого инварианта на форме γ.

Скажем, что росток дифференциальной 1-формы γ регулярен, если значения $J_1(\gamma)$, $J_2(\gamma)$ функционально независимы.

В этом случае значения дифференциальных инвариантов второго порядка являются функциями от $J_1(\gamma)$ и $J_2(\gamma)$, скажем

$$\begin{aligned}
\delta(J_1)(\gamma) &= A_1(J_1(\gamma), J_2(\gamma)),\\
\delta(J_2)(\gamma) &= A_2(J_1(\gamma), J_2(\gamma)),\\
\tilde{\delta}(J_1)(\gamma) &= B_1(J_1(\gamma), J_2(\gamma)),\\
\tilde{\delta}(J_2)(\gamma) &= B_2(J_1(\gamma), J_2(\gamma)),\\
R(\gamma) &= r(J_1(\gamma), J_2(\gamma)),\\
\Phi(\gamma) &= f(J_1(\gamma), J_2(\gamma)).
\end{aligned}$$

Теорема 3. Ростки регулярных 1-форм конформно эквивалентны в том и только том случае, когда соответствующие функции A_1, A_2, B_1, B_2, r и f — совпадают.

Список литературы

1. Коновенко Н. Г. Дифференциальные инварианты и sl_2 - геометрии / Н. Г. Коновенко. – К. : Наук. думка, 2013. — 192 с.

2. B. Kruglikov, V. Lychagin. Global Lie-Tresse theorem // (2013), 48 p., http://arxiv.org/pdf/1111.5480.pdf

3. E. Sharon, D. Mumford. 2D-Shape Analysis Using Conformal Mapping // International Journal of Computer Vision 70(1), p. 55–75, (2006) // DOI: 10.1007/s11263-006-6121-z

МАТРИЧНІ ОПЕРАТОРИ ШТУРМА — ЛІУВІЛЛЯ З СИНГУЛЯРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

О. О. Константінов
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
iamkonst@ukr.net

Розглядається сингулярні вирази Штурма — Ліувілля
$$l(y) = -(py')' + qy$$
з матричними коефіцієнтами p, q такими, що
$$q = Q', \qquad p^{-1}, p^{-1}Q, Qp^{-1}, Qp^{-1}Q \in L_1((a,b), M_s).$$

Тут M_s — простір комплексних матриць розміру $s \times s$, похідна матричної функції Q розуміється в сенсі узагальнених функцій. Завдяки належній регуляризації за допомогою квазіпохідних відповідні оператори коректно визначаються як квазідиференціальні. В роботі показується, що такі квазідиференціальні матричні оператори можуть бути апроксимовані в сенсі рівномірної резольвентної збіжності матричними операторами Штурма — Ліувілля з гладкими коефіцієнтами. У випадку ермітових матриць p і Q відповідний мінімальний оператор є симетричним. В роботі в термінах однорідних граничних умов канонічної форми описуються всі його самоспряжені і максимально дисипативні розширення. Отримано також і параметризацію узагальнених резольвент мінімального квазідиференціального оператора.

Результати отримано спільно з В. А. Михайлецем. Вони продовжують і розвивають роботу [1], де розглядався випадок скалярних комплекснозначних функцій p, q.

Список літератури

1. Goriunov A.S., Mikhailets V.A. Regularization of singular Sturm — Liouville equations, Methods of Functional Analysis and Topology. — 2010. — **16**, № 2. — P.120–130.

МАЖОРАТНИЙ ПІДХІД ДО ТЕОРІЇ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ У ПРАЦЯХ М. С. КУРПЕЛЯ

М. І. Копач, А. Ф. Обшта, Б. А. Шувар
Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ,
Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна
kopachm2009@gmail.com

Запропонований Л. В. Канторовичем у 50-ті роки принцип мажорант, який став ефективним інструментом для побудови нелокальної теорії методу Ньютона, істотно розвинув М. С. Курпель і використав його для дослідження широкого класу ітераційних методів розв'язання операторних рівнянь [1]. Ним створено загальну теорію ітераційних та проекційно-ітеративних методів

Нехай $F(y,z): E \times E \to E$, де E — метричний простір. Для рівняння

$$x = F(x,x) \tag{1}$$

будуємо послідовність $\{x_n\}$ за формулами

$$x_n = F_k(x_n, x_{n-1}),$$

де $F_1(x,y) = F(x,y)$, $F_i(x,y) = F(x, F_{i-1}(x,y))$, $i = 2,3,\ldots,k$.

Нехай:

1) при кожному $n = 1,2,\ldots$ рівняння (1) має принаймні один розв'язок і цей розв'язок знаходиться в кулі $S(x_0, r) = S$ радіуса r з центром $x_0 \in E$;

2) справджується нерівність

$$d(F(x,y), F(z,t)) \le \phi(d(x,z), d(y,t)),$$

де $d(x,y)$ — віддаль між елементами $x,y \in E$, $x,y,z,t \in S$, $\phi(c,d) \in G$, $c,d \in G$, $k \ge 0$. Тут G — множина дійсних чисел, Θ — нуль в G;

3) функція $\phi(c,d)$ не спадає за обома аргументами і є неперервною за сукупністю аргументів;

4) рівняння $u = \phi_k(u,u)$, де

$$\phi_1(c,d) = \phi(c,d),\ \phi_i(c,d) = \phi(c, \phi_{i-1}(c,d)),\ i = 2,3,\ldots$$

має єдиний розв'язок $u = \Theta$, причому $\phi(b,b)$, $b = 2r$.

За цих припущень послідовність $\{x_n\}$ при $x_0 \in S$ збігається до єдиного в S розв'язку x^* рівняння (1) і справджуються оцінки

$$d(x^*, x_n) \le B_{n,k}(b),\ n = 0,1,\ldots,$$

де $B_{n,k}(b)$ — верхній розв'язок на $[a,b]$ рівняння

$$u = \phi_k(u, B_{n-1,k}(b)),\ B_{0,k}(b) = b.$$

При цьому послідовність $\left\{B_{n,k}\left(b\right)\right\}$ монотонно спадає щодо n і збігається до нуля. Цей факт можна обґрунтувати також для ситуації, коли G є архімедовим K -лінеалом, за допомогою якого структурно нормовано простір E .

Список література

1. Курпель Н. С. Проекционно-итеративные методы решения систем уравнений. — К.: Наук. думка, 1968. — 243 с.

СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ВИРОДЖЕНИХ СИСТЕМ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Ю. Ю. Король

Ужгородський національний університет, Ужгород, Україна

korol_yura@ukr.net

Розглядається диференціально-алгебраїчна система рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \quad t \neq \tau_i, \quad x, f \in \mathbb{R}^n,\ t, \tau_i \in (a, \infty), \qquad (1)$$

$$\Delta x\,|_{t=\tau_i} = x(\tau_i + 0) - x(\tau_i) = B_i x(\tau_i) + b_i,\ \det(E_n + B_i) \neq 0, \qquad (2)$$

де $\det B(t) = 0$, причому $\operatorname{rank} B(t) = n - r = \mathrm{const}\,\forall t \in [a, \infty)$, $1 \leq r \leq n-1$; вектор-функція $f(t)$ і $(n \times n)$-вимірні матриці $A(t)$, $B(t)$ є достатньо гладкими: $f(t), A(t),\ B(t) \in \mathbb{C}^k\left([a, \infty), \mathbb{R}^n\right), k$ —деяке натуральне число, $t_0 \leq \tau_1 < \ldots < \tau_p < \infty,\ p < \infty$.

Для вирішення питання про стійкість системи (1), (2) необхідно з'ясувати питання про обмеженість розв'язків відповідної однорідної системи. Як і у випадку невироджених систем, найбільш повну відповідь на це питання можна отримати, розглядаючи системи з періодичними коефіцієнтами. Основним результатом є наступна теорема.

Теорема. *Нехай виконуються наступні умови:*

$$\operatorname{rank} B(t) = n - r = \mathrm{const}\,\forall t \in [a, \infty), r > 0;$$

1) матриця $B(t)$ $\forall t \in [a, \infty)$ *має повний жорданів набір векторів* $\varphi_i^{(j)}(t) \in \mathbb{C}^{3q-j-1}\left([a, \infty), \mathbb{R}^n\right), i = \overline{1, r}, j = \overline{1, s_i}$, *відносно оператора* $L(t) = A(t) - B(t)\dfrac{d}{dt}$, *з простору* $\mathbb{C}^1\left([a, \infty), \mathbb{R}^n\right)$, *який складається з* r *ланцюжків завдовжки* $s_1, \ldots, s_r$*;*

2) $A(t), B(t) \in \mathbb{C}^{3q-2}\left([a, \infty), \mathbb{R}^{n \times n}\right), f(t) \in \mathbb{C}^{q-1}, \det(E_n + B_i) \neq 0$, *де* $\max\limits_i s_i = q$.

Тоді:

1) існують неособливі при всіх $t \in [a, \infty)$ $(n \times n)$*-вимірні матриці* $P(t), Q(t) \in C^{q-1}\left([a, \infty), \mathbb{R}^n\right)$ *такі, що множенням на матрицю* $P(t)$ *та заміною* $x = Q(t)y$ *система (1),(2) зводиться до імпульсної диференціально-алгебраїчної системи в центральній канонічній формі*

$$\begin{bmatrix} E_{n-s} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\frac{du}{dt} = \begin{bmatrix} M(t) & 0 \\ 0 & E_s \end{bmatrix} u + g(t),$$

$$\Delta u \,|_{t=\tau_i} = Q^{-1}(\tau_i) B_i Q(\tau_i) u(\tau_i) + Q^{-1}(\tau_i) b_i.$$

де нільпотентні блоки Жордана порядку $s_j \left(j = \overline{1, r} \right), M(t) \in C^{q-1}\left(\left[a, \infty\right), \mathbb{R}^n \right), E_s$ *—* s*-вимірна одинична матриця;*

2) загальний розв'язок системи (1), (2) визначається за формулою:

$$x(t) = X_{n-s}(t, a) z + \hat{x}(t).$$

де $X_{n-s}(t) = Q(t)\begin{bmatrix} \Omega_x(t) \\ 0 \end{bmatrix}$, $X_{n-s}(t, \sigma) = Q(t)\begin{bmatrix} \Omega_x(t, \sigma) \\ 0 \end{bmatrix}$,— $n \times (n-s)$-*вимірні матриці, стовпці яких є лінійно незалежними розв'язками системи*

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t) x(t), \quad t \neq \tau_i, \ t, \tau_i \in \left[a, \infty\right), \tag{3}$$

$$\Delta x \,|_{t=\tau_i} = B_i x(\tau_i), \tag{4}$$

$\Omega_x(t)$ *— фундаментальна матриця невиродженої лінійної однорідної імпульсної системи*

$$\frac{du_1}{dt} = M(t) u_1, t \neq \tau_i, \Delta u_1 \,|_{t=\tau_i} = B_{i,1} u_1(\tau_i), \ \ u_1 \in \mathbb{R}^{n-s}, t, \tau_i \in \left[a, \infty\right),$$

(5)

$\Omega_x(t, \sigma) = \Omega_x(t) \Omega_x^{-1}(\sigma)$ *— матрицант системи (5);* z *—* $(n-s)$*-вимірний довільний сталий вектор і* $\hat{x}(t)$ *— довільний розв'язок неоднорідної системи (1),(2);*

3) однорідна періодична система (3),(4) стійка тоді і тільки тоді, коли всі її мультиплікатори розміщені всередині замкнутого одиничного круга $|\rho| \leq 1$ *комплексної площини, причому мультиплікаторам, які лежать на колі* $|\rho| = 1$*, відповідають прості елементарні дільники матриці монодромії;*

4) для асимптотичної стійкості системи (3),(4) необхідно і достатньо, щоб усі її мультиплікатори знаходилися усередині одиничного круга $|\rho| < 1$.

Список літератури

1. Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — К.: Вища шк., 2000. — 294 с.

2. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — К.: Вища шк., 1987. — 228 с.

3. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М., Наука, 1967. — 472с.

4. A. M. Akymenko Stability of solutions of a degenerative linear systems of differential equations. Nonlinear Oscillations, 2010, Volume 5, Issue 4, pp. 430–438.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КОНТРОЛЬОВАНОГО ПОВЕРХНЕВОЮ КІНЕТИКОЮ ВИЗРІВАННЯ ОСТВАЛЬДА ПЛАСКИХ ВКЛЮЧЕНЬ НА МЕЖІ ЗЕРЕН

О. В. Коропов

Інститут прикладної фізики НАН України, Суми, Україна

ipfmail@ipfcentr.sumy.ua

1. Вихідні рівняння. Визрівання Оствальда (ВО) — це останній етап еволюції ансамблю включень другої фази в маточному середовищі [1]. В даній роботі аналізується ВО пласких включень на межі зерен у випадку, коли ріст включень контролюється швидкістю приєднання атомів на боковій поверхні включення. У розглядуваному випадку швидкість росту включень dR/dt, як випливає з [2, 3], має вигляд

$$\frac{dR}{dt} = \beta\left(\Delta_B - \frac{\Gamma_B}{R}\right). \tag{1}$$

Тут $R = R(t)$ — радіус основи включення, t — час, Δ_B — пересичення твердого розчину атомів домішки в міжзеренній межі $(\Delta_B << 1)$, β — поверхневий кінетичний коефіцієнт, що характеризує швидкість приєднання атомів на боковій поверхні включення, Γ_B — стала.

В безрозмірних змінних $\rho \equiv R/R_0^*$ і $t' = t/t_0$, де $t_0 \equiv R_0^{*2}/\beta\Gamma_B$, $R_0^* = R^*(t)\big|_{t=0}$, $R^*(t)$ - критичний радіус включення, рівняння (1) приймає вигляд

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho^2}{2}\right) = \frac{\rho}{x(t)} - 1. \tag{2}$$

Тут штрих при t уже опущений, а $x(t) \equiv R^*(t)/R_0^*$. Хай $f(\rho, t)$ — функція розподілу за розмірами (ФРР) включень, нормована на густину включень (число включень на одиницю площі межі зерен):

$$N(t) = \int_0^\infty f(\rho, t)\,d\rho; \tag{3}$$

$f(\rho, t)$ задовольняє кінетичному рівнянню [1]

$$\frac{\partial f(\rho, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho}\left[f(\rho, t)\frac{d\rho}{dt}\right] = 0, \qquad f(\rho, t)\big|_{t=0} = f_0(\rho). \tag{4}$$

Закон збереження речовини в системі має вигляд [4]

$$\frac{\Delta_{B0}}{Qx(t)} + \kappa\int_0^\infty \rho^2 f(\rho, t) d\rho = 1, \tag{5}$$

де $\Delta_{B0} \equiv \Delta_B(t)\big|_{t=0}$, а сталі Q і κ введені в [4]. Рівняння (2)–(5) є вихідними.

2. Асимптотика $R^*(\tau \to \infty)$. Далі будемо досліджувати асимптотичні характеристики ВО. Для цього перейдемо до безрозмірних змінних u, τ:

$$u \equiv \frac{R}{R^*(t)} = \frac{R}{\Gamma_B}\Delta_B(t) = \frac{\rho}{x(t)} = \frac{\rho}{\Delta_{B0}}\Delta_B(t), \tag{6}$$

$$\tau \equiv \ln x = \ln\left(\frac{R^*(t)}{R_0^*}\right) = \ln\left(\frac{\Delta_{B0}}{\Delta_B(t)}\right). \tag{7}$$

В цих змінних рівняння (2) зводиться до такого:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{u^2}{2}\right) = \zeta(u-1) - u^2, \tag{8}$$

$$\zeta = \zeta(\tau) \equiv \frac{dt}{xdx} = \frac{2dt}{dx^2} > 0. \tag{9}$$

Аналіз рівнянь (8) і (5) свідчить, що для достатньо великого «часу» τ

$$\zeta(\tau) = \zeta_0\left[1 - \varepsilon^2(\tau)\right], \tag{10}$$

де $\zeta_0 = 4$, $\varepsilon(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$. Більш детальний аналіз дає

$$\zeta(\tau) = \zeta_0\left(1 - 1/4\tau^2\right). \tag{11}$$

Підставляючи (11) в (9) з урахуванням, що $\tau = \ln x$, одержимо

$$x^2(t) = \frac{t}{2}\left\{1 + \frac{1}{\left[\ln(t/2)\right]^2}\right\}. \tag{12}$$

$$R^{*2} = \frac{1}{2}\beta\Gamma_B t\left\{1 + \frac{1}{\left[\ln\left(\beta\Gamma_B t/2R_0^{*2}\right)\right]^2}\right\}. \tag{13}$$

Головне наближення дає

$$R^{*2} = \frac{1}{2}\beta\Gamma_B t, \qquad \left[\ln\left(\beta\Gamma_B t/2R_0^{*2}\right)\right]^2 >> 1, \tag{14}$$

$$\Delta_B(t) = \left(\frac{2\Gamma_B}{\beta}\right)^{1/2} t^{-1/2}. \tag{15}$$

3. Асимптотика ФРР ($\tau \to \infty$). Рівняння для ФРР $\phi(u, \tau)$ в змінних u, τ:

$$\frac{\partial\phi(u,\tau)}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial u}\left[\phi(u,\tau)v(u)\right]=0\,. \tag{16}$$

При $\tau\to\infty$ поза околом точки $u_0=2$ $\left(\left|u-u_0\right|\geq\varepsilon(\tau)\right)$:

$$v(u)=\frac{du}{d\tau}=-\frac{(u-2)^2}{u}, \tag{17}$$

$$\phi(u,\tau)=\frac{\varphi\left(\tau-\tau(u)\right)}{-v(u)},\qquad u<u_0, \tag{18}$$

$$\phi(u,\tau)=0,\qquad u>u_0. \tag{19}$$

$$\tau(u)\equiv\int_0^u\frac{du'}{v(u')}=-\ln(2-u)-\frac{2}{2-u}+\ln 2e\,, \tag{20}$$

а φ — довільна диференційовна функція. Можна показати, що за умови $\tau\to\infty$ прямують до нуля ФРР при $u>u_0$ (поза околом точки u_0) і інтегральний внесок від околу точки u_0 (див. Додаток).

Закон збереження речовини (5) в змінних u,τ має вигляд

$$1-\frac{\Delta_{B0}}{Q}\exp(-\tau)=\kappa\left(\exp 2\tau\right)\int_0^\infty\phi(u,\tau)u^2du\,. \tag{21}$$

Тоді при $\tau\to\infty$

$$\varphi\left(\tau-\tau(u)\right)=A\exp\left(-2\tau+2\tau(u)\right), \tag{22}$$

$$\phi(u,\tau)=\frac{A}{2}\exp(-2\tau)P(u), \tag{23}$$

$$P(u)=\frac{8e^2u\exp\left[-4/(2-u)\right]}{(2-u)^4},\qquad 0\leq u<2\,, \tag{24}$$

$$P(u)=0,\qquad 2\leq u<\infty\,. \tag{25}$$

$$\int_0^{u_0}P(u)du=-\int_0^{u_0}\frac{2du}{v(u)}\exp\left(\int_0^u\frac{2du'}{v(u')}\right)=-\int_0^{-\infty}ds\exp s=1\,. \tag{26}$$

Графік густини ймовірності $P(u)$ зображений на рис. 1 (крива 4).

Стала A в (22), (23) дорівнює

$$A=2\left(\kappa\overline{u^2}\right)^{-1},\qquad \overline{u^2}\approx 1.1094\,. \tag{27}$$

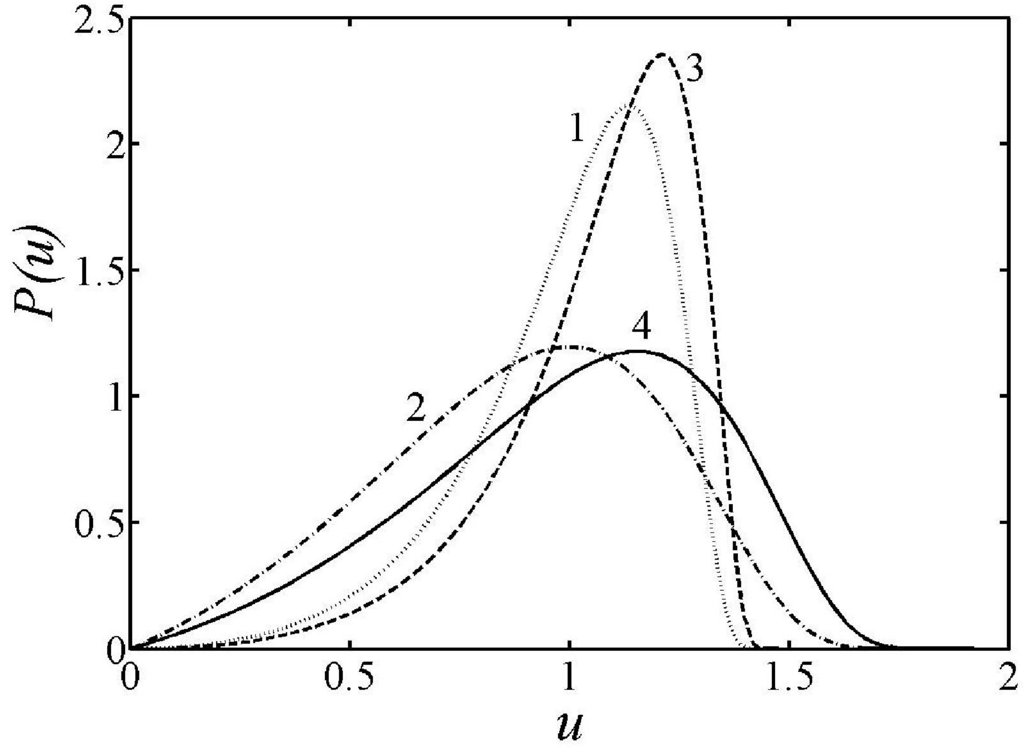


Рис. 1. Деякі функції $P(u)$, одержані в теорії ВО:
1 — праця [1]; 2 — праця [5]; 3 — праця [4]; 4 — дана робота

Густина включень $(t \to \infty)$:

$$N = \int_0^{u_0} \phi(u,\tau)\,du = \frac{A}{2}\exp(-2\tau) = \frac{A}{2}\left(\frac{R_0^*}{R^*(t)}\right)^2. \tag{28}$$

ФРР в змінних R, t при $t \to \infty$:

$$f(R,t) = \frac{N(t)}{\overline{R}(t)} P\left(\frac{R}{\overline{R}(t)}\right), \tag{29}$$

де $\overline{R}(t)$ — середній радіус включення (при $t \to \infty$ $\overline{R}(t) = R^*(t)$). Як видно із (7), (11), передбачається виконання нерівності $1/4\tau^2 << 1$, тобто

$$4\tau^2 = 4(\ln x)^2 = 4\left(\ln\frac{R^*(t)}{R_0^*}\right)^2 >> 1. \tag{30}$$

Додаток. Покажемо, що інтегральний внесок від околу точки u_0 нехтовно малий при $\tau \to \infty$. Нехай q — об'єм речовини в включеннях на одиниці площі межі зерен,

$$q = \pi h R_0^{*2} \int_0^\infty \rho^2 f(\rho, t) d\rho = \pi h R_0^{*2} x^2(\tau) \int_0^\infty u^2 \phi(u, \tau) du . \tag{31}$$

Будемо розглядати ξ-окіл точки u_0:

$$u_0 - \xi < u < u_0 + \xi , \tag{32}$$

де величина ξ не залежить від τ і задовольняє нерівностям

$$\varepsilon(\tau) << \xi << 1 . \tag{33}$$

Об'єм речовини q, який приходиться на ξ-окіл точки u_0 (32), дорівнює

$$q_\xi(\tau) = \pi h R_0^{*2} x^2(\tau) \int_{u_0-\xi}^{u_0+\xi} u^2 \phi(u, \tau) du , \tag{34}$$

$$q_\xi(\tau) \cong \pi h R_0^{*2} u_0^2 (\exp 2\tau) \int_{u_0-\xi}^{u_0+\xi} \phi(u, \tau) du . \tag{35}$$

Величину $q_\xi(\tau)$ можна представити у вигляді

$$q_\xi(\tau) = \pi h R_0^{*2} u_0^2 (\exp 2\tau) N_\xi(\tau), \tag{36}$$

де

$$N_\xi(\tau) = \int_{u_0-\xi}^{u_0+\xi} \phi(u, \tau) du \tag{37}$$

— число включень другої фази на одиниці площі межі зерен, що приходиться на ξ-окіл точки u_0 (32).

Інтегруючи кінетичне рівняння (16) по u в границях від $u_0 - \xi$ до $u_0 + \xi$, одержимо

$$\frac{dN_\xi(\tau)}{d\tau} = -\phi(u, \tau) v(u) \Big|_{u_0-\xi}^{u_0+\xi} . \tag{38}$$

В формулі (38) потік праворуч від точки u_0 $(u = u_0 + \xi)$ визначається при $\tau \to \infty$ нескінченно віддаленим «хвостом» початкового (при $\tau = 0$) розподілу і тому ним можна нехтувати. Тоді з урахуванням формул (18), (22) маємо

$$\frac{dN_\xi(\tau)}{d\tau} = -\varphi(\tau - \tau(u_0 - \xi)), \tag{39}$$

$$\frac{dN_\xi(\tau)}{d\tau} = -A\left[\exp(-2\tau)\right] \exp\left[2\tau(u_0 - \xi)\right]. \tag{40}$$

Урахування явного вигляду функції $\tau(u)$ (формула (20)) дає

$$\frac{dN_\xi\left(\tau\right)}{d\tau} = -A\left[\exp\left(-2\tau\right)\right]\exp\left(-\frac{4}{\xi}\right), \tag{41}$$

$$N_\xi\left(\tau\right) = \frac{A}{2}\left[\exp\left(-2\tau\right)\right]\exp\left(-\frac{4}{\xi}\right) + B. \tag{42}$$

Об'єм речовини $q_\xi\left(\tau\right)$ згідно із формулами (36), (42) дорівнює

$$q_\xi\left(\tau\right) = \pi h R_0^{*2} u_0^2 \left[\frac{A}{2}\exp\left(-\frac{4}{\xi}\right) + B\exp\left(2\tau\right)\right]. \tag{43}$$

Очевидно, що $B = 0$, тому що величина $q_\xi\left(\tau\right)$ явно обмежена при $\tau \to \infty$.

В остаточному підсумку об'єм речовини, що приходиться на ξ-окіл точки u_0 (32)

$$q_\xi = \frac{\pi}{2} A h R_0^{*2} u_0^2 \exp\left(-\frac{4}{\xi}\right) \xrightarrow[\xi \to 0]{} 0. \tag{44}$$

Здійснено аналітичний аналіз визрівання Оствальда (коалесценції) пласких включень другої фази на межі зерен для випадку, коли ріст включень контролюється поверхневою кінетикою. Знайдені асимптотичні характеристики процесу визрівання Оствальда.

Ostwald ripening (coarsening) of plane precipitates was analytically analyzed at a grain boundary for the case when the precipitates growth is controlled by surface kinetics. Asymptotic characteristics of Ostwald ripening are found.

Проведен аналитический анализ созревания Оствальда (коалесценции) плоских включений второй фазы на границе зерен в случае, когда рост включений контролируется поверхностной кинетикой. Найдены асимптотические характеристики процесса созревания Оствальда.

Список літератури

1. Лифшиц Е.М. Физическая кинетика / Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. — М. : Физматлит, 2007.
2. Коропов А. В. Журнал нано- та електронної фізики 2 №4, 31 (2010) (A.V. Koropov, Journal of Nano- and Electronic Physics 2 No.4, 117 (2010).
3. Коропов А.В. Журнал технической физики 81 Вып.12, 83 (2011) (A.V. Koropov, Technical Physics 56 No.12, 1781 (2011).
4. Коропов О.В. Журнал нано- та електронної фізики 4 №3, 03013 (2012).
5. Wagner C. Zeitschrift für Elektrochemie 65 Nr.7/8, 581 (1961).

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ РІШЕНЬ РІВНЯНЬ РУХУ ДВОЛАНКОВОГО МАЯТНИКА

І. А.Костюшко
Запорізький національний університет, Запоріжжя, Україна
kostushkoia@mail.ru

Розглянуто маятник Циглера, що представляє собою систему двох невагомих стрижнів однакової довжини, з'єднані шарнірами. Шарніри мають в’язкопружні властивості, так що моменти в них дорівнюють

$$M_1 = -A\phi_1 - B\dot{\phi}_1 - C\dot{\phi}_1^3 - D\phi_1^2\dot{\phi}_1,$$

$$M_2 = -A\left(\phi_2 - \phi_1\right) - B\left(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1\right) - C\left(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1\right)^3 - D\left(\phi_2 - \phi_1\right)^2\left(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1\right).$$

Тут A, B, C, D — позитивні параметри задачі. На вільний кінець маятника діє сила, що стежить, спрямована уздовж стрижня, на шарнір діє постійна за величиною і напрямком консервативна сила, спрямована вертикально вниз. Положення маятника визначається кутами ϕ_1 і ϕ_2.

Згідно рівнянь Лагранжа, отримані рівняння руху системи, що представляють собою нелінійну систему звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку. Записуючи наведену систему в нормальній формі, та використовуючи розкладання нелінійних доданків у ряди Маклорена, обмежуючись членами третього порядку, отримано систему рівнянь руху маятника, яка має очевидний тривіальний розв'язок, стійкість якого досліджується надалі.

Розглядаючи систему диференціальних рівнянь першого наближення, використовуючи критерій Рауса — Гурвіца, отримано умови асимптотичної стійкості системи.

Розглянуто три критичні випадки, коли характеристичне рівняння лінійної системи має один нульовий корінь, пару чисто уявних коренів і одночасно нульовий і пару уявних коренів. У даних випадках проблему стійкості слід вирішувати, враховуючи нелінійні доданки системи. Згідно основної теореми про критичні випадки, використовуючи метод нормальної форми, визначені області зміни параметрів системи, де має місце асимптотична стійкість (нестійкість) нульового положення рівноваги нелінійної системи.

Отримані аналітичні результати узгоджуються з чисельними, що свідчить про їх достовірність.

ЗАСТОСУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ В-СПЛАЙНІВ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРО ДЕФОРМАЦІЮ ТОНКИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ

М. М. Крюков, О. М. Шутовський

Державний економіко-технологічний університет транспорту,
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна

Дослідження деформації тонких оболонок обертання пов'язано із значними математичними і обчислювальними труднощами. Складність розв'язання таких задач обумовлена не тільки високим порядком вихідної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними і змінністю їх коефіцієнтів, але і необхідністю точно задовольняти умови на обмежуючих контурах. Останнім часом при розв'язуванні крайових задач теорії оболонок і пластин знаходять застосування сплайн-функції, використання яких показало їх високу ефективність. При цьому крайові задачі формулюються в переміщеннях. В доповіді пропонується підхід до розв'язання задачі про деформацію оболонок, який базується на використанні методу сплайн-колокацій, коли розв'язувальна система рівнянь і крайові умови формулюються в переміщеннях, зусиллях і моментах, тобто у мішаній формі. Оскільки оболонка замкнена в коловому напрямі за розв'язувальні функції приймемо наступні: $u,v,w,\vartheta_s, N_s,\hat{Q}_s, \hat{S},M_s$. Тоді деформація оболонки описується наступною системою рівнянь:

$$\frac{\partial\vec{N}}{\partial s} = \vec{F}(s,\theta,\vec{N},\frac{\partial\vec{N}}{\partial\theta},\frac{\partial^2\vec{N}}{\partial\theta^2},\frac{\partial^3\vec{N}}{\partial\theta^3},\frac{\partial\vec{N}^4}{\partial\theta^4})\ \left(s_0 \le s \le s_1;\, 0 \le \theta \le 2\pi\right),$$

де $\vec{N} = \{u,v,w,\vartheta_s, N_s,\hat{Q}_s, \hat{S},M_s\}^T$. При формулюванні крайової задачі для розв'язувальної система рівнянь необхідно задавати на контурах оболонки $s = s_0$, $s = s_1$ умови завантаження або закріплення. Розв'язок крайової задачі будемо шукати у вигляді:

$$\{u(s,\theta),v(s,\theta),w(s,\theta),\vartheta_s(s,\theta),N_s(s,\theta),\hat{Q}_s(s,\theta),\hat{S}(s,\theta),M_s(s,\theta)\} =$$
$$= \sum_{i=0}^{N-1}\{u_i(s),v_i(s),w_i(s),\vartheta_{si}(s),N_{si}\{s),\hat{Q}_{is}\{s),\hat{S}_i(s),M_{si}(s)\}\psi_i(\theta),$$

де $u_i(s),v_i(s),w_i(s),\vartheta_{si}(s),N_{si}\{s),\hat{Q}_{is}\{s),\hat{S}_{si}\{s),M_{si}(s)$ $\left(i=\overline{0,N-1}\right)$ — невідомі функції, а $\psi_i(\theta)$ $\left(i=\overline{0,N-1},\ N>6\right)$ — лінійні комбінації В-сплайнів 5-го степеня на рівномірній сітці точок $\theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < ... < \theta_N$, які задовольняють умови періодичності розв'язку. В цьому випадку функції $\psi_i(\theta)$ мають вигляд:

$$\Psi_1(\theta) = 2B_5^1(\theta);\Psi_2(\theta) = 2B_5^2(\theta);\Psi_i(\theta) = B_5^i(\theta)\left(i=\overline{3,\ N-3}\right);$$
$$\Psi_{N-2}(\theta) = 2B_5^{N-2}(\theta);\Psi_{N-1}(\theta) = 2B_5^{N-1}(\theta).$$

Застосуємо метод колокацій і отримуємо наступну крайову задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь у формі Коші, яка містить $8 \times N$ рівнянь першого порядку:

$$\frac{d\overline{Y}}{ds} = B\overline{Y} + \overline{f}\,,$$
$$B_1\,\overline{Y}\left(s_0\right) = \overline{b_1}\,,$$
$$B_2\,\overline{Y}\left(s_1\right) = \overline{b_2}\,.$$

Цю крайову задачу розв'язуємо стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації.

ПРО УМОВИ ДИНАМІЧНОГО РУЙНУВАННЯ СТРУКТУРОВАНОСТІ НАНОСУСПЕНЗІЙ

О. В. Кузьма

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

alexkuz@voliacable.com

Динаміка рідинних середовищ із малими включеннями під дією внутрішніх вібраційних збурень, які створює випромінювач чи газове скупчення в хвильоводі, трубці, були розглянуті в [1], де проведені дослідження коливань твердих сферичних частинок чи пульсації бульбашок методом малого параметра. Особливості резонансної інтенсифікації впливів випромінювача на такі суспензії, пов'язані із проблемою фокусування хвиль, наприклад, в ультразвуковій хірургії, розглянуті в [2].

Сили дисипації в рідинному середовищі вважалися малими, порівнюючи із інерційними членами, тому для цієї фази застосовувалась модель нев'язкої рідини, що здійснює потенціальні течії. А рівняння коливань самих частинок містили дисипативні члени, введені на основі гіпотези про малу в'язкість рідини та низьку концентрацію дисперсних фаз твердих чи газових включень [1].

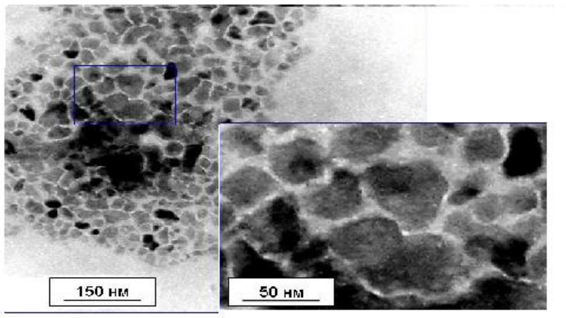


Рис. 1

У даній роботі розглядається інший, складніший випадок — насичених нанодисперсних суспензій, де частинки здійснюють і контактну взаємодію. Тому в'язкість не тільки не мала, а, навпаки, є визначальним фактором течії. Причому ефективна в'язкість η_{eff} може змінюватися під час динамічних впливів, коли агрегати починають руйнуватися, ще й залежить від концентрації, пакування. Через відсутність точної моделі таких течій розглянемо реологічну модель для η_{eff} на базі підходів динаміки дисперсних систем П. А. Ребіндера, Н. Б. Ур'єва [3].

Дані для аналізу були отримані в ІПМ НАНУ проф. А. В. Рагулею, М. М. Загорним та представлені у [4] разом із автором роботи. Результати для ефективної в'язкості η_{eff} вимірювались для суспензій $\mathrm{BaTiO_3}$ у спиртових розчинах із середнім розміром частинок $d = 2r = 1,3 \cdot 10^{-7}$м, були отримані на ротаційному віскозиметрі Rheotest RN 4.1 при різних значеннях напруження зсуву τ, швидкості зсуву D та концентрації c. Актуальність досліджень пов'язана із проблемами виробництва тонких плівок із сегнетоелектриками; ціль — визначення умов утворення та руйнування структур при динамічних впливах, що суттєво змінює властивості цих плівок (рис.1).

Критерій руйнування агрегатів із включень може бути отриманий при порівнянні потенціальної енергії взаємодії пари сферичних включень $(r_1 = r_2 = r)$, що знаходяться на віддалі $h > 10^{-8}$м [3],

$$U(r,h) = r[-\frac{B}{h^2} - \frac{64\pi}{k^2} NT\gamma^2 e^{-k_1 h}], \tag{1}$$

кінетичної енергії E, наданої гравітаційним, динамічними впливами частинці,

$$E = \frac{mv^2}{2} \cdot \tag{2}$$

Звідси, якщо визначити впливи рідинного середовища — U_p, E_p та узагальнені сили — можуть бути отримані рівняння Лагранжа, аналогічні [1]. У випадках, коли інерційні впливи значно більші за гравітаційні, можна визначити порядок швидкостей, коли порушується структура дисперсії, і в'язкість стрімко зменшується. При

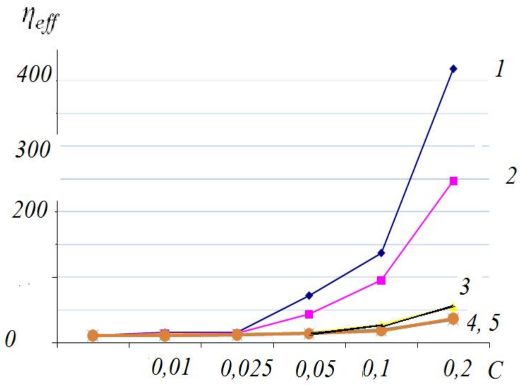


Рис. 2

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = 5,6 \cdot 10^{-17} \text{кг},$$

$B = 10^{-28}$ Дж · м, $h = 2 \cdot r$, умова рівності величини енергії з (1), обчисленої за першим, більшим, членом, енергії з (2) виконується при $D_k \approx 119.6$ сек$^{-1}$.

На рис. 2 показані експериментальні (криві *1–3*) та аналітичні (криві *4, 5*) значення η_{eff}. Криві *1, 2, 3* — для $D = 50,\ 100,\ 1000$ сек$^{-1}$. За формулою Крігера — Догерті,

$$\eta_{eff} = \eta_1 \left(1 - \frac{c}{c_{\max}}\right)^{-c_{\max}[\eta_1]}, \tag{3}$$

побудована крива *4*, де $D = 1000$ сек$^{-1}$, $c_{\max} = 0,5236$, $\eta_1 = [\eta] = 10{,}5$ Па · сек$^{-1}$; при застосуванні до цього випадку метода найменших квадратів — крива *5*.

Для швидкостей обертання, при яких $D < D_k$, криві течії починають відрізнятися вже при $c > 0,025$ — виявляється структурованість. При $D > D_k$ ефективна в'язкість спадає — агрегати руйнуються. Лінії *3–5* майже співпадають для $c \leq 0,2$, що підтверджує і можливість використання (3) в цьому діапазоні.

Список літератури

1. Кузьма О. В. Особливості поведінки включень у стовпі стисливої рідини, що збурюється джерелом коливань на осі симетрії//Наук. вісті НТУУ «КПІ». — 2006. — № 4. — С. 66–72.

2. Кузьма А. В. Вибрационные воздействия на включения в инвазивном волноводе/ А.В. Кузьма // Прикл. задачи математики и механики: матер. XX межд. науч.-техн. конф., 10 — 14 сент. 2012 г.— Севаст.: СевНТУ, 2012. — С. 84–87.

3. Урьев Н. Б. Физико-химическая динамика дисперсных систем // Успехи химии / Урьев Н. Б. — 2004. — 73, 1. — С. 39–62.

4. Кузьма О. В. та інш. Аналіз залежностей в'язкості для суспензій титанату барію/ М. М. Загорний, О. В. Кузьма, А. В. Рагуля //Прикл. задачи математики: Матер. XXI между. науч.-техн. конфер., 16 — 20 сент. 2013. — Севаст.: СевНТУ, 2013. − С. 108–111.

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ТЕОРІЇ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОВОГО САМОЗАЙМАННЯ ПИЛОВУГІЛЬНИХ СУМІШЕЙ

Б. В. Кузьменко
Інститут вугільних енерготехнологій НАН України, Київ, Україна
bkuzmenko@i.ua

Нами вперше встановлено наступне рівняння теплового балансу, яке враховує теплове випромінювання

$$\frac{d\overline{\theta}}{d\chi} = \overline{C}(\alpha\overline{C} + 1 - \alpha)\frac{1}{\theta^2}e^{-\frac{1}{\theta}} - \Omega(\overline{\theta} - \overline{\theta}_1) - \varsigma(\overline{\theta}^4 - \overline{\theta}_1^4), \qquad (1),$$

$$\frac{d\overline{C}}{d\chi} = -\frac{1}{\theta_{a\partial}}\overline{C}(\alpha\overline{C} + 1 - \alpha)\frac{1}{\theta^2}e^{-\frac{1}{\overline{\theta}}},\ \chi = \chi_0, \overline{\theta} = \theta_0, \overline{C} = \overline{C}_0, \qquad (2),$$

де $\overline{\theta}, \overline{C}$ — відносні величини температури та концентрації за киснем пиловугільної суміші; $\Omega, \varsigma, \alpha, \theta_1$ — відповідно, безрозмірний коефіцієнт тепловіддачі в навколишнє середовище, коефіцієнт теплового випромінювання; стехіометрична стала та відносна величина відносної температури навколишнього середовища; $\chi, \chi_0, \overline{\theta}_{,0}\overline{C}_0$ — відповідно, відносна величина фактору часу та його початковим значенням, початкові значення відносних, відповідно, температури та концентрації. В момент теплового самозаймання $\frac{d\overline{\overline{\theta}}}{d\chi} = 0$. Для стохастичних умов теплового самозаймання до правої частини рівняння (1), як і інших рівнянь математичної моделі, додається випадкова складова, типу $\varphi \cdot \nu(\chi)$, де $\nu(\chi)$ випадкова величина, що визначає стохастичний характер процесів у системі, що моделюється. В результаті стохастичного моделювання отримується диференціальна функція розподілу положення точки самозаймання, або моменту теплового самозаймання. Для нечітких умов перебігу теплового самозаймання задача моделювання теплового самозаймання полягає в отриманні виразу для характеристичної функції належності для часу або геометричного положення відповідної точки $\mu(\theta, \chi)$ з відповідними умовами існування та єдності розв'язку, відповідне рівняння має вигляд:

$$\frac{\partial^2\mu(\overline{\theta}, \chi)}{\partial\overline{\theta} \cdot \partial\chi} = -\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}}[a(\overline{\theta}, \chi)\mu(\overline{\theta}, \chi)] + 0.5\frac{\partial^3[d(\overline{\theta}, \chi)\mu(\underline{\overline{\theta}}, \chi)]}{\partial\overline{\theta}^3}$$

до нього обов'язково повинно додаються умови однозначності розв'язку, типу початкових та граничних.

Для отримання рівняння фазової траєкторії процесу розділимо вираз (1) на (2), після нескладних перетворень отримуємо:

$$\frac{d\overline{\theta}}{d\overline{C}} = -\theta_{a\partial} + \frac{\Omega(\overline{\theta} - \overline{\theta}_1) + \varsigma(\overline{\theta}^4 - \overline{\theta}_1^4)}{\overline{C}(\alpha\overline{C} + 1 - \alpha)}\overline{\theta}^2\theta_{a\partial}e^{\frac{1}{\theta}},\ \overline{C} = \overline{C}_0, \underline{\overline{\theta} = \overline{\theta}_1}. \qquad (3)$$

Диференціальне рівняння (3) дає змогу оцінити можливість розвитку процесу теплового самозаймання пиловугільних сумішей в напрямку хаотичності. Аналіз цього рівняння свідчить про відсутність дивних атракторів, як фазових траєкторій відповідної динамічної системи, у випадку, що розглядається можливі тільки звичайні атрактори.

В точці максимуму температурної кривої $\frac{d\overline{\theta}}{d\chi}=0$, тобто

$$\overline{C}_{extr}(\alpha\overline{C}_{extr}+1-\alpha)\frac{1}{\theta_{extr}^{2}}e^{-\frac{1}{\theta_{extr}}}-\Omega(\overline{\theta}_{extr}-\overline{\theta}_{1})-\varsigma(\overline{\theta}_{extr}^{4}-\overline{\theta}_{1}^{4})=0, \quad (4),$$

далі диференціюємо цей вираз по χ, робимо заміну $\frac{d\overline{C}}{d\chi}$ з рівняння (2), після деяких перетворень маємо:

$$\frac{d\overline{\theta}_{extr}}{d\chi}=-\frac{1}{\theta_{ad}}\frac{\sqrt{(\alpha-1)^{2}+[4\alpha\Omega(\overline{\theta}_{extr}^{\,3}-\overline{\theta}_{1}\overline{\theta}_{extr}^{2})+4\alpha\varsigma(\overline{\theta}_{extr}^{6}-\overline{\theta}_{extr}^{2}\overline{\theta}_{1}^{4})\exp(1/\theta_{extr})}}{\Omega(3\overline{\theta}_{extr}^{2}-3\overline{\theta}_{1}\overline{\theta}_{extr}-\overline{\theta}+\overline{\theta}_{1})+\varsigma(6\overline{\theta}_{extr}^{5}-2\overline{\theta}_{extr}\overline{\theta}_{1}^{4}-\overline{\theta}_{extr}+\overline{\theta_{1}^{4}})}[\Omega(\overline{\theta}_{extr}-\overline{\theta}_{1}^{4})+$$

$$+\varsigma(\overline{\theta}_{extr}^{4}-\overline{\theta}_{1}^{4})], \quad (5)$$

де $\overline{\theta}_{extr}$ — екстремальне (максимальне) значення відносної температури процесу само розігріву пиловугільної суміші; $\overline{C}_{extr}$ — значення відносної концентрації окислювача в точці екстремуму (максимуму) функції $\overline{C}(\chi)$.

До диференціального рівняння (5) неможливо поставити початкову умову (при довільних значеннях параметрів, що входять до нього), тому на даному етапі досліджень це рівняння придатне тільки для загальних дослідницьких цілей, та аналізування процесу.

З рівняння (4) маємо наступне співвідношення між відносною концентрацією окислювача та екстремальною відносною температурою

$$\overline{C}_{extr}(\overline{\theta}_{extr})=\frac{\alpha-1}{2\alpha\overline{\theta}_{extr}^{2}}e^{-\frac{1}{\overline{\overline{\theta}}_{extr}}}+\sqrt{(\frac{\alpha-1}{\alpha\overline{\theta}_{extr}^{2}})^{3}e^{-\frac{2}{\overline{\overline{\theta}}}}+\frac{\Omega}{\alpha}(\overline{\theta}_{extr}-\overline{\theta}_{1})+\frac{\varsigma}{\alpha}(\overline{\theta}_{extr}^{4}-\overline{\theta}_{1}^{4})}, \quad (6)$$

Отримані результати, згідно із загальною теорією теплового самозаймання М. М. Семенова визначають інтервал часу (геометричного інтервалу), в якому знаходиться момент часу (точка геометричного інтервалу), коли відбувається процес теплового самозаймання пиловугільної суміші. Ліва точка цього інтервалу визначається оцінкою, згідно теоретичних положень, розроблених М. М. Семеновим $\overline{\theta}_{C}$, [1], а права точка, $\overline{\theta}_{учек}$,— величиною максимуму температурної кривої, її координату (ординату, можна визначити згідно з даними розробленої в цій роботі математичної моделі. Очевидно, що теплове самозаймання можливе, коли, окрім всього іншого, коли, $\overline{\theta}_{C}<\overline{\theta}_{extr}$, якщо ж $\overline{\theta}_{C}\geq\overline{\theta}_{extr}$, то теплове самозаймання неможливе. Тобто для відносної температури теплового самозаймання $\overline{\theta}_{сз}$ має місце співвідношення:

$$\overline{\theta}_{C}<\overline{\theta}_{сз}\leq\overline{\theta}_{CЗ}, \text{ або}$$

$$\overline{\theta}_{CЗ}\in(\overline{\theta}_{C},\overline{\theta}_{ечек}].$$

Список літератури

1. Кузьменко Б. В. Теплове самозаймання паливних сумішей. Монографія / Б. В. Кузьменко, В. П. Лисенко. — К. : ФЕНІКС, 2010. — 200 с.

ВЛАСТИВІСТЬ РЕГУЛЯРНОСТІ МАТРИЧНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ НА ТОРІ

В. Л. Кулик
Сілезський технічний університет, Глівіце, Польща
Viktor.Kulyk@polsl.pl

Розглядаються системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d\phi}{dt} = a(\phi) \quad , \quad \frac{dX}{dt} = A(\phi)X - XB(\phi) + F(\phi), \tag{1}$$

де $a(\phi) \in C_{Lip}(T_m)$, $A(\phi)$, $B(\phi)$ — квадратні матриці, елементами яких є дійсні функції визначені на m-вимірному торі T_m, прямокутна матриця $F(\phi) \in C(T_m)$, X — невідома прямокутна матриця. Досліджуються умови, при яких система (1) має інваріантний тор $X = U(\phi)$ при кожній фіксованій матриці $F(\phi)$. Умовою існування інваріантного тору системи (1) є виконання однієї з оцінок

$$\left\|\Omega_t^0(\phi; A)\right\| \cdot \left\|\Omega_0^t(\phi; B)\right\| \leq K \exp\{-\gamma t\}, t \geq 0;$$

$$\left\|\Omega_t^0(\phi; A)\right\| \cdot \left\|\Omega_0^t(\phi; B)\right\| \leq K \exp\{\gamma t\}, \; t \leq 0 \; (2)$$

де K, γ — додатні сталі, які не залежать від ϕ і t, $\Omega_\tau^t(\phi; A)$ — матрицант лінійної системи

$$\frac{dx}{dt} = A(\phi_t(\phi))x$$

При цьому одночасне виконання оцінок (2) не є можливим. Перша з оцінок (2) еквівалентна оцінці

$$\left\|\Omega_t^\tau(\phi; A)\right\| \cdot \left\|\Omega_\tau^t(\phi; B)\right\| \leq K \exp\{-\gamma(t - \tau)\}, \; \tau \leq t,$$

що в свою чергу є еквівалентним

$$\left\|\Omega_0^t(\phi; A)\right\| \cdot \left\|\Omega_t^0(\phi; B)\right\| \leq K \exp\{\gamma t\}, \; t \leq 0.$$

при виконанні однієї з оцінок (2) для будь-якої фіксованої матриці $F(\phi) \in C(T_m)$ система (1) матиме єдиний інваріантний тор:

$$X = U(\phi) = \begin{cases} -\int\limits_0^{+\infty} \Omega_\tau^0(\phi; A) F(\phi_\tau(\phi)) \Omega_0^\tau(\phi; A)\, d\tau, \\ \int\limits_{-\infty}^0 \Omega_\tau^0(\phi; A) F(\phi_\tau(\phi)) \Omega_0^\tau(\phi; A)\, d\tau \end{cases}$$

відповідно при виконанні першої з оцінок (2) і другої.

Існування квадратних невироджених матриць $L(\phi), Q(\phi) \in C'$ таких, що

$$L^{-1}(\phi)A(\phi)L(\phi)-L^{-1}(\phi)\dot{L}(\phi)=\mathrm{diag}\left\{A_1(\phi),A_2(\phi)\right\}=\bar{A}(\phi),$$
$$Q(\phi)B(\phi)Q^{-1}(\phi)+\dot{Q}(\phi)Q^{-1}(\phi)=\mathrm{diag}\left\{B_1(\phi),B_2(\phi)\right\}=\bar{B}(\phi)$$
приводить до розділення змінних в системі (1) при заміні змінних
$$X=L(\phi)YQ(\phi).$$

Якщо ж матриці $\bar{A},\bar{B}$ матимуть діагональний вигляд:
$$\bar{A}=\mathrm{diag}\left\{\alpha_1(\phi),...,\alpha_n(\phi)\right\},\ \bar{B}=\mathrm{diag}\left\{\beta_1(\phi),...,\beta_p(\phi)\right\},$$
то система (1) відносно нормальних змінних $X\to Y$ перейде в роздільні скалярні рівняння:
$$\frac{dy_{ij}}{dt}=\left(\alpha_i(\phi)-\beta_j(\phi)\right)y_{ij}+f_{ij}(\phi).$$
Розглядаються приклади системи (1), які мають безліч інваріантних торів при кожній фіксованій матриці $F(\phi)$.

Список літератури

1. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л. Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. — К: Наук. думка, 1990. — 270 с.

2. Грод І. М., Кулик В. Л. Регулярність матрично-диференціальних рівнянь // Буковинський математичний журнал. — 2013. — Т. 1, № 1–2. — С. 48–52 (В).

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ХИЛЛА, НЕ РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ, В СЛУЧАЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

П. В. Кулиш

Донбасский государственный педагогический университет, Славянск, Украина

pkulish@mail.ru

Исследована задача о нахождении решений $y(t,\varepsilon)\in C^2[0,2\pi]$, $C[0,\varepsilon_0]$ периодической краевой задачи [1] для уравнения Хилла, не разрешенного относительно производной

$$y''+y=f(t)+\varepsilon Y(y,y',y'',\mu,t,\varepsilon), \qquad (1)$$

которые при $\varepsilon=0$ обращаются в решение $z_0(t)\in C^2[0,2\pi]$ порождающей задачи $y_0''+y_0=f(t)$. Здесь $Y(y,y',y'',\mu,t,\varepsilon)$ — нелинейная функция, непрерывно дифференцируемая по первым трем аргументам в малой окрестности решения порождающей задачи и ее производных, по четвертому аргументу в окрестности точки $\mu_0:=\mu(0)$, непрерывно дифференцируемая по ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$, а также непрерывная по независимой переменной на отрезке $[0,2\pi]$. Предположим, что выполнено условие [1] разрешимости порождающей задачи. Нами получены необходимые условия существования решения невырожденной периодической задачи для уравнения Хилла (1), не разрешенного относительно производной.

Лемма. *Если невыроджденная периодическая задача для уравнения (1) в малой окрестности порождающего решения*

$$y_0(t,c_0(\varepsilon)):=c_0(\varepsilon)\cos t+g\big[f(s)\big](t)$$

и функции $\mu_0(\varepsilon)$ имеет решение, при $\varepsilon=0$ обращающееся в порождающее, то вектор $\tilde c_0(\varepsilon):=\mathrm{c}ol(c_0(\varepsilon),\mu_0(\varepsilon))\in\mathbb{R}^2$ удовлетворяет уравнению для порождающих констант

$$F(\tilde c_0(\varepsilon)):=\int_0^{2\pi}Y(y_0(s,c_0(\varepsilon)),y_0'(s,c_0(\varepsilon)),y_0'(s,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),s,\varepsilon)=0.$$

Здесь $g[f(s)](t)$ — оператор Грина задачи Коши для порождающей задачи. Нами получены достаточные условия существования по меньшей мере одного решения периодической задачи для уравнения Хилла (1) в случае простых корней уравнения для порождающих констант, обобщающие соответствующие результаты [1, 2].

Список литературы

1. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. 317 p.

2. Чуйко С. М. Периодическая краевая задача для уравнения типа Хилла в случае параметрического резонанса / С. М. Чуйко, Е. В. Чуйко, П. В. Кулиш // Динамические системы. — 2013. — № 3. — С. 151–158.

ТРИТОЧКОВІ РІЗНИЦЕВІ СХЕМИ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У СФЕРИЧНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

А. В. Кунинець

Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна

andriy.kunynets@gmail.com

Розглянемо крайову задачу для нелінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2k(x)\frac{du}{dx}\right] = -f(x,u), \qquad x \in (0,R), \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0} x^2k(x)\frac{du}{dx} = 0, \qquad u(R) = \mu_2. \tag{2}$$

Достатні умови існування та єдиності розв’язку задачі (1), (2) мають вигляд

$$0 < c_1 \le k(x) \le c_2 \qquad \forall x \in \left[0,R\right],\, k(x) \in Q^1\left[0,R\right],$$

$$f_u(x) \equiv f(x,u) \in Q^0\left[0,\ R\right],\, \left|f(x,u)\right| \le K\ \forall x \in \left[0,\ R\right],\, u \in \Omega\left(\left[0,\ R\right],\, \rho\right),$$

$$\left|f(x,u) - f(x,v)\right| \le L\left|u - v\right|\ \forall x \in \left[0,\ R\right],\, u,v \in \Omega\left(\left[0,\ R\right],\, \rho\right),$$

$$q = \frac{LR^2}{6c_1}\max\left(1, 2Rc_1\right) < 1,$$

де $Q^p\left[0,R\right]$ — клас функцій з кусково-неперервними похідними до p-го порядку включно із скінченною кількістю точок розриву першого роду, а $\Omega\left(\left[0,R\right],\rho\right)$ — множина функцій вигляду

$$\Omega\left(\left[0,R\right],\rho\right) = \left\{ u(x) : u(x) \in W^1_\infty\left[0,R\right], u(x), x^2k(x)\frac{du}{dx} \in C\left[0,R\right],\right.$$

$$\left.\left\| u - u^{(0)} \right\|^*_{1,\infty,\left[0,R\right]} \le \rho \right\},\ \rho = \frac{KR^2}{6c_1}\max(1,2Rc_1),$$

$$\left\|u\right\|_{0,\infty,\left[0,R\right]} = \max_{x\in\left[0,R\right]}\left|u(x)\right|,\ \ \left\|u\right\|^*_{1,\infty,\left[0,R\right]} = \max\left\{\left\|u\right\|_{0,\infty,\left[0,R\right]}, \left\|x^2k\frac{du}{dx}\right\|_{0,\infty,\left[0,R\right]}\right\}.$$

Для чисельного розв’язування задачі (1), (2) на нерівномірній сітці

$$\hat{\bar{\omega}} = \left\{x_j \in \left[0,R\right],\ j = 0,1,\ldots,N,\ x_0 = 0,\ x_N = R\right\}$$

побудовано триточкову різницеву схему рангу $\bar{m} = 2\left[(m+1)/2\right]$ (m — ціле додатне, $\left[\,\cdot\,\right]$ — ціла частина).

$$
\begin{aligned}
&a_1^{(\bar{m})} y_{x,0}^{(\bar{m})} = -\phi^{(\bar{m})}\left(x_0, y^{(\bar{m})}\right), \\
&\frac{1}{x_j^2}\left(a^{(\bar{m})} y_{\bar{x}}^{(\bar{m})}\right)_{\hat{x},j} = -\phi^{(\bar{m})}\left(x_j, y^{(\bar{m})}\right),\ j = 1, 2, ..., N-1, \\
&y_N^{(\bar{m})} = \mu_2 \ ,
\end{aligned} \tag{3}
$$

де

$$
a^{(\bar{m})}\left(x_1\right) = \frac{h_1}{V_1^{(\bar{m})1}\left(x_1\right)}, \qquad a^{(\bar{m})}\left(x_j\right) = \frac{h_j}{V_1^{(\bar{m})j}\left(x_j\right)},\ j = 2, 3, ..., N-1,
$$

$$
\phi^{(\bar{m})}\left(x_0, u\right) = \frac{u_0 - Y_1^1\left(x_1, u\right)}{V_1^{(\bar{m})1}\left(x_1\right)} \ ,
$$

$$
\phi^{(\bar{m})}\left(x_j, u\right) = \frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^{\alpha}\left[Z_{\alpha}^{(m)j}\left(x_j, u\right) + (-1)^{\alpha}\frac{Y_{\alpha}^{(\bar{m})j}\left(x_j, u\right) - u_{j+(-1)^{\alpha}}}{x_j^2 V_{\alpha}^{(\bar{m})j}\left(x_j\right)}\right],
$$

$$
j = 1, 2, ..., N-1,
$$

де $V_1^{(\bar{m})1}\left(x_1\right)$, $Y_{\alpha}^{(\bar{m})j}\left(x_j, u\right)$, $Z_{\alpha}^{(m)j}\left(x_j, u\right)$, $V_{\alpha}^{(\bar{m})j}\left(x_j\right)$ значення чисельного розв'язку задач Коші

$$
\frac{dY_{\alpha}^{j}\left(x, u\right)}{dx} = \frac{Z_{\alpha}^{j}\left(x, u\right)}{k(x)},
$$

$$
\frac{dZ_{\alpha}^{j}\left(x, u\right)}{dx} = -f\left(x, Y_{\alpha}^{j}\left(x, u\right)\right) - \frac{2Z_{\alpha}^{j}\left(x, u\right)}{x}, x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha},
$$

$$
Y_{\alpha}^{j}\left(x_{j+(-1)^{\alpha}}, u\right) = u_{j+(-1)^{\alpha}}, Z_{\alpha}^{j}\left(x_{j+(-1)^{\alpha}}, u\right) = k(x)\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^{\alpha}}},
$$

$$
\frac{dV_1^1\left(x\right)}{dx} = \frac{1}{k(x)}, x_0 < x < x_1, V_1^1\left(x_0\right) = 0,
$$

$$
\frac{dV_{\alpha}^{j}\left(x\right)}{dx} = \frac{(-1)^{\alpha+1}}{x^2 k(x)}, x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha}, V_{\alpha}^{j}\left(x_{j+(-1)^{\alpha}}\right) = 0,
$$

$$
j = 3-\alpha, 4-\alpha, ..., N+1-\alpha, \alpha = 1, 2,
$$

отримані за допомогою будь-яких однокрокових методів порядку точності $\bar{m}$, а $Y_1^{(\bar{m})1}\left(x_1, u\right)$, $Z_1^{(m)1}\left(x_1, u\right)$ значення чисельного розв'язку задач Коші

$$
\frac{dY_1^1\left(x, u\right)}{dx} = \frac{Z_1^1\left(x, u\right)}{k(x)}, \frac{dZ_1^1\left(x, u\right)}{dx} = -f\left(x, Y_1^1\left(x, u\right)\right) - \frac{2Z_1^1\left(x, u\right)}{x}, 0 < x < x_1,
$$

$$
Y_1^1\left(0, u\right) = u_0, \lim_{x \to 0} Z_1^1\left(x, u\right) = 0,
$$

отримані методом рядів Тейлора

$$Y_1^{(\bar{m})1}\left(x_1, u\right) = u_0 - h_1^2\,\frac{f(x_0, u_0)}{6k(x_0)}$$
$$- \sum_{p=3}^{\bar{m}} \frac{h_1^p}{p\,!}\left[\sum_{j=0}^{p-2}\binom{p-1}{j}\frac{p-j-1}{p-j+1}\,\frac{d^{p-j-2}f}{dx^{p-j-2}}\bigg|_{x=x_0}\,\frac{d^j}{dx^j}\,\frac{1}{k(x)}\bigg|_{x=x_0}\right],$$
$$Z_1^{(m)1}\left(x_1, u\right) = -\frac{h_1}{3}\,f(x_0, u_0) - \sum_{p=2}^{m}\frac{h_1^p}{(p-1)\,!(p+2)}\,\frac{d^{p-1}f}{dx^{p-1}}\bigg|_{x=x_0}.$$

Доведено, що різницева схема (3) має порядок точності $\bar{m}$. Чисельні експерименти підтверджують теоретичні висновки.

КАНОНИЧЕСКИЕ КВАЗИ-ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИ КЕЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВ НА СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

И. Н. Курбатова

Одесский национальный университет, Одесса, Украина

irina.kurbatova27@gmail.com

При исследовании проблемы моделирования физических полей (в смысле поведения пробных частиц) акад. Петров А. З. [1] пришел к задаче квази-геодезического отображения 4-мерных римановых пространств сигнатуры Минковского $f : V_4 \to \overline{V}_4$. При этом свободное движение частицы в одном поле (при одном энергетическом режиме) моделируется движением в другом поле (при другом энергетическом режиме) под действием некоторой внешней силы, то есть геодезические линии одного риманова пространства V_4 переходят в так называемые квазигеодезические линии другого риманова пространства $\overline{V}_4$. При этом, по словам А. З. Петрова, происходит «перекачка энергии в силу».

Мы рассматриваем отображения римановых пространств произвольной сигнатуры и размерности, характеризующиеся теми же основными уравнениями, и называем их также квази-геодезическими (КГО). В общей по отображению системе координат $\left(x^i\right)$ эти основные уравнения имеют вид:

$$\overline{\Gamma}^h_{ij}\left(x\right) = \Gamma^h_{ij}\left(x\right) + \psi_i\left(x\right)\delta^h_j + \psi_j\left(x\right)\delta^h_i + \varphi_i\left(x\right)F^h_j\left(x\right) + \varphi_j\left(x\right)F^h_i\left(x\right),$$

$$\overline{F}_{ij} = -\overline{F}_{ji,}\ \ \overline{F}_{ij} = \overline{g}_{i\alpha}F^\alpha_j,$$

где $\overline{\Gamma}^h_{ij}, \Gamma^h_{ij}$ — компоненты объектов связности пространств $\overline{V}_n, V_n$ с метрическими тензорами $\overline{g}_{ij}, g_{ij,}$ соответственно; ψ_j, φ_i — ковекторы, F^h_j — аффинор.

Класс КГО достаточно широк и включает в себя, например, геодезические отображения римановых пространств и голоморфно-проективные отображения почти комплексных пространств, которые можно отнести уже к классике теории диффеоморфизмов многообразий. В [2] мы исследовали КГО при некоторых дополнительных условиях, в частности, полагали аффинор невырожденным.

Сейчас мы изучаем специальный тип КГО, который называем каноническим, в предположении, что $\psi_j = 0$ и аффинор задает на $\overline{V}_n, V_n$ структуру параболически келерова пространства:

$$F_{ij} = -F_{ji},\ F_{ij} = g_{i\alpha}F^\alpha_j, \overline{F}_{ij} = -\overline{F}_{ji,}\ \ \overline{F}_{ij} = \overline{g}_{i\alpha}F^\alpha_j$$

$$F^h_\alpha F^\alpha_i = 0,\ F^h_{i,j} = 0,\ F^h_{i|j} = 0.$$

Здесь «,» и «|» — знаки ковариантной производной по связностям Γ, $\overline{\Gamma}$, соответственно.

Доказано, что если параболически келерово пространство V_n допускает нетривиальное каноническое КГО на симметрическое $\overline{V}_n$, и, значит, тензор Римана его ковариантно постоянен $\overline{R}^h_{ijk|l} = 0$, то V_n также является симметрическим и оба они являются почти плоскими, то есть удовлетворяющими условиям

$$R^h_{ij\alpha} F^\alpha_k = \overline{R}^h_{ij\alpha} F^\alpha_k = 0.$$

Это означает, что симметрические параболически келеровы пространства, отличные от почти плоских, не допускают нетривиальных канонических КГО.

Далее мы показали, что если параболически келерово пространство V_n допускает нетривиальное каноническое КГО на полусимметрическое $\overline{V}_n$, то есть тензор Римана его удовлетворяет условиям

$$\overline{R}^h_{ijk|lm} - \overline{R}^h_{ijk|ml} = 0,$$

то V_n является либо почти Эйнштейновым, то есть в нем $R_{ij} = \rho F_{ij}$, где R_{ij} — тензор Риччи V_n, либо почти эквидистантным, то есть $\varphi_{i,j} = \rho F_{ij.}$

Список литературы

1. Петров А. З. Моделирование физических полей // Гравитация и теория относительности. — 1968, Вып. 4–5. — Изд. Казанск. ун-та. — С. 7–21.

2. Курбатова И. Н. Квази-геодезические отображения римановых пространств // Дисс. на соиск. уч. ст. к. ф.-м. н. Одесса, ОГУ. — 1979. — 99 с.

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И. Ф. Курбыко, С. В. Левизов
Владимирский государственный университет, Владимир, Россия
levizov@rambler.ru

Эволюционные уравнения с псевдодифференциальными операторами, действующими в пространствах мер и функций на бесконечномерном пространстве, привлекают сейчас внимание исследователей по нескольким причинам. Во-первых, источником таких уравнений являются задачи квантовой теории поля, статистической физики и гидродинамики. Так, мощным стимулом для изучения уравнений типа Шрёдингера явился известный интеграл Фейнмана (см. в этой связи работы О. Г. Смолянова, Е. Т. Шавгулидзе, А. Ю. Хренникова, также работы японских математиков, где излагается применение континуальных интегралов для изучения псевдодифференциальных операторов). Во-вторых, теория бесконечномерных уравнений является естественным развитием классической теории дифференциальных уравнений с частными производными в конечномерном пространстве. Наконец, важно и то, что многие результаты и методы исследования бесконечномерных дифференциальных операторов существенно отличаются от конечномерных (см., в частности [1]–[2] и имеющуюся там библиографию).

В настоящей работе построены два класса псевдодифференциальных операторов (ПДО) $A^*\left(x,D\right): Z^/ \to Z^/$ и $A^*\left(D,y\right): Z^/ \to Z^/$, действующих в пространстве обобщенных мер $Z^/$ [1] на бесконечномерном гильбертовом пространстве *H*. Символы таких ПДО $a : H \times H \to C$ имеют специальный вид.

На основании свойств преобразования Фурье меры *m*:

$$F[m](x) = \int\limits_H e^{i(x,y)} dm(y)$$

(где (.,.) — скалярное произведение в *H*) и свойств операций дифференцирования и свертки мер устанавливаются достаточные условия существования решения задачи Коши для эволюционных уравнений с ПДО в правой части.

Через *M* обозначается локально выпуклое пространство финитных мер, определенных на σ-алгебре борелевских подмножеств пространства *H*, бесконечно дифференцируемых по подпространству $H_1 \subset H$; топология в *M* задаётся счётным набором полунорм [1]; через *Z* обозначается образ пространства *M* при преобразовании Фурье, топология в *Z* индуцируется из *M* оператором Фурье; $Z^/$ есть пространство, сопряженное к *Z*, наделенное слабой топологией $\sigma(Z^/,Z)$ двух линейных пространств в двойственности; W^∞ — векторное пространство, состоящее из функций, бесконечно дифференцируемых по Фреше, ограниченных на ограниченных множествах в H вместе со всеми своими дифференциалами любого порядка [1]; интервал

$$I = (t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t) \subset R,$$

где $t_0 \in R$, $0 < \Delta t < 1$. Элементы пространства Z мы называем основными функциями, а элементы сопряжённого пространства $Z^/$ — обобщёнными мерами.

Определение. Псевдодифференциальными операторами в пространстве обобщенных мер $Z^/$ с символом

$$a(x,y) = \sum_{j=1}^{m} Q_j\left(x\right) P_j(y)$$

(где $P_j \in W^\infty$, $Q_j \in Z$) называются отображения

$$A^*\left(x,D\right)\colon Z^/ \to Z^/ \text{ и } A^*\left(D,y\right)\colon Z^/ \to Z^/,$$

определенные для всех обобщённых мер $\mu \in Z^/$ и основных функций $\phi \in Z$ равенствами:

$$\left\langle A(x,D)\mu, \phi \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} \left\langle \mu, F\left[P_j F^{-1}\left[Q_j \phi\right]\right]\right\rangle;$$

$$\left\langle A(D,y)\mu, \phi \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} \left\langle \mu, Q_j F\left[P_j F^{-1}\left[\phi\right]\right]\right\rangle.$$

Здесь $F : M \to Z$ — оператор Фурье; $F^{-1} : Z \to M$ — обратное преобразование Фурье.

Доказано, что операторы $A^*\left(x,D\right)$ и $A^*\left(D,y\right)$ корректно определены указанными выше равенствами и непрерывны в пространстве $Z^/$. Частным случаем таких ПДО являются дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, которые изучались в работах В. Ю. Бенткуса и А. В. Угланова, а также, дифференциальные операторы с переменными коэффициентами специального вида.

Теорема. Если символ

$$a(x,y) = \sum_{j=1}^{m} Q_j\left(x\right) P_j(y)$$

такой, что для каждого $y \in H$ и $j = 1,\ldots,m$ выполнено неравенство

$$\left|P_j(y)\right| \le \beta_j \left\|y\right\|^{s_j}$$

(где $\beta_j \ge 0,\ 0 \le s_j < 1$), тогда существует решение $\mu : I \to Z^/$ задачи Коши

$$\mu^/(t) = A(x,D)\mu(t),\ \mu(t_0) = \mu_0$$

и задачи

$$\mu^/(t) = A(D,y)\mu(t),\ \mu(t_0) = \mu_0\ (\mu_0 \in M).$$

Замечание 1. Дифференцируемость решения $\mu(t)$ означает, что для каждого $h \in Z$ существует предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\langle \frac{\mu(t+\Delta t)-\mu(t)}{\Delta t}, h \right\rangle.$$

Замечание 2. Если $A(D): Z^{/} \to Z^{/}$ есть ПДО с символом $a(y) \in W^{\infty}$, то задача Коши

$$\mu^{/}(t) = A(D)\mu(t),\ \mu(0) = \mu_0\ (\mu_0 \in Z^{/})$$

имеет единственное решение:

$$\mu(t) = F^{-1}\left[e^{a(y)t} F\left[\mu_0\right]\right],\ \mu(0) = \mu_0,\ t \in [0, +\infty).$$

При этом, если $\mu_0 \in F^{-1}[W^{\infty}]$, то $\mu(t) = N(t) \cdot \mu_0$, где $N(t)$ — решение задачи Коши с начальным условием $\mu(0) = \delta$, причем $\delta \in Z^{/}$ и $\delta(h) = h(0)$ для всех $h \in Z$.

В работе [2] получены достаточные условия корректности задачи Коши для системы эволюционных уравнений, содержащих в правой части ПДО типа $A(D): Z^{/} \to Z^{/}$ с символом, зависящим от одного аргумента.

Список литературы

1. Курбыко И. Ф., Левизов С. В. Об обратимости бесконечномерных ПДО // Современная математика и ее приложения. — Т. 9. — 2003. — С. 160–168.

2. Курбыко И. Ф. О корректных краевых задачах для системы уравнений с бесконечномерными псевдодифференциальными операторами // Дифференц. уравнения. — № 11. — Т. 27. — 1991. — С. 1892–1901.

РОЗПАРАЛЕЛЕННЯ ОБЧИСЛЕНЬ У ЗАДАЧАХ НЕРУЙНІВНОГО КОНТРОЛЮ СТРУМОПРОВІДНИХ МАТЕРІАЛІВ

А. С. Кутень, С. З. Угрин, З. О. Гошко
Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна
amailbox123@ukr.net

Задачі неруйнівного контролю та діагностики дуже важливі для забезпечення контролю якості матеріалів та виробів з них. Є різні методи неруйнівного контролю радіаційний, тепловий, вихрострумовий, електромагнітно-акустичний (ЕМА). Останні два методи застосовуються у випадках, коли матеріал, з якого виготовлений об’єкт контролю, проводить електричний струм.

В основі ЕМА-методу діагностики та контролю якості матеріалів лежить взаємодія пружної хвилі, що виникає в матеріалі, з електромагнітним полем, у яке поміщено контрольований об’єкт. Для матеріалу без дефектів картина поля одна і вона приймається за еталонну, а коли у матеріалі контрольованого об’єкта присутні дефекти (тріщини, отвори, неоднорідності, включення іншого матеріалу), картина поля міняється.

Оскільки обсяги даних, що зберігаються і обробляються при задачах неруйнівного контролю, величезні, то для їх опрацювання використовувати однопроцесорні системи вкрай неефективно. Для оцінювання характеристик матеріалів дефектів доводиться розв’язувати рівняння математичної фізики, зокрема, рівняння Максвела. Ці рівняння дуже часто неможливо розв’язати аналітично, особливо коли геометрія дефектів складна.

Отримано аналітичні розв’язки для задач діагностики тільки при простих формах дефектів (куля, еліпс, паралелепіпед тощо), але навіть у цих випадках вони громіздкі. Тому для розв’язання складних задач математичної фізики застосовуються чисельні методи, зокрема метод сіток. Перевага цих методів у тому, що вони гарно розпаралелюються, тому що містять велику кількість однотипних операцій, незалежних за даними.

Також для розпізнавання дефектів у струмопровідних матеріалах використовуються нейронні мережі. Їх перевага у тому, що вони можуть вчитися на зразку і запам’ятовувати результати навчання подібно до людського мозку. Для зразків, подібних до певного еталонного зразка, можна застосовувати результати навчання нейронної мережі.

Паралельне програмування відрізняється від послідовної. Існує поняття паралелізму даних і паралелізму задач. Паралелізм даних означає незалежну обробку даних кожним процесом, а паралелізм задач — це розбивка основної задачі на менші під задачі, що виконуються паралельно.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФОРМ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ИХ КОНТАКТА С ВНУТРЕНИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ И ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ

В. Д. Лакиза

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

volna@inmech.kiev.ua

В настоящем сообщении приводятся результаты экспериментальных исследований специфики нелинейных процессов деформирования упругой стенки стеклопластиковой цилиндрической оболочки, которая подвергалась осевому полигармоническому возбуждению, при взаимодействии ее с внутренней и внешней средами. В качестве заполнителя используется сыпучий материал типа малых (диаметром $d \approx 0,5$ см) пенопластиковых шариков. Влияние внешней среды моделируется действием на оболочку радиального локального статического давления, которое осуществляется при помощи жесткого кольца, монтируемого на разных высотах цилиндрической оболочки. В начале экспериментальных исследований определяются частоты и формы изгибных колебаний оболочки, а также определяется степень влияния на них заполнителя, внешнего статического давления и величины амплитуды полигармонического вибровозбуждения. Обнаружено, что обе среды (внутренняя и внешняя) обуславливают «сгущение» частотного спектра оболочки, приводящее к появлению «внутренних» резонансов – две или более собственные частоты становятся близкими или кратными. Установлено, что исследуемая в экспериментах оболочка из-за начальных несовершенств характеризуется парами сдвинутых по фазе в окружном направлении форм [1], а основные собственные частоты несколько отличаются одна от другой. При этом определена частотная область, в которой обе формы накладываются, приводя к появлению деформирования оболочки в виде бегущей в окружном направлении волны. Также установлено, что специфика деформирования стенки оболочки в окружном направлении зависит не только от частоты, но и от амплитуды кинематического возбуждения, т.е. в зависимости от уровня амплитуды внешнего вибровозбуждения происходит реализация бегущей или стоячей окружной формы деформирования верхнего торца оболочки. Бегущая волна реализуется при больших амплитудах, а стоячая – при меньших.

Список литературы

1. Механика композитов : В 12-ти т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. Т. 9. Динамика элементов конструкций / Кубенко В. Д., Бабаев А. Е, Ковальчук П. С., Лакиза В .Д. и др. — К. : А.С.К., 1999. — 384 с.

НЕКОТОРЫЕ ФУНЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

А. С. Ларионов, Е. В. Лищук, И. А. Никишина

Братский государственный университет, Братск, Россия

larios84@yandex.ru, lena.lishuk@yandex.ru, ipa_Q@mail.ru

Часто при исследовании задач экономической динамики математическая модель изучаемого процесса представляет собой дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом. Такова, например, модель динамики основных производственных фондов (ОПФ) на предприятии.

При исследовании процесса освоения капитальных вложений необходимо учитывать задержку во времени от момента выделения средств на эти цели к моменту введения новых ОПФ. Моделирование запаздывания обновления фондов приводит к функционально-дифференциальному уравнению, которое в линейном случае имеет вид

$$\dot{x}(t) + \mu\, x(t) = f(t - \tau),\ t \in [0, \infty), \tag{1}$$

где $x(t)$ — объем ОПФ в текущий момент времени в стоимостном выражении, μ — коэффициент амортизации, τ — промежуток времени, по истечении которого происходит прирост ОПФ.

В докладе рассматривается обобщение уравнения (1)

$$(\mathcal{L}\, x)(t) \equiv \dot{x}(t) + g(t)\, x_h(t) = f(t, x_h(t)),\ t \in [0, \infty), \tag{2}$$

где

$$x_h(t) = \begin{cases} x[h(t)], & \text{если } h(t) \in [0, \infty), \\ 0, & \text{если } h(t) \notin [0, \infty) \end{cases}$$

в следующих предположениях: функция $g \in L_p$, $1 \le p < \infty$ (L_p — пространство функций, суммируемых со степенью p на каждом конечном промежутке $[0, b] \subset [0, \infty)$); функция h измерима, причем $h(t) \le t$ при почти всех $t \in [0, \infty)$; функция f удовлетворяет условиям Каратеодори и не является, вообще говоря, монотонной по функциональному аргументу. Будем также предполагать, что уравнение (1) разрешимо на любом конечном промежутке $[0, b] \subset [0, \infty)$. Под решением уравнения (1) понимается элемент $x \in D_p$ (D_p — пространство таких абсолютно непрерывных функций, что $\dot{x} \in L_p$), для которого равенство (1) выполняется при почти всех $t \in [0, \infty)$.

Дополнительное условие для уравнения (1) зададим в виде

$$lx = \alpha,\ \alpha \in R, \tag{3}$$

где $l : D_p \to R$ – линейный ограниченный функционал.

В докладе приводится ряд утверждений о разрешимости задачи (2), (3). Доказательства утверждений основаны на редукции исходной задачи к уравнению с монотонным оператором, определенным на некотором частично упорядоченном множестве. Упомянутая редукция проводится по схемам, предложенным в монографии [1].

Обозначим через $C(t,s)$ функцию Коши уравнения $(\mathcal{L}x)(t)=\eta(t)$, $\gamma(t)$ – решение полуоднородной задачи $(\mathcal{L}x)(t)=0$, $lx=x(0)=\alpha$.

На пространстве C непрерывных на каждом конечном промежутке $[0, b]\subset[0, \infty)$ функций определим оператор K равенством $(Kx)(t)=\int\limits_0^t C(t,s)\,f(s,x_h(s))\,ds$ и сформулируем утверждение о существовании положительного решения задачи (2), (3).

Теорема. Пусть выполнены условия: $\gamma\geq 0$, $\gamma+K\gamma\geq 0$, $f(t,0)=0$, функция $f(t, u)$ не возрастает по второму аргументу, функция Коши $C(t,s)$ не принимает отрицательных значений при $0\leq s\leq t<\infty$, оператор $K:C\to C$ вполне непрерывен.

Тогда существует решение задачи (2), (3), удовлетворяющее неравенствам $0\leq\gamma+K\gamma\leq x\leq\gamma$.

Отметим, что эффективные условия знакопостоянства функции Коши уравнения $(\mathcal{L}x)(t)=\eta(t)$ получены в работе [2].

Другой пример применения уравнения (2) для изучения процессов в экономике доставляет моделирование динамики разорения фирм. Модель конкурентной борьбы при оценке рыночной ситуации в условиях кризиса может быть представлена в виде

$$\dot{x}\left(t\right)+\,px\left(t\right)=cx\left(t-\tau\right),\ \ t\in[0,\infty),$$

где $x(t)$ — число фирм, находящихся в предбанкротном состоянии; p — вероятность разорения фирм, находящихся в предкризисном состоянии в единицу времени; c — темп выхода фирм, находящихся в предбанкротном состоянии, из кризиса.

Некоторые примеры применения утверждений о разрешимости задачи (2), (3) в других областях рассматриваются в работе [3].

Список литературы

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 280 с.

2. Березанский Л. М., Ларионов А. С. Положительность матрицы Коши линейного функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. — 1988. — Т. 24, № 11. — С. 1843–1854.

3. Ларионов А. С., Никишина И. А. Разрешимость нелинейного дифференциального уравнения первого порядка с последействием и его приложения // Системы. Методы. Технологии. — 2013. — Вып. № 3(19). — С. 100–105.

ВИКОРИСТАННЯ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ТА Z-ПЕРЕТВОРЕННЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

І. О. Ластівка, І. П. Кудзіновська, В. І. Трофименко
Національний авіаційний університет, Київ, Україна
iola@nau.edu.ua

При вирішенні завдань керування технічними динамічними об'єктами найбільш прийнятними математичними моделями є диференціальні і різницеві рівняння або відповідні їм неперервні і дискретні передаточні функції [1].

В роботі розглянуто типову систему керування, що описується диференціальним рівнянням

$$y(t) = k_2(t)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + k_1(t)\frac{dy(t)}{dt} + u(t), \tag{1}$$

де $y(t)$ і $u(t)$— вихідний і вхідний сигнали, $k_1(t)$ і $k_2(t)$ — коефіцієнти зворотного зв'язку.

Відомо [2, 3], що при дискретизації звичайних диференціальних рівнянь одержують різницеві рівняння, які зберігають основні властивості початкових рівнянь. У роботі [3] показано, що при переході від диференціальних рівнянь до різницевих величина похибки є величиною другого порядку малості, а також що різницеве рівняння, яке відповідає асимптотично стійкому диференціальному рівнянню, також асимптотично стійке при достатньо малому кроці різницевого рівняння.

Для диференціального рівняння (1) відповідне різницеве має вигляд:

$$y(n) = k_1(n)y(n-1) + k_2(n)y(n-2) + u(n), \tag{2}$$

де $y(n)$і $u(n)$— вихідна і вхідна послідовності, $k_1(n)$ і $k_2(n)$ — коефіцієнти зворотного зв'язку.

Вважається, що для знаходження розв'язків лінійних різницевих рівнянь з постійними коефіцієнтами зручним є метод Z-перетворення [4, 5].

Виконавши Z-перетворення рівності (2), отримано вираз, що є передаточною функцією системи (Z-перетворенням системи):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 - k_1(n)z^{-1} - k_2(n)z^{-2}}.$$

Звідси отримано характеристичне рівняння системи:

$$z^2 - k_1(n)z - k_2(n) = 0. \tag{3}$$

Корені рівняння (3) є полюсами даної системи керування і мають вигляд:

$$z_{1,2} = \frac{k_1(n)}{2} \pm \frac{\sqrt{k_1^2(n) + 4k_2(n)}}{2}.$$

Необхідною і достатньою умовою стійкості лінійних дискретних систем є положення полюсів усередині круга одиничного радіуса [4]. Причому, чим ближче розташовані полюси до одиничного кола, тим система більш чутлива, але існує загроза втрати її стійкості. У найзагальнішому випадку бажано досягти запасу стійкості близько 10%, тобто розміщення полюсів на відстані не далі ніж 0,9 від центру одиничного кола.

Отже, умова стійкості системи має вигляд:

$$\left|\frac{k_1(n)}{2} \pm \frac{\sqrt{k_1^2(n) + 4k_2(n)}}{2}\right| < 1.$$

З даної нерівності, зважаючи, що коефіцієнти $k_1(n)$ і $k_2(n)$ — дійсні, а корені z_1, z_2 можуть бути як комплексними, так і дійсними числами, отримано систему нерівностей для $k_1(n)$ і $k_1(n)$, виконання яких забезпечує стійкість системи з характеристичним рівнянням (3):

$$\begin{cases} k_1(n) + k_2(n) < 1; \\ k_1(n) - k_2(n) > -1; \\ k_1^2(n) + 2k_2(n) < 2. \end{cases}$$

Аналогічні умови з урахуванням положення полюсів на відстані не далі ніж 0,9 від центру одиничного кола матимуть вигляд:

$$\begin{cases} 0,9k_1(n) + k_2(n) < 0,81; \\ 0,9k_1(n) - k_2(n) > -0,81; \\ k_1^2(n) + 2k_2(n) < 1,62. \end{cases}$$

За допомогою різницевого рівняння (2) у роботі виконано чисельне моделювання поведінки даної системи керування. Отримано графічні залежності, які підтверджують умови стійкості, знайдені аналітично.

Список літератури

1. Самарский А. А. Численные методы : учеб. пособие / А.А. Самарский, А.В. Гулин. — М. : Наука, 1989. — 432 с.

2. Беллман Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Кук. — М. : Мир, 1967. — 548 с.

3. Мартынюк Д. И. Лекции по качественной теории разностных уравнений / Д.И. Мартынюк. — К. : Наукова думка, 1972. — 246 с.

4. Микропроцессорные автоматические системы регулирования. Основы теории и элементы: учеб. пос. / В. В. Солодовников, В. Г. Коньков, В. А. Суханов, О. В. Шевяков. — М. : Высш. шк., 1991. — 255 с.

5. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования / Г. Дёч. — М. : Наука, 1971. — 288 с.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА В ПРОСТРАНСТВЕ С НЕОДНОРОДНЫМ ВЕСОМ

Н. В. Лемешева

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Харьков, Украина

lemesheva.kharkov@rambler.ru

Уравнение Больцмана имеет фундаментальное значение в кинетической теории газов. В случае модели твердых сфер оно имеет вид [1–3]:

$$D(f) = Q(f,f);$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x};$$

$$Q(f,f) = \frac{d^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha \left|\left(v - v_1, \alpha\right)\right| \cdot \left[f\left(t, v_1', x\right) f\left(t, v', x\right) - f\left(t, v_1, x\right) f\left(t, v, x\right)\right].$$

Как видно, это сложное интегро-дифференциальное уравнение, решение которого возможно только в некоторых случаях. Поэтому неудивительно, что на данный момент известно лишь одно точное решение больцмановского уравнения — функция Максвелла. Другие, не максвелловские точные решения удается найти только для отдельных моделей взаимодействия между частицами газа — максвелловских молекул и некоторых их обобщений. В связи с этим возникает интерес к поиску приближенных решений данного уравнения, которые удовлетворяли бы ему с произвольной степенью точности.

Несколько возможных приближенных решений уравнения Больцмана, имеющих бимодальный вид, представлено ниже. При этом описывается взаимодействие двух потоков газа из твердых сфер типа «ускорение — уплотнение». Изучается некая норма разности между частями уравнения Больцмана $D(f) = Q(f,f)$ в пространстве с неоднородным весом.

Будем рассматривать неоднородную, нестационарную линейную комбинацию двух максвеллианов, т.е. распределение

$$f = \phi_1 M_1 + \phi_2 M_2, \tag{1}$$

где коэффициентные функции $\varphi_i = \varphi_i(t,x), i = 1,2$, предполагаются неотрицательными и принадлежащими $C^1(\mathbb{R}^4)$, а максвеллианы M_i имеют вид:

$$M_i = \overline{\rho}_i \cdot \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{3/2} \exp(\beta_i(2\overline{u}_i x - v^2 + 2v(\overline{v}_i - \overline{u}_i t))), \tag{2}$$

где $\overline{\rho} = \mathrm{const}$, β_i — обратная температура.

Требуется найти такие функции ϕ_i и такое поведение всех имеющихся параметров, при которых невязка с неоднородным весом

$$\tilde{\Delta}_q = \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{q(x)}{1 + |\, t \,|} \int_{R^3} |\, D(f) - Q(f,f) \,| dv,$$

где $q(x)$ — неотрицательная ограниченная на $\mathbb{R}^3$ функция, стремится к нулю.

Теорема 1. Пусть в бимодальном распределении (1) с модами M_i вида (2), функции $\varphi_i, i = 1,2,$, не зависят от $\beta_i, i = 1,2$ и имеют вид:

$$\phi_i\left(t,x\right) = C_i\left(x + \overline{u}_i\,\frac{\left(\overline{v}_i - \overline{u}_i t\right)^2}{2\overline{u}_i^2}\right),\ \ i = 1,2,$$

где гладкие функции $C_i \geq 0$ ограничены на $\mathbb{R}^3$ вместе со своими производными.

Кроме этого, предположим: $\overline{u}_i = \overline{u}_{oi}\beta_i^{-n_i},\ \ i = 1,2,$ и $\overline{v}_i = \overline{v}_{oi}\beta_i^{-k_i},\ \ i = 1,2,$ где $\overline{u}_{oi}, \overline{v}_{oi} \in \mathbb{R}^3$ — произвольные фиксированные векторы, при этом $n_i \geq 1;\ k_i \geq \dfrac{1}{2};\ k_i \geq \dfrac{n_i}{2},\ \ i = 1,2.$

Пусть функция $q(x)$ такова, что выражение $q(x)\cdot e^{2\overline{u}_{oi}x}$ ограничено на $\mathbb{R}^3$.

Тогда справедливо следующее утверждение: $\lim\limits_{\beta_1,\beta_2 \to +\infty} \tilde{\Delta}_q = 0.$

Теорема 2. Пусть функции φ_i в распределения (1) имеют форму:

$$\phi_i(t,x) = \psi_i(t,x)\exp\left\{-\beta_i\left(\left(\overline{v}_i - \overline{u}_i t\right)^2 + 2\overline{u}_i x\right)\right\},\ \ i = 1,2$$

где функции ψ_i такие, что выражения $t\psi_1\psi_2;\ t\psi_i;\ \dfrac{\partial\psi_i}{\partial t};\ \left|\dfrac{\partial\psi_i}{\partial x}\right|;$ $t\left(\overline{u}_i, \dfrac{\partial\psi_i}{\partial x}\right),\ \ i = 1,2$ после умножения на $\dfrac{q(x)}{1+\mid t\mid}$ ограничены по t и x на $\mathbb{R}^4$.

Пусть, кроме этого, условие $\overline{u}_i = \overline{u}_{oi}\beta_i^{-n_i},\ \ i = 1,2,$ выполняется при $n_i > \dfrac{1}{2}$.

Тогда справедлива оценка $\tilde{\Delta}_q \leq \tilde{\Delta}'_q$, причем существует конечный предел:

$$\lim_{\beta_1,\beta_2 \to +\infty} \tilde{\Delta}'_q = \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{q(x)}{1+\mid t\mid} \sum_{i,j=1,i\neq j}^{2} \overline{\rho}_i \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \overline{v}_i\,\frac{\partial\psi_i}{\partial x} + \psi_1\,\psi_2\pi d^2\overline{\rho}_j\left|\overline{v}_1 - \overline{v}_2\right|\right| +$$
$$+2\pi d^2\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2\left|\overline{v}_1 - \overline{v}_2\right| \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{q(x)}{1+\mid t\mid}\left(\psi_1\psi_2\right).$$

Также получены некоторые достаточные условия стремления невязки к нулю, которые оформлены в виде следствия из теоремы 2.

Список литературы

1. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана / К. Черчиньяни. — М. : Мир, 1978.
2. Коган М. Н. Динамика разреженного газа / М. Н. Коган. — М. : Наука, 1967.
3. Gordevskyy V. D. On the non-stationary Maxwellians // Mathematical methods in the Applied Sciences (2004), No. 27, p.231–247.
4. Гордевський В. Д., Лемешева Н. В. Перехідний режим між течіями типу «прискорення-ущільнення» // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, серія «Математика, прикладна математика і механіка». — 2010. — № 931. — С. 49–58.

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ КОЛИВАННЯ З ВКЛЮЧЕННЯМ ВАНТАЖУ НА КІНЦЯХ

О. М. Ленюк

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

Lenyuk_OM@mail.ru

Одним із ефективних методів побудови точних аналітичних розв'язків крайових задач для рівнянь математичної фізики є метод інтегральних перетворень. Цей метод дає змогу знаходити аналітичний вигляд розв'язків багатьох задач математичної фізики, що дуже зручно як для дослідження властивостей розв'язків, так і для інженерних розрахунків.

У підручниках та посібниках з математичної фізики наведені постановки різноманітних крайових задач (наприклад, див. [1]), але для багатьох з них не знайдено аналітичний вигляд розв'язку.

Дана робота присвячена побудові методом інтегрального перетворення Лапласа [2] розв'язку крайової задачі для рівняння коливання струни чи стержня з включенням вантажів на кінцях.

Розглянемо однорідну струну (або однорідний ненапружений стрижень) довжини l, кінці якої (якого) навантажені: до кожного з них прикріплена пружина жорсткості k, до пружини прикріплено вантаж масою m, на який діє сила тертя, пропорційна швидкості.

Задача про малі поперечні коливання такої струни (або повздовжні коливання жорсткого стержня) математично приводить до побудови обмеженого в області

$$D = \{(t, x) : t > 0, x \in (0, l)\}$$

розв'язку рівняння коливання за початковими умовами і крайовими умовами [1]

$$\left.\left(m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \eta\frac{\partial u}{\partial t} + ku - T\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=0} = g_1(t),$$

$$\left.\left(m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \eta\frac{\partial u}{\partial t} + ku + T\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=l} = g_2(t).$$

Одержано інтегральне зображення розв'язку неоднорідної гіперболічної крайової задачі. Досліджено спектр задачі в залежності від параметрів, виписано головні розв'язки (функції Гріна, породжені крайовими умовами та функцію впливу, породжену неоднорідністю рівняння) в залежності від спектра задачі.

Список літератури

1. Комеч А. И. Практическое решение уравнений математической физики: Учеб.-метод. пособие / А.И. Комеч. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. — 160 с.

2. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа / Г. Деч. — М.: Наука, 1965. — 288 с.

РОЗСІЯННЯ ПЛОСКОЇ АКУСТИЧНОЇ ХВИЛІ СКІНЧЕННИМ КОНУСОМ

В. О. Лисечко , Д. Б. Куриляк
Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів, Україна
vtlysechko@gmail.com

Розсіяння плоскої акустичної хвилі на скінченному жорсткому (м’якому) конусі при осьовому опроміненні зведено до системи суматорних рівнянь виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{x}_n P_{z_n-1/2}(x) + t(x) = \begin{cases} \sum_{p=1}^{\infty} y_p^{(1)} P_{\nu_p-1/2}(x), & 1 < x < \cos\gamma; \\ \sum_{k=1}^{\infty} y_k^{(2)} P_{\mu_k-1/2}(-x), & \cos\gamma < x < -1; \end{cases} \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{x}_n P_{z_n-1/2}(x) \frac{K'_{z_n}(\rho_1)}{K_{z_n}(\rho_1)} + t_1(x) = \begin{cases} \sum_{p=1}^{\infty} y_p^{(1)} P_{\nu_p-1/2}(x) \frac{K'_{\nu_p}(\rho_1)}{K_{\nu_p}(\rho_1)}, & 1 < x < \cos\gamma; \\ \sum_{k=1}^{\infty} y_k^{(2)} P_{\mu_k-1/2}(-x) \frac{K'_{\mu_k}(\rho_1)}{K_{\mu_k}(\rho_1)}, & \cos\gamma < x < -1. \end{cases} \tag{2}$$

Тут $y_p^{(1)}$, $y_k^{(2)}$, $\overline{x}_n$ — невідомі коефіцієнти розкладу; $\rho_1 = sc_1$ ($s = -ik$, k — хвильове число), c_1 — довжина твірної конуса; γ — кут розхилу конуса; $z_n = n - 1/2$; індекси ν_p, μ_k — дійсні додатні корені трансцендентних рівнянь:

— для задачі Діріхле (м’який конус):

$$P_{\nu_p-1/2}(x) = 0, \; P_{\mu_k-1/2}(-x) = 0; \tag{3}$$

— для задачі Неймана (жорсткий конус):

$$P^1_{\nu_p-1/2}(x) = 0, \; P^1_{\mu_k-1/2}(-x) = 0. \tag{4}$$

Застосувавши метод аналітичної регуляризації, задачу визначення невідомих коефіцієнтів розкладу в (1), (2) зводимо до розв’язання нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (НСЛАР) другого роду, яку запишемо так

$$X = A^{-1}(A - A_{11})X + A^{-1}F. \tag{5}$$

Тут $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — невідомий вектор, $x_n = P_{z_n-1/2}(x)\overline{x}_n$ для задачі (3) і $x_n = P^1_{z_n-1/2}(x)\overline{x}_n$ для задачі (4); A_{11} — матричний оператор,

$$A_{11} : \left\{ a_{qn} = \frac{\rho_1 W[K_{z_n} I_{\xi_q}]_{\rho_1}}{[\xi_q^2 - z_n^2] K_{z_n}(\rho_1) I_{\xi_q}(\rho_1)} \right\},$$

де $\{\xi_q\}_{q=1}^{\infty}$ — зростаюча послідовність коренів рівнянь (3) для м’якого і (4) для жорсткого конусів; A, A^{-1} — регуляризуючі оператори. НСЛАР (5) допускає розв’язок у класі послідовностей $\overline{x}_n = O(n^{-1})$, що забезпечує умову Мейкснера.

ПРО ОДНУ БАГАТОТОЧКОВУ ЗАДАЧУ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З МАЛОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ І ПАРАМЕТРАМИ

В. В. Листопадова

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

vlistopadova@mail.ua

Нехай необхідно знайти функцію $y(x) \in W_2^2(a;b)$ і параметри $\lambda \in \mathbb{R}^l$, які задовольняють рівняння:

$$y^{(m)}(x) + \sum_{\tau=1}^{m} g_\tau(x) y^{(m-\tau)}(x) + \sum_{\tau=1}^{m} d_\tau(x) y^{(m-\tau)}(x-\Delta) = f(x) + c(x)\lambda +$$

$$+\varepsilon q(x, y(x), y'(x), ..., y^{(m-1)}(x), y(x-\Delta), y'(x-\Delta), ..., y^{(m-1)}(x-\Delta), \lambda),$$

$$x \in (a;b), \qquad (1)$$

і додаткові умови

$$y(x_s) = \alpha_s, \alpha_s \in R, s = \overline{1, p}, a = x_1 < x_2 < ... < x_s < ... < x_p = b, \qquad (2)$$

$$y(x-\Delta) = y'(x-\Delta) = ... = y^{(m-1)}(x-\Delta) = 0, x \in (a;c), c = a + \Delta, \qquad (3)$$

де $\Delta > 0$ — постійне запізнення, $c(x)\lambda$ — скалярний добуток вектора $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l)$ і неперервної на $(a;b)$ вектор функції $c(x) = (c_1(x), c_2(x), ..., c_l(x))$, $l = p - m, \varepsilon$ — малий параметр.

В повідомленні досліджується існування та єдиність розв’язку задачі (1)–(3) за допомогою зведення її до рівносильного інтегрального рівняння з малою нелінійністю. Обґрунтовано застосування до даної задачі проекційно-інтеративного методу та одержано достатні умови його збіжності.

ГРУПОВА ВЛАСТИВІСТЬ ОДНІЄЇ СИСТЕМИ ПФАФОВИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

В. С. Лісняк
Київський університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна
v-lisnyak@univ.kiev.ua

Досліджується конкретного класу замкнена система пфафових диференціальних рівнянь, інваріантна відносно перетворень групи Лоренца.

Умовимося спочатку про межі зміни індексів: $\alpha\,, ... = 1, 2;\ a\,, ... = 1, 2,\ 3\,.$

Уважатимемо, що лінійні пфафові форми ω^n і ω_r^s (з $\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = 0$ та $\omega_s^r + \omega_r^s = 0$) містять у їх коефіцієнтах і диференціалах головні змінні $u^1,\ u^2, u^3$ та побічні $v^1, ..., v^6$; серед них форми ω^w та ω_α^4 (головні) містять тільки диференціали du^j, а ω^c — лінійно незалежні. Складемо тепер систему (визначальних) диференціальних рівнянь

$$\Theta_\alpha \equiv -\omega_\alpha^3 + a_{\alpha k}\omega^k = 0 \tag{1}$$

та рівнянь другого диференціального околу

$$\Theta_{\alpha k} \equiv -da_{\alpha k} - a_{\alpha k}\omega_3^3 + a_{\beta k}\omega_\alpha^\beta + a_{\alpha h}\omega_k^h + a_{\alpha hk}\omega^k = 0\,. \tag{2}$$

Її коефіцієнти $a_{\gamma l}$ й $a_{\varepsilon pq}$ підпорядковані вимозі

$$D\Theta_\nu \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\Theta_\tau),\ D\Theta_{\sigma q} \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\Theta_\lambda,\,\Theta_{\eta g})$$

цілковитої інтегровності системи $\Sigma:\ \ \{\Theta_\mu = 0,\ \ \Theta_{\rho m} = 0$ рівнянь (1)+(2).

Специфічність цієї системи полягає у (надалі постульованій) інваріантності її вигляду відносно прямого добутку нескінченної аналітичної групи перетворень $u^1,\ u^2, u^3$ й аналітичної групи квазілоренцевих перетворень $\mathbf{R}$ з параметрами $v^1, ..., v^6$, для яких симетричний $\det_3(v^1, ..., v^6) = -1\,.$

Це дозволяє зіставити з (1)+(2) лінійний точковий простір SL_3 з його репером $\mathbf{R} \equiv (\mathbf{O};\ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ і тлумачити її як систему вихідних диференціальних рівнянь деякого розподілу W 2-(гіпер)площин у SL_3. Тоді системи функцій $(a_{\alpha k})$ та $(a_{\alpha hk})$ формують фундаментальні геометричні об'єкти відповідно першого та другого порядків. Зокрема, за цілковитої інтегровності рівняння $\omega^3 = 0$ розподіл L інволютивний. Подібні побудови досліджувала доц. Г.С. Польща при вивченні розподілів проективного простору P_4 і відповідних їм систем зовнішніх диференціальних рівнянь в інволюції. За відомим геометричним змістом системи інтуїтивно вдається передбачити її диференціальні інваріанти і залишається лише їх аналітично обґрунтувати, гарантовані алгоритми чого надає зовнішній диференціальний рахунок.

ПРО ГРАНИЧНІ ЗНАЧЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ ВЕКТОРНОГО ПОРЯДКУ У ВАГОВИХ ПРОСТОРАХ ЛЕБЕГА

В. А. Літовченко, О. Б. Васько
Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
vladlit4@mail.ru, lenastasiy@ukr.net

Зафіксувавши довільно $T > 0$, $\{m, n_1, n_2, n_3\} \subset \mathbb{N}$, $n_1 \ge n_2 \ge n_3$, і вектор $\overrightarrow{2b} = (2b_1; \ldots; 2b_{n_1})$ з натуральними координатами, розглянемо систему вигляду

$$(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}}) u(t;x) = \mathbb{A}(t; \partial_{x_1}) u(t;x), \ \ (t;x) \in \left(0;T\right] \times \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

де $n := n_1 + n_2 + n_3$, $x = (x_1; x_2; x_3)$, $x_j \in \mathbb{R}^{n_j}$; $u := \mathrm{col}(u_1; \ldots; u_m)$, $\mathbb{A}(t; \partial_{x_1})$ — матричний диференціальний вираз, коефіцієнти якого є неперервними на $[0;T]$ комплекснозначними функціями, для яких відповідний диференціальний вираз

$$\partial_t - \mathbb{A}(t; \partial_{x_1})$$

є $\overrightarrow{2b}$-параболічним на множині $\left(0;T\right] \times \mathbb{R}^{n_1}$.

Середовищем дослідження системи (1) тут слугують векторні аналоги $\mathbb{L}_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$, $\mathbb{L}_p^{\vec{s}(t)}$ і $\mathbb{L}_p^{\vec{a}}$ просторів $L_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$, $L_p^{\vec{s}(t)}$ та $L_p^{\vec{a}}$ відповідно, визначених у [1].

Побудовано фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для системи (1), обґрунтовано її належність стосовно кожної просторової змінної до відповідного векторного простору типу S Гельфанда І. М. і Шилова Г. Є. та сильну диференційовність за змінною $t \in \left(\tau; T\right]$ у цьому просторі.

Доведено правильність наступного твердження.

Теорема. *Для кожної вектор-функції* $\varphi \in \mathbb{L}_p^{\vec{a}}$, $p \ge 1$, *існує єдиний звичайний розв'язок* $u(t;x)$ *системи (1) такий, що*

$$\| u(t;\cdot) \|_p^{\vec{k}(t;\vec{a})} \le c \| \varphi \|_p^{\vec{a}}, \ \ t \in (0;T],$$

для якого виконується граничне співвідношення

$$\| u(t;\cdot) - \varphi \|_p^{\vec{s}(t)} \underset{t \to +0}{\longrightarrow} 0$$

(тут $\left\| \cdot \right\|_p^{\vec{k}(t;\vec{a})}$, $\|\cdot\|_p^{\vec{s}(t)}$ *і* $\|\cdot\|_p^{\vec{a}}$ *– норми у просторах* $\mathbb{L}_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$, $\mathbb{L}_p^{\vec{s}(t)}$ *і* $\mathbb{L}_p^{\vec{a}}$ *відповідно).*

Список літератури

Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – V. 152, 390 p.

РЕГУЛЯРНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО РІВНЯННЯ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ

А. О. Лопушанський
Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна,
alopushanskyj@gmail.com

Серед достатніх умов на праву частину параболічного рівняння, що забезпечують класичну розв'язність абстрактної задачі Коші, відзначимо результат Да Прато і Грісварда: права частина має значення в проміжних просторах інтерполяційних неперервних шкал. Цей результат поширюємо на випадок комплексних інтерполяційних шкал та рівняння з дробовою похідною.

Нехай задана пара банахових просторів $\left(V_0,\|\cdot\|_0\right)$ та $\left(V_1,\|\cdot\|_1\right)$ над $\mathbb{C}$ з неперервним та щільним вкладенням $E_{10}:V_1 \hookrightarrow V_0$. Зафіксуємо кут $\omega_0 \in \left(\pi/2,\pi\right)$ і зіставимо йому в площині $\mathbb{C}$ замкнений сектор з виколотою точкою $\left\{0\right\}$ і його замикання, відповідно

$$\Lambda_0 = \bigcup\left\{l_\omega : \omega \in \left[-\omega_0,\omega_0\right]\right\} \text{ і } \Lambda = \Lambda_0 \bigcup \left\{0\right\},$$

де $l_\omega = \left\{re^{i\omega} : r>0\right\}$ — промінь з кутом $\omega \in \left[0,2\pi\right]$. Нехай

$$\mathcal{A} = \left\{A \in \mathcal{L}\left(V_1;V_0\right) : \sup_{\lambda\in\Lambda}(\lambda E_{10}-A)^{-1}{}_{\mathcal{L}\left(V_0;V_1\right)} = K\left(A\right) < \infty\right\}$$

— клас операторів $A:V_1 \mapsto V_0$, для яких обернений $(\lambda E_{10}-A)^{-1}$ є визначеним та рівномірно обмеженим для всіх чисел $\lambda\in\Lambda$ за нормою простору $\mathcal{L}\left(V_0;V_1\right)$ всіх неперервних лінійних операторів із V_0 в V_1. Кожен з операторів $A\in\mathcal{A}$ генерує аналітичну півгрупу в просторі V_0 і має від'ємний тип.

Зафіксуємо оператор $J\in\mathcal{A}$. Через $V_\vartheta := \mathcal{D}\left[(-J)^\vartheta\right]$ позначимо область визначення оберненого до $(-J)^{-\vartheta}$ оператора $(-J)^\vartheta$ із нормою графіка $x_{V_\vartheta} := (-J)^\vartheta x_0$. Тоді V_ϑ – проміжний простір для інтерполяційної пари $\left\{V_0;V_1\right\}$, породжений методом комплексної інтерполяції.

Нехай $f_\lambda\left(t\right) = \dfrac{\theta\left(t\right)t^{\lambda-1}}{\Gamma\left(\lambda\right)}$ при $\lambda>0$, $f_\lambda\left(t\right) = f'_{1+\lambda}\left(t\right)$ при $\lambda\le 0$, $\Theta\left(t\right)$ — одинична функція Хевісайда, $\Gamma\left(\lambda\right)$ — гамма-функція, $D_t^\beta g := \dfrac{d}{dt}\left(f_{1-\beta}*g\right)\left(t\right) - f_{1-\beta}\left(t\right)g\left(0\right)$ — похідна Капуто (регуляризована дробова похідна) порядку $\beta \in (0,1)$ функції $g(t)$,

$$C^{\beta,\eta} := \left\{ v \in C\left([0,T];V_{1+\eta}\right) : \exists\, D_t^{\beta} v \in C\left((0,T];V_{\eta}\right) \right\}.$$

Доводимо, що при $A \in \mathcal{A}$, $\beta, \theta \in (0,1]$, $h \in V_{\theta}$, $f \in C\left([0,T];V_{\theta}\right)$ існує єдиний розв'язок $u \in C^{\beta,\eta}$, де $\eta \in [0,\theta)$,задачі

$$D_t^{\beta} u = Au(t) + \left(f_{1-\beta} * f\right)(t), \quad t \in [0,T], \quad u(0) = h.$$

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ З ФУНКЦІОНАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ У ТЕОРІЇ ПАРАБОЛІЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

В. М. Лось, О. О. Мурач

Чернігівський національний технологічний університет, Чернігів,
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
v_los@yahoo.com, murach@imath.kiev.ua

Доповідь присвячена застосуванню методу інтерполяції з функціональним параметром гільбертових просторів у теорії параболічних диференціальних рівнянь. Досліджено загальну початково-крайову параболічну задачу у шкалі гільбертових анізотропних просторів Хермандера. Показниками регулярності функцій, приналежних цим просторам, служить поруч з числовими функціональний параметр. Він повільно змінюється на $+\infty$ за Й. Карамата. Ці простори отримуються інтерполяцією з функціональним параметром пар гільбертових анізотропних просторів Соболєва.

Одержано такі результати [1–3]:

— доведено теореми про ізоморфізми, які встановлює оператор, відповідний початково-крайовій параболічній задачі, у просторах Хермандера;

— доведені теореми про глобальну та локальну регулярність розв’язків цих задач у просторах Хермандера;

— знайдені нові достатні умови неперервності узагальнених частинних похідних (заданного порядку) розв’язків.

Список літератури

1. *Los V., Murach A. A.* Parabolic problems and interpolation with a function parameter // Methods Funct. Anal. Topology. — 2013. — V. 19, no. 2. — P. 146–160. (arXiv:1304.2552)

2. *Лось В. М., Мурач О. О.* Про гладкість розв’язків параболічних мішаних задач // Зб-к праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — Т. 10, № 2. — С. 219–234.

3. *Лось В. Н., Мурач А. А.* Параболические смешанные задачи в пространствах обобщенной гладкости // Доповіді НАН України. — 2014, № 6.

ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ТЕРМОЕЛЕКТРИКИ

І. П. Лусте
Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
appl-dpt@chnu.edu.ua

На відміну від прямих задач в теорії векторних полів у термоелектричному середовищі [1], обернені задачі [2] полягають у знаходженні умов, за яких виникають наперед задані розподіли густини вихрових термоелектричних струмів

$$j(\mathrm{r}) = \mathrm{f}(\mathrm{r}),$$

де векторна функція $f(\mathrm{r})$ радіус-вектора r наперед задана.

В загальному випадку стаціонарна обернена задача термоелектрики формулюється в такий спосіб. Задано в просторі однозв'язну область D, заповнену провідним середовищем, яке характеризується тензорами питомого електричного опору $\hat{\rho}(\mathrm{r})$, термоЕРС $\hat{\alpha}(\mathrm{r})$, що відомим чином залежать від радіус-вектора r. В цій області D задано векторне поле густини струму у вигляді неперервної функції $\mathrm{f}(\mathrm{r})$

$$j(\mathrm{r}) = \mathrm{f}(\mathrm{r}), \tag{1}$$

Обернена задача термоелектрики полягає у побудові скалярного поля температур $T(\mathrm{r})$ (або векторного поля градієнту температури $\nabla \mathrm{T}(\mathrm{r})$), що з необхідністю призводить до створенні в області D заданого розподілу струмів (7).

У стаціонарних умовах

$$\mathrm{div}\, \mathrm{j} = 0, \tag{2}$$

а вектори j та ∇T пов'язані співвідношенням

$$\hat{\rho}\, \mathrm{j} = \mathrm{E} - \hat{\alpha} \nabla T, \tag{3}$$

де E — напруженість електричного поля.

Подіявши на обидві частини рівняння (3) оператором rot, одержимо

$$\mathrm{rot}\, \hat{\alpha} \nabla T = -J(\mathrm{r}), \tag{4}$$

де векторне поле

$$J(r) = \mathrm{rot}(\hat{\rho} j(\mathrm{r})) \tag{5}$$

відоме, оскільки відомі $\hat{\rho}(\mathrm{r})$ та $j(\mathrm{r})$.

Подіявши на обидві частини рівняння (3) оператором div, маємо

$$\mathrm{div}\, \hat{\alpha} \nabla T = d(\mathrm{r}) - 4\pi\delta(\mathrm{r}), \tag{6}$$

де скалярне поле

$$d(\mathrm{r}) = \mathrm{div}(\hat{\rho} j(\mathrm{r})) \tag{7}$$

теж відоме, бо воно визначається відомими полями $\hat{\rho}(\mathrm{r})$ та $j(\mathrm{r})$, а другий доданок правої частини (6) містить густину електричних зарядів $\delta(\mathrm{r})$ внаслідок рівняння Максвела

$$\mathrm{div} \mathrm{E} = 4\pi\delta(\mathrm{r}).$$

Таким чином, для векторного поля $\hat{\alpha}(\mathrm{r})\nabla T$ однозначно визначені дві диференціальні величини – ротор цього поля згідно формули (6) і дивергенція цього поля (7). З теорії векторних полів відома теорема Гельмгольца, яка твердить, що задача знаходження невідомого векторного поля є коректною, якщо відомі його ротор і дивергенція. Отже, буде коректною і задача пошуку поля градієнта температури $\nabla T(\mathrm{r})$ і розподілу температур $T(\mathrm{r})$, оскільки ці величини завжди можна визначити з $\hat{\alpha}(\mathrm{r})\nabla T$ для відомого $\hat{\alpha}(\mathrm{r})$.

Тим самим доведено коректність постановки оберненої задачі термоелектрики і той факт, що її розв'язок існує, якщо наперед заданий розподіл струмів задовольняє закон збереження заряду.

Подано також загальні методи знаходження розв'язків стаціонарних обернених задач термоелектрики для неоднорідних, гіротропних і анізотропних середовищ.

Список літератури

1. Lukosz W. Geshlossene elektrische Strome in thermoelektrischanisotropen Kristallen. // Z. Naturforsch, 1964, 19a, N 13, S. 1599-1610.

2. Лусте О. Я. Задачи синтеза в термоэлектричестве // Вестник АН УССР. — 1975. — № 9. — С. 30.

ПРО ПЕРІОДИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ НАД ПОЛЕМ p-АДИЧНИХ ЧИСЕЛ

В. М. Лучко

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,Чернівці, Україна

vmluchko@gmail.com

Нехай p — просте число, яке буде фіксованим. Введемо у полі Q норму $|x|_p$ за правилом $|0|_p = 0$, $|x|_p = p^{-\gamma}$, якщо раціональне число x подано у вигляді $x = p^{\gamma}\dfrac{m}{n}$, де $m, n, \gamma \in \mathbb{Z}$; m, n не діляться на p. Доповнення Q за p-адичною нормою утворює поле Q_p p-адичних чисел. Норма $|\cdot|_p$ має наступними властивостями: $|x|_p = 0$ у тому випадку, коли $x = 0$; $|x\,y|_p = |x|_p\,|y|_p$; $|x + y|_p \le \max\left(|x|_p, |y|_p\right)$.

Введемо у розгляд клас M_{γ} $(\gamma \ge 0)$ комплекснозначних функцій $\phi(x)$ на Q_p, які задовольняють умови: 1) $|\phi(x)| \le c\left(1 + |x|_p^{\gamma}\right)$; 2) існує натуральне число $N = N(\phi)$ таке, що для довільного $x \in Q_p$ виконується $\phi(x + x') = \phi(x)$, $|x'| \le p^{-N}$.

Розглянемо параболічне рівняння

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + a\left(D^{\alpha}u\right)(t, x) = f(t, x),\ x \in Q_p,\ t \in [0, \infty), \tag{1}$$

де $f(t, x)$ — відома періодична дійсна функція з деяким періодом ω

$$f(t + \omega, x) = f(t, x).$$

Теорема. *Нехай функція* $f \in \mathrm{M}_{\beta}$ *рівномірно відносно* t, $\alpha > \beta$, *тоді розв'язок рівняння (1) визначається формулою*

$$u(t,x) = \int\limits_0^{\omega} d\tau \int\limits_{Q_p} G(t - \tau, x - \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi + \int\limits_0^{t} d\tau \int\limits_{Q_p} G(t - \tau, x - \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi,$$

де

$$G(t, x) = \int\limits_{Q_p} \chi(-\xi x) \exp\left(-at|\xi|_p^{\alpha}\right) d\xi.$$

Список літератури

1.Владимиров В. С. Обобщенные функции над полем р-адитических чисел / В. С. Владимиров // УМН. — 1988. — Т. 43, вып. 5. — С. 17–53.

2. Кочубей А. Н. Параболические уравнения над полем р-адических чисел / А. Н. Кочубей // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1991. — Т. 55, № 6. — С. 1312–1330.

КЕРУВАННЯ У КЛАСІ $u = u(r;\theta)$

О. К. Мазур, В. П. Шоха
Національний університет харчових технологій, Київ, Україна
matemat@nuft.edu.ua

Постановка задачі. В круговому секторі
$$Q = \{(r;\theta) \mid r \in (0,1), \theta \in (0;\pi)\}$$
розглядається задача оптимального керування
$$\begin{cases} \triangle y := \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial y}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} = u(r;\theta), (r;\theta) \in Q \\ y(1;\theta) = p(\theta), p(0) = 0 \\ y(r;0) = 0, r \in (0;1) \\ \dfrac{\partial y}{\partial \theta}(r;0) = \dfrac{\partial y}{\partial \theta}(r;\pi), r \in (0;1) \end{cases} \quad (1)$$
$$I(y;u) = \int_0^1 \|y(r)\|_D^2 dr + \int_0^1 \|u(r)\|_D^2 \, dr \to \inf \quad (2)$$
де $p \in C^1([0;\pi])$ — задана функція, $\|\cdot\|_D$ — норма в $L^2(0;\pi)$, еквівалентна стандартній, що задається рівністю
$$\|\upsilon\|_D = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_n^2\right)^{1/2}$$
де $n \geq 1, \upsilon_n = \int_0^\pi \upsilon(\theta) \cdot \Psi_n(\theta) d\theta$
$$\Psi_0(\theta) = \frac{2}{\pi^2}, \Psi_{2n}(\theta) = \frac{4}{\pi^2}(\pi - \theta)\sin 2n\theta, \Psi_{2n-1}(\theta) = \frac{4}{\pi^2}\cos 2n\theta.$$
Потрібно знайти оптимальний серед допустимих процесів
$$\{u;y\} \in C(\bar{Q}) \times \left(C(\bar{Q}) \cap C^2(Q)\right).$$

Для застосування спектрального методу використовуються біортонормовані і повні в $L^2(0;\pi)$ системи функцій Самарського — Іонкіна [1].

У статті знайдено розв'язок задачі, та доведено збіжність відповідних рядів.

Список літератури

1. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. — 1977. — 13, №2. — С. 294–304

УЗАГАЛЬНЕНА МАТРИЦЯ ҐРІНА КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З ІНТЕГРАЛЬНОЮ УМОВОЮ ДЛЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МІРАМИ

В. В. Мазуренко

Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна

mazvic@ukr.net

Досліджуються питання розв'язності крайової задачі для системи диференціальних рівнянь з мірами

$$y' = C'(x)y + f'(x) \tag{1}$$

з інтегральною умовою

$$Ly \equiv \int_a^b dP(x)y(x) = \eta, \tag{2}$$

де y, f — вектори евклідового простору E^n, елементи $(n \times n)$-матриці $C(x)$ і компоненти вектора $f(x)$ належать до простору $BV^+[a,b]$ (відтак диференціювання і рівність в (1) розуміються в узагальненому сенсі), $L : BV^+[a,b] \to E^m$, $(m \times n)$-матриця $P(x)$ має елементи з простору $BV[a,b]$, $\eta \in E^m$. Припускаємо виконання умов коректності

$$[\Delta C(x)]^2 = 0,\ \Delta C(x)\Delta f(x) = 0\ \ \forall x \in [a,b],$$

за яких при дослідженні системи (1) не виникатиме проблема множення розподілів, та умов

$$\Delta P(x)\Delta C(x) = 0,\ \Delta P(x)\Delta f(x) = 0\ \ \forall x \in [a,b],$$

котрі гарантуватимуть існування інтеграла в (2) в сенсі Рімана — Стільтьєса.

Визначальною в цьому дослідженні є $(m \times n)$-матриця

$$L_B = \int_a^b dP(x)B(x,a),$$

де $B(x,t)$ – матриця Коші однорідної $(f = 0)$ системи (1). Нехай L_B^+ – псевдообернена до L_B $(n \times m)$-матриця Мура — Пенроуза [1], тобто $L_B L_B^+ L_B = L_B$ (за умов $m = n$ і $\det L_B \neq 0$ матриця $L_B^+ = L_B^{-1}$). На основі цієї матриці отримані умови існування та єдиності розв'язку крайової задачі (1), (2) у просторі $BV^+[a,b]$; показано, що за таких умов розв'язок задачі допускає представлення у формі

$$y(x) = B(x,a)L_B^+\eta + \int_a^b \Gamma(x,t)df(t),$$

де

$$\Gamma(x,t)=\begin{cases} B(x,a)L_B^{+}\int_a^t dP(\tau)B(\tau,t), a\le t\le x\le b \\ -B(x,a)L_B^{+}\int_t^b dP(\tau)B(\tau,t), a\le x<t\le b \end{cases}$$

— узагальнена матриця Ґріна напіводнорідної $(\eta=0)$ крайової задачі (1), (2); вивчені властивості цієї матриці; також розглянуті частинні випадки задачі: початкова, крайова (двоточкова), багатоточкова, задача з s-точковими умовами інтегрального типу.

Список літератури

1. Barata J. C. A., Hussein M. S. The Moore–Penrose pseudoinverse: a tutorial review of the theory, Braz. J. Phys., 42 (2012), 146–165.

ПРО УНІВЕРСАЛЬНІ ТА ПРОБЛЕМНО-ОРІЄНТОВАНІ ПІДХОДИ В СІТКОВИХ МЕТОДАХ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК

В. А. Максимюк, Є. А. Сторожук, І. С. Чернишенко
Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна
desc@inmech.kiev.ua

Обчислювальні методи механіки деформівних твердих тіл такі, як метод скінченних різниць, метод скінченних елементів (МСЕ), варіаційно-різницевий метод (ВРМ) на певному етапі спіткнулись об так звану проблему замикання (locking) або виродження. Цей ефект проявляється в сповільненій збіжності чисельних методів. Залежно від мірності та постановки задачі виділяють [1] зсувне, мембранне, об'ємне (volumetric, dilatational), товщинне (thickness, Poisson's thickness), трапеціодальне (trapezoidal, curvature thickness) замикання.

Підходи до побудови сіткових методів умовно можна поділити на універсальні та проблемно-орієнтовані [2]. В універсальних підходах після математичної формалізації втрачаються відомості про особливості поставленої задачі, а в проблемно-орієнтованих такі відомості використовуються. Вдосконалення універсальних підходів може бути «екстенсивним» шляхом підвищення порядку апроксимації, збільшенням мантиси тощо, або «інтенсивним» – шляхом раціонального вибору системи координат та математичних об'єктів, наприклад, векторів замість скалярів [3]. Вдосконалення проблемно-орієнтованих підходів полягає у врахуванні апріорної інформації про особливості розв'язку задачі на етапі математичної постановки задачі, що є коректним [1,2], або на етапі дискретизації, що є, очевидно [1], дещо евристичним. Наприклад, МСЕ історично пройшов ґенезу [1] від простого трикутного елемента низького порядку через побудову елементів високого порядку («екстенсивний» шлях) до побудови елементів низького порядку на основі змішаних варіаційних принципів (проблемно-орієнтований шлях). Прикладом «інтенсивного» шляху є векторний ВРМ [3].

Для подолання мембранного і зсувного замикання автори запропонували варіант скалярного ВРМ з обчисленням компонент деформації в точках надзбіжності, який відноситься до проблемно-орієнтованих підходів.

Список літератури

1. Maksimyuk V. A., Chernyshenko I. S. Mixed Functionals in the Theory of Nonlinearly Elastic Shells // Int. Appl. Mech. — 2004. — **40**, No. 11. — P. 1226–1262.

2. Guz' A. N., Maksymyuk V. A., Chernyshenko I. S. Problem-oriented functionals in the theory of nonlinearly elastic composite shells // Mech. Compos. Mater. — 2002. — **38**, No. 4. — P. 329–334.

3. Storozhuk E. A., Chernyshenko I. S., Rudenko I. B. Elastoplastic State of Spherical Shells with Cyclically-Symmetrically Arranged Circular Holes // Int. Appl. Mech. — 2012. — **48**, No. 5. – P. 573–582.

ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ ВЕКТОРА ІНТЕНСИВНОСТІ ВІДМОВ

С. М. Малинськкій, Л. Г. Наливайко

Полтавський національний технічний університет ім. Юрія Кондратюка, Полтава, Україна

nalivayko.60@mail.ru

Розглядається еволюція системи з n елементів з точки зору надійності. Розв'язується актуальна задача знаходженням найбільш небезпечної пари елементів системи в умовах відмов з відновленням. Приріст інтенсивності λ_i відмов i-го елемента за час Δt є лінійне накопичування відмов від інших елементів.

$$\Delta\lambda_i = \sum_{K \neq i} a_{iK}\lambda_K.$$

Після аналізу повної системи подій:

$$\begin{cases} B_1 - \text{відмова } i\text{-го елемента} \\ B_2 - \text{відмова будь-якого, крім } i\text{-го елемента} \\ B_3 - \text{немає відмов} \end{cases}$$

які можуть відбутися за час $(t; t + \Delta t)$, виводиться нелінійна система диференціальних рівнянь руху вектора $\overline{\lambda}(t)$:

$$\lambda_i'(t) = \lambda_i^0\lambda_i(t) + (\sum_{K \neq i} a_{iK}\lambda_K(t))\lambda_i(t) - \lambda_i^2(t);\; i = 1, \dots n,$$

де $\lambda_i^0 = \lambda_i(0)$ — початкові інтенсивності відмов.

Оскільки $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \lambda_i'(t) > 0$, то вектор $\overline{\lambda(t)} = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t))$ рухається до нерухомої точки $\tilde{\lambda}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_n); (\tilde{\lambda}_K > \lambda_K^0)$.

Для того, щоб чисельно оцінити рух $\lambda_i(t) \to \tilde{\lambda}_i$ до нерухомої точки, беруться системи, в які входять пари $\lambda_i(t); \lambda_j(t)$:

$$\begin{cases} \lambda_i' = \lambda_i^0 \cdot \lambda_i(t) + a_{ij}\lambda_i(t)\lambda_j(t) - \lambda_i^2 \\ \lambda_j' = \lambda_j^0 \cdot \lambda_j(t) + a_{ji}\lambda_j(t)\lambda_i(t) - \lambda_j^2, \end{cases}$$

це спрощує ситуацію і дає можливість чисельно оцінити найбільш близьку нерухому координату $\min(\tilde{\lambda}_i - \lambda_i^0)$ та час руху до неї. Чисельний приклад підтверджує достатність аналізу парних впливів:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.15 \\ 0.11 & 1 & 0.1 \\ 0.12 & 0.14 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \lambda_1^0 \\ \lambda_2^0 \\ \lambda_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.12 \\ 0.16 \end{pmatrix}.$$

Після лінеаризації та рішення системи диференціальних рівнянь, знайдено

$$K_1 \approx -0,12;\ K_2 \approx -0,18$$

— параметри руху до нерухомої точки, найбільш небезпечної пари.

До речі, матриця $A_{iK}\left\{a_{iK}\right\}, i=1,\ldots,\ n, k=1,\ldots,\ n,$, яка береться з експерименту або з фізики відмов, теж чисельно будується, аналізуючи вплив пар елементів i та k.

Список літератури

1. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К. Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. — М.: Наука, 1965. — 524 с.

2. Барковський В. В., Барковська Н. В. Теорія ймовірності та математична статистика. — К.: ЦУЛ, 2002. — 400 с.

3. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей та математична статистика. — К.: КНЕУ, 2000. — 304 с.

ПРО РОЗРИВНІ КОЛИВАННЯ В ОДНІЙ ІМПУЛЬСНІЙ СИСТЕМІ

К. Ю. Мамса, Ю. М. Перестюк

НТУУ «Київський політехнічний інститут»,

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна

Perestyuk@gmail.com

Досліджується питання існування періодичних розв'язків двовимірної системи диференціальних рівнянь, що піддається імпульсному збуренню в момент проходження фазовою точкою фіксованої прямої на фазовій площині:

$$\frac{dx}{dt} = Jx + \varepsilon f(x), \quad < a, x > \neq 0; \quad \Delta x\Big|_{<a,x>=0} = Bx$$

Тут $x = coll(x_1, x_2)$, $< a, x > = a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$ — задана пряма,

$$f(x) = coll(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2));$$

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$ — сталі матриці, ε — малий параметр.

В лінійному випадку, тобто, коли $\varepsilon = 0$, встановлені необхідні і достатні умови існування сім'ї розривних одно- (дво-) імпульсних циклів. У випадку $\varepsilon \neq 0$ встановлені достатні умови існування ізольованих асимптотично стійких розривних циклів як з одним, так і з двома розривами траєкторії.

Як приклад досліджується можливість незатухаючих коливань нелінійного осцилятора з великим тертям під дією імпульсного збурення:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad \alpha > 0, \quad \omega^2 > \alpha^2.$$

Щодо імпульсного збурення, то вважаємо, що воно діє на маятник, коли миттєва швидкість фазової точки дорівнює нулю, а її величина пропорційна з деяким коефіцієнтом γ положенню фазової точки в цей момент, тобто

$$\Delta\dot{x}\Big|_{\dot{x}=0} = \gamma x\,, \quad \Delta x\Big|_{\dot{x}=0} = 0\,.$$

Список літератури

1. Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. Impulsive differential equations. — Singapore: World Sci., 1995. — 462 p.

2. Mamsa K., Perestyuk Y. A certain class of discontinuous dynamical systems in the plane // Math. Anal. — Differential Equations and their applications – Sofia, 2011. — P. 121–128

3. Perestyuk Yu. M. Discontinuous oscillations in one impulsive system // Journal of Mathematical Sciences. Springer Science+Business Media New York, October 2013, Volume 194, Issue 4, pp. 404–413.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ГРУНТОВОГО МАССИВА ПРИ НАЛИЧИИ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ НАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

О. А. Марченко, Т. А. Самойленко

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, Киев, Украина

tkucheruk@rambler.ru

Проблемы расчета устойчивости и безопасности грунтовых гидротехнических сооружений тесно связаны с возможностью наиболее полного учета в процессе математического моделирования различных факторов, влияющих на их функционирование. В связи с этим построение и теоретическое обоснование наиболее адекватной модели является сложной и актуальной задачей.

В докладе представлены две новые дифференциальные модели состояния фильтрующего грунтового массива при условии неустановившегося режима напорной фильтрации. Первой является модель динамической консолидации водонасыщенных грунтов, базирующаяся на модели М. Био, при построении которой рассматривались три группы уравнений для квазидвухфазных грунтов: 1) уравнений, описывающих закон изменения количества движения классической механики; 2) группы уравнений, определяющих скорость движения жидкости в пористой среде на основании законов Навье — Стокса и Дарси — Герсеванова; 3) уравнений, следующих из закона сохранения всех масс грунта. Начально-краевая задача сформулирована при использовании принципа эффективных напряжений Терцаги и с учетом только упругих деформаций. Вторая модель представляет собой начально-краевую задачу для параболо-гиперболической квазилинейной системы, включающей нестационарное уравнение фильтрации и уравнения теории упругости, описывающие напряженно-деформированное состояние грунтового массива.

Для каждой из двух рассматриваемых начально-краевых задач предложено методику построения обобщенного решения Галеркина на основании метода конечных элементов, получены оценки точности непрерывного по времени приближенного обобщенного решения как решения соответствующей задачи Коши и полностью дискретного приближенного обобщенного решения, рассчитываемого по схеме Кранка — Николсона.

По каждой из предложенных моделей представлены расчеты на примере профильной задачи для фильтрующего основания гравитационной плотины при условии изменения уровня воды в верхнем водоеме, позволяющие провести сравнительный анализ результатов (смещений, деформаций, полей скоростей фильтрации, напоров и т.д.) и сделать выводы о специфике каждого из подходов при очень схожей общей картине расчетов (например, картине зависимости скорости распространения фильтрационного потока от проницаемости слоя дна верхнего водоема).

МАТЕМАТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЕ СОУПРАВЛЕНИЯ В ПРИРОДЕ И ОБЩЕСТВЕ

Ю. Н. Маслов
Киев, Украина
myun@i.ua

«Гармония человека и Матушки-Природы
создаст предпосылки строительства страны будущего»
Квантовый переход: первый этап [1]

Изучение сверхсложности по Гвишиани [2] человековключающих систем (общество и религия, экономика и финансы, здравоохранение и образование и др.), а также человека, его души и духовности, Вселенной и Мироздания теоретически и математически (аксиоматически) возможно, практически должно и может осуществляться с использованием всех математических, технологических и технических методов кибернетики, а также достижений теоретической физики, классической и современной математики при их расширении на живое и человека, природу и общество, религию и Бога.

Заметим, что дифференциальное и интегральное исчисления создавались классиками математики (И. Ньютон, Г. Лейбниц и др.) для выявления сути человека и его духовности, понимания Божественности Мироздания. Отметим сочинение Г. Лейбница «Опыты теодицеи о благости Божией, свободе человека и происхождении зла» (1710) и «Математические начала натуральной философии» И. Ньютона с его отношением к Богу: «Сей управляет всем не как душа мира, а как властитель вселенной, и по господству своему должен именоваться Господь Бог Вседержитель» (1726).

Суть гармонии человека и всего живого, общества и человечества, Вселенной и Мироздания связана также с математическими проблемами оптимальности, оптимизации управляемых и управляющих дифференциальных уравнений, с не имеющей и не могущей иметь решения математической задачи оптимального управления, которое наблюдается в живой природе и обществе.

Предпринимались попытки обойти эти особенности в кибернетике по Винеру как управлению и связи в животном и машине, как человеческому использованию человеческих существ в кибернетике и обществе [3], и на уровне изобретений (математическое моделирование, обратная связь, теория информации, информационные, нано и другие существующие технологии).

Иное отношение к кибернетике сложилось в мире как «кибернетике общих закономерностей процессов управления и науке о текущем управлении государством» или «искусству управления вообще» по Амперу [4]; как к науке об оптимальном управлении по Бергу [5] и в теоретической кибернетике В.М. Глушкова [6]; в физиологической кибернетике по Анохину как к оптимальному управлению в человеке и организмом человека [7].

Становлению теоретической кибернетики как науке об оптимальном управлении способствовали математическая теория оптимального управления академика Л. С. Понтрягина [8], принцип оптимальности и динамическое программирование Р. Беллмана [9], исследования других ученых, которые пытались и не смогли объяснить наблюдаемые в живом, человеке и обществе явления, процессы и структуры оптимального управления и самоуправления.

Предложения же по реализации методологии изучения сверхсложности по Гвишиани, например, концепции взаимоСОдействия теории функциональных систем академика П. К. Анохина [7] и другие идеи, оставались математически не формализованными и тем самым научно не исследованными.

Предпринимается реализация математического открытия соуправления, рассмотрения сути всего неживого и живого, человека и общества как оптимального соуправления в работе над монографией «Необходимо общая теория оптимальности» в двух частях с эпическими названиями «Живая вода» и «Святая вода» (в продолжение к «Мертвой воде» [10]) и подзголовком «Начала математической теории всего живого и человека, Мироздания и Бога» (далее «Начала») или кратко «Математика Бога». В «Началах» Бог понимается как математически оптимально управляющее Всё и Вся при СОУПРАВЛЕНИИ всего и всех, в дополнение к «Физике Бога» Божидара Палюшева [11].

В «Началах» ставится и аксиоматически решается новая математическая задача соуправления, оптимального по принципу оптимальности Беллмана [9] с критерием многокритериальной оптимальности по Анохину-Парето [7, 12]. Это задача оптимального полииерархического регулирования, управления и регуляции управляемых и управляющих, соуправляющих и соуправляемых функций и канонических дифференциальных уравнений Гамильтона различных порядков, уровней и степеней.

Рассматриваемая математически формализованная оптимальность полииерархии управляющих дифференциальных уравнений соуправления возможна и реализуется теоретически как Соуправление и СОуправление, которые практически наблюдаются в живой природе (растения и животные), а СоУправление, связанное с духовностью, — в человеке как СоТворце [1].

СОуправление рассматривается в «Началах» как мера взаимоСОдействия по Анохину [7]. Например, в ЦНС афферентация определяется и понимается не как управление в кибернетике, а эфферентация — не как информационная обратная связь по Винеру и др., а как математически формализованные оптимальные СОуправления в ЦНС живых организмов (СОуправляющая афферентация и СОуправляемая эфферентация).

СоУправляемость (СоУправляемые и СоУправляющие функции и дифференциальные уравнения Гамильтона в обобщённых канонических переменных) определяется и рассматривается с помощью математических преобразований оживления и одухотворения и уравнений Коши-Римана.

В «Началах» также рассматриваются вытекающие из полииерархической оптимальности математические D-, P-, Q— и K-преобразования оптимального соуправления, Соуправления и СОуправления, СоУправления и СОУправления, которые порождают соуправляемые и соуправляющие функции и уравнения Гамильтона поведения и устроения соответствующих явлений соуправления.

Расматривается оптимальная соуправляемость, наблюдаемая в минералах и росте кристаллов, Соуправляемость — в растениях: это экосистема леса, а в деревьях — это Соуправление кроны и корневой системы. В животных — это СОуправляющая афферентация и СОуправляемая эфферентация ЦНС. В человеке же — это СоУправляемое тело и СоУправляющая душа. В Мироздании — это СоУправляемый Материальный Мир и СоУправляющий Духовный Мир, СОУправляемый вместе с СОУправляющим Миром Разума. Математически оптимальное СОУправление во Вселенной связывается с закономерностями «Начал» и Канонами Мироздания [1]. В обществе также может иметь место оптимальное соуправление (Соу, СОу, СоУ и СОУ), а не правление.

Математически оптимальные функции Гамильтона и соответствующие канонические дифференциальные уравнения СОУПРАВЛЕНИЯ, наблюдаемого в неживом и живом, в человеке и обществе, во Вселенной и Мироздании, связаны с решением не решенных математических проблем Гильберта: 8-ой — «Математическое изложение аксиом физики» такое, «чтобы построение физических аксиом провести по образцу аксиом геометрии» и 23-й проблемы — «Развитие методов вариационного исчисления» [13]. Всё это связано с научными проблемами Миропонимания, законами Материального Мира и Канонами Духовного Мира — основами «строительства страны будущего» [1].

Список литературы

1. Маслов Л. И. Откровения людям Нового Века. — В 9-ти кн. — М. : 2004–2013. — Толкования Откровений. Кн. III, 2006.— С. 202. — knigaveka.ru (04.08.06: 15).

2. Гвишиани Д. М. Диалектика, системность, глобальное моделирование / В сб.: Кибернетика, ноосфера и проблемы мира. — М. : Наука, 1986. — 144 с.

3. Винер Н. Кибернетика, или управление и связь в животном и машине. — М.: Сов. радио, 1958. — 326 с. Человеческое использование человеческих существ. Кибернетика и общество / Человек управляющий. — СПб: Питер, 2001.— С. 4-196.

4. Поваров Г. Н. Ампер и кибернетика. — М.: Советское радио, 1997. — 96 с.

5. Берг А. И. Кибернетика — наука об оптимальном управлении. — М.-Л.: Энергия, 1964. — 66 с.

6. Энциклопедия кибернетики в 2-х томах / Под ред. В. М. Глушкова. — К.: Гл. редакция Украинской Советской Энциклопедии, 1974. — 1232 с.

7. Анохин П. К. Принципиальные вопросы общей теории функциональных систем / Принципы системной организации функций. — М.: Наука, 1973. — С. 5-61.

8. Понтрягин Л. С. Оптимальные процессы регулирования // УМН — 1959 — 14(85). — С. 3-20.

9. Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: ИЛ, 1960. — 400 с.

10. Мёртвая вода. — М. : «Академия управления», 2009. — 796 с.

11. Палюшев Б. Физика Бога 2 и 3. Пограничные пространства. — М.: ООО АСТ, ООО «Астрель», 2003. — 318 с. и 392 с.

12. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Физматлит, 2007. — 256 с.

13. Гильберт Д. Математические проблемы (1900). — М.: Наука, 1969. — 239 с.

ПРО ДВОТОЧКОВУ ЗАДАЧУ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ

М. І. Матійчук
Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
katy_diff@mail.ru

У області $\Gamma = (0,T) \times S'$ розглядається задача про знаходження функцій $\{u(t,x),\ P(t,x)\}$ для рівняння

$$D_{S'}^{\alpha} u - t^{-\alpha} \frac{u(0,x)}{\Gamma(1-\alpha)} + B(t)P(t,x) = \sum_{|k| \le [2b\,\alpha]} A_k(t,x) D_x^k u + f(t,x) \tag{1}$$

з умовами

$$u(0,x) = \phi(x),\ \ u(T,x) = \psi(x),\ \ x \in S'. \tag{2}$$

Тут D_s^{α} — оператор дробового диференціювання на поверхні $S' \subset \mathbb{R}^n$ із класу Діні, який відповідає параболічному оператору

$$\Lambda(D)u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^b \Delta_x^b u,$$

Δ_x — оператор Бельтрамі — Лапласа на $S', \alpha \in (0,1)$,

$$D_s^{\alpha} u = \Lambda(D) \mathrm{I}_{S'}^{(1-\alpha)} u,\ \mathrm{I}_{S'}^{(\alpha)} u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \int_{S'} G(t-\tau, x, \xi)\, u(\tau, \xi) dS'_{\xi}, \tag{3}$$

$G(t,x)$ — фундаментальний розв'язок рівняння $\Lambda(D)u \equiv 0$.

За умов певної гладкості коефіцієнтів і функцій, які визначають задачу (1), (2) та поверхні S' із $\mathbb{R}^n\,(n \ge 2)$ знаходження розв'язку зводиться до квазірегулярних рівнянь Вольтера — Фредгольма.

Встановлюється зображення розв'язку та оцінки його похідних

$$|\, D_x^k u(t,x) \,| \le C_k \left[t^{-\frac{|k|}{2b}} \,|\, \phi \,|_w + |\, f \,|_w + |\, \psi \,|_{2b}^{(w)} \right], |\, k \,| \le 2b, \tag{4}$$

де $w(h)$ — модуль неперервності, $|\, \phi \,|_w$ — норма в просторі Діні.

Список літератури

1. Матійчук М. І. Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні: Монографія / М. І. Матійчук. — Чернівці, 2010. — 248 с.

ПРО ДВОСТОРОННЮ АПРОКСИМАЦІЮ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНОЇ ДВОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

С. М. Ментинський

Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна

serge.mentynsky@i.ua

Пропонована замітка присвячена побудові двосторонніх наближень до розв'язків лінійної двоточкової задачі для звичайного диференціального рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t,x) + f_2(t,x), \tag{1}$$

котрі задовольняють лінійні крайові умови

$$\alpha x(0) + \beta x(T) = \gamma, \tag{2}$$

де x — елемент простору $C_{R_m}[0;T]$ неперервних m-вимірних векторних функцій, напівупорядкованого конусом додатних елементів, $t \in [0;T]$; $0 < T < +\infty$; $f_1, f_2 : D = [0;T] \times [a;b] \to C_{R_m}[0;T]$; γ — m-вимірний сталий вектор; α і β — сталі матриці порядку $m \times m$, причому матриця $\alpha + \beta$ — неособлива і $(\alpha+\beta)^{-1}\alpha \geq \Theta$, $(\alpha+\beta)^{-1}\beta \geq \Theta$.

Двосторонні наближення до розв'язку задачі (1), (2) побудовано за припущення, що для правої частина рівняння (1) задані матриці

$$G_k(t,y,z) = \left\{g_{ij}^{[k]}(t,y,z)\right\},\ \alpha_k(t,y,z) = \left\{\alpha_{ij}^{[k]}(t,y,z)\right\},$$

$$A_k(t,y,z) = \left\{a_{ij}^{[k]}(t,y,z)\right\}, (k = 1,2,\ i,j = \overline{1,m})$$

неперервних за сукупністю аргументів незростаючих за y і неспадних за z додатних при $y,z \in [a,b]$, $t \in [0,T]$ дійсних функцій, для яких з нерівностей $y \leq z$ ($t \in [0,T]$ $x,y,z \in [a,b]$) випливають співвідношення

$$\left(G_1(t,y,z) + \alpha_1(t,y,z) - A_1(t,z,y)\right)(z-y) \leq f_1(t,z) - f_1(t,y),$$

$$f_2(t,z) - f_2(t,y) \leq -\left(G_2(t,y,z) + \alpha_2(t,y,z) - A_2(t,z,y)\right)(z-y).$$

Для побудови апроксимацій використано конструкції чисельно-аналітичного методу А. М. Самойленка [1]. Встановлено умови двосторонності побудованих наближень та досліджено умови збіжності отриманого ітераційного процесу. Отримано результати, які доповнюють результати, опубліковані в [2].

Список літератури

1. Самойленко А. М., Ронто Н. И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — К.: Наук. думка, 1992. — 277 с.

2. Двосторонні наближені методи / Шувар Б. А., Копач М. І., Ментинський С. М., Обшта А. Ф. — Івано-Франківськ: ВДВ ЦІТ, 2007. — 516 с.

РОЗРИВНІ ЦИКЛИ
В ОДНІЙ СЛАБКОНЕЛІНІЙНІЙ ІМПУЛЬСНІЙ СИСТЕМІ

Д. В. Миколюк
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна
fridoleen@gmail.com

Розглядається слабко нелінійна система імпульсних диференціальних рівнянь з фазовим портретом типу сідло або центр. Імпульс діє у нефіксовані моменти часу в точках, що утворюють дві паралельні прямі. Досліджуються типи та умови існування розривних циклів відповідної лінійної системи. Також знайдено умови існування циклів системи з малою нелінійністю в околі циклів лінійної системи.

Розглядається система рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta y + \varepsilon F\left(x, y\right), \\ \dot{y} = \beta x + \alpha y + \varepsilon G\left(x, y\right); \end{cases} \tag{1}$$

$$\Delta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big|_{y=a} = \begin{pmatrix} c \\ -2a \end{pmatrix}, \qquad \Delta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big|_{y=-a} = \begin{pmatrix} d \\ 2a \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Досліджено умови існування системі (1), (2) розривних циклів при малих значеннях $\varepsilon > 0$.

k-циклом називатимемо розривний цикл, що містить рівно k розривів.

Спочатку розглянуто лінійну систему, яка відповідає системі (1), (2) у випадку $\varepsilon = 0$. Для цієї системи доведено, що можливі типи розривних циклів обмежуються *1*- та *2*-циклами, умови існування яких описує наступна теорема.

Теорема 1. *Для системи (1), (2) при* $\varepsilon = 0$ *виконуються умови:*

Існує дійсне число $b = b\left(\alpha, \beta\right)$ *таке, що при виконанні однієї з умов* $c \in \widehat{\left(0, b\right]}$ *або* $d \in \widehat{\left(0, b\right]}$ *система має один 1-цикл; при виконанні обох умов — два 1-цикли; і не має 1-циклів, якщо жодна з умов не виконується.*

Для кожного $c \in \mathbb{R}$ *існує дійсне число* $d_* = d_*\left(c\right)$ *таке, що система має 2-цикли тоді й тільки тоді, коли* $d \in \left(-\infty, d_*\right)$ *при* $\alpha < 0$ *(*$d \in \left(d_*, \infty\right)$ *при* $\alpha > 0$*). Причому 2-цикл може бути лише один.*

При $\alpha > 0$ *1-цикли є стійкими, 2-цикл нестійкий, а при* $\alpha < 0$ *1-цикли нестійкі, 2-цикл стійкий.*

Далі досліджуються умови існування *1*- та *2*-циклів у системі (1), (2) при малих значеннях параметра ε. Для цього розглянуто функцію

$$E\left(x, y\right) = \sqrt{x^2 + y^2} e^{-\frac{\alpha}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$$

Похідна цієї функції в силу системи (1) рівна

$$\dot{E}\left(x,y\right)=\frac{\varepsilon}{\beta}E\left(x,y\right)\frac{\left(\alpha y+\beta x\right)F\left(x,y\right)+\left(\beta y-\alpha x\right)G\left(x,y\right)}{x^2+y^2}$$

Зокрема $\dot{E}\left(x,y\right)=0$ при $\varepsilon=0$, тобто функція $E\left(x,y\right)$ є сталою вздовж траєкторій відповідної лінійної системи. Тоді існування *1*- та *2*-циклів у системі (1), (2) описують дві наступні теореми.

Теорема 2. *Нехай функції $F\left(x,y\right)$ та $G\left(x,y\right)$ є неперервно диференційовними на $\mathbb{R}$, при $\varepsilon=0$ система (1), (2) має 1-цикл із дугою γ й виконуються умови:*

$$\int\limits_{\gamma}\dot{E}\left(x,y\right)dt=0;$$

$$\frac{d}{dx_0}\int\limits_{\gamma}\dot{E}\left(x,y\right)dt=0 \text{ \textit{або} } \operatorname{sign}\frac{d}{dx_0}\int\limits_{\gamma}\dot{E}\left(x,y\right)dt=\operatorname{sign}\alpha;$$

де точка $\left(x_0,y_0\right)$ ($y_0=a$, або $y_0=-a$) є початком дуги γ. Тоді система (1), (2) при достатньо малих $\varepsilon>0$ має 1-цикл.

Теорема 3. *Нехай функції $F\left(x,y\right)$ та $G\left(x,y\right)$ є неперервно диференційовними на $\mathbb{R}$, при $\varepsilon=0$ система (1), (2) має 2-цикл із дугами γ_1 та γ_2 й виконуються умови:*

$$\int\limits_{\gamma_1}\dot{E}\left(x,y\right)dt=\int\limits_{\gamma_2}\dot{E}\left(x,y\right)dt;$$

$$\frac{d}{dx_0}\int\limits_{\gamma_1}\dot{E}\left(x,y\right)dt=\frac{d}{dx_1}\int\limits_{\gamma_2}\dot{E}\left(x,y\right)dt=0;$$

де $\left(x_0,a\right)$ є початком дуги γ_1, а $\left(x_1,-a\right)$ є початком дуги γ_2. Тоді система (1), (2) при достатньо малих $\varepsilon>0$ має 2-цикл.

Список літератури

1. Перестюк Н. А., Самойленко А. М. Импульсные дифференциальные уравнения. — К.: Выща школа, 1987.

2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.

3. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння. Підручник. — К.: Київський університет, 2010.

4. Y. Perestyuk, Discontinuous osscilations in one impulsive system // Journal of Mathematical Sciences, vol. 194, 2013.

5. K. Mamsa, Y. Perestyuk, A certain class of disconinuous dynamical systems in the plane // Math. anal., Differential equations and their applicaions, pp. 121–128, 2011.

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ РОЗВ'ЯЗКІВ ДВОТОЧКОВОЇ ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ СИНГУЛЯРНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

В. І. Мироник, І. С. Тупкало
Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
iohannis@rambler.ru

Одним із ефективних методів побудови точних аналітичних розв'язків задач математичної фізики є метод інтегральних перетворень. Широкий клас операторів формально можна подати у вигляді

$$B = J^{-1}_{\sigma\to x}\left[A\left(t,x,\sigma\right)J_{x\to\sigma}\right],$$

де J — деяке інтегральне перетворення, $A\left(t,x,\sigma\right)$ функція (символ) оператора B, яка задовольняє певні умови; якщо $A\equiv A(\sigma)$, то символ називається сталим. Нехай $J=F_B$ — перетворення Бесселя.

Розглянемо двоточкову задачу для еволюційного рівняння

$$\partial u\left(t,x\right)/\,\partial t = Bu\left(t,x\right), \qquad \left(t,x\right)\in\left(0,T\right)\times\mathbb{R}_+\equiv\Omega_+, \tag{1}$$

де оператор B побудований за символом $A\left(\sigma\right)$, який, як функція σ, задовольняє певні умови.

Двоточкова за часом задача для рівняння (1) у праці [1] ставиться так: знайти функцію $u\in C^1\left(\left(0,T\right),\overset{\circ}{S}\right)$, яка задовольняє рівняння (1) та крайову умову

$$\mu_1 u\left(t,\cdot\right)|_{t=0} - \mu_2 u\left(t,\cdot\right)|_{t=T} = f, \qquad f\in\left(\overset{\circ}{S}_*\right)' \tag{2}$$

де μ_1,μ_2 — фіксовані параметри, $\mu_1>\mu_2>0$ у тому сенсі, що

$$\mu_1\lim_{t\to+0}u\left(t,\cdot\right)-\mu_2\lim_{t\to T-0}u\left(t,\cdot\right)=f,$$

де границі розглядаються в просторі $\left(\overset{\circ}{S}\right)'$.

В [1] доведено, що задача (1), (2) коректно розв'язна в класі узагальнених функцій.

Теорема. *Нехай* $u\left(t,x\right)$ *— розв'язок задачі (1), (2),* $f=0$ *на інтервалі* $\left(-a,a\right)\subset\mathbb{R}$, *тобто*

$$\left\langle f, \varphi \right\rangle = 0,\ \forall \varphi \in \overset{\circ}{S} :\ \operatorname{supp} \varphi \subset (-a, a),$$

де $\left[-b, b\right] \subset \left(-a, a\right)$ *— довільно фіксований відрізок,* $\Pi := \left(0, T\right) \times \left[-b, b\right]$. *Тоді*

$$\exists L > 0 :\ \sup_{\left(t, x\right) \in \Pi} \left| u\left(t, x\right) \right| \leq L\,.$$

Список літератури

1. Тупкало І. С. Двоточкова задача для еволюційних рівнянь з оператором Бесселя нескінченного порядку/ І. С. Тупкало // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 454. Математика. — Чернівці: Рута, 2009. — С. 116–127.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ РАСЧЕТА НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ПЛИТ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С НЕЛИНЕЙНЫМ НЕОДНОРОДНЫМ ОСНОВАНИЕМ ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ

Р. В. Мищенко, П. К. Семенов

СГТУ им. Ю. А. Гагарина, Саратов, Россия

Учет нелинейных свойств материалов конструкции, а так же их зависимость от температуры существенно сказывается на НДС, что необходимо учитывать при взаимодействии с грунтовым основанием. Учет зависимости свойств нелинейно-упругого материала плиты осуществляется в компонентных соотношениях, которые принимаются в форме деформационной теории пластичности. Нелинейные свойства материала плиты и их зависимость от температуры учитывается функциональным соотношением

$$\sigma_i(\varepsilon_i, T) = E(T)\varepsilon_i - m(T)\varepsilon_i^3.$$

Температура в плите меняется произвольно в срединной плоскости и линейно по толщине. Коэффициент линейного расширения материала плиты принимается линейно зависящим от температуры. Зависимости $E(T)$ и $m(T)$ принимаются в виде квадратичных полиномов по результатам численной обработки методом наименьших квадратов экспериментальных данных, а именно, нелинейных диаграмм деформирования материала при различных температурах. Исходные нелинейные соотношения подвергаются известным процедурам линеаризации в соответствии с методом последовательных возмущений параметров. В результате получается линеаризованное разрешающее дифференциальное уравнение в частных производных, связывающее приращение прогиба срединной плоскости плиты с приращениями параметров термосилового нагружения. Основание моделируется слоем конечной толщины, который находится в условиях плоско деформации. Перемещение, вызываемое осадкой основания, представляется в виде произведения функций с разделенными переменными. Поперечное распределение осадок аппроксимируется априорно в соответствии с физико-механическим смыслом решаемой задачи. Применение процедур линеаризации метода последовательных возмущений параметров позволяет получить линеаризованное дифференциальное уравнение в частных производных, связывающее приращения искомой функции и функции распределения влажности в массиве основания. Выражая из последнего уравнения приращение реактивного отпора и подставляя его в линеаризованное уравнение для плиты получаем разрешающее линеаризованное дифференциальное уравнение в частных производных относительно приращения искомой функции и включающего приращения параметров термосилового нагружения плиты и приращения функции распределения влажности в массиве основания. Численная реализация данного уравнения возможна, например, путем использования вариационного метода двойной аппроксимации с последующим привлечением для решения краевых задач модифицированного метода дискретной ортонормализации Годунова — Coute. Упомянутая методика учитывает возможность реализации различных программ возмущения ведущих параметров задачи при моделировании реальных условий эксплуатации системы «плита — основание».

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ Н. Л. ВАСИЛЕВСКОГО [1] И МАРИБЕЛЬ ЛОАЙЗЫ [2] В ИССЛЕДОВАНИИ ОДНОГО ВИДА С*-АЛГЕБР

В. А. Мозель

Отделение гидроакустики МГИ НАН Украины, Одесса, Украина

mozel@ukr.net

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ — единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\gamma = \partial D$ — его граница. В пространстве $L_2(D)$ введем оператор с ядром Бергмана, который обозначим через K. Изучаем С*-алгебру R, порождённую операторами вида

$$A = a(z)I + b(z)K + L,$$

где $L \in \Im$, $\Im$ идеал компактных операторов. Вид коэффициентов даётся ниже.

1. Модельный случай. Введем алгебру кусочно-постоянных в D функций следующим образом. Пусть l — некоторая простая кусочно-гладкая кривая, соединяющая две точки γ и разбивающая D на части D^+ и D^-. Тогда через $C(D^\pm)$ обозначим функции вида

$$a(z) = \begin{cases} a_1 & \text{при} \quad z \in D^+, \\ a_2 & \text{при} \quad z \in D^-. \end{cases}$$

Рассмотрим алгебру $R_0 = R(C(D^\pm), K, \Im)$. Обозначим через P оператор умножения на характеристическую функцию множества D^+. Очевидно, что

$$R_0 = R(\mathbb{C}; K, P; \Im).$$

Тогда алгебра символов $R_0 / \Im = \hat{R}_0 = R(\mathbb{C}; \hat{K}, \hat{P})$. Это С*-алгебра, порождённая двумя ортопроекторами. Из [3] вытекает теорема.

Теорема. Алгебра символов $\hat{R}_0$ изометрически изоморфна алгебре $\mathfrak{A}$ всех непрерывных на $\Delta = [0, 1] = \mathrm{sp}(\hat{K} - \hat{P})^2$ матриц-функций размера 2×2, диагональных в точках 0 и 1. При отождествлении этих алгебр гомоморфизм $\mu : R_0 \to \hat{R}_0$ порождается следующим отображением образующих: если

$$A = a(z)I + b(z)K + L,$$

то

$$\mu : A \mapsto \begin{pmatrix} a_1(x) + a_2(1-x) & (c_1 - c_2)\sqrt{x(1-x)} \\ (a_1 - a_2)\sqrt{x(1-x)} & c_1(1-x) + c_2 x \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $c(z) = a(z) + b(z)$, $x \in [0, 1]$.

2. Аналогично вычисляется символ в общем случае кусочно-непрерывных коэффициентов, когда на границе единичного круга окрестность точки разрыва локально делится линией разрыва на две части.

Теперь для сравнения (для модельного случая) результат Марибель Лоайзы [2, Теорема 4.1, третья формула].

Символ образующих операторов вида
$$A = a(z)K + b(z)(I - K) + L,\ L \in \Im,$$
имеет вид:
$$\mu : A \mapsto \begin{pmatrix} a_1(x) + b_1(1 - x) & c_1\sqrt{x(1 - x)} \\ c_2\sqrt{x(1 - x)} & a_2(1 - x) + b_2 x \end{pmatrix},$$
где $x \in [0, 1]$, $c(z) = a(z) - b(z)$.

Для оператора вида
$$A = a(z)I + b(z)K + L = c(z)K + a(z)(I - K) + L,$$
где $c(z) = a(z) + b(z)$, символ в модельном случае по Марибель Лоайзе [2] имеет вид
$$\mu : A \mapsto \begin{pmatrix} c_1(x) + a_1(1 - x) & b_1\sqrt{x(1 - x)} \\ b_2\sqrt{x(1 - x)} & c_2(1 - x) + a_2 x \end{pmatrix}, \qquad (2)$$
где $c(z) = a(z) + b(z)$, $x \in [0, 1]$.

Аналогично вычисляется символ в общем случае.

Так как C*-алгебра операторов в гильбертовом пространстве не может иметь двух различных изометрически изоморфных представлений, то формулы (1) и (2) эквивалентны.

Список литературы

1. Василевский Н. Л. Банаховы алгебры, порождённые двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами. I // Изв. вузов. Математика. — 1986. — №2. — С. 12 — 21.

2. Loaiza M. Algebras generated by the Bergman projection and operators of multiplication by piecewise continuous functions // Integr. equ. oper. theory, 46 (2003), 215–234.

3. Василевский Н. Л., Спитковский И. М. Об алгебре, порождённой двумя проекторами // Докл. АН УССР. — 1981. — №8. — С. 10–13.

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ЕВОЛЮЦІЙНОГО ЗБУРЕНОГО РІВНЯННЯ

З. І. Наголкіна

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна

z.nagolkina@mail.ru

В нескінченновимірному гільбертовому просторі H розглядається еволюційне рівняння з випадковим збуренням. В результаті чого досліджується стохастичне диференціальне рівняння

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + B(t, x(t))dw(t) \tag{1}$$

Оператор знесення $A(t)$ — необмежений, визначений на $D_A \subset H$ і такий, що твірний оператор, який породжується задачею Коші (1) за формулою $x(t) = U(t, \tau)x(\tau)$ задовольняє умові

$$\left\| U(t, \tau)x(\tau) \right\| \leq e^{\varpi(t-\tau)} \left\| x(\tau) \right\|. \tag{2}$$

Як відомо, оцінка має місце тоді, коли виконуються певні умови на резольвенту оператора $A(t)$. Нехай $B(t, x) \in \gamma_2(H)$ - функція вимірна по сукупності змінних і задовольняє умовам

$$\sigma^2 B(t, x) \leq c_1 \left\| x \right\|^2 + c_2 \tag{3}$$

$$\sigma^2 (B(t, x) - B(t, y)) \leq c_3 \left\| x - y \right\|^2 \tag{4}$$

$\sigma^2(B)$ — норма операторів Гільберта –Шмідта. При виконанні умов (2)–(4) згідно з методом мультиплікативних представлень Далецького — Троттера доведено існування єдиного розв'язку рівняння (1), який має вигляд

$$x(t) = U(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} U(t, s)B(s, x(s))dw(s) \tag{5}$$

Для існування асимптотично стійкого розв'язку (2) треба посилити вимоги на коефіцієнти рівняння. Нехай $A(t)$ — замкнений оператор І спектр оператора $\sigma(A)$ лежить всередині лівої напівплощини $(\operatorname{Re}\lambda \leq -\nu, \lambda \in \sigma(A))$. Тоді має місце оцінка

$$\left\| U(t, \tau)x(\tau) \right\| \leq N e^{-\nu(t-\tau)} \left\| x(\tau) \right\| \tag{6}$$

Нехай крім того виконуються умови ,при яких коефіцієнт дифузії $B(t, x)$ має властивість

$$\sigma^2 B(t, x) \leq y(t) \left\| x \right\|^2, \tag{7}$$

де $\dfrac{1}{t - t_0} \displaystyle\int_{t_0}^{t} y(s)ds \leq q$ і$(q \leq \dfrac{\nu}{N})$.

Користуючись лемою Гроноулла можна показати, що розв'язок рівняння (5) буде асимптотично стійким в середньому квадратичному, а саме

$$E\left\|x(t)\right\|^2 \leq N\left\|x_0\right\|^2 e^{-\nu(t-t_0)+N\int\limits_{t_0}^{t} y(s)ds},$$

або, враховуючи (7),

$$E\left\|x(t)\right\|^2 \leq N\left\|x_0\right\|^2 e^{-(t-t_0)(\nu-Nq)}.$$

КРУЧЕННЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ІЗОТРОПНОГО ТІЛА З НЕКАНОНІЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ

В. М. Неміш, К. М. Березька
Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль, Україна
nemish_vm@ukr.net

Розглядається однорідний пружний трансверсально ізотропний циліндр радіуса R з порожниною, утвореною обертанням правильного п'ятикутника з заокругленими кутами навколо осі Oz. Параметричні рівняння контура в довільній меридіальній площині zOR мають вигляд

$$z = r_0^{-1}\,\mathrm{Re}\,\omega(\xi)\Big|_{\rho=1} = \cos\gamma + \varepsilon\cos 4\gamma,$$

$$R = r_0^{-1}\,\mathrm{Im}\,\omega(\xi)\Big|_{\rho=1} = \sin\gamma - \varepsilon\sin 4\gamma \quad (|\,\varepsilon\,| = 0{,}1).$$

Тут R — відстань від осі Oz до відповідної точки контура.

Досліджується напружений стан циліндра у випадку кручення моментом M відносно осі Oz. Припускається, що поверхня S порожнини вільна від напружень, а бічна і торцеві поверхні знаходяться на достатній відстані від поверхні порожнини і не істотно впливають на напружено-деформівний стан в її околі. Граничні умови в j-му наближенні з точністю до $o(\varepsilon^3)$ мають вигляд

$$\sum_{j=0}^{2}\varepsilon^j\left\{\sum_{m=0}^{j}\left[\Lambda_5^{(j-m)}\sigma_{r\alpha}^{(m)} + \Lambda_6^{(j-m)}\sigma_{\theta\alpha}^{(m)}\right] + \hat{\sigma}_{\rho\gamma}^{(j)}\right\}_{\rho=1} = 0\,.$$

Тут $\Lambda_5^{(j)}$, $\Lambda_6^{(j)}$ — диференціальні оператори, $\sigma_{r\alpha}^{(m)}(\rho,\gamma)$ і $\sigma_{\theta\alpha}^{(m)}(\rho,\gamma)$ записуються на основі загальних розв'язків однорідних рівнянь рівноваги для трансверсально ізотропного тіла, а $\hat{\sigma}_{\rho\gamma}^{(j)}$ відповідає основному напруженому стану.

Напружений стан середовища досліджується наближеним методом «збурення форми границі», розробленого і апробованого в роботах О. М. Гузя і Ю. М. Неміша.

Дослідження показали, що із збільшенням відношення G_1/G_2 (G_1, G_2 — модулі зсуву), максимальний коефіцієнт концентрації напружень неканонічної порожнини ($\rho = 1; \varepsilon = 0{,}1; \gamma = 2\pi/5$) значно підвищується при порівнянні з відповідним значенням на сферичній порожнині ($\rho = 1; \varepsilon = 0; \gamma = \pi/2$). Так, в межах $7/16 \le G_1/G_2 \le 9/2$ максимальне значення коефіцієнта концентрації напружень $K_{\gamma\phi}^{(2)}$ на поверхні розглянутої порожнини перевищує відповідну величину на поверхні сфери близько 40%. При цьому істотна залежність проявляється тільки на поверхні $\rho = 1$ і при незначному віддаленні від неї. При $\rho \ge 1{,}5$ вплив відношення G_1/G_2 на напружений стан циліндра стає незначним.

ПРИМЕР СТЕПЕННО ИНТЕГРАЛЬНО РАЗДЕЛЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ, ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА КОТОРОЙ НЕУСТОЙЧИВЫ ПРИ СТЕПЕННО УБЫВАЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ЕЕ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Н. С. Нипарко
Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь
nad_den@mail.ru

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной и ограниченной на временно́й полуоси $t \geq 0$ матрицей коэффициентов $A(\cdot)$. Через $\lambda_1(A) \leq \ldots \leq \lambda_n(A)$ обозначим показатели Ляпунова системы (1). Наряду с системой (1) рассмотрим возмущённую систему

$$\dot{y} = (A(t) + Q(t))y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

где кусочно-непрерывная $n \times n$-матрица-возмущение $Q(\cdot)$ принадлежит тому или иному классу возмущений, которые указываются ниже. В силу принятых обозначений $\lambda_1(A+Q) \leq \ldots \leq \lambda_n(A+Q)$ — показатели Ляпунова системы (2).

Рассмотрим следующие три класса возмущений — классы Z_0^n, Exp_0^n и Deg_0^n, состоящие из кусочно-непрерывных $n \times n$-матриц $Q(\cdot)$, удовлетворяющих соответственно условиям: $\| Q(t) \| \to 0$ при $t \to +\infty$ (класс Z_0^n), $\| Q(t) \| \leq c_Q \mathrm{e}^{-\sigma_Q t}$ при всех $t \geq 0$ (класс Exp_0^n) и $\| Q(t) \| \leq c_Q t^{-r_Q}$ при всех $t \geq 0$ (класс Deg_0^n), где c_Q, σ_Q и r_Q — положительные постоянные (свои для каждой матрицы $Q(\cdot)$). Класс Z_0^n называется классом убывающих к нулю возмущений, а классы Exp_0^n и Deg_0^n — классами соответственно экспоненциально и степенно убывающих к нулю возмущений. Очевидны собственные включения $\mathrm{Exp}_0^n \subset \mathrm{Deg}_0^n \subset \mathrm{Z}_0^n$.

Пусть $\mathrm{M} \subset \mathrm{Z}_0^n$ — какое-либо подмножество класса Z_0^n. Показатели Ляпунова системы (1) называются устойчивыми при возмущениях из класса M, если $\lambda_i(A+Q) = \lambda_i(A)$ для всех $i = 1, \ldots, n$ и любой матрицы $Q(\cdot) \in \mathrm{M}$. То, что показатели Ляпунова систем (1) могут быть неустойчивыми при экспоненциально убывающих возмущениях их матриц коэффициентов, установлено еще О. Перроном [1]. К настоящему времени необходимые и достаточные условия устойчивости показателей Ляпунова системы (1) получены для классов Z_0^n [2, 3] и Exp_0^n [4] возмущений. В работе [5] получено необходимое условие устойчивости показателей Ляпунова при возмущениях из класса Deg_0^n. В его формулировке, которую мы не приводим, существенную роль играет понятие степенной интегральной разделенности [5], состоящее в следующем: системы (1) с матрицами $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ называются степенно интегрально разделёнными, если для их матриц Коши $X_A(\cdot,\cdot)$ и $X_B(\cdot,\cdot)$ выполнено условие: для любого положительного ε найдётся такое $T_\varepsilon \geq 0$, что

$$\| X_A^{-1}(t,\tau) \|^{-1} \leq t^{-\varepsilon} \| X_B(t,\tau) \|$$

для всех $t \geq \tau \geq T_\varepsilon$. В этом случае будем говорить, что система A степенно интегрально больше системы B.

Так как необходимое условие [5] устойчивости показателей Ляпунова при возмущениях из класса Deg_0^n получено по той же схеме, что и необходимые условия устойчивости показателей Ляпунова при возмущениях из классов Z_0^n и Exp_0^n, а для последних эти условия оказываются и достаточными, то поскольку класс Deg_0^n является промежуточным между этими классами: $\mathrm{Exp}_0^n \subset \mathrm{Deg}_0^n \subset \mathrm{Z}_0^n$,— представляется вполне правдоподобным, что необходимое условие устойчивости показателей Ляпунова при возмущениях из класса Deg_0^n, полученное в [5], должно быть и достаточным. Оказывается, это не так.

Теорема. *Для любого натурального* $n \geq 2$, *каждого* $q \in \{2,\ldots,n\}$, *произвольного набора* $\Lambda_1 < \ldots < \Lambda_q$ *вещественных чисел и любого набора* $n_1, n_2, \ldots, n_q$ *натуральных чисел, удовлетворяющего равенству* $n_1 + n_2 + \ldots + n_q = n$, *существуют линейные дифференциальные системы с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами*

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i, \quad x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad t \geq 0,$$

где $i = 1,\ldots,q$, *такие, что система* A_i *имеет один-единственный показатель Ляпунова* Λ_i, *устойчивый при возмущениях из класса* $\mathrm{D}eg_0^{n_i}$ *(*$i = 1,\ldots,q$ *), и для каждого* $k = 1,\ldots,q-1$ *система* A_{k+1} *степенно интегрально больше системы* A_k, *а показатели Ляпунова блочно-*

диагональной системы

$$\dot{x} = \mathrm{diag}[A_1(t), \ldots, A_q(t)]x, \quad x \in R^n, \quad t \geq 0,$$

неустойчивы при возмущениях из класса Deg_0^n .

Результаты доклада опубликованы в статье [6].

Список литературы

1. Perron O. // Math. Zeitschr. 1930. Bd 31, Hf 5. S. 748–766.

2. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. — 1969. — Т. 5, № 10. — С. 1775–1784.

3. Былов Б. Ф., Изобов Н. А. // Дифференц. уравнения. — 1969. — Т. 5, № 10. — С. 1794–1803.

4. Барабанов Е. А., Денисенко (Нипарко) Н. С. // Дифференц. уравнения. — 2007. — Т. 43, № 2. — С. 165–175.

5. Нипарко Н. С. // Национальная академия наук Беларуси. Труды Института математики. — 2008. — Т. 16, № 2. — С. 105–117.

6. Барабанов Е. А., Нипарко Н. С. // Доклады НАН Беларуси. — 2013. — Т. 57, № 4. — С. 25–31.

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ — НЕЙМАНА У СМУЗІ ДЛЯ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

З. М. Нитребич, Б. Й. Пташник, С. М. Репетило
Національний університет «Львівська політехніка»,
ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
znytrebych@gmail.com, ptashnyk@lms.lviv.ua, repetylosofiya@gmail.com

В області $S = \left\{ \left(t, x \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < h,\ \ x \in \mathbb{R} \right\}$ досліджено таку задачу:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u\left(t, x \right) := \sum_{s=0}^{n} a_s \frac{\partial^{2n} u}{\partial t^{2n-2s} \partial x^{2s}} = f\left(t, x \right), \qquad (1)$$

$$\left. \frac{\partial^{2r-2} u}{\partial t^{2r-2}} \right|_{t=0} = \varphi_r\left(x \right), \qquad \left. \frac{\partial^{2r-1} u}{\partial t^{2r-1}} \right|_{t=h} = \varphi_{n+r}\left(x \right), \qquad r \in \left\{ 1, \ldots, n \right\}, \ (2)$$

де $a_s \in \mathbb{R}$, $s \in \left\{ 0, \ldots, n \right\}$, $a_0 = 1$, $n \in \mathbb{N}$; рівняння (1) є строго гіперболічним за Петровським, тобто всі корені алгебричного рівняння $\sum_{s=0}^{n} a_s \mu^{2(n-s)} = 0$ є дійсними та різними, а, отже, і відмінними від нуля.

Знайдено класи однозначної розв'язності задачі (1), (2). Ці класи містять цілі функції порядку не вище першого. У класах однозначної розв'язності задачі (1), (2) за допомогою диференціально-символьного методу [1] побудовано її розв'язок у такому вигляді:

$$u\left(t, x \right) = \sum_{j=1}^{2n} \varphi_j \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left\{ \tilde{T}_j\left(t, \nu \right) \exp\left[\nu x \right] \right\} \Big|_{\nu=0} + f\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left\{ F\left(t, \lambda, \nu \right) \exp\left[\nu x \right] \right\} \Big|_{\substack{\lambda=0,\\ \nu=0}},$$

де $\tilde{T}_j\left(t, \nu \right)$, $j \in \left\{ 1, \ldots, 2n \right\}$,— розв'язки рівняння $L\left(\frac{d}{dt}, \nu \right) T\left(t, \nu \right) = 0$, які задовольняють умови $\left(d^{2r-2} \tilde{T}_j / dt^{2r-2} \right)\Big|_{t=0} = \delta_{r,j}$, $\left(d^{2r-1} \tilde{T}_j / dt^{2r-1} \right)\Big|_{t=h} = \delta_{n+r,j}$, $r \in \left\{ 1, \ldots, n \right\}$, $j \in \left\{ 1, \ldots, 2n \right\}$, $\delta_{r,j}$ — символ Кронекера;

$$F\left(t, \lambda, \nu \right) = \frac{\exp\left[\lambda t \right] - \sum_{j=1}^{n} \lambda^{2j-2} \tilde{T}_j\left(t, \nu \right) - \exp\left[\lambda h \right] \sum_{j=1}^{n} \lambda^{2j-1} \tilde{T}_{n+j}\left(t, \nu \right)}{L\left(\lambda, \nu \right)}.$$

Однозначну розв'язність задачі (1), (2) за умови періодичності або майже періодичності шуканого розв'язку за просторовою координатою досліджено у праці [2].

Список літератури

1. Каленюк П. І., Нитребич З. М. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. — Львів: Вид-во НУ «Львівська політехніка», 2002. — 292 с.

2. Пташник Б. Й., Репетило С. М. Задача Діріхле — Неймана у смузі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2013. — 56, № 3. — С. 15–26.

РОЗПОДІЛ ШВИДКОСТЕЙ В ТУРБУЛЕНТНОМУ ПОТОЦІ НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ НА ПОЧАТКОВІЙ ДІЛЯНЦІ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ТРУБИ

М. В. Ногін

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

nvnogin@gmail.com

Дослідження проводяться з допомогою методів примежевого шару [1], оскільки довжина прямолінійної ділянки на вході досягає 100, і більше, діаметрів труби, то, практично, турбулентний потік не є усталеним, адже на нього впливають не тільки вхідний, але й вихідний отвори, причому опір розподілений рівномірно [2].

Для дослідження розподілу швидкості $w(r)$ в залежності від довжини труби l використовується відповідна система рівнянь Нав'є-Стокса. Зокрема, $\dfrac{\partial w}{\partial t} = 0$ в силу стаціонарності потоку, $\dfrac{\partial w}{\partial \varphi} = 0$ в силу осесиметричності, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial l^2} = 0$ в силу неперервності потоку, зовнішня сила $K = \mathrm{const}$. Нарешті, з врахуванням наявності конвективного імпульсного обміну турбулентного потоку, а також значення перепаду тиску виду

$$\frac{dp}{dl} = -\frac{\lambda}{d}\frac{p}{2} w_{ср.}^2,$$

для визначення головної компоненти швидкості отримана крайова задача для «неоднорідного рівняння теплопровідності» вигляду:

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(w^2\right) = K\left[\frac{\partial^2 w^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial (w^2)}{\partial r}\right] + \frac{\lambda}{d} w^2 \qquad (1)$$

Його розв'язок за допомогою методу Фур'є неможливий, тому що тоді не буде виконуватись характерна умова: вимога неперервності потоку.

Доповідь присвячена зведенню крайових задач для рівняння (1) до звичайного диференціального рівняння виду:

$$ry'' + y' - A^2 r y = 0 \qquad (2)$$

де $y = -w^2 + w_{\text{поч.}}^2$, яке допускає розв'язок у вигляді функцій Бесселя з суто уявним аргументом.

Список літератури

1. Лойцянский Л. Г., Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1970. – 905 с.

2. Adolphi G, Die Geschwindigreits verteiling inder turbulenten Rohshromung // J. Chem Technik. 1955. — №6. — P. 324–330.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ Q-УЗАГАЛЬНЕННЯ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

О. В. Овчаренко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

lena_rum@ukr.net

Останнім часом у теорії спеціальних функцій відбувається процес розширення та узагальнення багатьох вже відомих класів функцій, які дозволяють розв'язувати актуальні задачі прикладної математики, фізики, квантової теорії поля, біомедицини тощо. Зокрема, узагальнюються гамма-, бета-функції, функції Лежандра, гіпергеометричні функції та інші.

Розглянемо диференціальні властивості q- узагальнення (τ,β) – узагальненої гіпергеометричної функції [1]:

$$
{}_3F_2^{\tau,\beta}\left(a,b_1,b_2;c_1,c_2;z\right)=\frac{\Gamma_q\left(c_1\right)\Gamma_q\left(c_2\right)}{\Gamma_q\left(b_1\right)\Gamma_q\left(b_2\right)}\times
$$

$$
\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(a;q\right)_n\Gamma_q\left(b_1+\tau n\right)\Gamma_q\left(b_2+\tau n\right)}{\Gamma_q\left(c_1+\tau n\right)\Gamma_q\left(c_2+\beta n\right)}\frac{z^n}{\left(q;q\right)_n},
$$

де $a,b_1,b_2,c_1,c_2\in\mathbb{C},\operatorname{Re}a>0,\operatorname{Re}c_1>\operatorname{Re}b_1>0$, $\operatorname{Re}c_2>\operatorname{Re}b_2>0$, $c_1,c_2\neq 0,-1,-2,\ldots,\tau,\beta\in\mathbb{R}_+,\tau<\beta,\left|z\right|<1,\left|q\right|<1$.

Лема. Для $\operatorname{Re}c_1>\operatorname{Re}b_1>0,\operatorname{Re}c_2>\operatorname{Re}b_2>0,\ \tau,\beta\in\mathbb{R}_+,\tau<\beta$, $\left|z\right|<1,\left|q\right|<1$ *мають місце наступні диференціальні співвідношення:*

$$
D_{q,z}\left[{}_3^qF_2^{\tau,\beta}(a,b_1,b_2;c_1,c_2;z)\right]=\frac{(a;q)\Gamma_q(c_1)\Gamma_q(c_2)\Gamma_q(b_1+\tau)\Gamma_q(b_2+\tau)}{\Gamma_q(b_1)\Gamma_q(b_2)\Gamma_q(c_1+\tau)\Gamma_q(c_2+\beta)}\times
$$

$$
\times{}_3^qF_2^{\tau,\beta}(aq,b_1+\tau,b_2+\tau;c_1+\tau,c_2+\beta;z), \tag{2}
$$

$$
D_{q,z}\left[z^a\,{}_3^qF_2^{\tau,\beta}(a,b_1,b_2;c_1,c_2;z)\right]=(a;q)z^{a-1}\,{}_3^qF_2^{\tau,\beta}(aq,b_1,b_2;c_1,c_2;z), \tag{3}
$$

$$
D_{q,z}^n\left[z^{a+n-1}\,{}_3^qF_2^{\tau,\beta}(a,b_1,b_2;c_1,c_2;z)\right]=(a;q)z^{a-1}\,{}_3^qF_2^{\tau,\beta}(aq^n,b_1,b_2;c_1,c_2;z). \tag{4}
$$

Список літератури

1. Virchenko N. O. On some new integral transforms with the generalized hypergeometric function / N.O. Virchenko, O.V. Ovcharenko // Integral Transforms and Special Functions. — 2011. — 22, № 9. — P. 647–653.

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ПОЛУЯВНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМ ПУЧКОМ МАТРИЦ

Д. С. Омельчук
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова, Одесса, Украина
omelchuk.daria@gmail.com

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$A(z)x'(z)+B(z)x(z)=f(z), \tag{1}$$

в предположении, что матрицы $A(z), B(z): D \to \mathbb{C}^{n\times n}$ аналитические в области $D \subset \mathbb{C}$, где $A(z)$ — сингулярная матрица размера $n \times n$, $B(z)$ — матрица размера $n \times n$; $f(z): D \to \mathbb{C}^n$ — заданная вектор-функция аналитическая в $D \subset \mathbb{C}$, пучок матриц $\lambda A(z)+B(z)$ — переменный.

Исследуется вопрос о приведении системы (1) к так называемой центральной канонической форме, т.е. системе вида:

$$y_1' + C(z)y_1 = f_1,$$
$$N(z)y_2' + y_2 = f_2,$$

где $N(z)$ — нильпотентная матрица нижнего (верхнего) треугольного вида, $C(z)$ — некоторая матрица комплексного переменного.

Исследования приведения систем уравнений вида (1) с действительными переменными к ЦКФ проводились в работах американских ([3]) и украинских ([1]) авторов.

В данной работе приведены исследования, связанные с вопросом о приведении к ЦКФ полуявных систем дифференциальных уравнений в комплексной области в случае, когда пучок матриц $\lambda A(z)+B(z)$ является переменным. Ряд доказанных лемм и теорем демонстрирует возможность применения данной методики. Данный подход демонстрирует приведение матрицы $A(z)$ к специальной блочной структуре, причём, не учитывается условие постоянства ранга матрицы $A(z)$ в окрестности некоторой точки из области определения.

Список литературы

1. Самойленко А. М., Яковец В. П. О приводимости линейной системы в ЦКФ // Докл. НАН Украины. — 1993. — № 4. — С. 10–15.

2. Самкова Г.Е., Шарай Н. В. Об исследовании некоторой полуявной системы дифференциальных уравнений в случае переменного пучка матриц // Нелінійні коливання. — 2002. — 5, № 2. — С. 224–236.

3. Campbell S. L., Petzold L. R. Canonical forms and solvable singular system of differential equations // SIAM J. Alg. & Dis Methods. — 1983. — № 4. — P. 517–521.

ФРАКТАЛЬНИЙ ШАР ЗАРЯДІВ У ГРАНИЧНІЙ ЗАДАЧІ ЯК УЗАГАЛЬНЕННЯ ПРОСТОГО ТА ПОДВІЙНОГО ШАРІВ

В. М. Онуфрієнко, А. В. Куземко

Запорізький національний технічний університет, Запоріжжя, Україна

onufr@zntu.edu.ua

Можливість інтегродиференціального визначення α-міри Хаусдорфа фрактального носія заряду через застосування відображення у вигляді ортогонального проектування фракталу на діаметр розглядуваної множини розглядається в [1].

Порівнянням виразів для диферінтеграла фрактально структурованого контуру $d^{1+\alpha}(\ell - \ell')$ з формулою для похідної дробового порядку дельта-функції Дірака ${}_{a+}D_\ell^\alpha \delta(x - x')$, $\alpha < 0$, визначаємо узагальнену формулу густини $q^{(\alpha)}(\ell)$ заряду Q, що відповідає α-полю, розміщеному в точці $\ell = 0$ і орієнтованому вздовж заданого напрямку $\vec{l} = (l_1, l_2, ..., l_n)$ для випадків:

1) класичні точкові заряди у фрактально структурованій точці;
2) фрактально структурований заряд у класичній точці.

Узагальнюємо формулу для густини $q^{(\alpha)}(\ell)$ нормованого заряду, що відповідає α-полю у вигляді

$$q^{(\alpha)}(\ell) = (-1)^\alpha \left({}_a D_\ell{}^\alpha \delta, Q(\ell) \right).$$

Густина одиничного фрактального заряду дорівнює $(-1)^\alpha D_\ell{}^\alpha \delta(\ell)$, а для розподілу з неперервною густиною $\nu(x)$ на поверхні S: $(-1)^\alpha (D_\ell^\alpha \nu \delta_S)$, що для збіжного з віссю OX напрямку ℓ перетворюється в ${}_0 D_x{}^\alpha \nu \delta(x)$, $\alpha < 0$, (простий α-шар, що для $\alpha = 0$ збігається з класичним простим шаром).

Означену густину називаємо густиною фрактального розподілу (фрактальним шаром) зарядів, що є узагальненням означення традиційно застосовних розподілів у вигляді так званого простого та подвійного шарів. Для значення скейлінгового показника $\alpha = 1$, утворюється дипольний розподіл зарядів на простому шарі.

Узагальнена функція $-\dfrac{\partial}{\partial n}(D_x^\alpha \nu \delta_S)$ описує просторову густину зарядів подвійного α-шару, що перетворюється у класичний подвійний шар, коли $\alpha = 0$.

Показано ефективність такої моделі для граничних задач про розподіли зарядів на фрактальних контурах, де відповідне інтегро-диференіальне рівняння Абеля є розв‘язуваним в $L_1(a, b)$, при чому має єдиний розв‘язок і для α-полів.

Список літератури

1. Онуфрієнко В.М. Диферінтегральні альфа-форми у хаусдорфовій метриці на фрактальних множинах // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. — 2002. — № 2(8). — С. 31–39.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ РАСЧЕТА ТЕРМОСИЛОВОГОНАГРУЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ БАЛКИ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С МНОГОСЛОЙНЫМ НЕОДНОРОДНЫМ ОСНОВАНИЕМ

А. С. Ошменский, П. К. Семенов

СГТУ им. Ю. А. Гагарина, Саратов, Россия

Рассматриваются вопросы построения разрешающего уравнения, описывающего процесс деформирования нелинейно-упругой балки. Взаимодействующей с многослойным неоднородным основанием в условиях равномерного нагрева с учетом зависимости свойств материала балки от температуры. Основание моделируется конечным числом сжимаемых слоев, лежащих на деформируемом скальном массиве. Функция осадки основания, согласно вариационному методу Власова, представляется разложением в виде суммы произведений функций с разделенными переменными. Для среды основания полагаем зависимость свойств от параметра влажности. Распределение влажности в среде может быть определено путем решения уравнения диффузии.

На основе использования принципа Лагранжа можно получить систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно искомых обобщенных перемещений, входящих в разложение функции осадки основания. Применяя к данной системе известные процедуры линеаризации метода последовательных возмущений параметров получаем линеаризованную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно приращений искомых функций. Материал балки считаем несжимаемым и нелинейно-упругим. Нелинейные свойства материала балки и их зависимость от температуры учитываем аналитическим заданием диаграммы деформирования в виде кубической параболы, коэффициенты которой зависят от температуры. Данные зависимости могут быть получены путем численной обработки экспериментальных данных — нелинейных диаграмм деформирования материала при различных температурах. Результаты исследований указывают на возможность использования таких зависимостей в виде полиномов второго порядка. Взаимодействие балки с описанным выше основанием учитывается равенством прогиба балки прогибу верхнего слоя основания и подстановкой реактивного отпора основания в дифференциальное уравнение изгиба балки в приращениях.

Таким образом, окончательно получаем дифференциальное уравнение изгиба нелинейно-упругой балки в приращениях с учетом зависимости нелинейной диаграммы деформирования от нагрева. Наличие приращений трех ведущих параметров: нагрузки, температуры, влажности позволяют путем численного эксперимента реализовать различные программы нагружения, нагревания и увлажнения, моделирующих реальные условия эксплуатации.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Д. Г. Павлов, О. А. Ягубова
СГТУ им. Ю. А. Гагарина, Саратов, Россия
yagubova.olga@mail.ru

Рассмотрим тонкую круглую пластинку радиуса R, толщины h, отнесем ее к цилиндрической системе координат, ось or которой поместим в срединной плоскости пластинки, а ось oz направим по ее оси симметрии. Решение задачи будем проводить в линейной постановке в рамках гипотезы Кирхгофа. Пусть функции $u_0(\eta)$, $w_0(\eta)$ и $v_0^u(\eta)$, $v_0^w(\eta)$ — описывают соответственно перемещение, прогиб точек срединной поверхности и их производные по времени в начальный момент времени. Исследование напряженно-деформированного состояния пластинки, при одинаковых условиях закрепления каждого контура, может быть сведено к решению следующих двух независимых динамических задач теории упругости в безразмерных переменных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{u}{\eta^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0 \tag{1}$$

$$l = 1 \quad \begin{cases} u = 0 & \text{при} \quad \eta = 1 \\ u \to 0 & \text{при} \quad \eta \to 0 \end{cases} \tag{2}$$

или

$$l = 2 \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \eta} + \nu \dfrac{1}{\eta} u = 0 & \text{при} \quad \eta = 1 \\ u \to 0 & \text{при} \quad \eta \to 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$u = u_0(\eta); \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} = v_0^u(\eta) \quad \text{при} \quad \tau = 0 \tag{4}$$

$$\nabla^2\nabla^2 w - \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0 \tag{5}$$

$$k = 1 \quad \begin{cases} w = 0, & \dfrac{\partial w}{\partial \eta} = 0 & \text{при} \quad \eta = 1 \\ \dfrac{\partial w}{\partial \eta} \to 0, & \eta \dfrac{\partial}{\partial \eta}\nabla^2 w \to 0 & \text{при} \quad \eta \to 0 \end{cases} \tag{6}$$

или

$$k = 2 \quad \begin{cases} w = 0, & \dfrac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \dfrac{\nu}{\eta}\dfrac{\partial w}{\partial \eta} = 0 & \text{при} \quad \eta = 1 \\ \dfrac{\partial w}{\partial \eta} \to 0, & \eta \dfrac{\partial}{\partial \eta}\nabla^2 w \to 0 & \text{при} \quad \eta \to 0 \end{cases} \tag{7}$$

$$w = w_0(\eta); \quad \frac{\partial w}{\partial \tau} = v_0^w(\eta) \quad \text{при} \quad \tau = 0 \tag{8}$$

Здесь $\eta = r / R$; $\quad \tau = t / T_0; u = u_r / R; w = w_z / R;$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial \eta},\ c^2 = \frac{E\,T_0^2}{\rho(1-\nu^2)R^2},\ \ b^2 = \frac{h^2\,E\,T_0^2}{12\rho(1-\nu^2)R^4},$$

u_r и w_z — соответственно радиальное перемещение и прогиб точек срединной поверхности, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность, T_0 — некоторый характерный промежуток времени, t — время.

Сформулированные выше граничные условия позволяют рассмотреть следующие четыре способа закрепления контура пластинки: свободно защемленный контур; жестко защемленный контур; шарнирно-опертый; свободно смещающийся контур и шарнирно-опертый, жестко закрепленный контур.

Решением задач (1)–(8), при условии, что $u_0(\eta)$, $v_0^u(\eta)$ и $w_0(\eta)$, $v_0^w(\eta)$ допускают разложение в ряды:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i J_1(\lambda_i \eta); \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} d_j [I_0(\beta_j \eta) - \frac{I_0(\beta_j)}{J_0(\beta_j)} J_0(\beta_j \eta)]; \tag{10}$$

по корням уравнений:

$$l = 1 \qquad J_0(\lambda) = 0 \tag{11}$$

$$l = 2 \qquad \lambda J_0(\lambda) - J_1(\lambda)(1-\nu) = 0 \tag{12}$$

$$k = 1 \qquad I_1(\beta)J_0(\beta) + J_1(\beta)I_0(\beta) = 0 \tag{13}$$

$$k = 2 \qquad 2\beta^2 I_0(\beta)J_0(\beta) - (\beta - \nu)[J_0(\beta)I_1(\beta) + I_0(\beta)J_1(\beta)] = 0 \tag{14}$$

будут функции

$$u_l(\eta,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} [A_i^1 \cos \lambda_i c\tau + A_i^2 \sin \lambda_i c\tau] J_1(\lambda_i \eta); \qquad l = 1,2 \tag{15}$$

$$w_k(\eta,\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} [B_j^1 \cos \beta_j^2 c\tau + B_j^2 \sin \beta_j^2 c\tau][I_0(\beta_j \eta) - \frac{I_0(\beta_j)}{J_0(\beta_j)} J_0(\beta_j \eta)]; \ \ k = 1,2 \tag{16}$$

где коэффициенты A_i^1 и A_i^2 определяются из начальных условий (4), а B_i^1 и B_i^2 из начальных условий (8) и имеют вид:

$$A_i^1 = \frac{2}{J_2^2(\lambda_i)} \int_0^1 \eta\, u_0(\eta) J_1(\lambda_i \eta) d\eta; \ A_i^2 = \frac{2}{J_2^2(\lambda_i)} \int_0^1 \eta\, v_0^u(\eta) J_1(\lambda_i \eta) d\eta;$$

$$B_i^1 = \frac{2}{I_0^2(\beta_j)} \int_0^1 \eta\, w_0(\eta) [I_0(\beta_j \eta) - \frac{I_0(\beta_j)}{J_0(\beta_j)} J_0(\beta_j \eta)] d\eta;$$

$$B_i^2 = \frac{2}{I_0^2(\beta_j)} \int_0^1 \eta\, v_0^w(\eta)[I_0(\beta_j \eta) - \frac{I_0(\beta_j)}{J_0(\beta_j)} J_0(\beta_j \eta)] d\eta.$$

$J_0(x),\ J_1(x),\ J_2(x),\ I_0(x)$ — функции Бесселя.

Из соотношений (15), (16) следует, что точки срединной плоскости пластинки будут совершать свободные продольные полигармонические колебания с частотой

$$f_i^u = \frac{\lambda_i c}{2\pi} \tag{17}$$

и свободные поперечные полигармонические колебания с частотой

$$f_j^w = \frac{\beta_j c}{2\pi} \tag{18}$$

В выражения (17) и (18) входят параметры λ_i и β_j, определяемые в зависимости от способа закрепления контура пластинки из частотных уравнений (11)–(14).

В таблицах приведены корни этих уравнений.

Таблица1

i l	1	2	3	4	5
1	3.832	7.016	10.179	13.324	16.471
2	2.049	5.389	8.572	11.732	14.884

Таблица2

j k	1	2	3	4	5
1	3.196	6.306	9.439	12.577	15.716
2	2.164	5.425	8.594	11.748	14.897

Так как частоты колебаний согласно (17) и (18) пропорциональны параметрам λ_i и β_j, то основываясь на данных таблиц можно сделать вывод, что у пластинки со свободносмещающимся контуром, основная частота продольных колебаний в $1,87$ раза меньше чем у пластинки с жестко закрепленным контуром. Основная частота поперечных колебаний пластинок с шарнирно-опертым контуром в $2,2$ раза меньше той же частоты при жестком защемлении контура.

Напряжения, возникающие в пластинке, определяются путем подстановки выражений для перемещений (15) и прогиба (16) в известные формулы [1].

Список литературы

1. Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Черных В. А. Упругость и прочность цилиндрических тел. — М.: Высшая школа, 1975. — 525 с.

ПРО ОДИН ВИПАДОК ДИНАМІЧНОЇ БІФУРКАЦІЇ АВТОКОЛИВАНЬ У ТРИВИМІРНІЙ АВТОНОМНІЙ СИСТЕМІ

І. О. Парасюк, Б. В. Репета

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна

pio@univ.kiev.ua, bogdan.repeta@gmail.com

Розглядається тривимірна автономна система з двома «швидкими» та однією «повільною» змінною. Остання відіграє роль динамічного параметра на «повільній» фазовій кривій. Нормальна форма 3-го порядку такої системи після запровадження полярних координат набирає вигляду [1]

$$\begin{gathered}\dot{r} = 2[\ \alpha(v)r - A(v)r^2 + P(r,\varphi,v)r^2\ ],\\ \dot{\varphi} = \omega(v) + \Theta(v)r + \Psi(r,\varphi,v)r, \quad \dot{v} = C(v)r + Q(r,\varphi,v)r.\end{gathered} \tag{1}$$

Тут праві частини — гладкі, 2π-періодичні за змінною φ на множині $(0,\varrho_0]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, де $\varrho_0 > 0$. Припускається, що існують $v^* \le \infty$ та $v_* \in (v_0, v^*)$ такі, що для всіх $v \in [v_0, v^*)$ виконуються умови:

$$\operatorname{sgn}\alpha(v) = \operatorname{sgn}(v - v_*),\ C(v) > 0,$$

$$\inf_{v_0<v<v^*} A(v) > 0, \qquad \int_{v_0}^{v^*} \frac{A(s)}{C(s)}\,ds = \infty,$$

$$\sup_{v\in[v_0,v^*)} |\ \alpha(v)\ | = \varepsilon \ll 1,$$

існує границя

$$\lim_{v\nearrow v^*} \frac{\alpha(v)}{A(v)} = r^*$$

і, якщо $v^* < \infty$, то $C'(v^*) < 0$, а якщо $v^* = \infty$, то $\inf_{v\in[v_0,\infty)} C(v) > 0$.

Коли параметр v з плином часу минає критичне значення v_*, фазова крива, задана рівнянням $r = 0$, втрачає властивість стійкості і для всіх достатньо малих $\varepsilon > 0$ спостерігається явище динамічної біфуркації. А саме, у випадку $v^* < \infty$ кожна фазова крива системи (1), стартуючи з точки (r_0, φ_0, v_0) з як завгодно малим r_0 певний час перебуває поблизу «повільної» фазової кривої, а потім притягується граничним циклом, розташованим поблизу циклу $r = r^*$, $v = v^*$.

У випадку $v^* = \infty$, якщо в системі (1) виключити час і вважати змінну v незалежною, то для такої неавтономної двовимірної системи має місце аналог теореми про асимптотичне зображення розв'язків [1]. Зокрема, яким би не було $\delta > 0$ можна вказати таке $\varepsilon_0 > 0$, що для початкового значення $r_0 \in (0,\delta)$ при всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ r-компонента $r(v; v_0, r_0)$ розв'язку зазначеної неавтономної двовимірної системи рівномірно щодо $v > v_0$ допускає зображення

$$r(v; v_0, r_0) = r^0(v; v_0, r_0) + O(\varepsilon),$$

де $r^0(v; v_0, r_0)$ — розв'язок задачі Коші для модельного рівняння

$$dr \,/\, dv = 2[\,\alpha(v) - A(v)r\,] \,/\, C(v), \quad r(v_0) = r_0.$$

При цьому $r^0(v; v_0, r_0) \to r^*$, коли $v \to \infty$.

Список літератури

1. Парасюк І. О., Репета Б. В. Біфуркація автоколивань у двовимірній системі з повільно змінними параметрами // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. — 2012. — Вип. 13 (І) — С. 163–180.

РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТЕРМОЕЛЕКТРОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТЕМПЕРАТУРИ, ЩО НЕ ЗУМОВЛЮЄ НАПРУЖЕНЬ ТА ЕЛЕКТРИЧНИХ ЗМІЩЕНЬ У ВІЛЬНОМУ ПІРОЕЛЕКТРИКУ

Я. М. Пастернак, Р. М. Пастернак , М. С. Горбачевська
Луцький національний технічний університет, Луцьк, Україна
pasternak@ukrpost.ua

Сучасні високотехнологічні пристрої та прилади все частіше містять елементи, виготовлені з інтелектуальних матеріалів, які дають можливість практично використати внутрішнє поєднання полів різної фізичної природи. Зокрема, дуже часто використовуються п'єзоелектричні сенсори та актуатори. Як відомо, найвищі значення коефіцієнтів поєднання електричного та механічного полів мають сегнетоелектрики, які у свою чергу володіють піроелектричним ефектом, тобто поляризуються під час нагрівання. Тому при побудові розрахункових моделей для таких матеріалів обов'язково необхідно враховувати теплові впливи, зокрема наявність ґрадієнту температур.

Дослідження концентрації та інтенсивності полів напружень та електричних зміщень поблизу включень, отворів та тріщин у термоелектропружних матеріалах знайшло великий відклик у науковій літературі. Більшість із праць у цьому напрямі, як правило, досліджували безмежні піроелектричні середовища, апріорі використовуючи припущення, що однорідний тепловий потік не зумовлює напружень та електричних зміщень в суцільному бездефектному тілі, не надаючи належного доведення такого твердження.

Тому у даній роботі із використанням загальних співвідношень стаціонарних лінійних теплопровідності та термоелектропружності побудовано вирази для полів температури та теплових потоків, які не зумовлюють появи напружень та електричних зміщень у однорідному піроелектрику, вільному від силового та електростатичного навантажень.

Як виявилося в результаті аналізу отриманих співвідношень, у безмежних термоелектропружних анізотропних середовищах, на відміну від суто термопружних, унаслідок явища третинного піроелектричного ефекту навіть лінійний за координатами розподіл температур не завжди задовольнятиме умови сумісності для компонент вектора напруженості електричного поля. У свою чергу це свідчить про те, що однорідний тепловий потік може зумовити виникнення поля напружень та електричних зміщень. Для трансверсально ізотропних піроелектриків цього не буде лише у разі, коли тепло тече уздовж напряму поляризації. У загальному випадку анізотропії термоелектропружного тіла також існує єдиний напрям, уздовж якого тепловий потік не зумовлює виникнення полів напружень та електричних зміщень. У роботі доведено, що цей напрям колінеарний вектору, утвореному добутком матриці тензора коефіцієнтів теплопровідностей на вектор піроелектричних модулів.

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

С. П. Пафик, В. П. Яковець
Національний педагогічний університет ім. М. П. Драгоманова;
Університет менеджменту освіти НАПН України, Київ, Україна
procentum35@ukr.net, yvp-95@ukr.net

Розглядається система диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon^{mh} A_m(t,\varepsilon)\frac{d^m x}{dt^m} + \varepsilon^{(m-1)h} A_{m-1}(t,\varepsilon)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \dots + \varepsilon^h A_1(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} + A_0(t,\varepsilon)x = 0, \quad (1)$$

де $x(t,\varepsilon)$ — шуканий n-вимірний вектор, $A_i(t,\varepsilon), i=\overline{0,m},$ — дійсні або комплексно значні $(n \times n)$-матриці, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ — малий дійсний параметр, $h \in \mathbb{N}, t \in [0;T]$.

Передбачається, що виконуються наступні умови:

1^0. Матриці $A_i(t,\varepsilon), i=\overline{0,m},$ допускають на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями ε:

$$A_i(t,\varepsilon) \sim \sum_{k \ge 0} \varepsilon^k A_i^{(k)}(t), i = \overline{0,m}.$$

2^0. Матриці $A_i^{(k)}(t), i=\overline{0,m}, k=0,1,\dots$ нескінченно диференційовані на відрізку $[0;T]$.

3^0. $\det A_m^{(0)}(t) = 0, \forall t \epsilon [0;T]$.

4^0. Гранична в'язка матриць

$$P(t,\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i^{(0)}(t)$$

системи (1) регулярна при всіх $t \in [0;T]$ і має один скінченний елементарний дільник $(\lambda - \lambda_0(t))^p$ кратністю p і один нескінченний — кратністю $q = mn - p$.

Використовуючи методи робіт [1–3], досліджено структуру загального розв'язку даної системи рівнянь та можливості побудови її асимптотики при $\varepsilon \to 0$.

Встановлено, що за виконання умов 1^0–4^0 система (1) має p лінійно незалежних розв'язків вигляду

$$x(t,\varepsilon) = u(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t (\lambda_0(\tau) - \lambda(\tau,\varepsilon))d\tau\right),$$

що відповідають скінченному елементарному дільнику граничної в'язки матриць, і $q-k$ розв'язків вигляду

$$x\left(t,\varepsilon\right)=v\left(t,\varepsilon\right)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\xi\left(\tau,\varepsilon\right)}\right),$$

які відповідають нескінченному елементарному дільнику, де k — довжина жорданового ланцюжка матриці $A_m\left(t,\varepsilon\right)$відносно операторів

$$Q_s\left(t,\xi,\varepsilon\right)=\varepsilon^{sh}\xi^m\sum_{i=0}^{s}C_m^{m-i}D_{s-i}\left[\frac{1}{\xi^{m-s}}\right]A_m\left(t,\varepsilon\right)\frac{d^i}{dt^i}+$$

$$+\xi^m\sum_{i=0}^{s-1}\sum_{j=0}^{i}\varepsilon^{ih}C_{i+m-s}^{j+m-s}D_j\left[\frac{1}{\xi^{m-s}}\right]A_{i+m-s}\left(t,\varepsilon\right)\frac{d^{i-j}}{dt^{i-j}},s=\overline{1,m-1},$$

$$Q_m\left(t,\xi,\varepsilon\right)=\varepsilon^{mh}\xi^mA_m\left(t,\varepsilon\right)\frac{d^m}{dt^m}+\xi^m\sum_{i=0}^{m-1}\varepsilon^{ih}A_i\left(t,\varepsilon\right)\frac{d^i}{dt^i},$$

де $D_i\left[\frac{1}{\xi^j}\right]$ — сума всіх все можливих добутків i операторів диференціювання D, які діють на вирази розміщені справа від них, та j скалярних функцій $\frac{1}{\xi\left(t,\varepsilon\right)}$.

Виведено рівняння розгалуження, які мають задовольняти функції $\lambda\left(t,\varepsilon\right)$ і $\xi\left(t,\varepsilon\right)$ та проведено їх детальний аналіз. Показано, що ці функції, як і вектори $u\left(t,\varepsilon\right)$, $v\left(t,\varepsilon\right)$, можна побудувати у вигляді формальних розвинень за дробовими степенями параметра ε, показники яких визначаються за допомогою діаграм Ньютона. Доведено, що побудовані таким чином формальні розв'язки будуть асимптотичними розвиненнями точних лінійно незалежних розв'язків даної системи.

Список літератури

1. Жукова Г. С. Метод общего анализа линейных сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений и систем: дис. … доктора физ.-мат. наук:01.01.02/ Жукова Галина Севастьяновна. — М., 1990. — 296 с.

2. Яковець В. П. Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженнями: дис. … доктора фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Яковець Василь Павлович. — К., 1993. — 318 с.

3. Самойленко А. М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — К.: Вища школа, 2000. — 293 с.

ВАРІАЦІЙНА СТІЙКІСТЬ КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МІРАМИ

Б. Б. Пахолок
Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна
bogdanbp@ukr.net

На проміжку $\mathrm{I} = [0,\infty)$ розглянемо квазідиференціальний вираз

$$\mathrm{K}_{nm}[X(t)] \equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}(A_{ij}(t)X^{(n-i)}(t))^{m-j},$$

де $A_{ij}(t)$, $X(t)$ — $(l\times l)$-матриці-функції мають такі властивості: 1) $A_{00}^{-1}(t)$ — вимірна і обмежена на I; 2) $A_{i0}(t),\ A_{0j}(t)\in L_2(\mathrm{I}),\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$; 3) $A_{ij}(t)$ — узагальнені матриці-функції типу міри для $i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$. За допомогою квазіпохідних $X^{[k]}(t)$ (див.[1]) рівняння $\mathrm{K}_{nm}[X(t)]=0$ зводиться до однорідної системи

$$\mathrm{X}'(t) = \mathrm{A}'(t)\mathrm{X}(t), \tag{1}$$

де $\mathrm{X}(t), \mathrm{A}(t)$ — блочні матриці-функції, а саме рівняння і похідні розуміються в сенсі теорії розподілів Л. Шварца. Під розв'язком рівняння (1) розуміємо матрицю $\mathrm{X}(t)\in BV_{loc}^{+}(\mathrm{I})$ — клас функцій неперервних справа і локально обмеженої на I варіації. За умов 1)–3) задача Коші для рівняння (1) з умовою $\mathrm{X}(0)=\mathrm{X}_0$ еквівалентна до рівняння $\mathrm{X}(t)=\mathrm{X}_0+\int_0^t d\mathrm{A}(\tau)\mathrm{X}(\tau)$ з класичним інтегралом Рімана — Стілтьєса. Для узагальнених диференціальних рівнянь з мірами актуальним є питання варіаційної стійкості розв'язків (стійкості за варіацією) [2].

Означення. Розв'язок $\mathrm{X}(t)\equiv 0$ рівняння (1) називається *варіаційно стійким*, якщо для $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0$ таке, що коли $\mathrm{Y}(t)\in BV_{loc}^{+}(\mathrm{I})$ є такою, що $\left\|\mathrm{Y}(0)\right\|<\delta$ і $\overset{t_1}{\underset{0}{V}}(\mathrm{Y}(t)-\int_0^t d\mathrm{A}(\tau)\mathrm{Y}(\tau))<\delta$ для $\forall\, t_1>0$, то $\left\|\mathrm{Y}(t)\right\|<\varepsilon$ для $\forall\, t\in[0,t_1]$.

У доповіді повідомляються результати стосовно варіаційної стійкості квазідиференціальних рівнянь з мірами та стійкості за постійно діючих збурень типу міри.

Список літератури

1. Тацій Р. М., Пахолок Б. Б. Про структуру фундаментальної матриці квазідиференнціального рівняння // Доповіді АН УРСР. — 1989. — № 4. — С.27–30.
2. Schwabik S. Variational stability for generalized ordinary differential equations // Casopis pest. mat., 109(1984), 389–420.

ДВОСТОРОННІ МЕТОДИ З ОЦІНКОЮ ГОЛОВНОГО ЧЛЕНА ПОХИБКИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ПОЧАТКОВИХ ЗАДАЧ

Р. Я. Пелех

ПКТБ АСУ залізничного транспорту, Львів, Україна

Задачі будівельної механіки, теорії в'язко-пружності, хімічної кінетики приводять до необхідності розв'язання нелінійних систем диференціальних рівнянь. В даному повідомленні пропонуються двосторонні числові алгоритми розв'язуванні задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$y' = f\left(x, y\right), \qquad y\left(x_0\right) = y_0, \qquad x \in \left[x_0, x_0 + L\right], \tag{1}$$

де $y(x)$ — дійсний m-компонентний вектор, f — дійсна векторна функція залежної та незалежної змінних, причому припускається, що функція f володіє необхідною для викладок гладкістю.

Ці розрахункові формули будуються так, щоб локальні похибки схеми в кожній вузловій точці мали вигляд:

$$y\left(x_{n+1}\right) - y_{n+1} = \omega h^p K F(f) + O(h^{p+1}),$$

де $y(x_{n+1})$ і y_{n+1} — відповідно точний і наближений розв'язок задачі (1), h-крок інтегрування, $F(f)$ — деякий диференціальний оператор, обчислений в точці (x_n, y_n), K — константа, p — порядок точності, ω — параметр двосторонності.

Характерною особливістю таких алгоритмів є те, що при певних значеннях відповідних параметрів можна отримати як нові, так і традиційні однокрокові методи розв'язання задачі (1).

Запропоновані обчислювальні схеми дають можливість на кожному кроці отримувати не тільки наближений розв'язок, але і оцінку головного члена похибки.

Зауважимо, що у запропонованих обчислювальних формулах можна оцінити значення $F(f)$ без додаткових звертань до правої частини диференціального рівнянь, що вигідно відрізняє ці схеми від традиційних двосторонніх алгоритмів.

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРА ДРУГОГО РОДУ

Я. М. Пелех

Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна

Pelekh_Ya_M@ukr.net

Задачі електротехніки, автоматичного управління, хімічної кінетики, багатовимірної оптимізації і т.д. приводять до необхідності розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду:

$$f(x) = \int_a^x F\left[x, y, f(y)\right] dy, \quad x \in I_L, \tag{1}$$

де функція $F\left[x, y, f(y)\right]$ має необхідну гладкість. Розділимо інтервал $I_L : \left[a, b\right]$ на N частин довжини $h = \dfrac{b-a}{N}$ і позначимо

$$x_{i+1} = a + ih \ \left(i = 0, 1, 2, 3, \ldots\right), \ f_i = f\left(x_i\right),$$

причому $f\left(x_1\right) = 0$. Використовуючи апарат ланцюгових дробів та ідею побудови методів Рунге — Кутта, наближений розв'язок рівняння (1) в точці $x_2 = x_1 + h$ шукаємо у вигляді:

$$Y_2^{[k,l]} = \cfrac{c_{0,0}}{\sum_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \cfrac{d_{k,0}}{1 + \ddots + \cfrac{d_{k,l-1}}{1 + d_{k,l}}}} \tag{2}$$

Вирази для $c_{0,0}$, $d_{i,j}$ при $k + l = 2$ $\left(k = 1, 2; \quad l = 0, 1\right)$ мають вигляд:

$$c_{0,0} = h\delta_1, \ d_{0,0} = 1, \ d_{1,0} = \frac{\delta_2}{\delta_1}, \ \left(\delta_1 \neq 0\right), \ d_{2,0} = \frac{\delta_1\delta_3 + \delta_2^2}{\delta_1^2}, \ d_{1,1} = \frac{d_{2,0}}{d_{1,0}},$$

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}k_j, \ k_j = F\left[a + \alpha_j h, a + \beta_j h, h\sum_{m=0}^{j-1} \gamma_{jm}k_m\right], \gamma_{j0} = 0.$$

Пропонуються наближені методи другого та третього порядку точності для розв'язування рівняння (1). При відповідних значеннях параметрів, що входять в запропоновані обчислювальні схеми, отримуємо класичні методи.

Розглянемо формулу (2) при $k = 1,\ l = 0$, тобто

$$Y_2^{[1,0]} = \frac{h\delta_1^2}{\delta_1 + \delta_2},$$

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{2} a_{ij}k_j, \left(i = 1,2\right) \quad k_j = F\left[a + \alpha_j h, a + \beta_j h, h\sum_{m=0}^{j-1}\gamma_{jm}k_m\right],$$

$$\gamma_{j0} = 0.$$

Тоді, наприклад, якщо

$$\alpha_1 = 0,\ \ \alpha_2 = 1,\ \ \beta_1 = 0,\ \ \beta_2 = \frac{1}{2}, \gamma_{21} = \frac{1}{2},$$

$$a_{11} = 1 - a_{12},\ \ a_{21} = 1 - a_{12},\ \ a_{22} = a_{12} - 1,$$

де a_{12} — довільне число, то

$$f_2 - Y_2^{[1,0]} = O\left(h^3\right).$$

В якості прикладу випишемо два конкретні набори параметрів, при яких

$$f_2 - Y_2^{[K,L]} = O\left(h^4\right):$$

1) $\alpha_1 = \alpha_3 = 1,\ \ \alpha_2 = 0,\ \ \beta_1 = 0,\ \ \beta_2 = 1,\ \ \beta_3 = \frac{2}{3},\ \ \gamma_{21} = 1,$

$$\gamma_{31} = \frac{4}{9},\ \ \gamma_{32} = \frac{2}{9},\ \ a_{11} = 1,\ \ a_{12} = 0,\ \ a_{13} = 0,$$

$$a_{21} = \frac{3}{4},\qquad a_{22} = 0,\quad a_{23} = -\frac{3}{4},\qquad a_{3i} = 0,\ i = 1,2,3.$$

2) $\alpha_1 = \frac{1}{3},\quad \alpha_2 = \alpha_3 = 1,\quad \beta_1 = 0,\quad \beta_2 = \frac{2}{3},\quad \beta_3 = 0,\quad \gamma_{21} = \frac{2}{3},$

$$\gamma_{31} = -1,\qquad \gamma_{32} = 1,\qquad a_{11} = a_{12} = 0,\qquad a_{13} = 1,$$

$$a_{21} = 0,\quad a_{22} = -\frac{3}{4},\quad a_{23} = \frac{3}{4},\quad a_{3i} = 0,\quad i = 1,2,3.$$

Для знаходження наближеного розв'язку задачі (1) в наступних вузлових точках застосовуємо метод рухомого початку і формули (2).

КОМП'ЮТЕРНІ АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ШВИДКОДІЇ

Я. В. Підвальна
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
YaroslavaPv@ukr.net

Розглядається керована система вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{u(t) + p\left(l - \left(x_1(t) - x_3(t)\right)\right) + m_1 g \sin\left(x_1^2 + x_1 + 1\right)}{m_1} \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = \dfrac{p\left(x_3(t) - x_5(t) - l\right) + m_2 g \sin\left(x_3^2 + x_3 + 1\right)}{m_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_4(t) = \dfrac{p\left(x_3(t) - x_5(t) - l\right) + m_2 g \sin\left(x_3^2 + x_3 + 1\right)}{m_2} \\ \dot{x}_{2N-1}(t) = x_{2N}(t) \\ \dot{x}_{2N}(t) = \dfrac{p\left(x_{2N-3}(t) - x_{2N-1}(t) - l\right) + m_N g \sin\left(x_{2N-3}^2 + x_{2N-3} + 1\right)}{m_N} \end{cases} \quad (1)$$

де $x(t) = \left(x_1(t), x_2(t), \dots, x_{2N}(t)\right)$, $N \in \mathbb{N}$ — неперервна вектор-функція, $l, p, m_1, m_2, \dots, m_N, g \in \mathbb{R}$ — параметри системи.

Для керованої системи вигляду (1) поставлено задачу швидкодії: необхідно знайти таку оптимальну функцію керування $u(t) \in w = \Omega \subset \mathbb{R}^{2N}$, $N \in \mathbb{N}$, яка дозволяє за найменший час подолати відстань між точками $x_0 \in \mathbb{R}^{2N}$ та $xT \in \mathbb{R}^{2N}$. При цьому накладаються обмеження на керування u.

Розроблено алгоритм для розв'язання даної задачі комп'ютерним методом. Алгоритм побудовано на основі принципу максимуму [1]. Зокрема, підбирається допоміжна неперервна вектор-функція $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_{2N})$, яка задовольняє умови принципу максимуму. В подальшому будується функція $\mathcal{K}(\psi, x, u) = \left(\psi, f(x, u)\right)$, де $f(x, u)$ — вектор-функція правих частин рівнянь системи (1). Та функція $u(t)$, що максимізує $\mathcal{K}(\psi, x, u)$, і є оптимальною функцією керування. В алгоритмі виведено метод підбору такої вектор-функції $\psi(t)$, щоб траєкторія системи (1) з початкової точки x_0 прийшла в точку xT з заданою точністю. При побудові алгоритму враховувалася здатність комп'ютерних обчислень до похибок, тому використовувалися різні методи уточнення [2].

Список літератури

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1969. — 23 с.

2. Бейко І. В., Карпенко М. Ф. Про один метод знаходження оптимальних керувань // Доповіді АН УРСР. — 1964. — №12. — 1418 с.

РІВНЯННЯ РЕАКЦІЇ — ДИФУЗІЇ — КОНВЕКЦІЇ УМОВНО ІНВАРІАНТНІ ВІДНОСНО АЛГЕБРИ ГАЛІЛЕЯ

О. Г. Плюхін
Полтавський національний технічний університет ім. Юрія Кондратюка, Полтава, Україна
pliukhin@gmail.com

Означення. Систему диференціальних рівнянь $S(x,u,\underset{1}{u},\ldots,\underset{k}{u})=0$, де $u=u(x), x\in\mathbb{R}^{1+n}, u\in\mathbb{R}^m, \underset{k}{u}$ — сукупність похідних k-го порядку функції u, називатимемо умовно інваріантною відносно оператора X, якщо вона інваріантна відносно цього оператора разом з деякою додатковою умовою $S_1(x,u,\underset{1}{u},\ldots,\underset{k}{u})=0$.

Таким чином, для рівнянь $S,\ S_1$ виконуються наступні умови

$$\tilde{X}\,S=\lambda_0 S+\lambda_1 S_1,\ \tilde{X}\,S_1=\lambda_2 S+\lambda_3 S_1,$$

де $\lambda_\mu=\lambda_\mu(x,u,\partial)$ — деякі диференціальні оператори, $\mu=\overline{0,3}$, $\tilde{X}$ — продовження оператора X (див., наприклад, [1]).

Розглянемо рівняння реакції — дифузії — конвекції, яке використовується для моделювання різноманітних природних процесів

$$S=u_0-\partial_1(f^1(u)u_1)-f^2(u)u_1-f^3(u)=0, \tag{1}$$

де $u=u(x), x\in\mathbb{R}^2, u\in\mathbb{R}$, нижні індекси 0, 1 означають диференціювання за змінними x_0,x_1 відповідно. Дослідимо при яких гладких функціях f^1,f^2,f^3, рівняння (1) разом з додатковою умовою $S_1=0$ інваріантне відносно оператора Галілея

$$X=G=x_0\partial_1+x_1 Q,\ Q=M(u)\partial_u. \tag{2}$$

Теорема. Рівняння реакції-дифузії

$$u_0=\partial_1(f^1(u)u_1)+\frac{\lambda u}{f^1(u)}+\lambda_1 u, \tag{3}$$

умовно інваріантне відносно оператора Галілея (2), якщо розв’язки рівняння (3) задовольняють додаткову умову

$$u_0+\frac{1}{2M(u)}(u_1)^2+2\lambda M(u)=0, \tag{4}$$

причому $2M(u)f^1(u)=-u.$

Зауважимо, що додаткова умова (4) — це рівняння Гамільтона-Якобі [2].

Список літератури

1. Fushchych W., Shtelen W., Serov M. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics // Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. — 1993. — 436 p.

2. Jacobi C. G. J., «Vorlesungen über Dynamik», Königsberg lectures of 1842–1843, (reprinted by Chelsea Publishing Co., New York, 1969).

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С НЕСТАЦИОНАРНЫМИ НЕОГРАНИЧЕННЫМ ВНЕШНИМ И ВНУТРЕННИМ ПОТОКАМИ ЖИДКОСТИ

Н. П. Подчасов

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

npodchas@inmech.Kiev.ua

Исследуется динамика композитной, ортотропной цилиндрической оболочки длины L, радиуса R, толщины h, с плотностью ρ, свободно опертой на торцах. Оболочка взаимодействует с внутренним и внешним потоками идеальной несжимаемой жидкости с плотностями ρ_0 и ρ_1, протекающими в направлении ее продольной оси со скоростями $U(t)$ и $U1(t)$ соответственно. Постановка гидродинамической задачи для системы оболочка, взаимодействующая с внешним и внутренним потоками жидкости, аналогична постановке, приведенной в [1] с той лишь разницей, что в [1] внешний поток ограничен стенками жесткого цилиндра. При этом предполагается, что законы изменения $U(t)$ и $U1(t)$ имеют следующий вид:

$$U(t) = \left\{ \text{если}\; t \notin [t_1, t_2], \text{то}\; U_0; \quad \text{если} \quad t \in [t_1, t_2], \text{то}\; U_0 + u \sin[\lambda(t - t_1)] \right\};$$

$$U1(t) = \left\{ \begin{array}{l} \text{если}\;\; t < t_{11}, \text{то} \quad U1_0;\; \text{если}\;\; t < t_{21}, \text{то}\;\; (U1_1 - U1_0)(t - t_{11}) \,/\, (t_{21} - t_{11}) + U1_0; \\ \text{если}\;\; t < t_{31}, \text{то}\;\; U1_1;\; \text{если}\;\; t < t_{41}, \text{то}\;\; (U1_2 - U1_1)(t - t_{31}) \,/\, (t_{41} - t_{31}) + U1_1; \\ \quad \text{если}\;\; t > t_{41}, \text{то}\;\; U1_2 \end{array} \right\}.$$

Здесь $U_0, U1_0, U1_0, U1_1, U1_2, t_1, t_2, t_{11}, t_{21}, t_{31}, t_{41}, \lambda, u$ — постоянные величины, определяющие максимальные и минимальные значения скоростей потоков, амплитуду и частоту возмущений скорости внутреннего потока, а также длительности финитных флуктуаций скоростей жидкости.

Для радиального динамического прогиба оболочки [1] вида

$$w(x,y,t) = [f_1(t)\cos(sy) + f_2(t)\sin(sy)]\sin\lambda_1 x + [f_3(t)\cos(sy) + f_4(t)\sin(sy)]\sin\lambda_2 x + \left|f_5(t)\right| f(x)$$

построена конечномерная модель переходных колебательных процессов — система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений относительно функций $f_i(t)$, которая интегрировалась численно. Приводятся графики эволюции огибающих максимумов и минимумов прогибов, а также фазовых портретов колебаний фиксированной точки оболочки. Установлено, что при определенных значениях $U_0, U1_1, \lambda$ и u величины максимальных радиальных прогибов оболочки в переходных режимах ее колебаний могут превосходить границы априорных конструктивных ограничений, т.е. может иметь место практическая потеря устойчивости оболочки.

Список литературы

1. Подчасов Н.П. Переходные процессы в ортотропных цилиндрических оболочках при нестационарном протекании жидкости. International Workshop «Hydrodynamics of Moving Objects». — К.: «Адверта», 2012. — С. 130—141.

СИНГУЛЯРНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ З НЕНУЛЬОВИМ ІНДЕКСОМ І ПІДХІД ДО ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

О. Б. Поліщук

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

polya417@gmail.com

Розглядається сингулярне інтегральне рівняння

$$(Ax)(t) = f(t), \tag{1}$$

де

$$(Ax)(t) = a(t)x(t) + \frac{b(t)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\operatorname{ctg}\frac{\tau - t}{2}dt + \int_{-\pi}^{\pi} k(t,\tau)x(\tau)d\tau.$$

Вважається, що: 2π-періодичні функції $a(t)$ і $b(t)$ задовольняють умову Гельдера, причому

$$a^2(t) + b^2(t) = 1 \ \ \forall t \in [-p, p], \ \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|k(t,\tau)|^2 dtd\tau < \infty, \ f \in L_2[-\pi,\pi].$$

Припускається, що одиниця — регулярне значення ядра $k(t,\tau)$, а індекс рівняння (1) $\kappa < 0$, де

$$\kappa = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\arg\frac{a(t) - ib(t)}{a(t) + ib(t)}.$$

У цьому випадку, як відомо [1], неоднорідне рівняння (1) розв'язне тоді і тільки тоді, коли права частина $f(t)$ задовольняє $-\kappa$ умов

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi_k(t)f(t)dt, \ \ k = \overline{1,l}, \ l = -\kappa,$$

де $\{\psi_k(t)\}_{k=1}^{l}$ — повна система лінійно незалежних розв'язків союзного однорідного рівняння $(A'\psi)(t) = 0$. Заміною $x(t) = (Ry)(t)$ рівняння (1) зводиться до рівняння з компактним оператором вигляду

$$y(t) = (Ty)(t) + f(t), \tag{2}$$

де R — еквівалентний регуляризатор оператора A вигляду

$$(Ry)(t) = a(t)y(t) - \frac{b(t)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau - t}{2}d\tau, \quad AR = I - T.$$

З теорії сингулярних інтегральних рівнянь випливає, що індекс регуляризатора $R: \kappa_1 > 0$, а це означає, що існують лінійно незалежні розв'язки $y_j(t), j = \overline{1,\kappa_1}$, рівняння $(Ry)(t) = 0$. Таким чином,

$$(Ty_j)(t) = y_j(t), \ j = \overline{1,\kappa_1},$$

тобто одиниця — власне значення оператора T і рівняння (2) — це рівняння на спектрі.

Пропонується побудову розв'язку рівняння (2) замінити відшуканням розв'язку задачі з параметрами

$$y(t)+\sum_{j=1}^{l}\lambda_j\xi_j(t)=(Ty)(t)+f(t),\Phi_s(y)=\alpha_s,s=\overline{1,\kappa_1}. \qquad (3)$$

Слід зауважити, що $\Phi_s(y)=\alpha_s, s=\overline{1,\kappa_1}$ — деякі лінійні неперервні функціонали, і для кожного конкретного випадку їх вибір продиктовано умовами прикладної задачі.

При вдалому виборі системи лінійно незалежних функцій $\{\xi_j(t)\}_{j=1}^{l}$, задачу (3) можна звести до рівняння типу

$$v(t)=(Lv)(t)+h(t), \quad v(t)=(Qy)(t),$$

для якого одиниця не буде власним значенням оператора L. Описаний підхід проілюстровано на прикладі.

До задачі (3) встановлено умови розв'язності [2] і обґрунтовано застосування до неї наближених методів. Так, згідно з проекційно-ітеративним методом, послідовні наближення будуються за формулою

$$x_k(t)=(Ry_k)(t),$$

в якій $y_k\left(t\right)$ знаходимо із задачі

$$y_k(t)+\sum_{j=1}^{l}\lambda_j^k\xi_j(t)=u_k(t),\int_{-\pi}^{\pi}(R'\eta_s)(t)y_k(t)dt=\alpha_s,s=\overline{1,l}, \qquad (4)$$

$$u_k(t)=z_k(t)+f(t)-(ARz_k)(t),$$

$$z_k(t)=y_{k-1}(t)+\omega_k(t).$$

Поправку $\omega_k\left(t\right)$ шукаємо у вигляді

$$\omega_k(t)=\sum_{i=1}^{n}a_i^k\zeta_i(t),$$

а невідомі коефіцієнти $a_i^k,\ i=\overline{1,n}$ визначаємо з умови

$$\int_{-\pi}^{\pi}(u_k-u_{k-1}-\sum_{i=1}^{n}a_i^k\phi_i)(t)\psi_j(t)dt=0,\ \ j=\overline{1,n}.$$

Тут $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^n,\{\psi_i(t)\}_{i=1}^n$— задані системи лінійно незалежних функцій, а R' — оператор, союзний до оператора R. Початкове наближення $y_0\left(t\right)$ визначаємо із задачі (4), за умови, що $k=0$, а функцію $u_0\left(t\right)$ задаємо довільним чином.

Список літератури

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. — М.: Наука, 1977. — 640 с.

2. Поліщук О. Б. Про один підхід при розв'язанні задачі з параметрами для сингулярних інтегральних рівнянь // Вісник Київськ. ун-ту. Сер.: фіз.мат.науки. — 2000. – Вип. 2.

РЕКУРЕНТНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ МІТТАҐ-ЛЕФЛЕРА

К. Попова, В. Гайдей
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
kg19@ukr.net, victor144169@gmail.com

Функцією Міттаґ-Лефлера називають як функцію, запроваджену власне Маґнусом Міттаґ-Лефлером [1]

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+\alpha k)},$$

де $\alpha \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\alpha > 0, z \in \mathbb{C}$, так і загальнішу функцію, запроваджену А. Віманом [3]:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta+\alpha k)},$$

де $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\alpha > 0, \operatorname{Re}\beta > 0, z \in \mathbb{C}$.

Функції Міттаґ-Лефлера природно виникають як розв'язок інтегрального чи диференціального рівняння дробового порядку.

Протягом останніх двадцяти років ці функції завоювали справжню популярність завдяки великому потенціалу до розв'язання задач математики, фізики, біології, медицини, інженерії тощо. Функції Міттаґ-Лефлера та їх різноманітні узагальнення знайшли своє застосування, зокрема, в реології, теорії пружності, теорії імовірностей і математичній статистиці, у вивченні дифузії, електричних мереж тощо [3, 4].

У роботі для узагальнених функцій Міттаґ-Лефлера

$$\bar{E}_{\alpha,\beta}(z) = z^{\frac{\beta-1}{\alpha}} E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+\frac{\beta-1}{\alpha}}}{\Gamma(\beta+\alpha k)}$$

$$\bar{E}_{(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+\frac{\beta_2+\beta_1-1}{\alpha_1+\alpha_2}}}{\Gamma(\beta_1+\alpha_1 k)\Gamma(\beta_2+\alpha_2 k)}$$

та функції Міттаґ-Лефлера двох змінних [5]

$$E_{\alpha,\lambda}(x,y;\beta) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^k y^l}{\Gamma(\beta+\alpha k+\lambda l)}$$

одержано рекурентні співвідношення, формули диференціювання, зображення функцій після дії операторів дробового інтегро-диференціювання та Лапласа.

Теорема 1. Якщо $\operatorname{Re}\alpha > 0, \operatorname{Re}\beta > 0, m \in \mathbb{N}$, то правдиві такі рекурентні формули

$$z^m \overline{E}_{\alpha,\beta+m\alpha}(z) = \overline{E}_{\alpha,\beta}(z) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{z^{k+\frac{\beta-1}{\alpha}}}{\Gamma(\beta+k\alpha)},$$

$$z^{\alpha m} \overline{E}_{\alpha,\beta+m\alpha}(z^\alpha) = \overline{E}_{\alpha,\beta}(z^\alpha) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{z^{\alpha k+\beta-1}}{\Gamma(\beta+k\alpha)}.$$

Теорема 2. Якщо $\operatorname{Re}\alpha > 0, \operatorname{Re}\beta > 0, \operatorname{Re}\lambda > 0$, то правдива формула диференціювання:

$$\alpha x \frac{\partial}{\partial x} E_{\alpha,\lambda}(x,y;\beta+1) + \lambda y \frac{\partial}{\partial y} E_{\alpha,\lambda}(x,y;\beta+1) =$$
$$= \beta E_{\alpha,\lambda}(x,y;\beta+1) - E_{\alpha,\lambda}(x,y;\beta)$$

Список літератури

1. Mittag-Leffler G. M. Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$ // C.R. Acad. Sci. Paris. — 1903. — **137**. — P. 554–558.

2. Wiman A. Über den Fundamental satz in der Theorie der Funcktionen $E_\alpha(x)$ // Acta Mathematica. — 1905. — **29**. — S. 191–201.

3. Haubold H. J., Mathai A. M., Saxena R. K. Mittag-Leffler functions and their applications // Journal of Applied Mathematics. — 2011. — 51 pp.

4. Вірченко Н., Гайдей В. Класичні й узагальнені багатопараметричні функції. Монографія. — К., 2008. — 228 с.

5. Е. Н. Огородников, Н. С. Яшагин, “О некоторых свойствах операторов с функциями типа Миттаг–Леффлера в ядрах”, *Труды шестой Всероссийской научной конференции с международным участием (1–4 июня 2009 г.). Часть 3*, Дифференциальные уравнения и краевые задачи, Матем. моделирование и краев. задачи, СамГТУ, Самара, 2009, 181–188 .

НЕОБХІДНІ УМОВИ РОЗШИРЕННЯ ОСНОВНОЇ АЛГЕБРИ ІНВАРІАНТНОСТІ ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ РЕАКЦІЇ — КОНВЕКЦІЇ — ДИФУЗІЇ

Ю. В. Приставка
Полтавський національний технічний університет ім. Юрія Кондратюка, Полтава, Україна
YuliaPrystavka@rambler.ru

Розглянемо двовимірне рівняння реакції — конвекції — дифузії

$$w_0 = \partial_a(f(w)w_a) + g^a(w)w_a + h(w), \tag{1}$$

де $w = w(x_0, x_1, x_2)$.

Заміна $u = \int f(w)dw$ зводить рівняння (1) до недивергентного вигляду

$$\Delta u_0 = f^0(u)u_0 + f^a(u)u_a + h(u). \tag{2}$$

Рівняння (2) при довільних нелінійностях f^0, f^a, h інваріантне лише відносно операторів зсувів

$$A =< \partial_0, \partial_1, \partial_2 >. \tag{3}$$

Алгебру операторів (3) назвемо основною алгеброю інваріантності рівняння (2).

Теорема. Для того, щоб рівняння (2) допускало розширення основної алгебри інваріантності, потрібно, щоб нелінійності f^0, f^a, h мали вигляд, наведений у таблиці 1.

Таблиця 1. Вигляд функцій f^0, f^a, h

		f^a	h
		$e z_a(u)$	$\lambda_3 e^{ku} + (\lambda_4 \cos pu + \lambda_5 \sin pu)e^{mu} + \lambda_6 e^{nu} + \lambda_7$
		$e z_a(u)$	$\lambda_3 e^{ku} + (\lambda_4 \cos pu + \lambda_5 \sin pu)e^{mu} + \lambda_6 u + \lambda_7$
		$e z_a(u)$	$(\lambda_3 u + \lambda_4)e^{ku} + (\lambda_5 \cos pu + \lambda_6 \sin pu)e^{mu} + \lambda_7$
		$e\lambda_a e^{mu} + l_a$	$\lambda_3 e^{ku} + \lambda_4 e^{mu} + \lambda_5 e^{nu} + \lambda_6$
		$e\lambda_a e^{mu} + l_a$	$\lambda_3 e^{ku} + \lambda_4 e^{mu} + \lambda_5 u + \lambda_6$
		$e\lambda_a e^{mu} + l_a$	$(\lambda_3 u + \lambda_4)e^{ku} + \lambda_5 e^{mu} + \lambda_6$
		$e\lambda_a e^{mu} + l_a$	$\lambda_3 e^{ku} + (\lambda_4 u + \lambda_5)e^{mu} + \lambda_6$

		$e\, \lambda_a e^{mu} + l_a$	$(\lambda_3 u + \lambda_4)e^{ku} + \lambda_5 e^{nu} + \lambda_6$
		$e\, \lambda_a e^{mu} + l_a$	$(\lambda_3 u^2 + \lambda_4 u + \lambda_5)e^{ku} + \lambda_6$
0		$e\, \lambda_a e^{mu} + l_a$	$(\lambda_3 u + \lambda_4)e^{ku} + \lambda_5 u + \lambda_6$
1		$u \quad z_a(\ln u)$	$\lambda_3 u^{1+k} + (\lambda_4 \cos pu + \lambda_5 \sin pu)u^{1+m} + \lambda_6 u^{1+n} + \lambda_7 u$
2		$u \quad z_a(\ln u)$	$\lambda_3 u^{1+k} + (\lambda_4 \cos pu + \lambda_5 \sin pu)u^{1+m} + (\lambda_6 \ln u + \lambda_7)u$
3		$u \quad z_a(\ln u)$	$(\lambda_3 \cos pu + \lambda_4 \sin pu)u^{1+m} + (\lambda_5 \ln u + \lambda_6)u + \lambda_7 u$
4		$u\, \lambda_a u^m + l_a$	$\lambda_3 e^{1+k} + \lambda_4 u^{1+m} + \lambda_3 u^{1+n} + \lambda_6 u$
5		$u\, \lambda_a u^m + l_a$	$(\lambda_3 \ln u + \lambda_4)u^{1+k} + \lambda_5 u^{1+m} + \lambda_6 u$
6		$u\, \lambda_a u^m + l_a$	$\lambda_3 u^{1+k} + (\lambda_4 \ln u + \lambda_5)u^{1+m} + \lambda_6 u$
7		$u\, \lambda_a u^m + l_a$	$\lambda_3 u^{1+k} + \lambda_4 u^{1+m} + (\lambda_5 \ln u + \lambda_6)u$
8		$u\, \lambda_a u^m + l_a$	$(\lambda_3 \ln u + \lambda_4)u^{1+k} + \lambda_5 u^{1+n} + \lambda_6 u$
9		$u\, \lambda_a u^m + l_a$	$(\lambda_3 \ln^2 u + \lambda_4 \ln u + \lambda_5)u^{1+k} + \lambda_6 u$
0		$u\, \lambda_a u^m + l_a$	$(\lambda_3 \ln u + \lambda_4)u^{1+k} + (\lambda_5 \ln u + \lambda_6)u$

де $k, m, n, p, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, l_1, l_2, \sigma_1, \sigma_2$ — довільні сталі,

$$z_a(u) = \lambda_b e^{mu}(\delta_{ab} \cos pu + \varepsilon_{ab} \sin pu) + \sigma_a\,,\ \delta = (\delta_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ – символ

Кронекера, $\varepsilon = (\varepsilon_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Список літератури

1. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

2. Олвер П. приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. — 581с.

3. Фущич В. И., Штепель В. М., Серов Н. И. Симметрийний анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики. — К.: Наук. думка, 1989. — 339 с.

ПРО ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ СЛАБКО НЕЛІНІЙНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З НЕВІДОМОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

Н. П. Процах
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
protsakh@ukr.net

Нехай Ω і D — обмежені області відповідно в $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{R}^l$ з межами $\partial\Omega \in C^2$ і $\partial D \in C^1$, $G = \Omega \times D$; $x \in \Omega$, $y \in D$, $t \in (0,T)$, $\Sigma_T = \partial\Omega \times D \times (0,T)$, $S_T = \Omega \times \partial D \times (0,T)$.

В області $Q_T = G \times (0,T)$ розглянемо задачу для рівняння

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,y,t) u_{x_i})_{x_j} + \\ + c(x,y,t)u + g(x,y,t,u) = f(x,y,t)q(t) + f_0(x,y,t) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in G, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u\big|_{S_T^1} = 0, \qquad u\big|_{\Sigma_T} = 0, \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$\int_G K(x,y) u(x,y,t)\,dxdy = E(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

де $u(x,y,t)$, $q(t)$ — невідомі функції, ν — зовнішня нормаль до S_T,

$$S_T^1 = \{(x,y,t) \in S_T : \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)\cos(\nu, y_i) < 0\}.$$

Означення. Пару функцій $(u(x,y,t),\ q(t))$ назвемо узагальненим розв'язком задачі (1)–(4), якщо $u \in W^{1,2}(Q_T)$, $q \in L^2(0,T)$, ці функції задовольняють рівняння (1) для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ та виконуються умови (2), (3), (4).

Встановлено умови, за яких існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)–(4), а також деякі його оцінки. Результати отримано і для випадку, коли права частина рівняння (1) має вигляд:

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(x,y,t) q_i(t) + f_0(x,y,t),$$

де $q_i(t)$ $(m \in \mathbb{N})$ — невідомі функції.

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМИ УМОВАМИ, ВИРОДЖЕННЯМ І НЕРІВНОСТЯМИ

І. Д. Пукальський

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

appl-dpt@chnu.edu.ua

Нехай D — обмежена область простору $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D, $\dim D = n$, Ω — обмежена область, $\overline{\Omega} \subset D$, $\dim\,\Omega \leq n-1$. В області $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$ вивчається задача знаходження функції $u(t,x)$, яка при $t \neq t_\lambda$, $\lambda \in \{1,2,\ldots,N\}$, $x \in D \setminus \overline{\Omega}$ задовольняє рівняння

$$[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} + a_0(t,x)]u(t,x) = f(t,x), \tag{1}$$

умови за змінною t:

$$u(t_0+0,x) = \phi_0(x), \tag{2}$$

$$u(t_\lambda+0,x) - u(t_\lambda-0,x) = \psi_\lambda(x)u(t_\lambda-0,x) + \phi_\lambda(t_\lambda,x) \tag{3}$$

і крайові умови

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\partial_{x_i}u + b_0(t,x)u - g(t,x)\right] \geq 0,$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\partial_{x_i}u + b_0(t,x)u - g(t,x)\right]u(t,x) = 0, \tag{4}$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D} u(t,x) \geq 0,$$

де $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N < t_{N+1}$.

Задачу досліджено за таких обмежень на ріст коефіцієнтів при $x \to \partial\Omega$:

$$b_i = O(\rho^{\beta_i}(x,\partial\Omega)),\; a_{ij} = O(\rho^{\beta_i+\beta_j}(x,\partial\Omega)),\; a_i = O(\rho^{-\mu_i}(x,\partial\Omega)),$$

$$a_0 = O(\rho^{-\mu_0}(x,\partial\Omega)),\; b_0 = O(\rho^{-\delta}(x,\partial\Omega))\;\; \beta_i \in (-\infty,\infty),\; \mu_i \geq 0,\; \mu_0 \geq 0,$$

$$\delta \geq 0,\; a_0 \geq k > 0,\; b_0 > 0,\; \rho(x,\partial\Omega) = \min_{x\in D\setminus\Omega,\, z\in\partial\Omega} |\,x - z\,|.$$

При визначених умовах гладкості на коефіцієнти рівняння (1), крайової умови (4), функції $f, \varphi_0, \varphi_\lambda, \psi_\lambda, g$ і поверхню ∂D встановлено єдність, існування і оцінку розв'язку задачі (1)–(4) у гельдерових просторах зі степеневою вагою, порядок якої залежить від чисел $\beta_i, \mu_i, \mu_0, \delta$.

СИНГУЛЯРНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ СТУПЕНЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЇ

Я. С. Пушак, А. С. Пушак

Українська академія друкарства, Львів, Україна

apushak@gmail.com, Yaroslav.Pushak@gmail.com

Вирішення багатьох проблем сучасної техніки пов'язане з вивченням температурних полів і напружень в багатоступеневих елементах конструкції. Такі питання виникають, зокрема, при вивченні технологічних процесів зварки різнотовщинних тонкостінних пластинок і оболонок, стержнів різних діаметрів, термостійкості металево-скляних спаїв ніжок скляних оболонок електровакуумних приладів, що містять металічні циліндричні ступінчасті стержневі струмовідводи, термостійкості ступінчастих валів парових і газових турбін.

В даній роботі виведено диференціальні рівняння теплопровідності із коефіцієнтами імпульсного типу для багатоступеневих ізотропних циліндричних оболонок, прямокутних і круглих пластинок, циліндричних стержнів з врахуванням внутрішніх джерел тепла, тепловіддачі, теплової інерції.

За допомогою представлення геометричних і теплофізичних характеристик багатоступеневих тонкостінних елементів у вигляді

$$P\left(\xi\right) = p_i + \sum_{i=1}^{n-1}\left(p_{i+1} - p_i\right)S_+\left(\xi - \xi_i\right), \qquad (1)$$

трьохвимірна задача теплопровідності зведена до системи сингулярних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами одиничної асиметричної функції Хевісайда, дельта-функції Дірака і її похідних. У випадку симетричної задачі система диференціальних рівнянь зводиться до одного рівняння. Слід відзначити, що запропонований метод дає можливість отримати розв'язок задач теплопровідності і термопружності, як єдиного цілого, для всієї області тіла і не вимагає застосування методу ідеального контакту на грані стику елементів різної товщини. В формулі (1) p_i – геометричні (півтовщина, радіус) та теплофізичні (коефіцієнти тепловіддачі) властивості i-их частин багатоступеневих елементів (оболонок, прямокутних і круглих пластин, циліндричних стержнів), $S+\left(\xi - \xi_i\right) = \begin{cases} 1, & \xi > \xi_i \\ 0, & \xi \le \xi_i \end{cases}$ — асиметрична функція Хевісайда.

Слід відзначити, що розроблений метод дозволяє розв'язувати задачі відповідного типу для багатошарових елементів конструкції.

При розробці даного методу було виведено ряд співвідношень між узагальненими функціями Хевісайда, дельта-функції Дірака та її похідних.

РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА З ДЕРИВАТИВНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ, ІНВАРІАНТНЕ ВІДНОСНО УЗАГАЛЬНЕНОЇ АЛГЕБРИ ГАЛІЛЕЯ

І. В. Рассоха
Полтавський національний технічний університет ім. Юрія Кондратюка, Полтава, Україна
innaolha@mail.ru

Нелінійні рівняння Шредінгера широко застосовуються в цілому ряді галузей фізики, включаючи фізику плазми і нелінійну оптику. Його симетрійні властивості широко вивчались в роботах Р. З. Жданова, А. Г. Нікітіна, Р. О. Поповича, В. І. Фущича, В. М Штеленя, М. І. Сєрова [1], Р. М. Черніги, та інших, де встановлено, що рівняння

$$i\psi_t = \frac{1}{2}\psi_{xx} + \lambda \mid \psi \mid^4 \psi$$

інваріантне відносно узагальненої алгебри Галілея

$$\langle \partial_0, \partial_1, G = x_0\partial_1 + x_1 Q_1, Q_1, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_3, \Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + \frac{x_1^2}{2}Q_1 + x_0Q_3 \rangle,$$

де $Q_1 = -i(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*})$, $Q_3 = -\frac{1}{2}(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*})$.

Поставимо задачу: дослідити, при яких нелінійностях рівняння Шредінгера з деривативною нелінійністю вигляду

$$i\psi_t = \frac{1}{2}\psi_{xx} + [\partial_x F(|\psi|) + \lambda \mid \psi \mid^4]\psi \tag{1}$$

інваріантне відносно узагальненої алгебри Галілея вигляду

$$\begin{aligned} &\langle \partial_0, \partial_1, G = x_0\partial_1 + x_1Q_1 + Q_2, Q_1, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_3, \\ &\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_0Q_3 + x_1Q_2 + \frac{x_1^2}{2}Q_1 + Q_4 \rangle, \end{aligned} \tag{2}$$

де $\psi = u^1 + iu^2$, оператори Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 мають вигляд $Q_i = (\alpha_{ab}^i u^b + \beta_a^i)\partial_{u^a}$, причому $\alpha_{ab}^i, \beta_a^i - const$, $i = 1,2$, та задовольняють наступні комутаційні співвідношення

$$[Q_1, Q_2] = 0, [Q_1, Q_3] = 0, [Q_2, Q_3] = -Q_2, [Q_1, Q_4] = 0, [Q_2, Q_4] = 0, [Q_3, Q_4] = 2Q_4.$$

В результаті досліджень встановлено, що рівняння (1) інваріантне відносно узагальненої алгебри Галілея (2) тоді і тільки тоді, коли воно має наступний вигляд

$$i\psi_t = \frac{1}{2}\psi_{xx} + [\alpha(\mid \psi \mid^2)_x + \beta \mid \psi \mid^4]\psi,$$

де $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, причому $Q_1 = -i(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*})$ $Q_2 = 0, Q_3 = -\frac{1}{2}(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*})$ $Q_4 = 0$.

Список літератури

1. Fushchych W. I., Shtelen W. M., Serov N. I. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics.− Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. — 460 p.

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ АЭРОГИДРОДИНАМИКИ

Д. А. Редчиц, О. Б. Полевой

Институт транспортных систем и технологий НАН Украины,
Днепропетровск, Украина

redchits_da@ua.fm

На сегодняшний день вычислительная аэрогидродинамика (Computational Fluid Dynamics — CFD) является одной из составляющих процесса проектирования в аэрокосмической отрасли, двигателестроении, ветро-энергетике, что обусловлено меньшей стоимостью численных экспериментов по сравнению с натурными. Основная задача CFD — воспроизведение реальных физических процессов с максимальной степенью достоверности. За счет этого удается глубже понять происходящие процессы, выработать рекомендации по аэродинамическим формам проектируемого устройства близким к оптимальным. Подобные расчеты позволяют получить подробные характеристики устройства задолго до его изготовления и внедрения, существенно сокращая затраты на дорогостоящие продувки в аэродинамических трубах, которые присутствуют при стандартных методах проектирования.

Авторы настоящего доклада накопили большой опыт разработки и применения методов вычислительной гидродинамики для ветроэнергетики, высокоскоростного наземного транспорта, сверхзвуковых летательных аппаратов, турбиностроения, управлением отрыва потока с помощью плазменных актуаторов, тепломассообмена во внутренних и внешних течениях. К сожалению, реальные расчеты ограничены двумерными (плоскими и осесимметричными) течениями, а также отдельными вариантами трехмерных течений. Мощности персональных компьютеров или небольших кластеров не позволяют проводить исследования обтекания тел сложной конфигурации (полные компоновки самолетов, наземного транспорта), применять современные методы моделирования турбулентности (крупномасштабная турбулентность, прямое численное моделирование).

Авторами разработан специализированный CFD пакет, в котором достигнут компромисс между требуемыми вычислительными ресурсами и качеством получаемых результатов. С одной стороны, реализован полный подход вычислительной гидродинамики на основе уравнений Навье — Стокса, включая несколько дифференциальных моделей турбулентности, а также многоблочный подход для описания течений в многосвязных областях. Разработанный CFD пакет позволяет решать сопряженные задачи динамики и аэродинамики, включающие электродинамические процессы, электрохимию, многофазные среды, процессы горения, плазменную кинетику. Полученные результаты позволили сформулировать новые технические идеи, получить новые представления о физике отрыва потока и способами его управления, воспроизвести реальную структуру течения в широком диапазоне скоростей от несжимаемых течений до сверхзвуковых.

РАСЧЁТ РАССЕЯНИЯ КОНУСОМ АКУСТИЧЕСКОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

В. А. Резуненко

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Харьков, Украина

varezunenko@yahoo.com

Вершина бесконечного однополостного конуса помещена в начало декартовой и сферической систем координат. Полярная ось Oz является осью симметрии конуса. Полярный угол раскрыва конуса полагаем равным $\gamma\,(0<\gamma<\pi)$. На оси конуса на расстоянии b от вершины конуса помещаем точечный источник U_0 акустической сферической волны. Конус полагаем жёстким. Требуется найти акустический потенциал скоростей U волны, рассеянной конусом. Полный потенциал должен, в частности: удовлетворять уравнению Гельмгольца всюду, кроме точки размещения источника; нормальная производная $(U_0+U)'_\theta$ равна нулю при $\theta=\gamma$; удовлетворять условию конечности акустической энергии. Для решения задачи в сферических координатах сначала применим известные интегральные преобразования уравнения Гельмгольца и граничных условий. Этим приходим к спектральной задаче Штурма — Лиувилля [1] для вспомогательного уравнения и граничных условий. Решение этой задачи в результате представим рядами Фурье по сферическим функциям (в обозначениях Дебая) с положительными индексами ν_n, зависящими от угла γ раскрыва конуса. При этом используем вычеты функций комплексного переменного и теоремы сложения для функций Ханкеля и получаем:

$$U=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\nu_n+0.5)}{\sin(\pi\nu_n)}\cdot\frac{h^{(1)}_{\nu_n}(kb)}{kb\sqrt{kb}}\cdot\frac{\dfrac{\partial}{\partial\gamma}P_{\nu_n}(-\cos\gamma)}{\left\{\dfrac{\partial}{\partial\nu}P'_{\nu}(\cos\gamma)\Big|_{\nu=\nu_n}\right\}}\cdot\frac{\psi_{\nu_n}(kr)}{kr\sqrt{kr}}P_{\nu_n}(\cos\theta),\qquad(1)$$

где $h^{(1)}_{\nu_n}(kb)$, $\psi_{\nu_n}(kr)$ — сферические функции Ханкеля 3 рода и функции Бесселя 1 рода, k — волновое число, $P_{\nu_n}(\cos\theta)$ — функции Лежандра первого рода, $\sin(\pi\nu_n)\neq 0$, $P'_{\nu_n}(\cos\gamma)=0$. Ряд (1) для потенциала скоростей U сходится равномерно по r, $\theta\in[\mu;b]\otimes[0;\gamma]$, $\mu>0$, является дважды непрерывно дифференцируемой функцией. Для ускорения сходимости ряда (1) естественно выделить и свернуть главную часть, используя, рекуррентные соотношения и асимптотические представления спецфункций.

Список литературы

1. Варяница Л. А., Резуненко В. А. Регуляризация задачи электростатики на бесконечном конусе и двух сферических сегментах // Вісник Харківського національного університету. Серія «Математика, прикладна математика і механіка». Харків, ХНУ ім. В. Н. Каразина. — 2002. — № 542, вип. 51. — С.59–68.

ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ТИПУ ЗГОРТКИ У РЕНТГЕНОСТРУКТУРНОМУ АНАЛІЗІ

Н. М. Роженко, В. В. Картузов, О. М. Григорьєв
Інститут проблем матеріалознавства ім. І. М. Францевича НАН України, Київ, Україна
marta.70@mail.ru

Інтегральне рівняння типу згортки:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau = f(x) \oplus g(x) \tag{1}$$

де функції $h(x)$, права частина рівняння та $g(x)$, ядро рівняння є відомими, а $f(x)$ — шукана функція, має широке застосування для розв’язку ряду прикладних задач. Серед них — обернена задача теплопровідності та задачі чисельного диференціювання [1], обернені задачі оптики і спектрометрії [2]. До останнього класу входить задача встановлення структурних характеристик матеріалу за його рентгенограмою (рентгеноструктурний аналіз). Основною причиною складності розв'язання рівняння згортки є те, що задача не є стійкою [1] і, таким чином, належить до класу некоректно поставлених задач.

Не зважаючи на нестійкість задачі, для багатьох практично-значимих випадків розв'язки, знайдені одним із класичних методів, виявляються за точністю розв'язку придатними для подальшого аналізу. Це обумовлено тим, що при чисельній реалізації класичних методів нестійкість розв'язку компенсується автоматичним зрізанням спектра шкідливих частот. У тих випадках, коли застосування класичних методів не компенсує нестійкість розв'язку, застосовують сучасні стійкі обчислювальні методи.

Метод регуляризації Тихонова [1,3] належить до сучасних стійких обчислювальних методів. Його розроблено для знаходження наближеного розв’язку в природньому класі елементів $z \in Z$ некоректно поставленої задачі вигляду:

$$Az = u,$$

де права частина рівняння $u \in U$ та оператор A є відомими, але з деякою похибкою. Нестійку задачу розв'язання операторного рівняння замінюють стійкою задачею мінімізації згладжуючого функціоналу, тобто знаходження

$$\inf_{z \in Z} M^{\alpha}\left[z\right], \text{ де } M^{\alpha}\left[z\right] = \rho_U^2(Az, u) + \alpha\Omega\left[z\right],$$

де $\alpha > 0$ — параметр регуляризації, $\rho_U(\circ,\circ)$ — метрика простору U, $\Omega\left[z\right]$ — стабілізуючий функціонал.

Метод регуляризації Тихонова має ряд переваг над іншими сучасними методами [4] і знайшов (разом із своїми модифікаціями) своє успішне застосування для широкого ряду прикладних задач [2]. Перспективність використання цього методу для розв’язання задач рентгеноструктурного аналізу зазначалася неодноразово [5, 6], однак прикладів вирішення конкретних задач знайти не вдалося.

Нами був застосований метод регуляризації Тихонова до визначення структурних властивостей порошків W та WC за їх рентгенограмами (рис. 1). Для цього були знайдені фізичні уширення рентгенограм $f(x)$ як розв'язки рівняння (1), де правою частиною $h(x)$ є попередньо оброблені рентгенограми зразка (лінії 2-5 на рисунку 1), властивості якого підлягають визначенню, а інструментальна функція (ядро рівняння) $g(x)$ визначається за рентгенограмою еталону (лінія 1 на рисунку 1) — добре відпаленого зразка того ж матеріалу.

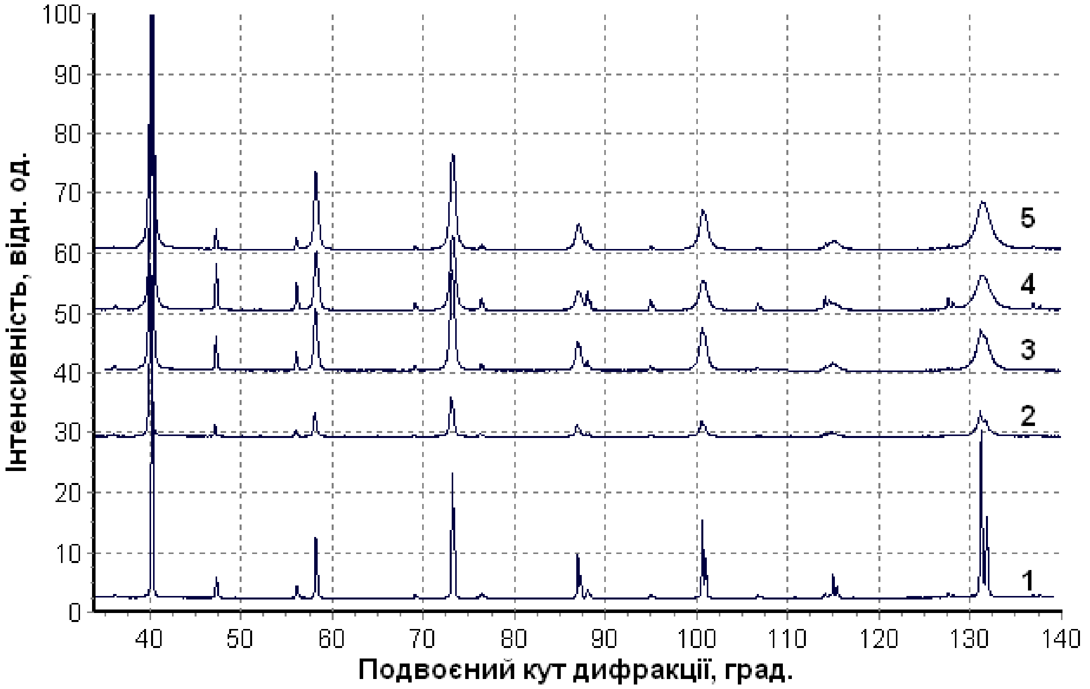


Рис. 1. Дифракційні лінії: 1 — вихідного зразку W; 2 — 5 порошків W після розмелу тривалістю 4, 8, 24 та 48 год.

Шляхом аналізу фізичних уширень $f(x)$ було визначено середні значення мікронапружень і розмірів ОКР (областей когерентного розсіювання) порошків вольфраму після розмелу різної тривалості (рис. 2). Визначені характеристики та їх залежності від тривалості розмелу були підтверджені експериментальними даними [7].

Щодо порошку карбіду вольфраму було визначено, що внаслідок розмелу тривалістю 72 год утворюються дві структурні складові, які відрізняються рівнем дисперсності. Так, для першої складової середній розмір ОКР становить близько 30 нм, а для другої спостерігається чітко виражена залежність розміру ОКР від кристалографічного напрямку (3 нм та 30 нм). Для першої структурної складової встановлено також, що рівень середньої величини мікронапружень досягає ~4 ГПа. Результати, одержані із застосуванням методу регуляризації Тихонова, добре узгоджуються із одержаними за допомогою традиційного методу гармонічного аналізу.

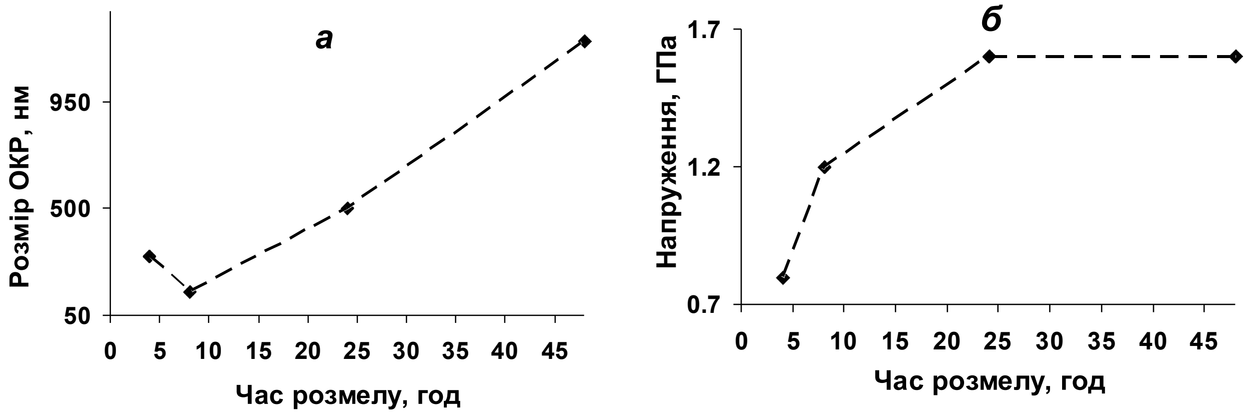


Рис. 2. Залежність від тривалості розмелу порошку W: а — середнього розміру ОКР; б — середньої величини мікронапружень.

Порівнюючи визначені структурні властивості порошків W та WC, робимо висновок, що результати розмелу цих порошків відрізняються. Так, для порошків вольфраму при їх тривалому розмелі характерно досягнення рівноважних станів, в яких процеси диспергування загальмовані вирівнюванням швидкостей накопичення дефектів (мікродеформацій) і їх релаксацією при руйнуванні і коалесценції частинок, що розмелюються. Середній розмір ОКР при цьому має однаковий рівень як для різних частинок, так і для різних кристалографічних напрямків і, після досягнення 70 нм при 8 год розмелу, при подальшому розмелі зростає до 1000 нм. У порошку карбіду вольфраму внаслідок розмелу, поряд із складовою з середнім розміром ОКР близько 30 нм, спостерігаємо нанодисперсну складову, що має форму витягнутих брусків чи пластинок, утворених, найімовірніше, сколом під час розмелу.

З точки зору застосування методу регуляризації Тихонова, два розглянуті випадки також істотно відрізняються. Так, визначення структурних характеристик карбіду вольфраму виявилося можливим із застосуванням класичного методу гармонічного аналізу і щодо застосування методу регуляризації Тихонова вказаний матеріал виступав в ролі тестового прикладу. Тим часом для порошків вольфраму застосовність методу гармонічного аналізу обмежена лише частиною дифракційних максимумів, що значно спотворило б результати аналізу фізичних уширень. Таким чином, застосуванням до розв'язання конкретних фізичних задач підтверджено більшу універсальність методу регуляризації Тихонова порівняно із методом гармонічного аналізу.

Як зазначено вище, розглянутий метод може бути застосований для розв'язання різних класів задач. У напрямку застосування до задач рентгеноструктурного аналізу, це, насамперед, дослідження залежності структурних властивостей порошку карбіду вольфраму від тривалості розмелу та визначення розглянутих структурних характеристик для інших матеріалів. А далі — визначення інших структурних характеристик, зокрема, дефектів кристалічної структури та їх розподілу.

Список літератури

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. — 288 с.

2. Сизиков В.С. Устойчивые методы обработки результатов измерений. — Эл. учебник. — СПб: ГИТМО(ТУ), 240 с. (http://de.ifmo.ru/--books/SIZIKOV.PDF или http://dsp-book.narod.ru/SIZIKOV.pdf).

3. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1990. — 232 с.

4. Роженко Н. М., Картузов В. В., Григорьєв О. М., Мелах Л. М. Застосування методу регуляризації Тихонова в рентгеноструктурному аналізі. — Міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті», 19–20 квітня 2013 р., Київ: Матеріали конф. — К.: НТУУ «КПІ», 2013. — 536 с. — Укр., рос., англ. — С. 141–145.

5. Вишняков Я. Д. Современные методы исследования структуры деформированных кристаллов. — М.: Металлургия, 1975. — 480 с.

6. Čerňanský M.: "Restoration and preprocessing of physical profiles from measured data" in «Microstructure analysis from diffraction», eds. Snyder R. L., Bunge H. J. and Fiala J. — Oxford University Press. — Oxford, 1999. — P.613-651.

7. Григорьев О. Н., Крячко Л. А., Бега Н. Д., Лаптев А. В., Головкова М. Е., Роженко Н.Н., Берсудский Е.И. Влияние шарового размола на структурные характеристики порошка вольфрама // Электронная микроскопия и прочность материалов. — Труды ИПМ НАН Украины. — 2013. — Вып. 19. — С. 114–122.

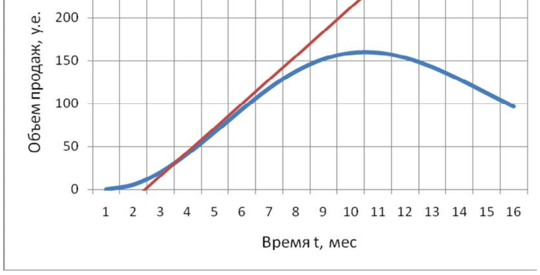
МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА ПРОДУКТА

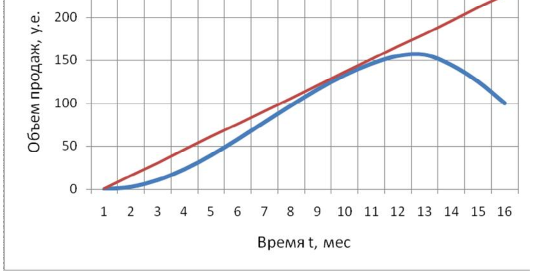
А. В. Розанов, М. В. Котова, И. Л. Воротников
Саратовский государственный аграрный университет им. Н. И. Вавилова, Саратов, Россия
arosanov@yandex.ru

Анализ и прогнозирование динамики жизненного цикла продукта (ЖЦП) играет важную роль в современном маркетинге, позволяя сбалансировать товарный ассортимент, оптимизировать соотношение новых, развивающихся и товаров, имеющих высокий спрос. Компьютерное моделирование дает возможность получать оптимальные или квазиоптимальные решения, параметры которых можно уточнять методами регрессионного анализа на основе ретроспективных данных. В настоящей работе проведено моделирование динамики ЖЦП товаров, имеющих устойчивый рынок сбыта (тракторы, комбайны, автомобили). Математическая модель ЖЦП представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, величины которых определяются по эмпирическим данным для товаров со стабильным спросом. Анализ решений показал, что если точка перегиба графика кривой зависимости объёма продаж от времени расположена ближе к началу координат, то это соответствует достаточно продолжительному периоду расширения рынка сбыта товара. Напротив, если точка перегиба смещается ближе к уровню насыщения, то это указывает на ускоренное «старение» товара и обострение конкуренции со стороны новых, технически более совершенных видов продукции. Полученные решения были сопоставлены с результатами прогнозирования на основе ассиметричной логистической функции вида:

$$L(t) = \frac{L_S}{(1 + \alpha \cdot e^{\beta t})^{\gamma}},$$

где $L(t)$ — объем продаж за определенный период, например, за месяц, L_S — уровень насыщения при $t \to \infty; \alpha, \beta, \gamma$ — некоторые константы, определяемые методами регрессионного анализа по тем же наборам эмпирических данных, как и в случае дифференциальной математической модели. Сопоставление результатов, полученных различными методами, показало, что качество прогнозирования динамики ЖЦП на основе дифференциальной модели оказывается выше для средне- и долгосрочного планирования сбыта отдельных групп товаров с большим объемом продаж. Логистическая модель дает лучшие результаты для краткосрочного прогнозирования деятельности всего предприятия в целом.





РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ ПРИ УЧЕТЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ СРЕДЫ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

[1] А. П. Рябушко, [2] И. Т. Неманова, [2] Т. А. Жур
[1]Белорусский национальный технический университет,
[2]Белорусский государственный аграрный технический университет,
Минск, Беларусь
tatyana-zhur@mail.ru

В связи с тем, что межпланетная среда (реликтовая материя) Солнечной системы — газопылевые облака, кометы, пояса астероидов и т.д. создает заметное дополнительное гравитационное поле, белорусская школа по проблеме движения тел сформулировала и решила ряд задач по движению тел при учете гравитационного поля среды в постньютоновском приближении общей теории относительности.

Согласно астрономическим данным последних лет распределение плотности среды ρ в Солнечной системе в первом приближении можно считать сферически симметричным и хорошо описываемым трехзвенной или четырехзвенной моделью [1], [2]. В этом случае в постньютоновском приближении общей теории относительности проинтегрированы уравнения Эйнштейна и уравнения геодезических линий, что позволило получить ряд интересных результатов, из которых отметим четыре.

1) Обратное смешение перигелиев орбит у внешних планет Солнечной системы в соответствии с найденным с точностью до вековых членов уравнением их орбит в полярных координатах r, ϕ (четырехзвенная модель, $k=\overline{1,4}$):

$$u=\frac{1}{r}=\frac{1}{p}\left\{1+e\cos\left[\left(1+\alpha_k^H-\alpha_0+\alpha_\rho\right)\phi\right]\right\}, \tag{1}$$

где p и e — параметр и эксцентриситет вращающегося эллипса; $\alpha_k^H=\dfrac{p^3}{m}b_k$, m — масса планеты, b_k — функция плотности среды в соответствующей зоне; $\alpha_0=\dfrac{3\gamma m}{c^2p}$ — релятивистская поправка, приводящая к знаменитому прямому смещению перигелия Меркурия; α_ρ — релятивистская поправка к смещению перигелия за счет учета гравитационного поля среды, которая на несколько порядков меньше α_k^H и α_0, и ею можно пренебречь.

Численные оценки в Солнечной системе показывают, что в (1) для внутренних планет Солнечной системы $\alpha_k^H-\alpha_0+\alpha_\rho<0$, т.е. смещение перигелиев прямое (как у Меркурия), а для внешних планет Солнечной системы $\alpha_k^H-\alpha_0+\alpha_\rho>0$, т.е. смещение перигелиев должно быть обратным.

2) Попутно решена проблема Pioneer Anomaly. Зарегистрированное космическими кораблями Pioneer 10 и Pioneer 11 на расстояниях (20–70) *а. е.* дополнительное ускорение $a_p = \left(8,74 \pm 1,33\right) \cdot 10^{-8} \text{см} \cdot \text{с}^{-2}$ создается гравитационным полем реликтовой материи (см. [2], (17)), а существование a_p является экспериментальным подтверждением предложенной нами теории.

3) Исследована задача трех тел, движущихся в среде. Показано, что учет гравитационного поля среды разрушает треугольную лагранжеву конфигурацию.

Получен закон ухода пробного тела из треугольной лагранжевой точки либрации при учете гравитационного поля среды. Доказано [3], что помещенное с нулевой скоростью в треугольную лагранжеву точку либрации (в L_4 или L_5) пробное тело при учете гравитационного поля среды уходит из нее, т.е. лагранжевых точек равновесия не существует. Но должны существовать другие точки равновесия, удаленные от L_4, L_5 на расстояния, зависящие от величины плотности среды ρ.

4) Рассмотрена ограниченная задача трех тел в случае одной звезды при учете светового давления. Изучена степень влияния светового давления на форму орбиты движения.

Получена система дифференциальных уравнений, которая точно проинтегрирована в случаях а) треугольных точек фотолибрации и б) коллинеарных точек фотолибрации.

Доказано, что существует бесконечное количество точек фотолибрации, которые во вращающейся системе координат заполняют две дуги окружности в случае треугольных решений и три отрезка в случае коллинеарных решений. Указаны уравнения, из которых находятся координаты точек фотолибрации.

Список литературы

1. Рябушко А. П., Жур Т. А. Релятивистское движение тела в гравитационном поле разреженной среды с притягивающим центром. // Сб. научн. статей 2-ой Международной научно-практич. конф. «Научно-инновационная деятельность и предпринимательство в АПК: проблемы эффективности и управления». Минск, 17-18 мая 2007 г. В 2-х частях. Часть 1. — С. 95–102.

2. Ryabushko A. P., Zhur T. A., Nemanova I. T. Motion of bodies and its stability in the General Relativity Theory. //American Institute of Physics, Melville, New York, 2010. Conference Proceedings, 1205. P. 148-154.

3. Рябушко А. П., Неманова И. Т., Жур Т. А. Решение лагранжевой ограниченной треугольной задачи трех тел при учете гравитационного поля среды // Вести НАН Беларуси. Серия физ.-мат. наук. — 2013. — №3. — С. 85–91.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ ПЛОСКИХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ НАНОКОМПОЗТНЫХ МАТЕРИАЛАХ

Е. В. Савельева, Я. В. Симчук, С. В. Синчило

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

ksav@hotmail.ru

Предметом публикации являются результаты теоретического исследования взаимодействия горизонтально и вертикально поляризованных поперечных упругих плоских волн при их распространении в гиперупругом материале, деформирование которого описывается нелинейной моделью Мурнагана. Использованное представление упругого потенциала позволяет исследовать квадратично и кубически нелинейные волновые эффекты в гиперупругом материале. При условии зависимости вектора перемещений только от одной пространственной переменной и времени, в рамках учета квадратичной и кубической нелинейностей в определяющих уравнениях, для распространяющихся вдоль оси x плоских волн решена задача, в которой было принято условие: первоначально на входе в среду возбуждаются только поперечные волны; продольные перемещения отсутствуют. Получены уравнения движения:

$$\rho u_{2,tt} - \mu\, u_{2,xx} = N_4 u_{2,xx}\left(u_{2,x}\right)^2 + N_6 u_{2,xx}\left(u_{3,x}\right)^2;$$

$$\rho u_{3,tt} - \mu\, u_{3,xx} = N_4 u_{3,xx}\left(u_{3,x}\right)^2 + N_6 u_{3,xx}\left(u_{2,x}\right)^2.$$

На их основании исследовалась задача об одновременном распространении поперечных волн двух видов: горизонтально и вертикально поляризованных. Начальные и граничные условия принимались в виде:

$$u_2\left(x,0\right) = u_3\left(x,0\right) = 0;\; u_2\left(0,t\right) = u_2^0 \cos\omega t;\; u_3\left(0,t\right) = u_3^0 \cos\omega t.$$

Решение было получено методом возмущений с точностью до третьего приближения в виде

$$u_2\left(x,t\right) = u_2^0 \cos\left(kx - \omega t\right) - \frac{k^3}{6\mu} u_2^0 \left(\left(u_2^0\right)^2 N_4 + \left(u_3^0\right)^2 N_6\right) x \sin 3\left(kx - \omega t\right),$$

$$u_3\left(x,t\right) = u_3^0 \cos\left(kx - \omega t\right) - \frac{k^3}{6\mu} u_3^0 \left(\left(u_3^0\right)^2 N_4 + \left(u_2^0\right)^2 N_6\right) x \sin 3\left(kx - \omega t\right).$$

Теоретический и численный, проведенный для двадцати различных нанокомпозитов, анализ полученного решения показал: при одновременном возбуждении на границе гиперупругой среды двух поперечных волн разного вида (поперечно и вертикально поляризованной) происходит их взаимодействие. В результате обе волны трансформируются в свои третьи гармоники. Таким образом, происходит переключение волнового процесса с одинарной на тройную частоту. При отсутствии такого взаимодействия переключение не происходит. По мере одновременного распространения двух волн различной мощности, происходит перекачка энергии из мощной волны в слабую.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ ИЗЛУЧЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИМ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕМ КОНТАКТИРУЮЩИМ С ЖИДКОСТЬЮ

В. Г. Савин, А. А Бабаев, В. В. Губская
НТУУ «Киевский политехнический институт», Киев, Украина
babaevaa@ukr.net

К настоящему времени в прикладных задачах гидроакустики, кроме вопросов связанных с обнаружением объектов которые контактируют с жидкостью, существуют проблемы связанные с их распознаванием и классификацией. Данной проблематике посвящена работа.

Целью представленной работы является сравнение теоретических и экспериментальных исследований нестационарных процессов излучения акустических импульсов цилиндрическим пьезопреобразователем контактирующим с жидкостью.

В качестве объекта измерения использовался поляризованный в радиальном направлении цилиндрический пьезопреобразователь изготовленный из материала марки ЦТБС-3, радиуса R, высоты ℓ и толщины h ($R = 0,0675$ м, $\ell = 0,38$ м, $h = 0,006$ м.).

Экспериментальные исследования проводились в акустическом бассейне НИИ Гидроприборов в соответствии с требованиями РД.8361-86. Измерения проводились в воде, где измерялось акустическое давление на поверхности излучателя.

Измерения проводились 10 раз для каждого положения гидрофона относительно преобразователя. Излучатель возбуждался на частотах $f = 11,2$ кГц, $f = 7,9$ кГц, что соответствует частотам пульсирующих колебаний цилиндра.

Отличие экспериментальных и теоретических значений акустического давления в экспериментальных точках составляет по прикладной теории около 8 % и практически отсутствует (в пределах точности проведенных расчетов и измерений) по линейной теории электроупругости.

Проводя анализ сравнения теоретических и экспериментальных результатов можно сделать вывод о применимости результатов на практике предложенных математических моделей цилиндрических пьезоэлектрических преобразователей (тонких электроупругих тел), основанной на линейной теории электроупругости и гипотезах Кирхгофа-Лява в нестационарных задачах гидроупругости при расчетах акустических преобразователей.

БИВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ И СИММЕТРИИ

В. М. Савчин

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

vsavchin@yandex.ru

Постановки многих задач приводят к краевым задачам с непотенциальными операторами. Их вариационный анализ предполагает, что известен соответствующий функционал — действие по Гамильтону. В работе [1] доказано, что в рамках функционалов Эйлера такие действия могут не существовать. Однако, если расширить класс функционалов, то становится возможным получение вариационной формулировки исходной краевой задачи. При этом может быть несколько различных (отличающихся не дивергентным подынтегральным слагаемым) функционалов, соответствующих исходной задаче. В этой связи возникает вопрос о взаимосвязи их вариационных симметрий и симметрий исходных уравнений.

Будем следовать обозначениям и терминологии работ [1-3].

Пусть задано операторное уравнение

$$N(u) = 0, \quad u \in D(N), \tag{1}$$

где $N : D(N) \subset U \to V$ — дифференцируемый по Гато оператор, U, V — линейные нормированные пространства над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, $D(N)$ — область определения оператора N. Будем считать, что $D(N)$ — выпуклое множество, $D(N) = U$.

Предположим, что оператор N задачи (1) является потенциальным на $D(N)$ относительно некоторой фиксированной непрерывной невырожденной билинейной формы

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times U \to \mathbb{R}.$$

Тогда соответствующее действие по Гамильтону имеет вид [1]

$$F_N[u] = \int_0^1 \langle N(\tilde{u}(\lambda)), u - u_0 \rangle \, d\lambda, \tag{3}$$

где $\tilde{u}(\lambda) = u_0 + \lambda(u - u_0)$, u_0 — фиксированный элемент из $D(N)$.

Рассмотрим на $D(N)$ бесконечно малое преобразование, определяемое формулой

$$\bar{u} = u + \varepsilon S(u), \tag{4}$$

где $S : D(N) \to D(N'_u)$ — генератор преобразования, $\overline{R(S)} = U$, N'_u — производная Гато оператора N в точке $u \in D(N)$.

Определение 1. Преобразование (4) называется симметрией функционала (3) на $D(N)$, если

$$F_N[u + \varepsilon S(u)] = F_N[u] + r(u, \varepsilon S(u)) \qquad \forall u \in D(N),$$

причем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{r\left(u,\varepsilon S\left(u\right)\right)}{\varepsilon}=0.$

Отметим, что оператор S называется также генератором симметрии.

Теорема 1. Преобразование (4) является симметрией функционала (3) на $D\left(N\right)$ тогда и только тогда, когда

$$N\left(u\right),S\left(u\right)=0 \qquad \forall u\in D\left(N\right).$$

Теорема 2. Если S_1, S_2 — генераторы симметрий функционала (3) на $D\left(N\right)$, то их коммутатор

$$\left[S_1,S_2\right]\left(u\right)=S'_{1u}S_2\left(u\right)-S'_{2u}S_1\left(u\right) \tag{5}$$

также является генератором симметрии функционала (3) на $D\left(N\right)$.

Следствие. Генераторы симметрии функционала (3) образуют алгебру Ли относительно операции (5).

Таким образом, в определенных случаях теорема 2 может быть использована для построения симметрий функционала (3) по известным хотя бы двум генераторам симметрий.

Определение 2. Преобразование (4) называется симметрией уравнения (1), если для любого достаточно малого ε и любого решения u этого уравнения функция $\overline{u}$ вида (4) также является решением этого уравнения.

Теорема 3. Если преобразование (4) — симметрия функционала (3), то оно является также симметрией уравнения (1).

Теорема 4. Если оператор N уравнения (1) является потенциальным с потенциалом F, а также B-потенциальным с потенциалом G, и при этом P, Q — соответствующие им генераторы симметрий на $D(N)$, то оператор

$$S\left(u\right)= P\left(u\right)+BQ\left(u\right)$$

является симметрией функционала F.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00524).

Список литературы

1. Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г. Вариационные принципы для непотенциальных операторов // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. – М.: ВИНИТИ, 1992. — Т.40.

2. Савчин В. М., Будочкина С. А. Симметрии и первые интегралы в механике бесконечномерных систем // Доклады Академии наук. — 2009. — Т. 425. — № 2. — С. 169–171.

3. Будочкина С. А., Савчин В. М. Вариационные симметрии эйлеровых и неэйлеровых функционалов // Дифференциальные уравнения. — 2011. — Т. 47. — №6. — С. 811–818.

4. Савчин В. М., Будочкина С. А. О взаимосвязи симметрий функционалов и уравнений // Доклады Академии наук, 2014 (принято в печать).

УМОВИ ЗБІЖНОСТІ ТА АЛГОРИТМІЧНІ АСПЕКТИ ПРОГРАМНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ FD-МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ КЛЯЙНА — ГОРДОНА

Д. А. Сембер
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
semberdmitry@gmail.com

Запропоновано функціонально-дискретний метод (FD-метод) розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Кляйна — Гордона виду:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\mathrm{N}(u(x,y))u(x,y)=f(x,y),\ u(x,0)=\phi(x),u_y'(x,0)=\psi(y), \quad (1)$$

де $(x,y)\in\Omega=\left\{(x,y)\middle|-\infty<x<+\infty,y>0\right\}$.

Рівняння Кляйна — Гордона, яке є релятивістичною версією рівняння Шредінґера, являється моделлю, яка описує хвильову функцію нейтрально зарядженої елементарної частинки [1]. В астрофізиці, в поєднанні з рівнянням Масквелла, рівняння Кляйна — Гордона описує мінімально зв'язане заряджене поле бозона в сферично-симетричному просторі-часі [2] і т. д.

Запропонований функціонально-дискретний метод розв'язування задачі Коші (1) походить з функціонально-дискретного методу розв'язування задачі Штурма — Ліувілля [3], і являє собою симбіоз скінчено-різницевого методу та методу гомотопій, завдяки чому йому притаманні основні властивості як аналітичнх, так і дискретних методів одночасно.

Припускається, що для задачі Коші (1) виконуються умови:

$$N(u)\in C^{(\infty)}\left(\mathbb{R}\right),\phi(x)\in C_b^2\left(\mathbb{R}\right),\psi(x)\in C_b^1\left(\mathbb{R}\right),f(x,y)\in C_b^1\left(\mathbb{R}^2\right), \quad (2)$$

де $C_b^k(\mathbb{R}^m)$ — підмножина простору $C^k(\mathbb{R}^m)$ неперервно-диференційовних на $\mathbb{R}^m$ функцій до k-го порядку включно, до якої входять функції $f(x)\in C^k(\mathbb{R}^m)$, що задовольняють нерівність

$$\left\|f(x)\right\|_{C_b^k(R^m)}\overset{\mathrm{def}}{=}\max_{\alpha\le k}\sup_{x\in R^m}\left|\partial^\alpha f(x)\right|<\infty,$$

де $\alpha=(\alpha_1,\ldots\alpha_n),\alpha_i\ge 0,\left|\alpha\right|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ — мультиіндекс, а $\partial^\alpha f(x)$ — частинна похідна порядку $\left|\alpha\right|$. Таким чином є виконаними умови теореми про локальне існування і єдність розв'язку задачі Коші (1) (див. [4]). Надалі будемо розглядати задачу Коші (1) в деякій області $D\subseteq\Omega$, де

$$D=\left\{\begin{array}{l}(x,y)\big|0<y<Y_M,X_M-(Y_M-y)<x<X_M+(Y_M-y),\\ -\infty<X_M<+\infty,0<Y_M<\varepsilon\end{array}\right\},$$

а стала ε визначається тією ж теоремою про інування і єдність розв'язку задачі (1).

Згідно із загальною семою FD-методу [5] ми наближаємо точний розв'язок $u(x,y)$ задачі (1) функцією $\overset{m}{u}(x,y)$, яка може бути представлена у вигляді суми $\overset{m}{u}(x,y) = \sum_{k=0}^{m} \overset{(k)}{u}(x,y), m \in \mathbb{N}$, яку називатимемо наближенням m-го рангу. Невідому функцію $\overset{(0)}{u}(x,y)$ ми зможемо визначити як розв'язок деякої нелінійної задачі Коші з кусково-сталин коефіцієнтом, яка називається базовою задачею, а функції $\overset{(k)}{u}(x,y), k = 1,2,\dots m$ можуть бути знайдені рекурсивно як розв'язки деякої послідовності лінійних задач Коші. Мають місце наступні теореми про збіжність FD-методу.

Теорема 1. Нехай $u(x,y)$ — розв'язок задачі Коші для рівняння Кляйна — Гордона (1) в області D, а $\overset{(0)}{u}(x,y)$ — розв'язок деякої нелінійної задачі Коші з кусково-сталим коефіцієнтом. Тоді для довільного достатньо малого значення h має місце наступна асимптотична рівність

$$\left\| u(x,y) - \overset{(0)}{u}(x,y) \right\|_{\infty,D} = O\left(h\right),$$

де

$$\left\| u(x,y) - \overset{(0)}{u}(x,y) \right\|_{\infty,D} = \max_{(x,y)\in D} \left| u(x,y) - \overset{(0)}{u}(x,y) \right|.$$

Теорема 2. Нехай для задачі Коші (1) виконуються умови (2). Тоді FD-метод для задачі Коші (1) збігається до точного розв'язку задачі в області D. Крім того мають місце наступні оцінки абсолютної похибки методу:

$$\left\| u(x,y) - \overset{(k)}{u}(x,y) \right\|_{\infty,1,D} \le \frac{cR}{(k+1)^{1+\delta}(R-h)} \left(\frac{h}{R}\right)^{k+1}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

де

$$\left\| * \right\|_{\infty,1,D} = \max\left\{ \left\| * \right\|_{\infty,D}, \sqrt{\left\| \partial / \partial x \, * \right\|_{\infty,D}^2 + \left\| \partial / \partial y \, * \right\|_{\infty,D}^2} \right\},$$

h — крок сітки FD-методу, $h < R,$ а додатні дійсні сталі c, R, δ залежать лише від вхідних даних задачі (1).

Разом з тим варто відзначити, що хоча розв'язки базової задачі Коші для відшукання функцій $\overset{(k)}{u}(x,y), k = 0,2,\dots m$ можуть бути знайдені в явному аналітичному вигляді за допомогою формули д'Аламбера, та застосування FD-методу у виключно аналітичному вигляді є досить проблематичним навіть для простих функцій $N(u), f(x,y), \phi(x), \psi(x)$. Це пов'язано, насамперед, зі складністю аналітичного обчислення інтегралів, що фігурують у аналітичному представленні цих розв'язків. Тому для обчислення функцій $\overset{(k)}{u}(x,y), k = 0,2,\ldots m$ необхідно використовувати чисельні методи інтегрування. Зокрема було розроблено алгоритм і програмне забезпечення для наближеного обчислення інтегралів, що фігурують в аналітичному представлені функцій $\overset{(k)}{u}(x,y), k = 0,2,\ldots m$, з використанням квадратурних формул Сімпсона. Чисельні приклади, розв'язані з використанням вказаного алгоритму і програмного забезпечення, підтверджують суперекспоненціальну швидкість збіжності FD-методу.

Список літератури

1. Li Yang. Numerical studies of the Klein — Gordon — Schrödinger equations. A thesis submitted for the degree of master of science, 2006 – (available at http://www.math.nus.edu.sg/~bao/thesis/Yang-li.pdf).

2. C. Dariescu and M.A. Dariescu. Transitionand regeneration rates in charged boson stars via perturbative calculations // Int. Journal of Modern Phy. A. — 2005. — 20. — P. 2326–2330.

3. Макаров В. Л. Функционально-дискретный метод решения задачи Штурма — Лиувилля произвольного порядка точности // Докл. АН СССР. — 1991. — 320, №1. — С. 391–396.

4. Hans Ringström. Non-linear wawe equations. — (available at http://www.math.kth.se/~hansr/nlw.pdf).

5. I. I. Lazurchak, V. L. Makarov, and D. Sytnyk. Two-sided Aproximations for Nonlinear Operator Equations // Computation Metods in Applied Mathematics. — 2008. — Vol.8, No. 4. — P. 386–392.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И АВТОКОЛЕБАНИЯ ЧАСТИЧНЫХ ВЕНТИЛИРУЕМЫХ КАВЕРН

В. Н. Семененко, Т. Н. Семененко, Т. В. Крыжановская
Институт гидромеханики НАН Украины,
Государственный экономико-технологический университет транспорта,
Киев, Украина
vnsvns60@gmail.com

Постановка задачи. Рассмотрена задача об устойчивости и автоколебаниях вентилируемой каверны, которая замыкается на цилиндрическом теле (т.н. частичной каверны), возникающая при исследовании динамического поведения подводных суперкавитирующих аппаратов, а также некоторых гидравлических устройств автоматического управления.

Если каверна замыкается на цилиндрическом теле диаметром $D_b < D_c$, где D_c – наибольший диаметр каверны, то ее безразмерная длина равна l. Вводится также параметр $\bar{Q}_b$ — степень загромождения каверны твердым телом:

$$l = \frac{1+\sqrt{1-\bar{D}_b^2}}{2}, \qquad \bar{D}_b = \frac{D_b}{D_c} < 1; \qquad \bar{Q}_b = \frac{Q_b}{Q_c} < 1 ,$$

где Q_c — объем каверны; Q_b — объем тела в каверне. Для нахождения переменного давления в нестационарной каверне используется уравнение баланса массы газа в каверне

$$\frac{d}{dt}\Big[\big(\beta - \bar{\sigma}(t)\big)\,\big(Q_c(t) - Q_b(t)\big)\Big] = \big(\beta - 1\big)\big[\dot{q}_{in} - \dot{q}_{out}(t)\big],$$

где $\beta = \sigma_v / \sigma$; $\sigma,\ \sigma_v$ — действительное и паровое числа кавитации; $\dot{q}_{in}$, $\dot{q}_{out}$ — коэффициенты объемных расходов поддува газа в каверну и уноса из каверны.

Неустойчивость вентилируемой каверны, замыкающейся на теле. Нестационарное поведение вентилируемой каверны, замыкающейся на теле, описывается системой нелинейных функциональных уравнений с запаздывающим аргументом [1–3], которая рассматривается как динамическая система с тремя фазовыми переменными $l(t)$, $\sigma(t)$ и $Q_c(t)$.

Линеаризируя ее в окрестности стационарного решения, получаем характеристическое уравнение, которое имеет конечную серию чисто мнимых корней (т.е. частот нейтральных колебаний), число которых уменьшается с ростом интенсивности уноса газа $\bar{C}_b$. Практическое значение имеет наименьшее значение параметра $\beta_1 = \beta_{cr}$, поскольку при $\beta < \beta_{cr}$ и $\beta > \beta_{cr1}$ каверна асимптотически устойчива, а при $\beta_{cr} < \beta < \beta_{cr1}$ – неустойчива (рис. 1).

Анализ корней характеристического уравнения показал, что при возрастании относительного диаметра тела $\bar{D}_b$ параметр β_{cr} увеличивается, а размерная частота возникающих колебаний f падает. При росте степени загромождения каверны корпусом тела $\overline{Q}_b$, наоборот, параметр β_{cr} уменьшается, а частота колебаний растет. Рост интенсивности уноса газа $\overline{C}_b$ приводит к возрастанию как β_{cr}, так и приведенной частоты колебаний *k*.

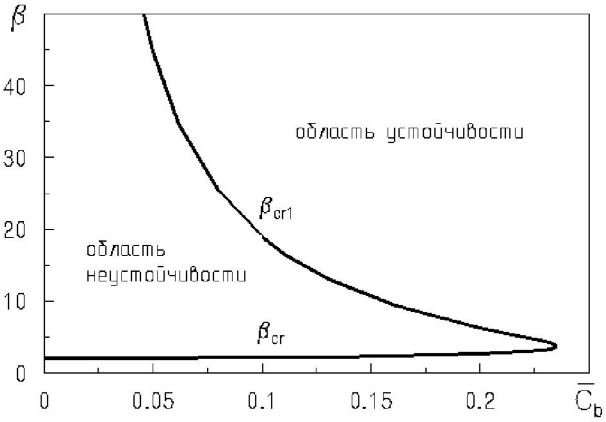


Рис. 1. Область линейной неустойчивости

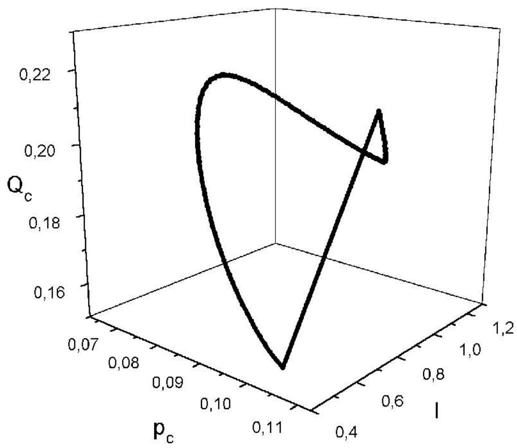


Рис. 2. Разрывный предельный цикл

Автоколебания частичной вентилируемой каверны. Численные расчеты развития 1-ой моды нелинейных автоколебаний после потери устойчивости каверны показали, что при этом возможно установление как разрывных, так и неразрывных автоколебаний. Неразрывные автоколебания устанавливаются при относительно небольших значениях $\beta > \beta_{cr}$ и значениях $\dot{q}_{in}$, близких к равновесному. При увеличении каждого из параметров β, $\dot{q}_{in}$ автоколебания становятся разрывными.

Частота и амплитуда автоколебаний каверны определяется параметрами β, $\dot{q}_{in}$, а также $\overline{D}_b$ и $\overline{Q}_b$. На рис. 2 показан пример трехмерного фазового портрета разрывных автоколебаний частичной вентилируемой каверны при $\overline{D}_b = \overline{Q}_b = 0.5$ (здесь $p_c = \sigma_0\left(\beta - \overline{\sigma}\right)$ — безразмерное давление в каверне).

Увеличение диаметра тела ведет к уменьшению приведенной частоты *k* 1-й моды автоколебаний, а возрастание степени загромождения каверны телом − к ее росту. Размах колебаний давления в каверне ведет себя так же, а размах колебаний длины каверны − противоположным образом.

Возрастание параметра β сопровождается возбуждением новых колебательных мод с более высокими частотами, что согласуется с линейным анализом устойчивости. При этом спектральный состав нелинейных колебаний каверны усложняется.

Список литературы

1. Семененко В. Н. Неустойчивость вентилируемой каверны при замыкании на теле // Прикладна гідромеханіка. — 2011. — Т. 13, № 3. — С. 76−81.

2. Семененко В. Н. Пульсации вентилируемых каверн при различных условиях замыкания // Прикладна гідромеханіка. — 2011. — Т. 13, № 4. — С. 62–67.

3. Семененко В. Н., Семененко Т. Н. Численное исследование динамической системы с переменным запаздыванием // Збірник наукових праць Державного економіко-технологичного университету транспорту. Серія «Транспортні системи і технології». — 2012, Вип. 20. — С. 170−178.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С МНОГОСЛОЙНЫМ НЕОДНОРОДНЫМ ОСНОВАНИЕМ В УСЛОВИЯХ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

П. К. Семенов, З. С. Аблемова
СГТУ им. Ю. А. Гагарина, Саратов, Россия

Рассматриваются вопросы построения разрешающего уравнения и его численной реализации применительно к взаимодействию цилиндрической нелинейно-упругой оболочки с многослойным неоднородным основанием и температурным полем с учетом зависимости свойств нелинейно-упругого материала оболочки от температуры и времени эксплуатации осуществляется в компонентных соотношениях, которые принимаются в форме деформационной теории пластичности. Функциональная зависимость нелинейной диаграммы деформирования материала оболочки принимается в виде:

$$\sigma_i(\varepsilon_i, T, \tau) = E(T, \tau)\varepsilon_i - m(T, \tau)\varepsilon_i^3.$$

Здесь T — температура, τ — время. Такие зависимости предполагают одинаковые сопротивления материалов в растянутой и сжатой зонах и хорошо описывают реальные свойства широкого класса конструкционных материалов. Распределение температуры по толщине оболочки считаем линейным. Функции $E(T,\tau)$ и $m(T,\tau)$ могут быть построены по результатам численной обработки нелинейных диаграмм ползучести при различных температурах и диаграмм ползучести при различных напряжениях и температурах. Установлено, адекватное использование зависимостей:

$$E(T,\tau) = E_0(\tau) + E_1(\tau)T + E_2T^2 \exp(-\tau),$$

$$m(T,\tau) = m_0(\tau) + m_1(\tau)T + m_2T^2 \exp(-\tau)$$

где $E_0(\tau), E_1(\tau), m_0(\tau), m_1(\tau)$ принимаются в виде квадратичных полиномов от τ.

Основание моделируется конечным числом слоев, работающих в условиях плоской задачи и описываемых соотношениями нелинейно-упругой среды. Для аппроксимации нелинейных свойств слоев основания используется кубическая зависимость П. А. Лукаша. Рассматривая систему «цилиндрическая оболочка — основание» и применяя к совокупности упомянутых нелинейных соотношений известные процедуры вариационного метода Власова и метода последовательных возмущений параметров Петрова получаем разрешающее линеаризованное дифференциальное уравнение осесимметричной деформации нелинейно-упругой цилиндрической оболочки, взаимодействующей с многослойным неоднородным основанием с учетом зависимости нелинейных свойств материала оболочки от температуры и времени эксплуатации. Наличие приращений трех ведущих параметров (нагрузки, температуры, времени) в разрешающем уравнении позволяет численно моделировать реальные условия эксплуатации системы «оболочка-основание».

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАСЧЕТА НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ СТЕРЖНЕВОЙ ПЛАСТИНЫ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С НЕОДНОРОДНЫМ ОСНОВАНИЕМ

В. В. Семко, П. К. Семенов

СГТУ им. Ю. А. Гагарина, Саратов, Россия

Данная задача представляет практический интерес в области расчета конструкций фундаментов с учетом реальных свойств материалов системы «конструкция-основание». Стержневая пластина представлена в виде регулярной системы перекрестных балок из физически нелинейного материала, загруженной сосредоточенными силами в узлах. Численный анализ НДС таких систем эффективно реализуется методом двойной аппроксимации, использование первого приближения которого обеспечивает достаточную точность решения. Материал элементов РСПБ считаем несжимаемым и нелинейно-упругим, процесс нагружения активным. Нелинейные свойства элементов РСПБ учитываются в компонентных соотношениях зависимостью $\sigma = E\varepsilon - m\varepsilon^3$. Таким зависимостям удовлетворяют реальные диаграммы деформирования широкого класса конструкционных материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию в области малой физической нелинейности, представляющей интерес в строительных приложениях. Применяя к исходным нелинейным соотношениям для РСПБ процедуру линеаризации в соответствии с методом последовательных нагружений получаем для каждого этапа нагружения линейное конечно-разностное уравнение относительно приращения функции узловых прогибов разложение в соответствии с первым приближением метода двойной аппроксимации и выполняя известные выкладки, получаем систему конечно-разностных уравнений для приращений искомых функций каждого направления. Основание системы моделируется системой перекрестных сжимаемых слоев, в соответствии с структурой РСПБ, лежащих на недеформируемом скальном массиве. Функция осадки основания для слоя каждого направления, согласно вариационному методу Власова представляется разложением в виде произведения функций с разделенными переменными. Неоднородность среды основания определяется зависимостью его свойств от параметра влажности. Система нелинейных конечно-разностных уравнений относительно искомых узловых перемещений линеаризуется на основе использования метода последовательных возмущений параметров. Выражая узловой отпор основания и подставляя его в систему линейных конечно-разностных уравнений для РСПБ, получаем разрешающую линеаризованную систему конечно-разностных уравнений взаимодействия нелинейно-упругой стержневой плиты с неоднородным основанием для каждого этапа нагружения плиты. Наличие приращений внешней узловой нагрузки и параметра влажности основания можно моделировать реальные условия эксплуатации и путем численного эксперимента исследовать НДС системы «стержневая плита - основание».

РОЗВ'ЯЗКИ СОЛІТОННОГО ТИПУ РІВНЯННЯ СИНУС-ГОРДОН

М. І. Сєров, Л. М. Блажко
Полтавський національний технічний університет ім. Юрія Кондратюка, Полтава, Україна,
m.serov@ukr.net, LBlazhko@mail.ru

Розглянемо нелінійне хвильове рівняння

$$u_{00} - u_{11} + \sin u = 0, \tag{1}$$

де $u = u(x_0, x_1)$, яке в літературі відоме як рівняння синус-Гордон (СГ). Рівняння СГ є одним з найбільш відомих рівнянь теорії солітонів.

За допомогою ітеративної процедури нелокального розмноження розв'язків рівняння синус-Гордон ми розглядаємо побудову розв'язків типу солітонних для рівняння (1). В результаті побудовано ланцюжок розв'язків для рівняння синус-Гордон:

$$0 \to 4\arctan e^{x_1} \to 4\arctan \frac{-x_0}{\cosh x_1} \to$$

$$\to 4\arctan e^{-x_1} \frac{c + x_1 + \cosh x_1 \sinh x_1 + \cosh^2 x_1 + x_0^2}{c + x_1 + \cosh x_1 \sinh x_1 - \cosh^2 x_1 - x_0^2} \to$$

$$\to 4\arctan \frac{(\frac{2}{3}x_0^3 + 2x_0 + c_4)\cosh x_1 - 2x_0 x_1 \sinh x_1}{\frac{1}{3}x_0^4 - c_4 x_0 + x_1^2 + \cosh^2 x_1} \to$$

$$\to 4\arctan e^{x_1} \frac{(\cosh^2 x_1 + A - B)e^{2x_1} + C + D}{\cosh^2 x_1 + A + B + (C - D)e^{2x_1}},$$

де $A = \frac{1}{9}x_0^6 + \frac{1}{6}x_0^4 + \frac{3}{2}x_0^2 + x_0^2 x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^2 + 2c_5 x_1,$

$$B = \frac{1}{3}x_0^4 x_1 + 2x_0^2(x_1 + c_5) - x_1(x_1^2 + 1) + c_5,$$

$$C = \frac{1}{6}x_0^4 + \frac{3}{2}x_0^2 + \frac{1}{2}x_1^2, \qquad D = (x_0^2 + 1)x_1 - c_5.$$

Проаналізувавши графіки одержаних розв'язків та їх проекцій, ми бачимо, що всі вони мають вигляд хвилі, що не змінює свою форму зі зміною часу. У зв'язку з цим можна зробити висновок, що знайдені нами розв'язки $\overset{2}{u}$ — $\overset{5}{u}$, як і $\overset{1}{u}$, є розв'язками солітонного типу рівняння синус-Гордон.

ГАЛІЛЕЇВСЬКА ІНВАРІАНТНІСТЬ БАГАТОВИМІРНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ РЕАКЦІЇ — ДИФУЗІЇ

М. І. Сєров, О. М. Омелян
Полтавський національний технічний університет ім. Юрія Кондратюка, Полтава, Україна
mvusata@gmail.ru, aomelyan@ukr.net

Для випадку *n* просторових змінних система нелінійних рівнянь реакції — дифузії може бути записана у вигляді:

$$U_0 = \partial_c[F(U)U_c] + G(U), \qquad (1)$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $G(U) = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}$ $u^a = u^a(x_0, \vec{x})$, $f^{ab} = f^{ab}(U)$, $g^a = g^a(U)$ – довільні гладкі функції, $a, b = \overline{1,2}$, $c = \overline{1,n}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Система рівнянь вигляду (1) широко застосовується для опису багатьох фізичних, хімічних процесів та явищ природи, пов'язаних з реакцією речовин під час їх взаємної дифузії.

В роботах [1]–[5] досліджено галілеївську інваріантність одновимірної системи (1) зі сталою матрицею дифузії.

В даній роботі поставлено та розв'язано задачу знаходження систем рівнянь вигляду (1), інваріантних відносно лінійного зображення алгебри Галілея з базисними генераторами вигляду:

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b, \quad G_a = x_0\partial_a + x_aQ_1, \quad Q_1 = (\alpha_{ab}u^b + \beta_a)\partial_{u^a}, (2)$$

та її розширень операторами:

$$D = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a + Q_2, \quad \Pi = x_0^{\,2}\partial_0 + x_0x_a\partial_a + \tfrac{1}{2}\vec{x}^{\,2}Q_1 + x_0Q_2 + Q_3,$$

де $Q_2 = (\gamma_{ab}u^b + \delta_a)\partial_{u^a}, Q_3 = (\lambda_{ab}u^b + \mu_a)\partial_{u^a}$, $\partial_{u^a} = \dfrac{\partial}{\partial u^a}$; α_{ab}, β_a, γ_{ab}, δ_a, λ_{ab}, μ_a — const; $a, b = \overline{1,n}$, та Q_1, Q_2, Q_3, задовольняють умови:

$$[Q_1; Q_2] = 0, \qquad [Q_1; Q_3] = 0, \qquad [Q_2; Q_3] = 2Q_3.$$

Серед одержаних результатів наведемо наступний.

Теорема. Система (1) при умові $\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle \neq 0$, де

$$\langle 1\rangle = f^{11} + f^{22}, \langle 2\rangle = f^{11} \cdot f^{22} - f^{12} \cdot f^{21},$$

інваріантна відносно алгебри Галілея (2) тоді і тільки тоді, коли вона локально еквівалентна системам:

$$U_0 = \partial_c\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} U_c\right] + \begin{pmatrix} u^1\phi^1(\omega) \\ u^2\phi^2(\omega) \end{pmatrix},$$

при $Q_1 = -\frac{1}{2\lambda_1} u^1\partial_{u^1} - \frac{1}{2\lambda_2} u^2\partial_{u^2}$, де $\omega = \dfrac{(u^2)^{\lambda_2}}{(u^1)^{\lambda_1}}$;

$$U_0 = \partial_c\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ m\lambda_1 & \lambda_1 \end{pmatrix} U_c\right] + \begin{pmatrix} u^1\phi^1(\omega) \\ u^2\phi^1(\omega) + u^1\phi^2(\omega) \end{pmatrix},$$

при $Q_1 = -\frac{1}{2\lambda_1}(u^b\partial_{u^b} - mu^1\partial_{u^2})$, де $\omega = \dfrac{u^2}{u^1} + m\ln u^1$;

$$U_0 = \partial_c\left[\begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix} U_c\right] + \begin{pmatrix} u^1\phi^1(\omega) + u^2\phi^2(\omega) \\ -u^1\phi^2(\omega) + u^2\phi^1(\omega) \end{pmatrix},$$

при $Q_1 = -\frac{1}{2(k^2+1)}(ku^b\partial_{u^b} + u^2\partial_{u^1} - u^1\partial_{u^2})$, де $\omega = 2k \operatorname{arctg}\dfrac{u^2}{u^1} - \ln \vec{u}^{\,2}$;

$$U_0 = \partial_c\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & g(u^2) \end{pmatrix} U_c\right] + \begin{pmatrix} u^1\phi^1(\omega) \\ \phi^2(\omega) \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

при $Q_1 = -\frac{1}{2\lambda_1} u^1\partial_{u^1}$, де $\omega = u^2$;

при цьому ϕ^1, ϕ^2 — довільні гладкі функції, $\lambda_1, \lambda_2, m, k$ — довільні сталі, $c = \overline{1, n}$, $b = \overline{1, 2}$.

Серед одержаних систем система (3) знаходить широке застосування при описі біологічних процесів. Її використовують в якості математичної моделі розповсюдження бактерій та інших мікроорганізмів під впливом різних сторонніх факторів навколишнього середовища [6], [7].

Список літератури

1. Cherniha R. M. and King J.R. Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction-diffusion systems: I // J. Phys. **A 33** (2000), 267–282.
2. Cherniha R. M. and King J.R. Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction-diffusion systems: I. Addendum // J. Phys. **A 33** (2000), 7839–7841.
3. Nikitin A. G. and Wiltshire R., Systems of Reaction Diffusion Equations and their symmetry properties // J. Math. Phys. **42** (2001), 1667–1688.
4. Cherniha R. M. and King J.R. Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction-diffusion systems: II // J. Phys. **A 36** (2002), 405–425.
5. Nikitin Anatoly G. Group Classification of Systems of Nonlinear Reaction-Diffusion Equations. Ukrainian Marhematical Bulletin. **2** (2005), № 2, 153–204.
6. Keller E.F., Segel L.A. Model for chemotaxis // J. Theor. Biol., 1971, **30**, P.225–234.
7. Adler J. Chemotaxis in bacteria // Science, 1996, **153**, P. 708–716.

КОНФОРМНА ІНВАРІАНТНІСТЬ НЕЛІНІЙНОГО ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ Д'АЛАМБЕРА

М. І. Сєров, М. М. Сєрова
Полтавський національний технічний університет ім. Юрія Кондратюка, Полтава, Україна,
mvusata@gmail.com

Розглянемо квазілінійне рівняння другого порядку

$$F^{\mu\nu}u_{\mu\nu} + G = 0, \tag{1}$$

де $F^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}(u, \underset{1}{u})$, $G = G(u, \underset{1}{u})$ — довільні гладкі функції, $u = u(x) \in R^1, x = (x_0, \vec{x}) \in \mathrm{R}^{1+n}$, $\underset{1}{u}$ — сукупність похідних 1-го порядку функції u, $u_{\mu\nu} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $\mu, \nu = \overline{0, n}$. За індексами, які повторюються розуміється сума від 0 до 2.

В роботах [1], [2] для випадку $n = 1$ ми, з точністю до перетворень еквівалентності, описали всі можливі рівняння класу (1), інваріантні відносно алгебри Пуанкаре $AP(1,1)$, розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,1)$ та конформної алгебри $AC(1,1)$.

В даній роботі ми ставимо аналогічну задачу для випадку $n = 2$, тобто встановимо вигляд функцій $F^{\mu\nu}$ і G при яких рівняння (1) буде інваріантне відносно конформної алгебри $AC(1,2)$.

В результаті проведених досліджень отримано наступне твердження.

Теорема. Рівняння $\Box u = (\lambda\sqrt{u_\nu u^\nu} + \dot{\alpha}_\nu u^\nu)\dfrac{u_\mu u^\mu}{\alpha_\sigma u^\sigma}$ інваріантне відносно конформної алгебри $AC(1,2)$, базисні генератори якої мають вигляд

$$AC(1,2) = < \partial_\mu, J_{\mu\nu} = x^\mu \partial_\nu - x^\nu \partial_\mu + m^{\mu\nu}(u)\partial_u, D = x_\mu \partial_\mu,$$
$$K_\mu = 2x^\mu D - x^2 \partial_\mu + 2m^{\mu\nu}x_\nu \partial_u >,$$

де $m^{01} = \operatorname{sh} u, m^{02} = 1, m^{12} = \operatorname{ch} u, m^{\mu\nu} = -m^{\nu\mu}, \alpha_\nu u^\nu = \operatorname{ch} u \cdot u_0 - u_1 + \operatorname{sh} u_2, \dot{\alpha}_\nu = \dfrac{d\alpha_\nu}{du}$, λ — довільна стала, $\Box = \dfrac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \triangle$.

Список літератури

1. Блажко Л. М. Інваріантність квазілінійного рівняння другого порядку відносно конформної алгебри / Праці Ін-ту математики НАН України. — 2001. — Т. 36. — С. 40–44.

2. Сєров М. І., Блажко Л. М. Квазілінійні диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку / Науковий вісник Ужгородського університету. — 2013. — 24. — № 1. — С. 154–165.

ИНТЕРВАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ
ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

А. С. Сиренко

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Киев, Украина

sandrew@online.ua

В настоящем докладе будут рассматриваться системы линейных разностных уравнений с интервально заданными коэффициентами с запаздыванием. Получены достаточные условия асимптотической устойчивости. При доказательстве используется второй метод Ляпунова. Рассмотрим, так называемые, линейные разностные системы с запаздыванием.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bx(k-m),\ k = 1,2,3,... \tag{1}$$

Для нахождения решения задачи Коши системы (1) надо задавать состояние системы уже на всем промежутке предистории, т.е. $x(k) = x_k$, $k = -m, -m+1, -m+2, ..., 0$. Нулевое решение $x(k)$ системы (1) называется устойчивым по Ляпунову, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого другого решения $x(k)$, при $k = 1,2,...$ будет выполняться $|x(k)| < \varepsilon$, лишь только $\|x(0)\|_m < \delta(\varepsilon)$, где

$$\|x(0)\|_m = \max\{|x(i)|, i = -m, -m+1, -m+2, ..., 0\}.$$

Если, к тому же

$$\lim_{k\to+\infty} |x(k)| = 0,$$

то нулевое решение называется асимптотически устойчивым. При исследовании устойчивости используется второй метод Ляпунова с функцией квадратичного вида $V(x) = x^T Hx$, где симметричная, положительно определенная матрица H является решением матричного уравнения Ляпунова

$$A^{TT} HA - H = -C.$$

Получен следующий результат.

Теорема 1. Пусть матрица A асимптотически устойчивая и существует положительно определенная матрица H, для которой выполняются условия

$$L_1(H) > 0,\ L_2(H) > 0,\ L_3(H) > 0,$$

где

$$L_1(H) = \lambda_{\max}(H) - \left[\lambda_{\min}(C) - \left|A^T HB\right|\right],$$

$$L_2(H) = \lambda_{\min}(H) - \phi(H)\left[\left|A^T HB\right| + \left|B^T HB\right|\right],$$

$$L_3(H) = \lambda_{\min}(C) - \left(1 + \phi^2(H)\right)\left|A^T HB\right| - \phi^2(H)\left|B^T HB\right|,$$

$$\phi(H) = \lambda_{\max}(H) / \lambda_{\min}(H). \tag{2}$$

Тогда система с запаздыванием (1) экспоненциально устойчиво. При этом для произвольного решения $x\left(k\right)$, $k=1,2,\ldots$ справедлива оценка сходимости

$$\left|x\left(k\right)\right| \leq \sqrt{\phi\left(H\right)}\left\|x\left(0\right)\right\|_m \theta^{\frac{1}{2}k}\left(H\right),$$

$$\theta\left(H\right)=\frac{\lambda_{\max}\left(H\right)-\left[\lambda_{\min}\left(C\right)-\left|A^T HB\right|\right]}{\lambda_{\min}\left(H\right)-\left[\left|A^T HB\right|+\left|B^T HB\right|\right]}\frac{1}{\phi\left(H\right)}. \quad (3)$$

Далее рассмотрены интервальные разностные системы с запаздыванием

$$x\left(k+1\right)=\left(A+\Delta A\right)x\left(k\right)+\left(B+\Delta B\right)x\left(k-m\right),\ k=1,2,\ldots \quad (4)$$

Здесь $\Delta A=\left\{\Delta a_{ij}\right\}$, $\Delta B=\left\{\Delta b_{ij}\right\}$ $i,j=\overline{1,n}$ матрицы, коэффициенты которых могут принимать свои значения из некоторых наперед заданных интервалов

$$\Delta a_{ij}:\left|\Delta a_{ij}\right|\leq\alpha_{ij},\ \Delta b_{ij}:\left|\Delta b_{ij}\right|\leq\beta_{ij}\ i,j=\overline{1,n} \quad (5)$$

Системы вида (4) называются интервальными системами с запаздыванием.

Определение. Если система (4) будет асимптотически устойчивой при произвольных коэффициентах матриц $\Delta A=\left\{\Delta a_{ij}\right\}$, $\Delta B=\left\{\Delta b_{ij}\right\}$, $i,j=\overline{1,n}$, удовлетворяющих условиям (5), то она называется интервально асимптотически устойчивой.

Имеют место следующие условия интервальной устойчивости.

Теорема 2. Пусть существует положительно определенная матрица H, при которой выполняются неравенства (2), и для «возмущений» ΔA, ΔB выполняются условия

$$\left|\Delta A\right|<\min\left\{\bar{\xi}_0 L_0\left(H\right),\bar{\xi}_1^1 L_1^1\left(H\right),\bar{\xi}_1^2,\bar{\xi}_2 L_2\left(H\right)\right\},$$

$$\left|\Delta B\right|<\min\left\{\bar{\eta}_0 L_0\left(H\right),\bar{\eta}_1^1 L_1^1\left(H\right),\bar{\eta}_1^2 L_1^2\left(H\right),\bar{\eta}_2 L_2\left(H\right)\right\}, \quad (6)$$

где:

1) $0<\bar{\xi}_0<\xi_0$, $0<\bar{\xi}_1^1<\xi_1^1$, $0<\bar{\xi}_1^2<\xi_1^2\ 0<\bar{\xi}_2<\xi_2$;

2) 1) $0<\bar{\eta}_0<\eta_0$, $0<\bar{\eta}_1^1<\eta_1^1$, $0<\bar{\eta}_1^2<\eta_1^2\ 0<\bar{\eta}_2<\eta_2$;

с постоянными ξ_0, ξ_1^1, ξ_1^2, ξ_2, ξ_0, ξ_1^1, ξ_1^2, ξ_2, зависящими от параметров системы и матрицы H. Тогда система (4) является интервально устойчивой и для ее решений имеет место следующая оценка сходимости

$$\left|x\left(k\right)\right|\leq\sqrt{\phi\left(H\right)}\left\|x\left(0\right)\right\|_m\theta^{\frac{1}{2}k}\left(H,\left|A\right|,\left|\Delta B\right|\right), \quad (7)$$

$$\theta\left(H,\left|\Delta A\right|,\left|\Delta B\right|\right)=$$

$$=\frac{1-\left\{\lambda_{\min}\left(C\right)-\left|A^T HB\right|-\left[\left(2\left|HA\right|+\left|HB\right|\right)\left|\Delta A\right|+\left|HA\right|\left|\Delta B\right|\right]-\left|H\right|\left|\Delta A\right|\left[\left|\Delta A\right|+\left|\Delta B\right|\right]\right\}\frac{1}{\lambda_{\max}\left(H\right)}}{1-\left\{\left|A^T HB\right|+\left|B^T HB\right|+\left[\left(2\left|HB\right|+\left|HA\right|\right)\left|\Delta B\right|+\left|HB\right|\left|\Delta A\right|\right]+\left|H\right|\left|\Delta B\right|\left[\left|\Delta A\right|+\left|\Delta B\right|\right]\right\}\frac{\phi\left(H\right)}{\lambda_{\min}\left(H\right)}}$$

РЕШЕНИЕ МНОГОМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕННОЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ КУММЕРА В ЯДРЕ ПО ПИРАМИДАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

О. В. Скоромник
Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь
skoromnik@gmail.com

Рассматривается интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right)^{\alpha-1}F\left[\beta;\alpha;A\cdot\lambda(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right]f(\mathbf{t})d\mathbf{t}=g(\mathbf{x}),\mathbf{x}\in A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}).\ (1)$$

Здесь $A=\|a_{jk}\|$, $\left(a_{jk}\in\mathbb{R}^1\right)$ — матрица порядка $n\times n$ $(n\in\mathbb{N})$ с определителем $|A|\neq 0$, вектор — строки которой обозначим через

$$\mathbf{a}_j=\left(a_{j1},\dots,a_{jn}\right)\ (j=1,\dots,n);$$

$$\mathbf{x}=\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)\in\mathbb{R}^n,\ \mathbf{t}=\left(t_1,t_2,\dots,t_n\right)\in\mathbb{R}^n;\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{t}=\sum_{k=1}^{n}x_kt_k;$$

$\mathbf{x}\geq\mathbf{t}$ означает $x_1\geq t_1,\dots,x_n\geq t_n$;

$$\mathbf{x}^{\alpha}=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n},\ \alpha=\left(\alpha_1,\dots,\alpha_n\right)\in\mathbb{R}^n_+,\ \Gamma(\alpha)=\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\cdots\Gamma(\alpha_n);$$

$$\sigma=\left(\sigma_1,\dots,\sigma_n\right)\in\mathbb{R}^n_+;$$

$$A\cdot\mathbf{x}=\left(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{x},\dots,\mathbf{a}_n\cdot\mathbf{x}\right),\ (A\cdot\mathbf{x})^{\alpha}=(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{x})^{\alpha_1}\cdots(\mathbf{a}_n\cdot\mathbf{x})^{\alpha_n};$$

$$A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})=\left\{\mathbf{t}\in R^n:A\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{t})\geq 0,\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{t}+r\geq 0\right\}$$

— n-мерная ограниченная в $\mathbb{R}^n$ пирамида с вершиной в точке $\mathbf{b}$, с основанием на гиперплоскости $\mathbf{c}\cdot\mathbf{t}+r=0$ и боковыми гранями, лежащими на гиперплоскостях $\mathbf{a}_j\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{t})=0$ $(j=1,\dots,n)$, $r\in\mathbb{R}^1$, $\mathbf{c}=\left(c_1,\dots,c_n\right)\in\mathbb{R}^n$.
Для

$$\alpha=\left(\alpha_1,\dots,\alpha_n\right)\in\mathbb{R}^n,\quad \beta=\left(\beta_1,\dots,\beta_n\right)\in\mathbb{R}^n,\ \mathbf{x}=\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)\in\mathbb{R}^n$$

$F[\beta;\alpha;\mathbf{x}]$ — функция вида:

$$F[\beta;\alpha;\mathbf{x}]=\prod_{j=1}^{n}{}_1F_1[\beta_j;\alpha_j;x_j],$$

представляющая собой произведение вырожденных гипергеометрических функций (функций Куммера) ${}_1F_1[\beta_j;\alpha_j;x_j]$ $(j=1,\dots,n)$ [1, §1], [2, §1.6].

Следуя методике Я. Тамаркина, в работах [3], [4] были установлены необходимые и достаточные условия разрешимости в $L_1(a,b)$ одного класса интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса и его многомерного аналога по пирамидальной области. В [5] получены решения в замкнутой форме более общих интегральных уравнений по пирамидальным областям и исследована картина их разрешимости в пространстве суммируемых функций. В [6] аналогичные результаты получены для многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Лежандра в ядре по пирамидальной области.

Настоящая работа продолжает эти исследования. Мы даем решение в замкнутой форме многомерного интегрального уравнения (1) с функцией Куммера в ядре по пирамидальной области и устанавливаем необходимые и достаточные условия его разрешимости в пространстве $L_1(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}))$ [3] суммируемых функций по пирамиде $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ $(\mathbf{b} \in R^n)$.

Список литературы

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Мн.: Наука и техника, 1987. — 688 с.

2. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. North — Holland Mathematics Studies 204. Amsterdam: Elsevier.xv, 2006. — 523 p.

3. Килбас А.А., Райна Р.К., Сайго М., Сривастава Г. М. Решение многомерных гипергеометрических уравнений типа Абеля // Доклады НАН Беларуси. — 1995. — Т. 43, № 2. — С. 23–26.

4. Raina K. Л., Srivastava T. M., Kilbas A. A., Saigo M. Solvability of some Abel-type integral equations involving the Gauss hypergeometry Function as kernels in the space of summable functions. // ANZIAM J. 2001. — Vol. 43. № 2. — P. 291–320.

5. Килбас А. А., Скоромник О. В. Решение многомерных интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах по пирамидальной области / А.А. Килбас, О.В. Скоромник // Труды Ин-та математики / НАН Беларуси, Ин-т математики. — Минск, 2009. — Т. 17, № 1. — С. 71–78

6. Килбас А. А., Скоромник О. В. Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Лежандра в ядре по пирамидальной области // Доклады академии наук (Российская Академия наук). — 2009. — Т. 429, № 4. — С. 442–446.

НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ ШАРУВАТИХ ОБОЛОНОК ЗІ СКЛАДНОЮ ФОРМОЮ ПЛАНУ ПРИ УДАРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Н. В. Сметанкіна, В. О. Сметанкін

Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, Харків, Україна

nsmetankina@yandex.ru, vsmetankin@yandex.ru

Запропоновано підхід до дослідження нестаціонарних коливань шаруватих незамкнених циліндричних оболонок зі складною формою плану при ударному навантаженні.

Ударне навантаження здійснюється шляхом скидання індентора з напівсферичною кінцевою частиною на зовнішню поверхню першого шару оболонки. Динамічне поведінка оболонки описується на базі гіпотез теорії першого порядку, що враховує деформації поперечного зсуву, обтиснення по товщині й інерції обертання нормального елемента у межах кожного шару [1]. Рівняння руху оболонки та граничні умови на контурі отримані за допомогою варіаційного принципу Гамільтона. Система рівнянь руху оболонки доповнюється рівнянням руху індентора та умовою сумісності переміщення індентора й оболонки. Контактна взаємодія індентора й оболонки описується за законом Герца.

Метод розв'язання задачі полягає у тому, що вихідна оболонка «занурюється» у допоміжну шарувату оболонку, форма плану й граничні умови якої дозволяють дістати простий аналітичний розв’язок [1]. Як допоміжна обирається шарнірно оперта циліндрична оболонка прямокутної форми у плані. Тоді розв’язок вихідної задачі можна записати у вигляді розвинень у тригонометричні ряди. Щоб реалізувати задані граничні умови, до допоміжної оболонки прикладаються розподілені додаткові навантаження. З умови задоволення вихідних граничних умов формується система інтегральних рівнянь для визначення невідомих додаткових навантажень. Система розв’язується шляхом розвинення шуканих функцій у тригонометричні ряди в допоміжній області та у ряд уздовж контуру вихідної оболонки. Система рівнянь руху інтегрується методом розвинення розв'язку в ряд Тейлора. Після обчислення додаткових навантажень обчислюються шукані параметри динамічного відгуку вихідної оболонки.

Розглянуто коливання шаруватих оболонок з різною формою плану. Чисельні результати добре узгоджуються з експериментальними даними та результатами розрахунку, отриманими іншими методами.

Список літератури

1. Сметанкина Н. В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек: монография. – Харьков: Міськдрук, 2011. — 376 с.

МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАДАЧАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

И. Б. Сороговец, М. В. Макаренко
Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь
ibsor@tut.by

Рассматривается одномерное нестационарное температурное поле 3-слойной пластины с различными теплофизическими характеристиками слоев. Между слоями установлен идеальный тепловой контакт. Ось $0x$ проходит перпендикулярно плоскостям, ограничивающим пластину. Начало оси помещено на одной из ограничивающих поверхностей, а положительное направление выбрано внутрь пластины. Границам слоев соответствуют следующие значения $x:\quad b_0 = 0,\, b_1,\, b_2,\, b_3$. Толщина i-го слоя $h_i = b_i - b_{i-1}$ $(i = 1, 2, 3)$, а теплофизическими характеристиками слоев являются коэффициенты теплопроводности λ_i и коэффициенты температуропроводности a_i (ниже индекс $i = 1, 2, 3$).

Пусть $T_i(x,t)$ $(x \in \left[b_{i-1},\, b_i\right],\, t \geq 0)$ — температура i-го слоя в зависимости от координаты x и времени t. Тогда математическая модель задачи определения температуры трехслойного тела выглядит следующим образом

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + w_i(x,t), \quad b_{i-1} < x < b_i, \tag{1}$$

$$T_j(b_j,t) = T_{j+1}(b_j,t), \qquad \lambda_j \frac{\partial T_j(b_j,t)}{\partial x} = \lambda_{j+1} \frac{\partial T_{j+1}(b_j,t)}{\partial x}, \quad j = 1, 2 \tag{2}$$

$$T_i(x,0) = f_i(x), \tag{3}$$

$$\left.\left(\beta_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - \alpha_1 T_1\right)\right|_{x=0} = -\phi_1(t); \qquad \left.\left(\beta_2 \frac{\partial T_3}{\partial x} + \alpha_2 T_3\right)\right|_{x=b_3} = \phi_2(t). \tag{4}$$

Граничные условия (4) характеризуются парой чисел (I, J). Смысл I — на граничной поверхности $x = 0$ задано граничное условие I-го рода; смысл J – на граничной поверхности $x = b_3$ задано граничное условие J-го рода. Возможны 6 различных типов граничных условий: (1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3), которые получаются в зависимости от значений констант $\alpha_j, \beta_j (j = 1, 2)$ в (4).

Судя по литературным источникам (см., например, [1], [2]) основным методом решения указанных задач является метод интегрального преобразования Лапласа. Одним из недостатков этого метода является тот факт, что от изображений к оригиналам можно перейти удобным образом (без применения контурных интегралов) лишь в частных случаях. В данной работе для решения поставленных задач применяется метод разделения переменных, что позволяет решать эти задачи для любых функций $w_i(x,t), f(x), \phi_j(t)$, удовлетворяющих некоторым условиям гладкости.

Предварительно рассмотрим однородные задачи, когда в (1) $w_i(x,t)=0$ и в (4) $\phi_j(t)=0$ $(j=1,\,2)$. Далее считаем, что функции $u(xy)$ на $[b_0;b_3]$ составлены из 3-х кусков: $u(x)=u_1(x)$ при $x\in[b_0;b_1]$, $u(x)=u_2(x)$ при $x\in[b_1;b_2]$, $u(x)=u_3(x)$ при $x\in[b_2;b_3]$. Уравнение (1) при $w_i(x,t)\equiv 0$ запишется как одно уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right).$$

Решаем это уравнение методом разделения переменных. С учетом условий сопряжения (2) и граничных условий (4) получена система решений однородных краевых задач (начальное условие (3) пока не учитывалось). Выпишем эту систему в безразмерных величинах

$$F=\frac{a_3t}{b_3^2}, y=\frac{x}{b_3}\ \big(y\in[0;1]\big),$$

$$l_j=\frac{b_j}{b_3}, k_j=\sqrt{\frac{a_j}{a_3}}, s_j=\frac{\lambda_j}{\lambda_3}, Bi_j=\frac{\alpha_j b_3}{\lambda_j}\ (j=1,\,2):$$

$$T_n(y,F)=C_n\cdot\exp(-\mu_n^2\cdot F)\cdot V_n(y)\qquad\big(y\in[0;1],\ F>0,\ n=1,\,2,\ldots\big),\tag{5}$$

$$V_n(x)=\begin{cases}V_{1,n}(y)\ \big(y\in[0,l_1]\big)\\ V_{2,n}(y)\ \big(y\in[l_1,l_2]\big),\\ V_{3,n}(y)\ \big(y\in[l_2,1]\big)\end{cases}\qquad \begin{aligned}V_{1,n}(y)&=A_1(\mu_n)\cos\left(\frac{\mu_n y}{k_1}\right)+B_1(\mu_n)\sin\left(\frac{\mu_n y}{k_1}\right),\\ V_{2,n}(y)&=A_2(\mu_n)\cos\left(\frac{\mu_n y}{k_2}\right)+\sin\left(\frac{\mu_n y}{k_2}\right),\\ V_{3,n}(y)&=A_3(\mu_n)\cos\big(\mu_n y\big)+B_3(\mu_n)\sin\big(\mu_n y\big).\end{aligned}\tag{6}$$

В задачах (1, 1), (1, 2), (1, 3) коэффициенты $A_1(\mu_n)=0$, в задачах (2, 2), (2, 3) — $B_1(\mu_n)=0$. В задаче (3, 3) $\dfrac{\mu_n}{k_1}B_1(\mu_n)=Bi_1A_1(\mu_n)$. Ненулевые коэффициенты ($A_1(\mu_n)$ либо $B_1(\mu_n)$), $A_2(\mu_n)$, $A_3(\mu_n)$ $B_3(\mu_n)$ в (6) однозначно определяются как решения системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными.

Числа μ_n $(n=1,\,2,\ldots)$ каждой из задач являются решениями *характеристического* уравнения:
задача (1, 1) —

$$A_3(\mu)\cos\mu+B_3(\mu)\sin\mu=0;$$

задачи (1, 2) и (2, 2) —

$$\mu B_3(\mu)\cos\mu - \mu A_3(\mu)\sin\mu = 0;$$

задачи (1, 3), (2, 3), (3, 3) —

$$A_3(\mu)(-\mu\sin\mu + Bi_2\cos\mu) + B_3(\mu)(\mu\cos\mu + Bi_2\sin\mu) = 0.$$

Хотя каждое из уравнений достаточно громоздкое, однако в каждом конкретном случае они легко решаются на ЭВМ (например, в среде Mathcad).

Решения неоднородных задач получены в виде рядов Фурье по системе функций (5)–(6). Предварительно доказана разложимость дважды непрерывно дифференцируемых функций по системе (6).

Список литературы

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. — М.: Высш. шк., 1967. — 600 с.

2. Мотовиловец И. А. Теплопроводность пластин и тел вращения. — К.: Наукова думка, 1969. — С. 48–63.

ЯВНІ ТА НЕЯВНІ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНІ ІНТЕГРАТОРИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ ПОЧАТКОВИХ ЗАДАЧ

Р. Столярчук

НУ «Львівська Політехніка», Львів, Україна

sroksolyana@yahoo.com

Експоненціальні інтегратори є класом потужних методів спеціально розроблених для жорстких напівявних диференціальних рівнянь що виникають внаслідок просторової дискретизації залежних від часу рівнянь в частинних похідних, де задача розбивається на лінійну (жорстка) і нелінійну (нежорстка або середньо жорстка) частини. Лінійна частина розв'язується точно через обчислення матричної експоненти а для нелінійної частини використовується відповідний чисельний метод.

Розглядається початкова задача для системи

$$u'(t) = Au(t) + g(t, u(t)), u(0) = u_0,$$

де A — дисипативна матриця, $A \in C^{d\times d}, u(t)$ — лінійна частина яка відповідає за жорсткість задачі, $g(t,u)$ — нелінійна частина що задовольняє локальну умову Ліпшиця.

Припускається існування відповідної процедури для наближення матричної експоненти, вибір якої залежить від задачі що розглядається. Також припускається наявність чисельної апроксимації розв'язку

Розв'язок даної системи задовольняє інтегральне рівняння

$$u(t_{n+1}) = e^{hA}u_n + \int_0^h e^{(h-\tau)A} g(t_n + \tau, u(t_n + \tau))\,d\tau$$

Запропонована багатокрокова версія експоненціальних інтеграторів, зокрема поєднання явних та неявних схем, які є узагальненнями класичних схем Адамса. Базисний інтегратор є явним а більш точні неявні схеми використовуються для контролю інтегрування. Спочатку описуються схеми типу предиктор-коректор, які можуть розглядатися як локальна дискретна процедура корекції дефекту. Більш того, апостеріорна оцінка глобальної похибки може бути отримана шляхом інтегрування дефекту, де дефект по відношенню до неявної схеми поєднується з простим довільним інтегратором, наприклад,експоненціальною схемою Ейлера. Це призводить до ефективної та асимптотично стійкої оцінки глобальної похибки.

Розглянуті чисельні приклади доводять ефективність даної методики.

ВРАХУВАННЯ ЗМІЦНЕННЯ І РОЗВАНТАЖЕННЯ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО СТАНУ ОБОЛОНОК З ОТВОРАМИ

Є. А. Сторожук, І. С. Чернишенко, І. Б. Руденко, С. Б. Харенко
Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ,
Національний університет державної податкової служби України, Ірпінь, Україна
stevan@ukr.net

Тонкі оболонки з вирізами і отворами, як елементи сучасних конструкцій, знаходять широке застосування в різних областях техніки. При значних рівнях діючих навантажень біля вказаних концентраторів напружень виникають зони пластичних деформацій, а властивості матеріалу оболонок характеризуються нелінійною діаграмою деформування.

Для дослідження пружнопластичного стану оболонок, послаблених декількома отворами, використані співвідношення диференціальної теорії пластичності з ізотропним зміцненням, в якій прийняті умова пластичності Мізеса і асоційований закон текучості.

З огляду на суттєву нелінійність фізичних співвідношень і з метою відслідковування історії процесів деформування оболонок з отворами при побудові розв'язувальних рівнянь використана процедура покрокового навантаження і подання вихідних рівнянь в інкрементальній формі.

Система розв'язувальних рівнянь отримана з принципу можливих переміщень за допомогою методу додаткових напружень і методу скінченних елементів.

Лінеаризація фізичних співвідношень проведена методом додаткових напружень. Суттєвими достоїнствами методу додаткових напружень є:

а) для фізично нелінійних задач глобальна матриця жорсткості формується і приводиться до трикутного вигляду тільки один раз — на першій ітерації;

б) можливість застосування як для матеріалів із зміцненням, так і для ідеально пластичних матеріалів;

в) автоматичне врахування розвантаження при покроковому навантаженні.

Напруження за границею пружності визначаються за допомогою дворівневої крокової схеми, в якій кроки кожного рівня (зовнішнього і внутрішнього) несуть різне функціональне навантаження. Прирости пластичних деформацій обчислюються на кожному з внутрішніх кроків, а напруження — на кожному із зовнішніх кроків з використанням модифікованої методики Уілкінсона.

Конкретні числові результати отримані для сферичної, циліндричної і конічної оболонок, послаблених двома круговими отворами. Досліджено вплив історії навантаження, пластичних деформацій і параметра зміцнення матеріалу, геометричних і механічних параметрів оболонок на концентрацію напружень в області отворів.

ОБ ИНТЕГРАЛЕ УРАВНЕНИЙ ЧАСТИЦЫ, СКАТЫВАЮЩЕЙСЯ ПО КРИВОЙ С ТРЕНИЕМ

А. С. Сумбатов

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва, Россия

sumbatow@ccas.ru

Пусть Axy — декартова система координат, ось Ay которой направлена вертикально вниз, а точка A — начальный конец расположенной в плоскости Axy неподвижной плоской кривой, вдоль которой скользит тяжелая частица массы m. Запишем уравнения движения частицы при условии, что на нее со стороны опорной кривой действует сила сухого (кулонова) трения.

Обозначим $\mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t)\}$ параметрические уравнения опорной кривой, t — время. Уравнения движения частицы имеют вид

$$m\frac{dv}{dt} = mg\mathbf{j}\boldsymbol{\tau} - fN, \qquad \frac{mv^2}{\rho} = mg\mathbf{j}\mathbf{n} + N, \tag{1}$$

где N — модуль силы нормального давления на частицу со стороны опорной кривой, f — коэффициент трения, ρ — радиус кривизны в текущей точке $P\{x(t),\, y(t)\}$ кривой, $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ — соответственно единичные векторы касательной и нормали

$$\left\{\frac{\dot{x}(t)}{v}, \frac{\dot{y}(t)}{v}\right\}, \qquad \left\{\frac{\dot{y}(t)}{v}, \frac{-\dot{x}(t)}{v}\right\} \qquad\qquad \left(v = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\right)$$

в этой точке, $\mathbf{j}$ — орт нисходящей вертикали, g — ускорение свободного падения. Считаем, опорную кривую вогнутой.

Исключив N из уравнений (1), получим дифференциальное уравнение движения

$$\frac{dv}{dt} = g\mathbf{j}(\boldsymbol{\tau} + f\mathbf{n}) - \frac{fv^2}{\rho} \tag{2}$$

частицы, которое можно переписать так[1]

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}v^2 - g(y - xf)\right] = -fv^2\dot{\varphi}, \tag{3}$$

поскольку кривизна

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dot{\varphi}}{v}, \qquad \varphi = y'$$

[1] В книге [1] на с.187 правая часть уравнения (2) ошибочно обнулена, поэтому текст на с. 186–189, относящийся к уравнениям (13.18) и (13.19), следует пропустить.

Уравнение (2) является линейным относительно v^2, поэтому оно интегрируется в квадратурах. Другими словами, порядок уравнения движения частицы понижается на единицу, несмотря на то, что механическая система является диссипативной и не имеет классических первых интегралов.

Нетрудно проинтегрировать один раз уравнение (2):

$$v^2(x) = e^{-2f\varphi(x)}\left[2g\int_0^x e^{2f\varphi}(\varphi - f)du + C_0\right] \qquad (C_0 - \text{постоянная})$$

Этот интеграл, например, можно применить для постановки прямой вариационной задачи об отыскании кривой наибыстрейшего спуска (брахистохроны) частицы из стартовой точки $A(0,0)$ в заданную финальную точку $B(a,b)$. Как условная вариационная задача она решена в работе [2].

Список литературы

1. Сумбатов А. С., Юнин Е. К. Избранные задачи механики систем с сухим трением. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. — 200 с.

2. Ashby N., Brittin W.E., Love W. F. and Wyss W. Brachistochrone with Coulomb friction // American J. Phys. 1975. Vol. 43, No. 10. Pp. 902–906.

ПРО АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

О. В. Тарасенко

Ніжинський державний університет ім. Миколи Гоголя, Ніжин, Україна

oxana.tarasenko@gmail.com

Розглядається задача оптимального керування процесом, який описується лінійною сингулярно збуреною системою диференціальних рівнянь.

Розв'язується питання про знаходження оптимальної траєкторії та відповідного оптимального керування, під дією якого система переходить з одного стану в інший за фіксований проміжок часу, мінімізуючи квадратичний функціонал.

Подібна задача, яка описується системою диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами, розглядалась в [1], [2], де передбачалось, що корені відповідного характеристичного рівняння уявні.

Нами розглядаються більш загальні випадки. Детально досліджуються різні випадки, пов'язані з поведінкою спектра граничної в'язки матриць.

Застосувавши принцип максимуму Понтрягіна та методи асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь [3], [4], побудовано формальний розв'язок даної задачі і знайдено умови, за яких він має асимптотичний характер; виведено відповідні асимптотичні оцінки; розроблено алгоритм знаходження коефіцієнтів шуканих асимптотичних розвинень у явному вигляді.

Список літератури

1. Шкиль Н. И., В. Н. Лейфура. Об асимптотическом решении задачи оптимального управления для систем с медленноменяющимися коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1976. — №7. — С. 604–608.

2. Шкиль Н. И., В. Н. Лейфура. К вопросу об асимптотическом решении задачи оптимального управления системами с медленноменяющимися коэффициентами в случае кратных корней // Межвед. респ. сб.: Вычисл. и прикл. математика — К., 1977. — Вып. 31. — С. 81–92.

3. Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П. Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. — К.: Вища шк., 1991. — 207 с.

4. Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — К.: Вища шк., 2000. — 294 с.

О ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

Ж. Н. Тасмамбетов

Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова, Актобе, Казахстан

Произведения двух функций Бесселя от одной переменной $J_\mu(z)\cdot J_\nu(z)$ были изучены различными авторами. В [1,334 с.] произведения двух цилиндрических функций различными аргументами представлены в виде суммы

$$J_\mu(az)\cdot J_\nu(bz)=\left(\frac{az}{2}\right)^{\mu}\cdot\left(\frac{bz}{2}\right)^{\nu}\cdot\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{m+n}\cdot a^{2m}\cdot b^{2n}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{2(m+n)}}{m!\cdot n!\cdot\Gamma(\mu+m+1)\cdot\Gamma(\nu+n+1)}. \quad (1)$$

Вводя индекс суммирования $\lambda=m+n$ и принимая во внимание функциональное уравнение для Γ – функции, после ряда преобразований, получаем

$$J_\mu(az)\cdot J_\nu(bz)=\frac{\left(\frac{az}{2}\right)^{\mu}\cdot\left(\frac{bz}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma(\mu+1)}\cdot\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{\lambda}\cdot\left(\frac{bz}{2}\right)^{2\lambda}}{\lambda!\cdot\Gamma(\nu+\lambda+1)}\cdot{}_2F_1\left(-\lambda,-q-\lambda;p+1;\frac{a^2}{2}\right). \quad (2)$$

Отсюда можно получить различные произведения Бесселевых функций. В частности при $a=b$ аргумент гипергеометрической функции равен единице и (2) можно преобразовать к виду

$$J_\mu(z)\cdot J_\nu(z)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{\lambda}\cdot(\mu+\nu+\lambda+1)_\lambda}{\lambda!\cdot\Gamma(\mu+\lambda+1)\cdot\Gamma(\nu+\lambda+1)}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{\mu+\nu+2+\lambda}. \quad (3)$$

В данной работе изучены возможности построения произведения функций Бесселя от переменных x и y вида

$$J_{\mu,\nu}(xy)=\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu}\cdot\left(\frac{y}{2}\right)^{\nu}\cdot\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{m+n}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\cdot\left(\frac{y}{2}\right)^{2n}}{m!\cdot\Gamma(\mu+m+1)\cdot n!\cdot\Gamma(\nu+n+1)}. \quad (4)$$

Функции двух переменных Бесселя не получили того развития, как функции Бесселя одной переменной, получившие широкие применения при решении задач теории упругости, механики, ядерной физики и др. Изучение неоднородных уравнений Бесселя приводило к функциям Ломмеля двух переменных. Они были введены Ломмелем при изучении задач дифракции. В [2] установлены соотношения между функциями Ломмеля и некоторыми функциями, родственными с функциями Бесселя. Здесь также приводится подход, примененный для разложения произведений бесселевых функций в степенной ряд, приводящий к дифференциальным уравнениям высоких порядков, решениями которых являются произведения бесселевых функций. Этим подходом пользовались Ватсон Дж. Н., Орр [3], П. Аппель [4] и др.

Мы используем другой подход, опирающийся на применение вырожденных гипергеометрических функций одной и двух переменных, опираясь на известные свойства функции Бесселя от одной переменной и их связь с вырожденной гипергеометрической функцией

$$F(\alpha,\gamma;x) = 1 + \frac{\alpha}{1!\cdot\gamma}\cdot x + \frac{\alpha\left(\alpha+1\right)}{2!\cdot\gamma(\gamma+1)}\cdot x^2 + \frac{\alpha\left(\alpha+1\right)\left(\alpha+2\right)}{3!\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\cdot x^3 ... =$$
$$= \lim_{\beta\to\infty}\left[1 + \frac{\alpha\beta}{1!\cdot\gamma}\cdot\frac{x}{\beta} + \frac{\alpha\left(\alpha+1\right)\cdot\beta\left(\beta+1\right)}{2!\cdot\gamma(\gamma+1)}\cdot\frac{x^2}{\beta^2} + \right. \tag{5}$$
$$\left. + \frac{\alpha\left(\alpha+1\right)\left(\alpha+2\right)\cdot\beta\left(\beta+1\right)\left(\beta+2\right)}{3!\cdot\gamma(\gamma+1)\cdot(\gamma+2)}\cdot\frac{x^3}{\beta^3} + ...\right] = \lim_{\beta\to\infty} F(\alpha,\beta,\gamma;x)$$

которая получена из известной гипергеометрической функции Гаусса с помощью предельного перехода. Покажем, как с помощью таких предельных переходов можно получить функцию Бесселя от одного переменного.

1. Действительно, если в гипергеометрическом уравнении Гаусса осуществить предельный переход

$$x\left(1-\varepsilon^2\cdot x\right)\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \left[\gamma - \left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\cdot\varepsilon^2\cdot x\right]\cdot\frac{dy}{dx} - y = 0, \tag{6}$$

то решение этого уравнения можно представить [4] в виде

$$y(x,\varepsilon) = F\left(\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon},\gamma;\varepsilon^2\cdot x\right), \tag{7}$$

а уравнение (6) приводится к виду

$$x\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \gamma\cdot\frac{dy}{dx} - y = 0. \tag{8}$$

Особые точки полученного уравнения, как и в вырожденном гипергеометрическом уравнении 0 и ∞.

Справедливо соотношение

$$F\left(\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon},\gamma;\varepsilon^2\cdot x\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{\varepsilon},m\right)\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon},m\right)}{(\gamma,m)\cdot(1,m)}\cdot x^m\cdot\varepsilon^{2m}, \tag{9}$$

где введено обозначение

$$\left(\alpha,m\right) = \left(\alpha\right)_m = \alpha\cdot\left(\alpha+1\right)...\left(\alpha+m-1\right)$$

и можно доказать [4], что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon},m\right)\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon},m\right)\cdot\varepsilon^{2m} = 1.$$

Тогда (3) представится в виде следующего соотношения

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F\left(\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon},\gamma;\varepsilon^2\cdot x\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(\gamma,m)}\cdot\frac{x^m}{(1,m)}. \tag{10}$$

2. Соотношение (10) позволяет устанавливать связь между вырожденной гипергеометрической функцией и функцией Бесселя.

Действительно, введя обозначение

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma; \varepsilon^2 \cdot x\right) = J(\gamma; x) \tag{11}$$

нетрудно убедиться в справедливости соотношения

$$J_k(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{\Gamma(k+1)} \cdot J\left(k+1, -\frac{x^2}{2^2}\right), \tag{12}$$

где через $J_k(x)$ обозначена функция Бесселя.

3. Учитывая (11) убеждаемся, что решением уравнения (8) является ряд $J(\gamma; x)$, а общее решение представимо в виде

$$y = A \cdot J(\gamma; x) + B \cdot x^{1-\gamma} \cdot J\left(2-\mu; x\right). \tag{13}$$

Подстановка

$$y = x^{-\nu} \cdot J_k(x) \tag{14}$$

приводит уравнение (8) к уравнению Бесселя

$$x^2 \cdot \frac{d^2 J_k(x)}{dx^2} + x\frac{dJ_k(x)}{dx} + \left(x^2 - k^2\right) \cdot J_k(x) = 0. \tag{15}$$

С помощью преобразования вида (14) можно получить много различных уравнений, родственных с уравнениями Бесселя [5]. Родственные уравнения возникают в различных задачах математической физики, теории упругости и в других приложениях.

Приведенные свойства вырожденных гипергеометрических функций одной переменной и функций Бесселя используем для построения ряда (4), то есть функций Бесселя двух переменных.

4. Докажем, что ряд (4) является решением двух совместных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} x \cdot Z_{xx} + \mu \cdot Z_x - Z = 0, \\ y \cdot Z_{yy} + \nu \cdot Z_y - Z = 0, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где $Z = Z(x, y)$ — общая неизвестная. Решение построим в виде степенного ряда двух переменных вблизи особенности $\left(0, 0\right)$:

$$Z(x, y) = \sum_{m,n}^{\infty} C_{m,\nu} \cdot x^m \cdot y^n. \tag{17}$$

Подставляя ряд (17) в систему (16) и после определения неизвестных коэффициентов $C_{\mu,\nu}(\mu, \nu = 0, 1, 2, ...)$,получим ряд двух переменных

$$Z(x,y) = C_{00} \cdot \left(1 + \frac{1}{1! \cdot \mu} \cdot x + \frac{1}{1! \cdot \nu} \cdot y + \frac{1}{1! \mu \cdot \nu} \cdot xy + \frac{1}{2! \cdot \mu(1+\mu)} \cdot x^2 + \frac{1}{2! \cdot \nu(1+\nu)} \cdot y^2 + ...\right). \tag{18}$$

Теперь следует убедиться, что полученный ряд связан с функцией Бесселя. Действительно, ряд (18) можно представить в виде произведения двух рядов

$$Z(x,y)=\left(1+\frac{1}{\mu}\cdot\frac{x}{1!}+\frac{1}{\mu\cdot(\mu+1)}\cdot\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{\mu(\mu+1)\cdot(\mu+2)}\cdot\frac{x^3}{3!}+...\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1+\frac{1}{\nu}\cdot\frac{y}{1!}+\frac{1}{\nu(\nu+1)}\cdot\frac{y^2}{2!}+\frac{1}{\nu\cdot(\nu+1)(\nu+2)}\cdot\frac{y^3}{3!}+...\right)=J(\mu;x)\cdot J(\nu;y).$$

Отсюда используя соотношение (12) убедимся, что получено произведение двух рядов Бесселя по переменным x и y :

$$J_\mu(x)\cdot J_\nu(y)=\left(\frac{x}{2}\right)^\mu\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{m!\cdot\Gamma(\mu+m+1)}\cdot\left(\frac{y}{2}\right)^\nu\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\left(\frac{y}{2}\right)^{2n}}{n!\cdot\Gamma(\nu+n+1)}=$$
$$=\left(\frac{x}{2}\right)^\mu\cdot\left(\frac{y}{2}\right)^\nu\cdot\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\cdot\left(\frac{y}{2}\right)^{2n}}{m!\cdot n!\cdot\Gamma(\mu+m+1)\cdot\Gamma(\nu+n+1)}$$

то есть получено соотношение (4) и окончательно имеем равенство

$$J_{\mu,\nu}(x,y)=J_\mu(x)\cdot J_\nu(y). \qquad (19)$$

Из (19) используя свойства функций Бесселя одной переменной, можно вывести аналогичные свойства функций Бесселя двух переменных:

1. при $\mu=0,\nu=0$ получим произведения функций Бесселя с индексом ноль от переменных x и y :

$$J_{0,0}(x,y)=J_0(x)\cdot J_0(y).$$

2. при $\mu=1,\nu=1$, получим

$$J_{1,1}(x,y)=J_1(x)\cdot J_1(y).$$

Аналогично можно вывести и другие свойства.

Из (13) приходим к заключению, что четырьмя частными решениями системы (16) являются:

$$Z_1(x,y)=J(\mu;x)\cdot J(\mu;y);$$
$$Z_2(x,y)=J(\mu;x)\cdot y^{1-\nu}\cdot J(2-\mu;y);$$
$$Z_3(x,y)=x^{1-\mu}\cdot J(2-\mu;x)\cdot J(\nu;y);$$
$$Z_4(x,y)=x^{1-\mu}\cdot J(2-\mu;x)\cdot y^{1-\nu}\cdot J(2-\nu;y).$$

из которых легко составить её общее решение.

Список литературы

1. Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. — М.: ИЛ, 1963. — 465 с.
2. Коренев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. — М.: Наука, 1971. — 287 с.
3. Ватсон Дж.Н. Теория Бесселевых функций. Ч.I7. — М.: ИЛ, 1949. — 789 с.
4. Appell P., Kampe de Feriet J. Fonctions hypergeometriques et hyperspheriques . Polinomes d’Hermit. Paris: Gauthier–Villars, 1926. — 484 p.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976. — 576 с.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ТЕПЛОПЕРЕНОСУ В БАГАТОСТУПІНЧАТОМУ СТРИЖНІ

Р. М. Тацій, Б. С. Воробець, О. Ю. Пазен
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності,
Львів, Україна,
opazen@gmail.com

Розглядається задача про визначення стаціонарного температурного поля в симетричному $2n$-ступінчатому стрижні з урахуванням теплообміну його бічної поверхні з навколишнім середовищем. Припускається, що всі елементи стрижня виготовлені з різних матеріалів та мають різні геометричні характеристики. Припускається також, що відома (виміряна) температура стрижня на одному з його торців.

Така задача зводиться до розв’язування квазідиференціального рівняння

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i\cdot\frac{dt}{dx}\right]-\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\Theta_i t=-t_c\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\Theta_i \tag{1}$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} t(x_n)=t^n \\ t^{[1]}(0)=0 \end{cases} \tag{2}$$

Тут $x_0=0<x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n=\ell$ — координати кінців правої половини складових стрижня; λ_i — коефіцієнт теплопровідності матеріалу на проміжку $[x_i,x_{i+1})$; $t=\sum_{i=0}^{n-1}t_i(x)\Theta_i$ — температура стрижня, причому $t_i(x)$ — її складова на $[x_i,x_{i+1})$; $\Theta_i=\begin{cases}1, & x\in[x_i,x_{i+1})\\ 0, & x\notin[x_i,x_{i+1})\end{cases}$ — характеристична функція проміжку $[x_i,x_{i+1})$; $\varepsilon_i=\dfrac{\alpha_i}{h_i}$, де α_i — коефіцієнт теплообміну $(i+1)$-ї ланки стрижня, h_i — відношення площі поперечного перерізу цієї ланки до її периметра; $t_i^{[1]}(x)\overset{\text{def}}{=}\lambda_i t_i'(x)$ — тепловий потік (квазіпохідна [1]) на $[x_i,x_{i+1})$; t^n — температура правого торця; t_c — температура навколишнього середовища.

Зауважимо, що для одноступінчатого стрижня в загальному (нестаціонарному) випадку задача теплопровідності розглядається в монографії [2].

Відомим методом [1] крайова задача (1), (2) зводиться до розв’язування системи диференціальних рівнянь 1-го порядку

$$\overline{T}'=A\cdot\overline{T}+\overline{R} \tag{3}$$

з двоточковою умовою

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t(0) \\ t^{[1]}(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t(x_n) \\ t^{[1]}(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t^n \end{pmatrix} \tag{4}$$

де $\overline{T} = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{T}_i$, $\overline{T}_i = (t_i,\ t_i^{[1]})^T$, $\overline{R} = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{R}_i \Theta_i$, $\overline{R}_i = (0,\ t_c \varepsilon_{i+1})^T$, $A = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \Theta_i$,

$A_i = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\lambda_i} \\ \varepsilon_{i+1} & 0 \end{pmatrix}$.

Нехай $B_i(x,s)$ — матриця Коші однорідної системи

$$\overline{T}_i' = A_i \cdot \overline{T}_i; \qquad \overline{Z}_i \stackrel{df}{=} \int_{x_{i-1}}^{x_i} B_{i-1}(x_i, s)\overline{R}_{i-1}(s)ds,\ i = 1, 2, ..., n-1, n.$$

Позначимо

$$B(x_p, x_q) \stackrel{df}{=} \prod_{i=0}^{p-q-1} B_{p-i-1}(x_{p-i}, x_{p-i-1}), B(x_p, x_p) = E \tag{5}$$

$$\overline{P}^0 = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot B(x_n, x_0) \right]^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ t^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \sum_{i=0}^{n} B(x_n, x_i) \cdot \overline{Z}_i \right] \tag{6}$$

Справедливе наступне.

Твердження. На кожному з проміжків $[x_i, x_{i+1})$ двоточкова задача (3), (4) має єдиний розв'язок, що зображується у вигляді

$$\overline{T}_i(x) = B_i(x, x_i) \cdot \left[B(x_i, x_0) \cdot \overline{P}^0 + \sum_{j=0}^{i} (B(x_i, x_j) \cdot \overline{Z}_i) \right] + \int_{x_i}^{x} B_i(x,s)\overline{R}_i ds,$$

де матриці $B(x_i, x_j)$ та вектор $\overline{P}^0$ обчислюються за формулами (5) та (6) відповідно.

Розглянуто ілюстративний приклад 10-ти ступінчатого симетричного стрижня кусково-сталого, круглого перерізу, що складається з 5-ти різних матеріалів.

Проведено параметричний аналіз впливу теплофізичних і геометричних характеристик на розподіл температури та теплового потоку в такому стрижні.

Список літератури

1. Узагальнені квазідиференціальні рівняння / Р. Тацій, М. Стасюк, В. Мазуренко, О. Власій. — Дрогобич: Коло, 2011. — 311 с.

2. Лыков Н. Н. Теория теплопроводности. — М: Высшая школа, 1967. — 559 с.

ДО ОЗНАЧЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ З МІРАМИ

Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, Львів, Україна
marta_stasiuk@yahoo.com

Введемо наступні позначення: I – відкритий інтервал дійсної осі Ox;

$BV_{loc}^{+}(I)$ – клас неперервних праворуч функцій обмеженої на I варіації;

$\bar{Y}$, $\bar{F}(x)$ — n-вимірні вектори, C – $(n\times n)$матриця, $\bar{F}(x)$, $C(x)$ має елементи з $BV_{lok}^{+}(I)$; $C_H(x)$, $\bar{F}_H(x)$ — неперервні складові матриць-функцій $C(x)$ і $\bar{F}(x)$ відповідно; ω – множина точок розривів функцій $C(x)$ та $\bar{F}(x)$ (без обмеження загальності вважатимемо їх спільними); стрибки цих функцій визначені наступним чином:

$$\Delta C(x) = C(x) - C(x-0),\ \Delta\bar{F}(x) = \bar{F}(x) - \bar{F}(x-0).$$

Розглянемо систему диференціальних рівнянь:

$$\bar{Y}' = \bar{C}'\bar{Y} + \bar{F}', \tag{1}$$

де операція «штрих» означає узагальнене диференціювання. Різні підходи до означення розв'язку системи (1) описані, наприклад, в [1], звідки й випливає наступне

Означення. Під розв'язком системи (1) розуміємо вектор-функцію $\bar{Y}(x)\in BV_{loc}^{+}(I)$, що в узагальненому сенсі справджує систему диференціальних рівнянь

$$\bar{Y}' = C_H'(x)\cdot\bar{Y}(x) + \bar{F}_H'(x),\ x\notin\omega, \tag{2}$$

$$\bar{Y}(x) - \bar{Y}(x-0) = \Delta C(x)\cdot\bar{Y}(x-0) + \Delta\bar{F}(x),\ x\in\omega. \tag{3}$$

При цьому система (2),(3) є своєрідною системою диференціальних рівнянь з імпульсною дією [2]. Додамо до системи (2),(3) початкову умову

$$\bar{Y}(x_0) = \bar{Y}_0,\ x_0\in I. \tag{4}$$

Твердження. Початкова задача (2)–(4) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$\bar{Y}(x) = \bar{Y}_0(x_0) + \int_{x_0}^{x} dC(t)\bar{Y}(t) + F(x) - F(x_0),$$

де

$$\int_{x_0}^{x} dC(t)\bar{Y}(t) = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n-1}\left[C(t_{r+1}) - C(t_r)\right]\bar{Y}(t_r)$$

при $\max(t_{r+1}-t_r)\to 0,\ x_0 = r_0 < r_1 < \ldots < r_n = x.$

Список літератури

1. Узагальнені квазідиференціальні рівняння / Р. Тацій, М. Стасюк, В. Мазуренко, О.Власій. – Дрогобич: Коло, 2011.—311 с.

2. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М.Самойленко, Н. А. Перестюк .— К.: Наукова думка, 1987.— 287 с.

ТИПИ ПЕРІОДИЧНИХ ТРАЄКТОРІЙ ДЕЯКОГО КЛАСУ УНІМОДАЛЬНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Т. В. Тищук

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна

tetyana.tyshchuk@gmail.com

Питання співіснування періодичних траєкторій одновимірних динамічних систем інтенсивно вивчається багатьма дослідниками протягом останніх 50-ти років та зумовило створення нового напрямку досліджень динамічних систем — комбінаторної динаміки. Фактично зародження комбінаторної динаміки почалося з праць О. М. Шарковського, який запропонував розглядати тип взаємозв’язку між траєкторіями — їх співіснування. Фундаментальним результатом є теорема Шарковського про співіснування циклів різних періодів для неперервних відображень відрізка в себе [1].

Теорема Шарковського класифікує цикли неперервного відображення за періодами, але якщо відображення має різні цикли деякого фіксованого періоду, то такої класифікації може бути недостатньо. Природно,крім класифікації циклів за періодами, розглянути їх класифікацію за типами — циклічними перестановками. Тоді постає питання про співіснування циклів різних типів, тобто циклічних перестановок, які відповідають цим циклам.

Розглядаються цикли спеціального класу неперервних відображень відрізка в себе, графік яких складається з двох гілок монотонності [2]. Використовуючи класифікацію циклів за різними ознаками, зокрема, за ознакою взаємного розміщення точок циклу,описуються властивості циклів таких відображень та досліджується задача їх співіснування.

Пропонується іще один варіант доведення того, що цикли унімодального відображення є лінійно впорядкованими, причому цей порядок визначається лінійним порядком носіїв циклів відображення «тент», де під носієм циклу розумітимемо замкнений обмежений інтервал, кінцями якого є найменша та найбільша точка циклу. Використовуючи циклічну перестановку, визначається модель типу циклу, що не було зроблено в попередніх працях [3, 4], і цикли класифікуються за моделями типу циклу.

Список літератури

1. Шарковский А. Н. Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. мат. журн. — 1964. — **16**, №1. — С. 61–71.

2. Тищук Т. В. Класифікація періодичних траєкторій неперервних унімодальних опуклих вгору відображень відрізка в себе // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка, 32. — № 4.

3. Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В. Динамика одномерных отображений. — К.: Наукова думка, 1989. — 216 с.

4. Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю. Разностные уравнения и их приложения. — К.: Наукова думка, 1986. — 278 с.

ПРО ВЛАСТИВІСТЬ ЛОКАЛІЗАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКУ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Т. С. Тодоріко
Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича, Чернівці, Україна
tanuha_k@bk.ru

В [1] встановлено коректну розв'язність багатоточкової нелокальної за часом задачі для еволюційного рівняння $\partial u \,/\, \partial t = A_{\phi} u$ з оператором диференціювання нескінченного порядку $\phi(D) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k,\ D = d \,/\, dx$, у класі крайових умов типу ультрарозподілів, тобто в класі узагальнених функцій, які є елементами простору $\left(S_{l_k}^{m_n}\right)'$, топологічно спряженого до простору основних функцій $S_{l_k}^{m_n}$. Оператор $\phi(D)$ побудований за нескінченно диференційовною функцією $\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Простори $S_{l_k}^{m_n}$ є узагальненнями просторів типу S і будуються за числовими послідовностями $\{m_n\}$ та $\{l_k\}$, що задовольняють певні умови (простори типу S відповідають послідовностям $m_n = n^{n\beta}$, $l_k = k^{k\alpha}$, де $\alpha, \beta > 0$ — фіксовані параметри).

Розв'язок $u(t,\ \cdot)$ багатоточкової задачі дається у вигляді згортки фундаментального розв'язку з граничною функцією $f \in \left(S_{l_k}^{m_n}\right)'$; при цьому $u(t,\ \cdot) \in S_{l_k}^{m_n}$ при кожному $t \in \left(0, T\,\right]$, у той же час $u(t,\ \cdot)$ задовольняє відповідну крайову умову в сенсі узагальнених функцій, а саме, в просторі $\left(S_{l_k}^{m_n}\right)'$ при наближенні *t* до нуля та фіксованих точок $(t_1, ..., t_m) \subset (0, T]$.

Виникає запитання: якщо узагальнена функція *f* збігається на деякій відкритій множині з гладкою функцією, то чи буде тоді відбуватися локальне посилення збіжності вказаного розв'язку (локальна рівномірна або поточкова збіжність розв'язку). При дослідженні даного питання виділено клас $X' \subset \left(S_{l_k}^{m_n}\right)'$ узагальнених функцій типу ультрарозподілів такий, що розв'язок багатоточкової задачі з граничною функцією $f \in X'$ володіє вказаною властивістю локалізації.

Список літератури

1. Городецький В. В., Мартинюк О. В. Нелокальні задачі для еволюційних рівнянь першого порядку за часовою змінною: Монографія. — Чернівці: Видавничий дім «РОДОВІД», 2013. — 352 с.

ВЕКТОР-ФУНКЦІЇ ГРІНА ОСНОВНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З МОЛОДШИМИ ЧЛЕНАМИ, ЩО МІСТЯТЬ ЗРОСТАЮЧІ КОЕФІЦІЄНТИ

Н. І. Турчина

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

natаturchina@gmail.com

У теорії марковських випадкових процесів виникають параболічні рівняння другого порядку, в яких коефіцієнти при похідних першого порядку за просторовими змінними є лінійними функціями цих змінних, а інші коефіцієнти сталі. Серед таких рівнянь, зокрема, є рівняння

$$(Lu)(t,x) := \partial_t u(t,x) - \sum_{j=1}^{n} [a^2 \partial^2_{x_j} u(t,x) + b\partial_{x_j}(x_j u(t,x))] = f(t,x), \quad t>0, x := (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

в якому a і b — дійсні сталі, причому $a > 0$.

Для рівняння (1) розглядаються такі крайові задачі:

$$(Lu)(t,x) = f(t,x), (t,x) \in \Pi^+, \tag{2}$$

$$(B^{(l)}u)(t,x)\Big|_{x_n=0} = g(t,x'), (t,x') \in \Pi', \tag{3_l}$$

$$u(t,x)\Big|_{t=0} = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^n_+, \tag{4}$$

де $x' := (x_1,\dots,x_{n-1}), \mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, x_n > 0\}$,

$$\Pi^+ := \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\big|\, t \in (0,\infty), x \in \mathbb{R}^n_+\},$$

$$\Pi' := := \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\big|\, t \in (0,\infty), x' \in \mathbb{R}^{n-1}\},\ l \in \{1,2,3\},$$

$B^{(1)} = 1$ (умова Діріхле), $B^{(2)} = \partial_{x_n}$ (умова Неймана), $B^{(3)} = \alpha + \beta\partial_{x_n}, \alpha, \beta$ — задані сталі, такі, що $\alpha\beta \neq 0$ (третя крайова умова).

Вектор-функцією Гріна цієї задачі називається така вектор-функція $(G_0^{(l)}, G_1^{(l)}, G_2^{(l)})$, що для довільних нескінченно диференційовних і фінітних функцій f, g і φ розв'язок задачі (2), (3_l), (4) зображується у вигляді

$$u(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n_+} G_0^{(l)}(t-\tau,x,\xi) f(\tau,\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_1^{(l)}(t-\tau,x,\xi') g(\tau,\xi') d\xi' + $$
$$+ \int_{\mathbb{R}^n_+} G_2^{(l)}(t,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi,$$
$$(t,x) \in \Pi^+.$$

Знайдено в явному вигляді та досліджено властивості функцій G_0, G_1 і G_2.

УТОЧНЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ Ω_e И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ КОНЕЧНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ И ДИСКОВЫХ ТЕЛ

В. В. Убоженко
Киев, Украина

Треть века плодотворного использования монографии [1] убедительно свидетельствует о ее постоянной актуальности и большой полезности, как для изучающих динамические напряжения в упругих телах сложных форм, так и для аспирантов, и для студентов в области теории упругости и акустики, поскольку изучение около торцов цилиндров краевого резонанса, вызывающего в зоне их торцов быстрое образование усталостных трещин, позволяет предсказывать долговечность конструкций, оказываясь тем самым разновидностью неразрушающего контроля, определяющего форму, объем, ориентацию и расположение дефектов в упругих телах. Определение и анализ собственных частот Ω_e краевого резонанса и форм колебаний — главная цель решения задач для тел конечных размеров. В [1] рассмотрены конкретные виды тел, а именно, прямоугольные пластинки и круглые диски. Применительно к ним рассмотрены решения двумерных уравнений Ламе (1.4) гл.1

$$\mu\nabla^2\vec{u} + (\lambda + \mu)\,\mathrm{graddiv}\,\vec{u} + \vec{b} = \rho\partial^2\vec{u} \,/\, \partial t^2,$$

записанных в инвариантном виде (1.6)

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla\cdot\vec{u} - \mu\,\mathrm{rotrot}\,\vec{u} + \vec{b} = \rho\partial^2\vec{u} \,/\, \partial t^2$$

и полученных из (1.1)

$$\nabla\cdot\hat{T} + \vec{b} = \rho\partial^2\vec{u} \,/\, \partial t^2.$$

Граничные условия: силовые (1.1), кинетические (1.2), «смешанные» (1.3) и изложение метода решения задачи о колебаниях прямоугольника в §1 гл.5; в §5 указана необходимость соответствия нагрузки искомой форме колебаний; но поскольку оно не жесткое, то возбуждение мод Ламе удается одним-двумя типами внешней нагрузки, что важно при экспериментальных исследованиях, поляризованных по толщине пьезокерамических пластинок. Экспериментальные данные, способы разрезания и переключения электродов приведены в [3].

Исследование бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (2.10) гл.5 в [1] позволило предложить соотношения (3.29), (4.1) и с указанным там же анализом асимптотических свойств неизвестных в (2.10) приведено в [2]. Изученные в гл.4 [1] решения дисперсионных уравнений (2.16) и анализ волновых движений (в частности, в цилиндрах) позволили выполнить вычисления в гл.6, в §3 которого указано, что уточнение значений Ω_e в [4] привело к обнаружению их зависимости от относительного радиуса диска.

Список литературы

1. Гринченко В. Т., Мелешко В. В., Гармонические колебания и волны в упругих телах. — К.: Наук.думка. 1981. — 284с.

2. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. — К.: Наукова думка, 1978. — 264с.

3. Гринченко В. Т., Карлаш В. Л., Мелешко В. В., Улитко А. Ф. Исследование планарных колебаний прямоугольных пьезокерамических пластин // Прикл. механика. — 1976. — **12,** № 5. — С. 71–78.

4. Гринченко В. Т., Мелешко В. В., Высокочастотные осесимметричные колебания круглых дисков // Прикл. механика. — 1976. — **12,** № 12. — С. 60–68.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ РАСЧЕТА ПРОЦЕССА ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С НЕЛИНЕЙНЫМ ОСНОВАНИЕМ

А. В. Федотов, П. К. Семенов
СГТУ им. Ю. А. Гагарина, Саратов, Россия

Рассматриваются вопросы построения разрешающих уравнений для плиты прямоугольного очертания, лежащей на нелинейном неоднородном основании и взаимодействующей с температурным полем. Учет зависимости свойств нелинейно-упругого материала плиты от температуры и времени осуществляется через компонентные соотношения, которые принимаются в форме соотношений деформационной теории пластичности. Функциональная зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций принимается в виде:

$$\sigma_i = E(T,\tau)\varepsilon_i - m(T,\tau)\varepsilon_i^3.$$

Функции $E(T,\tau)$ и $m(T,\tau)$ могут быть построены по результатам численной обработки нелинейных диаграмм деформирования и кривых ползучести при различных температурах и напряжениях, приведенных в справочной литературе для широкого класса конструкционных материалов. Предлагаемая методика численной обработки экспериментальных данных основана на последовательном применении метода наименьших квадратов сначала для мгновенных диаграмм деформирования ($\tau = 0$) при различных температурах и, далее, для кривых ползучести при различных температурах и напряжениях. Анализ зависимостей E и m от температуры в различные моменты времени показывает, что с течением времени функции $E(T,\tau)$ и $m(T,\tau)$ становятся практически линейными. В этой связи принимаем $E_2(\tau) = E_2 \exp(-\tau)$; $m_2(\tau) = m_2 \exp(-\tau)$.

Построение аналитической зависимости $\sigma_i(\varepsilon_i, T, \tau)$ на основе использования полиномов позволяет получить последующее разрешающее уравнение плиты на нелинейном неоднородном основании в замкнутой форме. Основание моделируется деформируемым слоем конечной толщины, работающем в условиях плоской деформации и расположенном на недеформируемом массиве. Перемещение, вызываемое осадкой основания представляется в виде произведения функций с разделенными переменными. Неоднородность свойств основания может быть вызвана, например, частичным или поверхностным увлажнением. Применение к исходным нелинейным соотношениям метода последовательных возмущений параметров, а так же подстановка реактивного отпора основания в уравнение плиты позволяет получить линеаризованное дифференциальное уравнение в частных производных, связывающее приращение искомой функции с приращениями параметров термосилового нагружения плиты, времени и функции распределения влажности в массиве основания. Наличие приращений нескольких ведущих параметров позволяет путем численного эксперимента исследовать различные программы нагружения, нагревания и разрушения системы «плита – основание».

Эффективный высокоточный алгоритм численной реализации разрешающего уравнения основан на сведений двухмерной краевой задачи к одномерной путем использования метода двойной аппроксимации с последующим решением систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами методом дискретной ортонормализации Годунова с модификацией Coute, предусматривающей оптимальный выбор числа и места расположения точек ортонормализации.

СПЕКТР ПУЧКА СИНГУЛЯРНЫХ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. И. Филиппенко

Институт сервисного обслуживания и предпринимательства (филиал) ДГТУ, Шахты Ростовской области, Россия

filipenko@sssu.ru

Исследуем спектр пучка одномерных сингулярных квазидифференциальных операторов в случае, когда квазидифференциальное уравнение имеет иррегулярную особенность на бесконечности. Для этой цели воспользуемся асимптотическими методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений, развитыми в работах М. В. Федорюка [1] и Л. Д. Эскина [2].

Рассмотрим квазидифференциальное выражение

$$l[y] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (p_{n-k}(x) y^{(k)})^{(k)}. \tag{1}$$

Предположим, что:

(1) $l[y]$ задано на вещественной полуоси $I = [0, \infty)$;

(2) $p_0(x) \neq 0$ при $x \in I$;

(3) $p_1, p_2, ..., p_n$ — дважды непрерывно дифференцируемые комплекснозначные функции. Обозначим через D множество функций $y \in L^2(0, \infty)$ таких, что:

1) квазипроизводные $y^{[k]}(x), (k = 0, 1..., 2n-1)$ существуют и являются абсолютно непрерывными в каждом конечном интервале $[0, a], a > 0$;

2) $l[y] \in L^2(I)$.

$$U_i(y) \equiv \sum_{j=0}^{2n-1} \alpha_{ij}(\lambda) y^{[j]}(0), i = 1, 2, ..., n,$$

где $\alpha_{ij}(\lambda)$ — целые функции комплексного параметра λ, которые для любого $\lambda \to \infty$ представимы в виде $\alpha_{ij}(\lambda) = a_{ij}\lambda^p[1 + o(1)]$, где p — натуральное число или нуль. Обозначим через $D_{\alpha(\lambda)}$ совокупность функций $y \in D$, удовлетворяющих при любом фиксированном λ краевым условиям

$$U_i(y) - \int_0^\infty \mathrm{K}_i(x) y(x) dx = 0, \quad i = 1, 2...n, \tag{2}$$

где все функции $K_1, K_2, ..., K_n$ — суммируемы с квадратом модуля на полуоси I.

Пусть оператор $L_{\alpha(\lambda)}$ в пространстве $L^2\left(I\right)$ задан следующим образом: областью определения оператора $L_{\alpha(\lambda)}$ есть $D_{\alpha(\lambda)}$ и для всех $y \in D_{\alpha(\lambda)}$ $L_{\alpha(\lambda)}y = l\left[y\right]$. Предположим, что ранг матрицы коэффициентов, определяющей формы $U_i(y), i = 1,2,...,n,$ равен n. В этом случае область определения $L_{\alpha(\lambda)}$ плотна в гильбертовом пространстве $L^2\left(I\right)$.

Пусть q $\left(q\left(x\right) > 0\right)$ — вещественная функция, суммируемая в каждом промежутке $\left[0,a\right], a > 0$. Совокупность функций $y\left(x\right) \in L^2\left(I\right)$ таких, что $qy \in L^2\left(I\right)$, и удовлетворяющих условиям (2), обозначим символом D_q. Оператор Q с областью определения D_q действует на элементах $y \in D_q$ по правилу $Qy = qy$.

Таким образом, операторный пучок $L_{\alpha(\lambda)} - \lambda Q$ действует в гильбертовом пространстве $L^2\left(I\right)$ и определен на множестве $D_{\alpha(\lambda)}\bigcap D_q$.

Операторнозначную функцию $R_\lambda = (L_{\alpha(\lambda)} - \lambda Q)^{-1}$ будем называть резольвентой операторного пучка $L_{\alpha(\lambda)} - \lambda Q$. Число λ_0 называется регулярной точкой операторного пучка, если в этой точке оператор R_{λ_0} существует, определен всюду в пространстве $L^2\left(I\right)$ и ограничен. Все нерегулярные точки образуют спектр операторного пучка $L_{\alpha(\lambda)} - \lambda Q$. Точку спектра λ называют собственным значением операторного пучка, если для этого значения λ резольвента не существует. Пусть коэффициенты дифференциального выражения $l[y]$ имеют вид,

$$p_s(x) = p_{s0}(x) + p_{s1}(x), p_{01} \equiv 0, s = 0,1....,n, \tag{3}$$

причем для комплекснозначных функций p_{s0}, p_{s1} выполняются условия:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} p_0(x) = 1,$ $\lim\limits_{x\to\infty} |p_{n0}(x)| = 1,$ $\lim\limits_{x\to\infty} \arg p_{n0}\left(x\right) = n\theta$;

2) существуют конечные пределы $c_s = \lim\limits_{x\to\infty} c_s\left(x\right)$, где

$c_s(x) = p_{s0}(x)p_{no}^{-\frac{s}{n}}, s = 0,1....,n$;

3) уравнение $g(\eta) \equiv \sum\limits_{s=0}^{n} (-1)^s c_s \eta^{2n-2s} = 0$ не имеет кратных корней и, кроме того, вещественные части чисел $\tilde{\eta}_i = \eta_i e^{i\theta}$ различны и не равны нулю.

4) $(qp_n^{-1})' \in L^2\left(I\right)$;

5) $\sum\limits_{s=0}^{n}\left(\left|p_{s0}'^2 p_{no}^{-\frac{4s+1}{2n}}\right| + \left|p_{so}'' p_{no}^{-\frac{2s+1}{2n}}\right|\right) \in L^1\left(I\right)$;

6) $\sum\limits_{s=0}^{n}\left(\left|p_{s1}^2 p_{no}^{-\frac{4s-1}{2n}}\right| + \left|p_{s1}' p_{no}^{-\frac{s}{n}}\right|\right) \in L^1\left(I\right)$.

Заметим, что на функции p_{so} налагаются те же условия что и в работе М. В. Федорюка [1] на коэффициенты дифференциальной операции.

Положим $f(x, \mu) = \sum\limits_{s=0}^{n}\left(-1\right)^s p_{so}\mu^{2n-2s}$. Имеет место следующая лемма.

Лемма. *Пусть коэффициенты дифференциального уравнения $l[y] = \lambda q(x)y$ удовлетворяют условиям (1–4). Тогда для всякого $R > 0$ существует $x_0 = x_0\left(R\right)$ такое, что при любом $x > x_0$ решения уравнения $f(x, \mu) = (-1)^n q(x)\lambda$ являются регулярными функциями параметра λ в круге $\left|\lambda\right| < R$ при всех $x > x_0$.*

Пусть

$$\tilde{\mu}_j(x_i, \lambda) = \mu_j(x_i, \lambda) - [\tilde{f}_\mu'(x, \lambda, \mu_j]^{-1}\sum_{s=1}^{n}(-1)^s \mu_j^{2n-2s} p_{s1},$$

где $\tilde{f}_\mu{}'(x, \lambda, \mu_j) = \mu_j^{2n-1}\sum\limits_{s=0}^{n}\left(-1\right)^s\left(2n - 2s\right)p_{s0}\left(x\right)\mu_j^{-2s}$ и, положив

$$y_{ko}(x; \lambda) = \left[\frac{\partial \tilde{f}(x_i, \tilde{\mu}_k)}{\partial \mu}\right]^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{\int_{x_0}^{x} \tilde{\mu}_k(t; \lambda)dt\right\},$$

можно убедится в том, что фундаментальная система решений уравнения $l[y] = \lambda qy$, коэффициенты которого удовлетворяют условиям 1–6, состоит из функций $y_j(x, \lambda)$, $j = 1, 2, ..., 2n$. Эти решения вместе с их квазипроизводными до $\left(2n - 1\right)$-го порядка включительно представимы в виде:

$$y_j^{[k]}\left(x, \lambda\right) = \tilde{\mu}_j^k\left(x\right)y_{j0}\left(x\right)\left(1 + o\left(1\right)\right)$$

$$y_j^{[n+k]}\left(x, \lambda\right) = \left(-1\right)^k \tilde{\mu}_j^{n+k}\left(x, \lambda\right)y_{j0}\left(x, \lambda\right)\left(\sum_{s=0}^{n}\left(-1\right)^s c_s \eta_j^{-2s} + o\left(1\right)\right), \quad (4)$$

$$k = 0, 1, ..., n - 1$$

Теорема 1. *Пусть коэффициенты дифференциального выражения (1) имеют вид (3) и выполняются условия 1-6. Если* $\int_{x_0}^{\infty} | p_{n0}(t) |^{-1+\frac{1}{2n}} dt < \infty$, *то для фиксированного* $R > 0$ *существует* $2n$ *линейно независимых решений* $y_j(x,\lambda)$, $j = 1,2,...,2n$ *уравнения* $l[y] = \lambda q y$, *которые представимы в виде (4) и являются регулярными функциями параметра* λ *в круге* $\left|\lambda\right| < R|$ *вместе со всеми своими квазипроизводными до* $\left(2n-1\right)$ *- го порядка включительно.*

Теорема 2. *Если коэффициенты квазидифференциального выражения (1) удовлетворяет условиям теоремы 1, то спектр операторного пучка* $L_{\alpha(\lambda)} - \lambda q(x)$*либо заполняет всю комплексную плоскость, либо дискретный и не имеет конечных предельных точек. Для остальных значений параметра* λ, *не принадлежащих спектру операторного пучка* $L_{a(\lambda)} - \lambda q(x)$, *резольвента* R_λ *есть ограниченный интегральный оператор.*

Так как $y_k\left(x,\lambda\right)$ должны принадлежать многообразию $D_{\alpha\left(\lambda\right)} \cap D_q$, то уравнение для определения собственных значений операторного пучка имеет вид

$$\Delta\left(\lambda\right) \equiv \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1n} \\ U_{21} & U_{22} & \dots & U_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{n1} & U_{n2} & \dots & U_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

где $U_{ik} = \sum_{j=0}^{2n-1} \alpha_{ij}\left(\lambda\right) y_k^{[j]}\left(0,\lambda\right) - \int_0^{\infty} K_i\left(x\right) y_k\left(x,\lambda\right) dx$.

Список литературы

1. Федорюк М. В. Асимптотические методы в теории одномерных сингулярных дифференциальных операторов // Тр. Моск. матем. об-ва. — 1966. — Т. 15. — С. 296–345.

2. Эскин Л. Д. О спектре сингулярных дифференциальных операторов // Изв. ВУЗ, математика. — 1973. — № 6 — С. 103–116.

КЛАСИЧНА ГЛОБАЛЬНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗЛІЧЕННОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ НАПІВЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Т. І. Фірман

Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів, Україна

tarasfirman91@ukr.net

У півсмузі $\Pi = (0, l) \times (0, +\infty)$ розглянемо зліченну гіперболічну систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x, t, u_1, u_2, ...), \qquad i \in \{1, 2, ...\}, \tag{1}$$

в якій λ_i з непарними індексами будуть додатними величинами, а з парними — від'ємними. Нехай $I_0 = \{2k-1 \mid k = 1, 2, ...\}$та $I_l = \{2k \mid k = 1, 2, ...\}$.

Для системи (1) початкові та крайові умови задамо у вигляді:

$$u_i(x, 0) = g_i(x), \quad x \in [0, l], \quad i = 1, 2, ... \ , \tag{2}$$

$$u_i(0, t) = h_i(t, v_1(t), v_2(t), ...), \quad t \geq 0, \quad i \in I_0, \tag{3}$$

$$u_i(l, t) = h_i(t, v_1(t), v_2(t), ...), \quad t \geq 0, \quad i \in I_l, \tag{4}$$

де $v_i(t) = u_i(x_i, t)$, $x_i = 0$ для $i \in I_l$ та $x_i = l$ для $i \in I_0$.

Для задачі (1)–(4) встановлено достатні умови існування та єдиності глобального класичного розв'язку, шляхом її редукції методом характеристик до зліченної системи нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду, розв'язність якої випливає із результатів роботи [1].

Список літератури

1. Самойленко А. М. Счетные системы дифференциальных уравнений / А. М. Самойленко, Ю. В. Теплинський. — К.: Ин-т математики, 1993. — 308 с.

2. Аболиня В. Э. Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости / В. Э. Аболиня, А. Д. Мышкис // Матем. сб. — 1960. — Т. 50. — Вып. 4. — С. 423–442.

ЗАДАЧА З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПОХІДНИХ У ГІПЕРБОЛІЧНІЙ СИСТЕМІ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ У ПІВСМУЗІ

О. В. Флюд

Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів, Україна

oflyud@yahoo.com

В області $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, t < \infty\}$ розглянемо мішану задачу для гіперболічної системи двох рівнянь

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} = a_{11}(x,t)u^\varepsilon + a_{12}(x,t)v^\varepsilon, \ (x,t) \in D, \\ \varepsilon \dfrac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} - \dfrac{\partial v^\varepsilon}{\partial x} = a_{21}(x,t)u^\varepsilon + a_{22}(x,t)v^\varepsilon, \ (x,t) \in D, \end{cases}$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} u^\varepsilon(x,0) = u^\varepsilon(0,t) = 0, \\ v^\varepsilon(x,0) = 0, \end{cases}$$

де ε — малий додатній параметр.

Побудовано гладку асимптотику довільного порядку N, доведено теорему існування асиптотичного наближення та існування глобального розв’язку виродженої задачі при певних умовах гладкості та умовах погодження в точці $(0,0)$.

Одержані результати доведемо із використанням методики робіт [1–4].

Список літератури

1. Аболиня В. Э. Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости / Аболиня В. Э., Мышкис А. Д. // Матем. сб. — 1960. — Т. 50. — № 4. — С. 423–442.

2. Кирилич В. М. Обобщеная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперборлических систем квазилинейных уравнений / Кирилич В.М., Филимонов А. М. // Матем. студії. — 2008. — Т. 30. — № 1. — С. 42–60.

3. Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений./ Васильєва А. Б., Бутузов В. Ф. — М: Высшая школа, 1990. — 208с.

4. Мауленов О. О смешанной задаче для полулинейной гиперборлической системы на отрезке с малым параметром при производных по времени (часть III) / Мауленов О., Мышкис А. Д. // Изв. АН КазССР. Сер.физ.-мат. — 1985. — № 1. — С. 65–68.

5. Бутузов В. Ф. Об одной сингулярно возмущенной системе уравнений в частных производных первого порядка / Бутузов В. Ф., Каращук А. Ф. // Матем. заметки. — 1995. — Т. 57. — Вып. 3. — С. 338–349.

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КЛАССА ФУКСА С ПЯТЬЮ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Л. А. Хвощинская, Н. Д. Василевич
Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь
ludmila.ark@gmail.com, vasilevich.M@gmail.com

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений 2-го порядка класса Фукса:

$$\frac{dY}{dz} = Y\left(\frac{U_0}{z} + \frac{U_1}{z+1} + \frac{U_2}{z+i} + \frac{U_1}{z-1} + \frac{U_2}{z-i}\right), \tag{1}$$

где $U_k\left(k = 0,1,2\right)$ — постоянные матрицы второго порядка, причем $U_0 + 2\left(U_1 + U_2\right) = 0$. Точка $z = \infty$ не является особой. В общем случае решение системы (1) строится в виде рядов от матриц и выражается через гиперлогарифмы [1]. Покажем, как выразить решение системы (1) через гипергеометрические функции.

Обозначим ρ_k, σ_k — характеристические числа матриц $U_k\left(k = 0,1,2\right)$, $\rho_0 + \sigma_0 + \rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2 = 0$. Для того, чтобы решение системы (1) в окрестностях особых точек $0, \pm 1, \pm i$ принадлежало определенному классу функций, потребуем, чтобы $-1 \le \mathrm{Re}\left(\rho_k - \sigma_k\right) < 1, \left(k = 0,1,2\right)$.

С помощью дробно-линейного преобразования $z = \dfrac{1}{\xi}$ переведем точку $z = 0$ в точку $\xi = \infty$ и перепишем систему (1) в виде

$$\frac{dY}{d\xi} = Y\left(\frac{U_1}{\xi+1} + \frac{U_2}{\xi-i} + \frac{U_1}{\xi-1} + \frac{U_2}{\xi+i}\right).$$

Обозначив $\xi^2 = t$, приходим к системе

$$\frac{dY}{dt} = Y\left(\frac{U_1}{t-1} + \frac{U_2}{t+1}\right) \tag{2}$$

с тремя особыми $t = -1$, $t = 1$ и $t = \infty$. Фундаментальная система решений уравнения (2) выражается через гипергеометрические функции и имеет вид[2]:

$$Y = \left(t+1\right)^{\rho_1}\left(t-1\right)^{\rho_2}\begin{pmatrix} u_1 & \left(t+1\right)\left(2au_1 + \left(t-1\right)u_1'\right) \\ u_2 & \left(t+1\right)\left(2au_2 + \left(t-1\right)u_2'\right) \end{pmatrix},$$

где

$$u_1 = F\left(a, b; c; \frac{t+1}{2}\right) \text{ и } u_2 = \left(\frac{t+1}{2}\right)^{1-c} F\left(a-c+1, b-c+1; 2-c; \frac{t+1}{2}\right)$$

при $\rho_2 \ne \sigma_2$ или

$$u_2 = \frac{1}{2\pi i}\left[\begin{array}{l} -F\left(a,b;1;\dfrac{t+1}{2}\right)\ln\dfrac{t+1}{2} + \\ +\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n (b)_n}{(n!)^2}\left(\frac{t+2}{2}\right)^n \left(2\psi(n+1)-\psi(a+n)-\psi(b+n)\right) \end{array}\right]$$

при $\rho_2 = \sigma_2$.

Параметры этих функций находим по формулам:

$$a = \frac{1}{2}\rho_0 + \rho_1 + \rho_2, b = 1 + \frac{1}{2}\sigma_0 + \rho_1 + \rho_2, \, c = 1 + \rho_2 - \sigma_2, \, \left(\operatorname{Re}\rho_0 \geq \operatorname{Re}\sigma_0\right).$$

Аналитическое продолжение этих функций из окрестности точки $t = -1$ на всю плоскость осуществляется по известным формулам [3], выбор которых зависит от того, выполняются или не выполняются равенства $\rho_0 = \sigma_0$ и $\rho_1 = \sigma_1$.

Элементы фундаментальной системы решений $Y = \left(y_{ij}\right)$ системы дифференциальных уравнений (1) находятся по формулам:

$$y_{11}(z) = z^{-2(\rho_1+\rho_2)}\left(1-z^2\right)^{\rho_1}\left(1+z^2\right)^{\rho_2} F\left(\frac{1}{2}\rho_0+\rho_1+\rho_2, 1+\frac{1}{2}\sigma_0+\rho_1+\rho_2; 1+\rho_2-\sigma_2; \frac{1+z^2}{2z^2}\right),$$

$$y_{21}(z) = z^{-2(\rho_1+\sigma_2)}\left(1-z^2\right)^{\rho_1}\left(1+z^2\right)^{\sigma_2} F\left(\frac{1}{2}\rho_0+\rho_1+\sigma_2, 1+\frac{1}{2}\sigma_0+\rho_1+\sigma_2; 1+\sigma_2-\rho_2; \frac{1+z^2}{2z^2}\right),$$

$$y_{12}(z) = \left(\frac{1}{2}\rho_0+\rho_1+\rho_2\right) z^{-2(\rho_1+\rho_2+1)}\left(1-z^2\right)^{\rho_1+1} \times$$

$$\times\left(1+z^2\right)^{\rho_2} F\left(1+\frac{1}{2}\rho_0+\rho_1+\rho_2, 1+\frac{1}{2}\sigma_0+\rho_1+\rho_2; 1+\rho_2-\sigma_2; \frac{1+z^2}{2z^2}\right),$$

$$y_{22}(z) = \left(\frac{1}{2}\rho_0+\rho_1+\sigma_2\right) z^{-2(\rho_1+\sigma_2+1)}\left(1-z^2\right)^{\rho_1} \times$$

$$\times\left(1+z^2\right)^{\sigma_2+1} F\left(1+\frac{1}{2}\rho_0+\rho_1+\sigma_2, 1+\frac{1}{2}\sigma_0+\rho_1+\sigma_2; 1+\sigma_2-\rho_2; \frac{1+z^2}{2z^2}\right).$$

Решение системы (1) определяется неоднозначно, а с точностью до произвольной постоянной невырожденной матрицы второго порядка умноженной на функцию Y слева.

Список литературы

1. Еругин Н. П. Проблема Римана. — Минск: Наука и техника, 1982. — 336 с.

2. Хвощинская Л. А. Решение одной задачи теории упругости // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. Минск, 2000. Т.5.— С. 136–141.

3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. — М.: Наука, 1973. — 296 с.

УМОВИ ІСНУВАННЯ 2π–ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Г. П. Хома, Н. Г. Хома, С. Г. Хома-Могильська
Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль, Україна
nadija_khoma@mail.ru

На основі проведених досліджень нами встановлено, що розв'язком 2π-періодичної крайової задачі

$$u_{tt} - u_{xx} = g\left(x,t\right), \quad 0 < x < \pi, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, (2)$$

$$u\left(x, t+2\pi\right) = u\left(x,t\right), \quad 0 \le x \le \pi, \qquad t \in \mathbb{R} \quad (3)$$

може бути функція

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^2 \cos kt + A_k^4 \sin kt\right)\sin kx + \left(S_1 g\right)(x,t) - \frac{x}{\pi}\left(S_1 g\right)(\pi,t), \qquad (4)$$

де A_k^2, A_k^4, $k \in \mathbb{N}$, — довільні сталі, а $\left(S_1 g\right)(x,t) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)d\tau$. А це означає, що крайова 2π-періодична задача (1)–(3) має безліч розв'язків. Зрозуміло, що розв'язок, заданий формулою (4), буде єдиним, коли однозначно будуть визначені коефіцієнти A_k^2 та A_k^4, $k \in \mathbb{N}$.

Використовуючи представлення

$$\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha - \frac{x}{2\pi}\int\limits_{t-\pi}^{t+\pi}\mu(\alpha)d\alpha \equiv \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^2\cos kt + A_k^4 \sin kt\right)\sin kx,$$

де $A_k^2 = a_k / k$, $A_k^4 = b_k / k$, $k \in \mathbb{N}$, a_k, b_k — коефіцієнти ряду Фур'є 2π-періодичної функції $\mu(t)$, розв'язок (4) можна записати так:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha - \frac{1}{2}\int\limits_0^x d\xi\int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)d\tau + \frac{x}{2\pi}\left\{\int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)d\tau - \int\limits_{t-\pi}^{t+\pi}\mu(\alpha)d\alpha\right\}.$$

Звідси одержуємо такий результат.

Теорема. *Нехай* $g \in C^{0,1}\left([0,\pi]\times\mathbb{R}\right)$ *і* $g(x,t+2\pi) = g(x,t)$. *Тоді для кожної функції* $\mu(t) \in C^1\left(\mathbb{R}\right)$, $\mu(t+2\pi) = \mu(t)$, *яка задовольняє рівняння*

$$\int\limits_{t-\pi}^{t+\pi}\mu(\alpha)d\alpha = \int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)d\tau,$$

функція

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha + \left(S_1 g\right)(x,t) \equiv u^0(x,t) + \left(S_1 g\right)(x,t)$$

є єдиним класичним розв'язком крайової 2π*-періодичної задачі (1)–(3).*

ПРО ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯНЬ РІВНОВАГИ НЕТОНКИХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИН

І. Ю. Хома, О. Г. Дашко, І. Г. Коваленко

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

olga.dashko@gmail.com

Розглядається задача про знаходження фундаментального розв'язку системи рівнянь рівноваги нетонких трансверсально-ізотропних пластин постійної товщини $2h$. В основу її покладено метод [1, 2] розвинення функцій компонент вектора переміщень $u_j\left(\bar{x}\right)$ і тензора напружень $\sigma_{ij}\left(\bar{x}\right)$ в ряди Фур'є за поліномами Лежандра координати товщини $\xi = x_3 / h$. Приймається, що граничні площини пластини $x_3 = \pm h$ вільні від напружень і знаходиться вона під дією об'ємних сил X_j, прикладених вздовж відрізка $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\left|x_3\right| \leq h$ з погонними інтенсивностями $F_j\left(x_3\right)$, тобто $X_j = F_j\left(x_3\right)\delta\left(x_1, x_2\right)$, де $\delta\left(x_1, x_2\right)$ — двовимірна дельта-функція Дірака. Відносно коефіцієнтів розкладу, як функцій двох незалежних змінних, виводиться система диференціальних рівнянь

$$\partial_\alpha \sigma_{\alpha j}^{(k)} - \left(2k+1\right)h^{-1}\sum_{s=0}^{[K]} \sigma_{3j}^{(k-2s-1)} + F_j^{(k)}\delta\left(x_1, x_2\right) = 0 \quad \left(j = 1,2,3; k = \overline{0, N}\right) \tag{1}$$

і співвідношення пружності, які зв'язують складові напружень $\sigma_{ij}^{(k)}$ і переміщень $u_j^{(k)}$. В загальному для анізотропної пластини вони визначаються так

$$\sigma_{ij}^{(k)} = c_{ijlm}\partial_l u_m^{(k)} \tag{2}$$

де c_{ijlm} — пружні сталі матеріалу, що задовольняють умовам симетрії [3]:

$$\partial_l u_m^{(k)} = \begin{cases} \partial_\alpha u_m^{(k)}, l = \alpha = 1,2; \\ h^{-1} u_m^{\prime(k)}, l = 3. \end{cases} \tag{3}$$

Тут $u_m^{\prime(k)} = \left(2k+1\right)\left(u_m^{(k+1)} + u_m^{(k+3)} + \ldots\right)$, причому $u_m^{(k)} = 0$, якщо $n > N$; $K = \left(k-1\right)/2$; символ $\left[K\right]$ означає цілу частину числа K. Якщо внести (2), (3) в рівняння (1), то отримаємо систему рівнянь відносно функцій $u_j^{(k)}$. Для транстропного тіла вона розпадається на дві групи рівнянь, які описують симетричне і кососиметричне (відносно серединної площини) деформування пластини.

Викладено метод побудови фундаментальної матриці даної системи.

Список літератури

1. Векуа И.Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины // Тр. Тбилис. мат. ин-та, 1965. — Т. 30. — С. 5–103.

2. Khoma I.Yu. Representation of the solution of the equilibrium equations for non-thin transversely isotropic plates // J. of Math. Sciences. — 2000. — 101, № 6. — P. 3577–3584.

3. Новацкий В. Теория упругости. — М.: Мир, 1975. — 872 с.

ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

С. Г. Хома-Могильська
Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль, Україна
sv_khoma@mail.ru

Нами встановлено точний розв'язок крайової задачі

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < \pi, \quad 0 \le t \le T, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

у таких просторах функцій:

$$B_0^- = \left\{ \mu : \mu(z) = -\mu(-z) = \mu(\pi - z) \right\},$$

$$B^- = \left\{ f : f(x,t) = f(\pi - x, t) = -f(-x,t) \right\},$$

який представлено у вигляді

$$u(x,t) = \left(A[\mu, f] \right)(x,t), \tag{3}$$

де $\mu(z)$ — спеціально визначена функція.

Досліджено властивості розв'язку (3).

Основний результат сформульовано у наступних твердженнях.

Теорема 1. Для довільної функції $\mu(z) \in C^1\left(\mathbb{R}\right) \cap B_0^-$ і функції $f(x,t) \in C^{1,0}\left((0,\pi)\times[0,T]\right) \cap B^-$ існує точний розв'язок крайової задачі (1), (2), який задається формулою (3).

Теорема 2. Якщо $\mu(z) \in C\left(\mathbb{R}\right) \cap B_0^-$ і $f(x,t) \in C\left((0,\pi)\times[0,T]\right) \cap B^-$, то справедливі рівності

$$u(-x,t) = -u(x,t);$$
$$u(\pi - x, t) = u(x,t),$$

тобто оператор A переводить клас функцій із класу B^- у цей же клас функцій

$$(B^- \xrightarrow{\quad A \quad} B^-).$$

Дані властивості дозволяють використовувати побудований розв'язок для наближених обчислень розв'язків крайових задач для квазілінійних гіперболічних рівнянь другого порядку [1, 2].

Список літератури

1. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. — К.: Наук. думка, 1971. — 432 с.

2. Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И. Асимптотическая теория решений уравнений в частных производных. — К: Вища школа, 1976. — 588 с.

ОБ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЁННОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ТРЁХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. С. Хонимкулов

Курган-Тюбинский государственный университет им. Носира Хусрава, Курган-тюбе, Таджикистан

Через Ω обозначим параллелепипед

$$\Omega = \left\{ \left(x, y, z \right), 0 < x < a,\ 0 < y < b, 0 < z < c \right\}.$$

Далее, соответственно обозначим

$$\Omega_1 = \left\{ x = 0, 0 < y < b, 0 < z < c \right\},$$
$$\Gamma_1 = \left\{ 0 < x < a, y = 0, z = 0 \right\},$$
$$\Omega_2 = \left\{ 0 < x < a, y = 0, 0 < z < c \right\},$$
$$\Gamma_2 = \left\{ x = 0, 0 < y < b, z = 0 \right\},$$
$$\Omega_3 = \left\{ 0 < x < a, 0 < y < b, z = 0 \right\},$$
$$\Gamma_3 = \left\{ x = 0, y = 0, 0 < z < c \right\}.$$

В области Ω рассмотрим переопределенную систему дифференциальных уравнений следующего вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{a\left(x, y, z \right)}{r^{\alpha}} u = \dfrac{f_1\left(x, y, z \right)}{r^{\alpha}}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{b\left(x, y, z \right)}{y^{\beta}} u = \dfrac{f_2\left(x, y, z \right)}{y^{\beta}}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{c\left(x, y, z \right)}{z^{\gamma}} u = \dfrac{f_3\left(x, y, z \right)}{z^{\gamma}} \end{cases} \tag{1}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, a\left(x, y, z \right), b\left(x, y, z \right), c\left(x, y, z \right), f_i\left(x, y, z \right), i = 1, 2, 3$— заданные функции в области Ω, $\alpha < 2$, $\beta < 1$, $\gamma < 1$.

Проблема нахождения многообразия решений и исследованный граничных задач для переопределённых систем с сингулярными и сверх сингулярными коэффициентами посвящены работы [1–3].

В настоящей работе для системы (1) при $\alpha < 2$, $\beta < 1$, $\gamma < 1$ получены многообразия решений через одна произвольная постоянная.

Список литературы

1. Михаилов Л. Г. Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. — Душанбе,1986. — 115 с.

2. Раджабов Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверх сингулярными коэффициентами. — Душанбе: Из-во ТГУ, 1992. — 236 с.

3. Shamsudinov F. M. About an overderminedsustem second order-with singularity coefhcients // Absr acts 36th Annual Iranian Mathematiks conference 10–13 Septeber 2005, Yazd, Iran. — 2005. — P. 211–212.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТЕНЗОРНОЇ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ ПЕРІОДИЧНИХ СТРУКТУР

В. В. Хорошун

Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна, Харків, Україна,

khoroshun_vv@ukr.net

Розглядається система диференціальних рівнянь із частинними похідними

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\mu_{11}}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_0^2\varepsilon_{\perp}\mu_{11}\right)E_x=-k_0\mu_{11}\left(\frac{\mu_a}{\mu}+\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon}\right)\frac{\partial H_x}{\partial y}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_0^2\varepsilon_{11}\mu_{\perp}\right)H_x=k_0\varepsilon_{11}\left(\frac{\mu_a}{\mu}+\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon}\right)\frac{\partial E_x}{\partial y}$$

до якої зводиться система рівнянь Максвела щодо розв’язку задачі дифракції плоских хвиль на 2π-періодичній ґратці із ідеально провідних елементів довільного поперечного перетину, яка знаходиться у безмежному гіротропному середовищі із діелектричною $\tilde{\varepsilon}$ та магнітною $\hat{\mu}$ проникливостями у вигляді тензорів Полдера [1] з компонентами ε_{ik} [2] та μ_{ik} [3] $\left(i,k=1,2,3\right)$. Представляючи $E_x\left(y,z\right)$ та $H_x\left(y,z\right)$ їх рядами Фур’є, зводимо вихідну систему рівнянь до однорідної системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами для визначення Фур’є-компонентів полів $E_n(z)$ та $H_n(z)$:

$$\frac{d^2E_n(z)}{dz^2}+c_nE_n(z)+d_nH_n(z)=0,$$

$$\frac{d^2H_n(z)}{dz^2}+e_nH_n(z)+f_nE_n(z)=0,$$

де

$$c_n=\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2\frac{\mu_{11}}{\mu}\left[\kappa^2\varepsilon\mu-(n+\nu)^2\right],\ d_n=i\frac{2\pi}{l}\kappa\mu_{11}\frac{\mu_a}{\mu}(n+\nu)$$

$$e_n=\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2\left[\kappa^2\varepsilon\mu_{\perp}-(n+\nu)^2\right],\quad f_n=-i\frac{2\pi}{l}\kappa\varepsilon\frac{\mu_a}{\mu}(n+\nu)$$

причому $\kappa=l/\lambda, \nu=\sin\xi,\ \xi$ — кут падіння. Отримано вирази для постійних розповсюдження основної та вищих гармонік. Для випадку ґратки із брусів прямокутного поперечного перетину методом перерозкладань одержано систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих амплітуд дифракційних спектрів. Зазначимо, що в даному випадку зовнішнє постійне магнітне поле $\bar{H}_0$ було орієнтовано поперек елементів гратки. Розглянуто також випадок напряму $\bar{H}_0$ по нормалі до площини ґратки.

Список літератури

1. Polder D. On the theory of ferromagnetic resonance // Phil. Mag., v. 40, No. 300, 1949, p.99–115.

2. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. Наука, 1967. — 683 с.

3. Лакс Б., Баттон К. Сверхвысокочастотные ферриты и ферримагнетики. — М.: Мир, 1965. — 675 с.

ПРО «ХОРОШО ПОСТАВЛЕННЫЕ» ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ (УРАВНЕНИЙ)

А. О. Цуканова
НТУУ «Киевский политехнический институт», Киев, Украина
shugaray@mail.ru

Параболические уравнения были получены при изучении распространения тепла. Теория параболических систем (уравнений), основателем которой является Ж. Б. Фурье (1768–1830), берет начало от уравнения теплопроводности

$$\left(\partial_t - a^2\Delta_x\right)u(t,x) = 0,\ \left(t,x\right)\in Q, \tag{1}$$

где Q — множество в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ точек $\left(t,x\right)$ для фиксированного $n\in\mathbb{N}$, $x\equiv\left(x_1,\dots,x_n\right)$. В 1938 г. в работе «О проблеме Коши для системы линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций» советский математик И. Г. Петровский (1901–1973) определил класс новых систем (уравнений) дифференциальных уравнений с частными производными. Как оказалось, определенный Петровским класс параболических систем (уравнений), которые называются ***параболическими по Петровскому***, обладают свойствами простейшего представителя этого класса — уравнения (1).

Прошло более 70 лет со времен выхода работы И. Г. Петровского, а ее идеи продолжают жить и развиваться и реализовались, в частности, в теории так называемых параболических граничных задач, то есть «хорошо поставленных» граничных задач для параболических систем (уравнений), созданной в 60-х годах прошлого века, которая используется в теории уравнений с частными производными, случайных процессах, кинетике и т. д. Основой для развития этой теории была классификация уравнений И. Г. Петровского и исследования Я. Б. Лопатинского (1906–1981) в области граничных задач для эллиптических по Петровскому систем и Т. Я. Загорского в области граничных задач для параболических по Петровскому систем первого порядка по временной переменной. Как известно, граничная задача называется корректно разрешимой в заданном пространстве, если ее решение существует при любых допустимых правых частях задачи, единственно и непрерывно зависит от них. При решении прикладных задач, в которых граничные условия бывают разными, возникает вопрос: какие граничные условия нужно задавать для того, чтобы соответствующая задача была правильно поставленной? Ответ на этот вопрос дает вышеупомянутая теория. При этом возникает ***равномерное условие дополнительности***. Вместе с этим условием и специальным условием параболичности системы (уравнений) определяются параболические граничные задачи. При исследовании таких задач самым сложным является проверка условия дополнительности. Непосредственно она может быть проведена в отдельных случаях, одним из которых является следующая модельная задача, которая встречается в теории тепло- и массопереноса при описании процессов сушки, охлаждения и т. п.:

$$\left(\partial_t - M\Delta_x\right)u(t,x) = f(t,x),\ \left(t,x\right)\in\Pi^+, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\partial_{x_n}u_j(t,x)_{x_n=0} = g_1(t,x'),\ \sum_{j=1}^{2}\beta_j u_j(t,x)\,|_{x_n=0} = g_2(t,x'),\ \left(t,x'\right)\in\Pi', \tag{3}$$

$$u_j(t,x)\,|_{t=0} = \varphi_j(x),\ x \in \mathbb{R}_+^n,\ j \in \{1,2\}, \tag{4}$$

где $\Pi^+ \equiv (0,+\infty) \times \mathbb{R}_+^n$, $\Pi' \equiv (0,+\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$, $\mathbb{R}_+^n \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_n > 0\}$, α_j, β_j, $j \in \{1,2\}$,— заданные действительные числа, M — действительная квадратная матрица с постоянными элементами, которая с помощью невырожденного линейного преобразования сводится к следующему диагональному виду:

а) $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$; б) $M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda > 0$;

в) $M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$; г) $M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda > 0$.

Система (2) является параболической по Петровскому, задание двух граничных условий соответствует требованию теории. Нашей задачей было исследовать условия на коэффициенты α_j, β_j, $j \in \{1,2\}$, при которых будет выполняться условие дополнительности. Согласно полученным результатам, имеем:

а) $\dfrac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2} \notin \left[\sqrt{\dfrac{\gamma\left(1 - \dfrac{\delta_1}{\lambda_1}\right)}{\gamma - \dfrac{\delta_1}{\lambda_1}}}, \sqrt{\gamma}\right]$, $\alpha_1\beta_2 \neq 0$, $\gamma \equiv \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$, $0 < \delta_1 < \lambda_1$;

б) $\dfrac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2} \neq 1$, $\alpha_1\beta_2 \neq 0$;

в) $\dfrac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2\beta_1} \notin \left[\sqrt[4]{\dfrac{1 - 2\dfrac{\delta_1 \operatorname{Re}\lambda}{|\lambda|^2} + \dfrac{\delta_1^2}{|\lambda|^2} + \dfrac{\operatorname{Im}^2 p}{|\sigma'|^4 |\lambda|^2} - 2\dfrac{\operatorname{Im} p \operatorname{Im}\lambda}{|\sigma'|^2 |\lambda|^2}}{1 - 2\dfrac{\delta_1 \operatorname{Re}\lambda}{|\lambda|^2} + \dfrac{\delta_1^2}{|\lambda|^2} + \dfrac{\operatorname{Im}^2 p}{|\sigma'|^4 |\lambda|^2} + 2\dfrac{\operatorname{Im} p \operatorname{Im}\lambda}{|\sigma'|^2 |\lambda|^2}}}, 1\right]$, $\alpha_2\beta_1 \neq 0$,

$0 < \delta_1 < \lambda, (p,\sigma') \in \Gamma \equiv \left\{(p,\sigma') \mid \operatorname{Re} p \geq -\delta_1 |\sigma'|^2, \sigma' \in \mathbb{R}^{n-1}, |p| + |\sigma'|^2 > 0\right\}$;

г) $\left|\dfrac{\alpha_2(\beta_2 - \beta_1)\lambda - \beta_1(\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha_1\beta_1}\right| \notin \left[\dfrac{\delta_1}{2(\lambda - \delta_1)}, \dfrac{1}{2}\right]$, $\alpha_1\beta_1 \neq 0$, $0 < \delta_1 < \lambda$,

где δ_1 — постоянная из определения множества Γ.

Список литературы

1. *Ивасишен С. Д.* Линейные параболические граничные задачи. — Киев: Выща шк., 1987. — 72 с. — (Современные достижения математики и ее приложений).

2. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* Линейные параболические граничные задачи: примеры, теоремы о корректности, приложения. — Математика сегодня: науч.-метод. сб. — Киев: Выща шк., 1988. — С. 76–104.

3. *Івасишен С. Д.* Про розвиток ідей Я. Б. Лопатинського в теорії параболічних рівнянь. — Мат. студії, 2007. — Т. 27, № 1. — С. 70–76.

ПРО ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

А. О. Цуканова

НТУУ «Киевский политехнический институт», Киев, Украина

shugaray@mail.ru

«Начало XX века было ознаменовано успехами в теории уравнений с частными производными. Наряду с появлением новых методов исследования задач данной теории, этот период отличается тем, что точка зрения на эти уравнения начинает меняться. В настоящий момент невозможно излагать теорию граничных задач для уравнений в частных производных без функционального анализа. Особенно заметно его влияние в теории параболических уравнений»

С. Л. Соболев

В 1934 году выдающийся польский математик Ю. П. Шаудер получил важные результаты в теории граничной задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка. Дальнейшие разработки этой теории привели к результатам шаудеровской теории для параболической граничной задачи вида

$$\left(\partial_t - \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} D_{x_j}^1 D_{x_k}^1\right) u(t,x) = f(t,x),\ \left(t,x\right) \in \Pi_T^+, \tag{1}$$

$$\left.\sum_{2\beta+\left|\gamma\right|=r} b_{\beta\gamma} \partial_t^\beta D_x^\gamma u(t,x)\right|_{x_n=0} = g(t,x'),\ \left(t,x'\right) \in \Pi_T', \tag{2}$$

$$u(t,x)\Big|_{t=0} = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}_+^n, \tag{3}$$

где $n \in \mathbb{N}$ и $T > 0$ — фиксированные числа, $\mathbb{R}^n \equiv \left\{x \,\middle|\, x \equiv \left(x_1, \dots x_n\right)\right\}$, $\Pi_T^+ \equiv \left(0, T\right] \times \mathbb{R}_+^n$, $\mathbb{R}_+^n \equiv \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_n > 0\right\}$, $\Pi_T' \equiv \left(0, T\right] \times \mathbb{R}^{n-1}$, $D_{x_j}^1 \equiv \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}, i^2 = -1$, коэффициенты a_{jk}, $\left\{j,k\right\} \subset \left\{1,\dots,n\right\}$, и $b_{\beta\gamma}$, $2\beta + \left|\gamma\right| = r$, $r \ge 0$, постоянны. В рамках этой теории устанавливаются точные зависимости дифференциальных свойств решений граничной задачи от дифференциальных свойств ее правых частей, априорные оценки решений и корректная разрешимость задачи в особых пространствах. Из этой теории вытекают результаты, которые касаются теорем единственности решений граничных задач в функциональных пространствах Гельдера $H_{k(\cdot,a)}^{l+2+\alpha}(\Pi_T^+)$ специальным образом растущих функций, где l, α — некоторые числа, причем $l \ge 0$ целое, $0 < \alpha < 1$, а $k(t,a) \equiv \dfrac{c_0 a}{c_0 - at}$, где c_0, a — положительные постоянные, причем $c_0 \in \left(0, c\right)$, c — наименьшая постоянная из оценок ядер интегрального изображения решения (1)–(3), а a считается выбранной так, чтобы $0 < T < \dfrac{c_0}{a}$.

Вопросу о единственности решения задачи (1)–(3) предшествует аналогичный вопрос относительно решений задачи Коши для параболического уравнения (1). Так, теоремы единственности решения задачи Коши для простейшего уравнения теплопроводности

$$\left(\partial_t - a^2\Delta_x\right)u(t,x) = 0\,, \left(t,x\right) \in \Pi_T \equiv \left\{\left(t,x\right)\middle| t \in \left(0,T\right], x \in \mathbb{R}^n\right\}, \quad (4)$$

$$u(t,x)\Big|_{t=0} = 0\,, x \in \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

в классах растущих функций были впервые доказаны Е. Е. Леви, А. Н. Тихоновым, Е. Хольмгреном, С. Теклиндом.

В работе [0] советского математика А. Н. Тихонова впервые был построен пример отличной от тождественного нуля функции, которая удовлетворяет уравнение теплопроводности (4) и нулевое начальное условие (5). Для этой функции является правильной априорная оценка

$$\left|u(t,x)\right| \le C\exp\left\{a\left|x\right|^{2+\varepsilon}\right\} \quad (6)$$

где ε, C, a — некоторые произвольные постоянные. Согласно результату А. Н. Тихонова, если оценка (6) выполняется при $\varepsilon = 0$ и $u \equiv u(t,x)$ — решение задачи Коши (4), (5), то $u = 0$ в Π_T.

Развивая идеи работы [0] шведского математика Е. Хольмгрена, его соотечественник С. Теклинд в работе [0] доказал, что решение u задачи Коши (4), (5) равно нулю в Π_T, если в Π_T выполняется неравенство

$$\left|u(t,x)\right| \le C\exp\left\{\left|x\right|h(\left|x\right|)\right\}, \quad (7)$$

если h — такая монотонно неубывающая неотрицательная функция, что

$$\int_1^\infty \frac{dr}{h(r)} = \infty\,. \quad (8)$$

Если же функция h такая, что интеграл из (8) расходится, то класс функций, удовлетворяющих неравенство (7), может не быть классом единственности решений. Для этого случая построены решения u задачи Коши (4), (5), отличные от нуля и удовлетворяющие условие (7). Методика получения таких решений продемонстрирована в [0]. Иными словами, С. Теклиндом было доказано, что для того, чтобы в классе функций (7) решение задачи (4), (5) было единственным, необходимо и достаточно, чтобы интеграл (8) расходился [0, с. 256—264].

В работе [0] теоремы единственности решений граничных задач в неограниченных областях для параболического уравнения типа (1) получены в классах растущих функций, причем класс функций, в котором есть единственность решения граничной задачи, определяется геометрическими характеристиками области. Эти теоремы единственности установлены как следствия априорных оценок решений и доказаны в форме, которая учитывает границы области.

И. Г. Петровским [0] была поставлена задача: исследовать вопрос о единственности решения задачи Коши для определенных им параболических уравнений и систем в классах неограниченных функций и обобщить для них теоремы единственности, известные для уравнения теплопроводности. Первой работой в этом направлении была работа [0]. Обобщение теоремы С. Теклинда для случая параболических по И. Г. Петровскому систем было проведено в работе [0], доказательство которой основано на оценках фундаментальных решений.

Что касается вопроса о том, при каких условиях на правые части параболической задачи (1)—(3) существует ее единственное решение из пространства растущих функций, то обобщение теоремы С. Теклинда для этого случая дано в работе [0], в которой ее доказательство осуществлено методом введения параметра. Продолжая идеи этой работы, в [0] автором доказано, что для решения $u \in H^{l+2+\alpha}_{k(\cdot,a)}(\Pi^+_T)$ является правильным интегральное представление, следствием из которого является теорема единственности решения из пространства $H^{l+2+\alpha}_{k(\cdot,a)}(\Pi^+_T)$, $l \geq l_0$, $l_0 \equiv \max\left\{0, r-2\right\}$ [0]. В работе [0] приведен также аналог теоремы типа Теклинда, доказанный в работе [0] для решения задачи Коши для параболических по Петровскому систем Г. М. Золотаревым.

Список литературы

1. *Золотарев Г. Н.* О единственности решения задачи Коши для систем, параболических в смысле И. Г. Петровского. Изв. вузов. Математика, 1958. — Т. 2, № 3. — С. 118–135.

2. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина граничных задач для параболических по И. Г. Петровскому систем общего вида. Мат. сб., 1981. — Т. 114, № 1. — С. 110–166; № 4. — С. 523–565.

3. *Ивасишен С. Д.* О корректной разрешимости параболических граничных задач в пространствах растущих функций. Укр. мат. журн., 1982. — Т. 34, № 2. — С. 25–30.

4. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* Параболические уравнения: примеры, задача Коши, свойства решений. Математика сегодня: науч.-метод. сб. — Киев: Выща шк., 1987. — С. 74–108.

5. *Ладыженская О. А.* О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения. Мат. сб., 1950. — Т. 27, № 69. — С. 175–184.

6. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений. Успехи мат. наук, 1946. — Т. 1, № 3–4. — С. 44–70.

7. *Петровский И. Г.* О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными. Успехи мат. наук, 1976. — Т. 31, № 6. — С. 142–166.

8. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. — Москва: Наука, 1964. — 443 с.

9. *Holmgren E.* Sur les solutions quasianalytiques delaequations de la chaleur. Ark. for Matem., 1924. — V. 18. — P. 64–95.

10. *Teclind S.* Sur les classes quasianalitiques des solutions des equations aux derivees partelles du type parabolique. Rord. acta. requal sosietatus scientiarum, Upsali, 1937. — V. 4, № 10. — P. 3–55.

11. *Tychonoff A.* Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur. Mat. сб., 1935. — Т. 42, № 2. — С. 199–216.

АСИМПОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ДВОЧЛЕННИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПРАВИЛЬНО ТА ШВИДКО ЗМІННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

О. О. Чепок

Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова, Одеса, Україна

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $p : [a,\omega[\to]0,+\infty[$ $(-\infty < a < \omega \le +\infty)$ — неперервна функція, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0,+\infty[$ $(i = 0,1)$ — неперервні функції, $\Delta_{Y_i} = [y_i^0, Y_i[$ або $\Delta_{Y_i} =]Y_i, y_i^0]$, $Y_i \in \{0,+\infty\}$. При $Y_i = +\infty$ $(Y_i = -\infty)$ вважаємо, що $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ відповідно. Крім того вважається, що функція $\varphi_1(z)$ є правильно змінною [1] функцією при $z \to Y_1$ $(z \in \Delta_{Y_1})$ порядку σ_1, а функція $\varphi_0(z)$ двічі неперервно диференційована, строго монотонно зростаюча на Δ_{Y_0} та задовольняє умову

$$\lim_{\substack{z\to Y_0 \\ z\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_0(z)\varphi_0''(z)}{(\varphi_0'(z))^2} = 1\,.$$

Розв'язок y рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ — розв'язком, якщо

$$y^{(i)} : [t_0,\omega[\to \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i \ (i = 0,1), \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

Метою даної роботи є встановлення необхідних и достатніх умов існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ — розв'язків, а також знаходження асимптотичних зображень при $t \uparrow \omega$ для цих розв'язків та їх похідних у випадку $\lambda_0 \in R \setminus \{0,1\}$.

Будемо говорити, що функція $\varphi_1(z)$ рівняння (1) задовольняє умові S, якщо для будь-якої неперервно диференційованої функції $L : \Delta_{Y_1} \to]0,+\infty[$ такої, що

$$\lim_{\substack{z\to Y_1 \\ z\in\Delta_{Y_1}}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = 0$$

має місце співвідношення

$$\theta_1(zL(z)) = \theta_1(z)(1 + o(1)) \text{ при } z \to Y_1 \quad (z \in \Delta_{Y_1}),$$

де $\theta_1(z) = \varphi_1(z) \mid z \mid^{-\sigma_1}$.

За умови, що функція φ_1 задовольняє умову S отримано необхідні умови існування у рівняння (1) $P_\omega\left(Y_0, Y_1, \lambda_0\right)$ — розв'язків. При виконанні додаткових умов на функцію p доведено, отримані умови є й достатніми умовами існування у рівняння (1) таких розв'язків. Також отримано асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$ для $P_\omega\left(Y_0, Y_1, \lambda_0\right)$ — розв'язків рівняння (1) та їх похідних першого порядку. При доведенні теорем використано деякі теореми з роботи [2] та деякі методи з роботи [3].

Список літератури

1. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985. — 141 с.

2. Evtukhov V. M., Samojlenko A. M. Conditions for the existence of vanishing in the singular point solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations // Ukr. Math. Journal, 2010, T 62, № 2, p. 52-80.

3. Евтухов В. М. Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка / В.М. Евтухов, М.А. Белозерова // Укр. мат. журнал. — 2008. — Т.60, № 3. — С. 310–331.

ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ З R-ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ

М. О. Четвертак

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

ChetvertakMaria.math@gmail.com

Розглянемо r-узагальнену конфлюентну гіпергеометричну функцію у вигляді:

$$ {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;x\right)=\frac{1}{B\left(a,c-a\right)}\int_0^1 t^{a-1}\left(1-\mathrm{t}\right)^{c-a-1}e^{xt}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t(1-\mathrm{t})}\right)dt \quad (1)$$

де $B\left(\mathrm{a,c-a}\right)$ — класична бета-функція, $\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}a>0$, $\left\{\tau,\beta\right\}\subset\mathbb{R}$, $\tau-\beta<1, r>0$, $\operatorname{Re}\gamma>\operatorname{Re}\alpha>0, \alpha\in\mathbb{R}, \alpha>0, \gamma\in\mathbb{R}, \gamma>0$, ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\ldots\right)$ — $\left(\tau,\beta\right)$-узагальнена конфлюентна гіпергеометрична функція:

$$ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;x\right)=\frac{1}{B\left(a,c-a\right)}\int_0^1 t^{a-1}\left(1-t\right)^{c-a-1}\,{}_1\psi_1\left[\begin{matrix}\left(a,\tau\right);\\ \left(c,\beta\right);\end{matrix}\middle| xt^{\tau}\right]dt,$$

де ${}_1\psi_1\left[\ldots\right]$ — узагальнена функція Фокса — Райта.

Зауважім, що при $\tau=\beta=1, r=0$ (1) дає класичну конфлюентну гіпергеометричну функцію ${}_1\Phi_1\left(a;c;x\right)$.

Теорема. Якщо виконуються умови $\operatorname{Re}\left(c-a-n\right)>0, \operatorname{Re}\left(a-n\right)>0$, то правдиве розвинення:

$$ {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;x\right)=\frac{\Gamma\left(\gamma\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)\mathrm{B}\left(a,c-a\right)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\alpha+n\tau\right)}{\Gamma\left(\gamma+n\beta\right)}\frac{\left(-r\right)^n}{n!}\mathrm{B}\left(c-a-n,a-n\right){}_1\Phi_1\left(a-n;c-2n;x\right),$$

де ${}_1\Phi_1\left(\ldots\right)$ — класична вироджена гіпергеометрична функція .

Запровадім **узагальнення інтегральних перетворень Лапласа** у формі:

$$\tilde{L}\left\{f\left(x\right);y\right\}=\int_0^{\infty}e^{-xy}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-r\left(xy\right)^{\omega}\right)f\left(x\right)dx,$$

$$\tilde{L}_m\left\{f\left(x\right);y\right\}=\int_0^{\infty}x^{m-1}e^{-x^my^m}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-r\left(x^my^m\right)^{\omega}\right)f\left(x\right)dx.$$

$$\tilde{L}_{m_1,m_2,\omega}\left\{f\left(x\right);y\right\}=\int_0^{\infty}x^{m_2}e^{-\left(xy\right)^{m_1}}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-r\left(xy\right)^{\omega m_1}\right)f\left(x\right)dx,$$

де $x > 0, \omega \in \mathbb{C}, r \geq 0;$ $f\left(x\right) \equiv 0$ при $x < 0$; $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0;$ $\left\{\tau, \beta\right\} \subset \mathbb{R}, \tau > 0, \tau - \beta < 1,$ $x^{m-1} f\left(x\right) < K e^{s_0 x^{\omega}}; K; s_0$ — сталі, ${}_1^r\Phi_1\left(a; c; z\right)$ — r-узальнена конфлюентна гіпергеометрична функція вигляду (1).

Список літератури

1. Вірченко Н. О. Узагальнені інтегральні перетворення. — К.: Задруга, 2013. — 397с.

СХОДИМОСТЬ МАТРИЦ ГРИНА ОБЩИХ ОДНОМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Г. А. Чеханова
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
anna0024@i.ua

Пусть числа $m, n \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Рассмотрим на конечном интервале (a, b) семейство общих полуоднородных краевых задач

$$y^{(n)}(t,\varepsilon) + A_{n-1}(t,\varepsilon)y^{(n-1)}(t,\varepsilon) + \dots + A_0(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \qquad (1)$$

$$B_j(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = 0, (2)$$

где при каждом фиксированном $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ матрицы-функции $A_{j-1}(\cdot,\varepsilon) \in L_1([a,b], \mathbb{C}^{m\times m})$, вектор-функция $f(\cdot,\varepsilon) \in L_1([a,b], \mathbb{C}^m)$, а линейные непрерывные операторы

$$B_j(\varepsilon) : C^{(n-1)}\left([a,b]; \mathbb{C}^m\right) \to \mathbb{C}^m.$$

Введем обозначения:

$$R_{j-1}(\cdot,\varepsilon) := A_{j-1}(\cdot,\varepsilon) - A_{j-1}(\cdot,0), \qquad R^{\vee}(t,\varepsilon) := \int_a^t R(s,\varepsilon)ds.$$

Теорема. *Пусть предельная однородная краевая задача имеет лишь тривиальное решение и при* $\varepsilon \to 0+$ *выполнены условия:*

(1) $\| R_{n-1}(\cdot;\varepsilon)R^{\vee}_{j-1}(\cdot;\varepsilon) \|_1 \to 0;$

(2) $\| R^{\vee}_{j-1}(\cdot;\varepsilon) \|_\infty \to 0;$

(3) $\| B_j(\varepsilon) - B_j(0) \| \to 0.$

Тогда для достаточно малых ε определены нормированные матрицы Грина задачи (1)–(2) и для них справедливо асимптотическое равенство

$$\left\| G(\cdot,\cdot;\varepsilon) - G(\cdot,\cdot;0) \right\|_\infty \to 0, \qquad \varepsilon \to 0+,$$

где $\left\|\cdot\right\|_1$ — норма в пространстве $L_1([a,b];\mathbb{C}^m)$, а $\left\|\cdot\right\|_\infty$ — $\sup$-норма.

Отметим, что условие (1) теоремы заведомо выполнено, если

$$\| R_{n-1}(\cdot;\varepsilon) \|_1 \cdot \| R^{\vee}_{j-1}(\cdot;\varepsilon) \|_\infty \to 0.$$

В частности, если верно (2) и $\| A_{n-1}(\cdot;\varepsilon) \|_1 = O(1)$. При этом нет ограничений на асимптотическое поведение функций $\| A_{j-1}(\cdot;\varepsilon) \|_1$ при $j < n$.

Случай $n = 1$ рассмотрен ранее в [1].

Список литературы

1. Кодлюк Т. И., Михайлец В. А., Рева Н. В. Предельные теоремы для одномерных краевых задач// Укр. мат. журн. — 2013. — Т. 65, № 1. – С. 70–81.

ПРО ХАРАКТЕР ПОВЕДІНКИ РОЗВ'ЯЗКУ ПЕРШОЇ УЗАГАЛЬНЕНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = | u |^{\beta_0}\ t^{\gamma}$ БІЛЯ МЕЖІ ОБЛАСТІ

О. Ю. Чмир

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, Львів, Україна

o_chmyr@yahoo.com

Нехай $n \in \mathbb{N}$, Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $S = \partial\Omega$ класу C^{∞}, $Q = \Omega \times (0;T]$, $\sum = S \times (0;T]$, $0 < T < +\infty$;

$$\rho(x,\,t) = \begin{cases} \rho_1(x), & \textit{при } d(x) \to 0, \\ \sqrt{\rho_2(t)}, & \textit{при } t \to 0, \\ 1, & \textit{всередині області } Q, \end{cases}$$

де $\rho_1(x)$, $x \in \overline{\Omega}$,— нескінченно диференційовна невід'ємна функція, яка додатна в Ω, має порядок відстані $d(x)$ від точки x до S біля S та $\rho_1(x) \le 1$, $x \in \overline{\Omega}$; $\rho_2(t)$, $t \in (0,T]$,— нескінченно диференційовна невід'ємна функція, яка додатна $t \in (0,T]$, має порядок t при $t \to 0$ та $\rho_2(t) \le 1$, $t \in (0,T]$.

Нехай $D(\overline{\Sigma}) = C^{\infty}(\overline{\Sigma})$, $D(\overline{\Omega}) = C^{\infty}(\overline{\Omega})$;

$$D^0(\overline{\Sigma}) = \{\varphi \in D(\overline{\Sigma}) : \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi\,|_{t=T} = 0,\ k = 0,1,\ldots\};$$

$$D^0(\overline{\Omega}) = \{\varphi \in D(\overline{\Omega}) : \varphi\,|_S = 0\}.$$

Штрихами позначатимемо простори лінійних неперервних функціоналів на відповідних функціональних просторах, $s(F)$ — порядок сингулярності узагальненої функції F.

При $\mu \in \mathbb{R}\_ \cup \{0\}$ введемо функціональний простір

$$\mathrm{M}_{\mu}(Q,\,\partial Q) = \{v \in C(Q) : [\rho(y,\tau)]^{-\mu} v(y,\tau) \in C(\overline{Q})\}.$$

Для першої узагальненої крайової задачі

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) = | u(x,t) |^{\beta_0}\ t^{\gamma},\ (x,t) \in Q,$$

$$u\Big|_{\sum} = F_1(x,t),\ (x,t) \in \sum,\ u\,|_{t=0} = F_2(x),\ x \in \Omega,$$

де $\beta_0 \in (0;1)$, $\gamma \in (-1;0)$, $F_1 \in (D^0(\overline{\Sigma}))'$, $0 \le s(F_1) \le q_1$, $F_2 \in (D^0(\overline{\Omega}))'$, $0 \le s(F_2) \le q_2$, встановлено достатні умови розв'язності цієї задачі у просторі $\mathrm{M}_{\mu}(Q,\,\partial Q)$.

АПРОКСИМАЦІЯ РОЗРИВНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

П. Шакері Мобараке, А. В. Попов
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна
pouyan.shakeri@gmail.com, popov256@gmail.com

Розглядаються проблеми при знаходженні розривних розв'язків інтегрального рівняння типу Фредгольма (ІРФ) І роду. Такі проблеми виникають підчас розв'язування крайових задач потенціалу методом граничних інтегральних рівнянь (МГІР, [1]) для областей складної форми, що містять вузли — точки порушення гладкості межі області. Використання МГІР у частковому випадку задачі Діріхле приводить до ІРФ І роду, розв'язок якого у вузлах може містити розрив першого роду. Проблема пошуку розривного розв'язку такого рівняння посилюється відомою нестійкістю ІРФ І роду щодо похибок заокруглення.

В даній роботі для усунення ефекту нестійкості щодо похибок заокруглення використовуються відомі методи регуляризації некоректних задач [2]. Поряд з цим запропонована спеціальна неоднорідна апроксимація шуканого розв'язку, який може містити розриви першого роду у вузлах проміжку інтегрування. А саме, в околі вузлів передбачається апроксимація шуканої функції сталою, а на решті відрізку розбиття — сплайном певного степеня (як правило, першого або третього). Підбір точок коллокації, розбиття відрізку інтегрування та параметру регуляризації здійснювались чисельним експериментом з мінімізації нев'язки відповідної схеми регуляризації. Отримані результати порівнювались з точним розв'язком тестової задачі, а також з числовими результатами, що дають однорідні методи апроксимації шуканої функції. Крім того, числовий експеримент був поширений на «підозрілі» вузли, в околі яких шуканий розв'язок — неперервний. Аналіз всіх результатів свідчить про високу дієздатність рекомендованого методу: отримано стійкий розв'язок з відносною похибкою 1% при абсолютних похибках заокруглення $O(10^{-6})$.

Список літератури

1. Метод граничных интегральных уравнений. Сб. научн. тр. под редакцией Т.Круз, Ф.Риццо. — М.: Мир, 1978. — 210 с.

2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986. — 288 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ К. ГОПАЛСАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Т. И. Шакотько

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченка, Киев, Украина

Trachuk_85@ukr.net

Рассматривается математическая модель нейронной сети с запаздыванием, предложенная в [1]. Она представляет собой систему двух дифференциальных уравнений с запаздыванием с нелинейной правой частью. Предварительно исследована система без запаздывания. Получены условия устойчивости ненулевого положения равновесия системы без запаздывания. Далее рассмотрено влияние запаздывания. Проведено исследование устойчивости ненулевого стационарного положения равновесия. Рассматривается систему на плоскости с запаздыванием

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= -a_{11}y_1(t) + f_{11}(y_1(t-\tau_{11})) + f_{12}(y_2(t-\tau_{12})) + b_1, \\ \dot{y}_2(t) &= -a_{22}y_2(t) + f_{21}(y_1(t-\tau_{21})) + f_{22}(y_2(t-\tau_{22})) + b_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Считаем, что $\tau_{ij} > 0$, $i, j = 1, 2$, $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, а функции $f_{ij}(y)$, $i, j = \overline{1,2}$ удовлетворяют условию Липшица. Произведя замену

$$y_1(t) = x_1(t) + y_1^0,\ y_2(t) = x_2(t) + y_2^0,$$

где y_1^0, y_2^0 точка покоя, находящаяся в первом квадранте. И система (1) сведется к системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -a_{11}x_1(t) + f_{11}(x_1(t-\tau_{11}) + y_1^0) - f_{11}(y_1^0) + \\ &\quad + f_{12}(x_2(t-\tau_{12}) + y_2^0) - f_{12}(y_2^0), \\ \dot{x}_2(t) &= -a_{22}x_2(t) + f_{21}(x_1(t-\tau_{21}) + y_1^0) - \\ &\quad - f_{21}(y_1^0) + f_{22}(x_2(t-\tau_{22}) + y_2^0) - f_{22}(y_2^0) \end{aligned} \tag{2}$$

И исследование устойчивости положения равновесия $M_0(y_1^0, y_2^0)$ свелось к исследованию устойчивости нулевого положения равновесия системы (2).

Теорема. Пусть система уравнений (1) имеет единственное положение равновесия $M_0(y_1^0, y_2^0)$ и существуют постоянные $h_{11} > 0$, $h_{22} > 0$, при которых выполняются условия

$$2(a_{11} - L_{11}) - L_{12}\left(1 + \frac{h_{11}}{h_{22}}\right) - L_{22} - L_{21}\frac{h_{22}}{h_{11}} > 0,$$

$$2(a_{22} - L_{22}) - L_{11} - L_{21}\left(1 + \frac{h_{11}}{h_{22}}\right) - L_{12}\frac{h_{22}}{h_{11}} + 0,$$

где L_{ij}, $i, j = \overline{1,2}$ соответствующие постоянные Липшица. Тогда положение равновесия $M_0(y_1^0, y_2^0)$ является асимптотически устойчивым.

Далее рассмотрены системы с запаздыванием в n-мерном пространстве.

$$\dot{y}_i\left(t\right) = -a_{ii}y_i\left(t\right) + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\left(y_j\left(t - \tau_{ij}\right)\right) + b_i. \tag{3}$$

Получены аналогичные условия равномерной устойчивости.

Список литературы

1. Gopalsamy K. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics. — Kluver Academic Publishers. — Dortrecht/Boston/London. — 1992. — 514 p.

ДИФРАКЦІЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ НА БІКОНІЧНІЙ ПОВЕРХНІ З КРАЄМ

О. М. Шарабура, Д. Б. Куриляк
Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів, Україна
shom@ipm.lviv.ua

Задача дифракції на біконусі у сферичній системі координат зводиться до розв'язання суматорних рівнянь у вигляді рядів функцій Лежандра з дробовими індексами. Для знаходження невідомих коефіцієнтів розкладу отримано нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (НСЛАР) виду:

$$A_{11} X = F_1, \tag{1}$$

де $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – невідомий вектор; A_{11} – матричний оператор,

$$A_{11} : \left\{ a_{jn} = \frac{\rho_1 W[K_{z_n} I_{\xi_j}]_{\rho_1}}{\Delta_{jn} I_{\xi_j}(\rho_1) K_{z_n}(\rho_1)} \right\}_{j,n=1}^{\infty}.$$

Тут $I_{\nu_n}(\cdot)$, $K_{\nu_n}(\cdot)$ — відповідно модифікована функція Бесселя та функція Макдональда; $\rho_1 = -ika_1$, k — хвильове число, a_1 – сферичний радіус скінченного плеча біконуса; $\Delta_{jn} = \xi_j^2 - z_n^2$; z_n, ξ_j — зростаючі послідовності відповідно простих додатніх нулів і полюсів мероморфної функції, регулярної у смузі $\Pi : \{|\mathrm{Re}\,\nu| < 1/2\}$,

$$M(v) = \frac{\cos(\pi\nu) P_{\nu-1/2}(-\cos\gamma_1)}{(\nu^2 - 1/4) P_{\nu-1/2}(-\cos\gamma_2) R_{\nu-1/2}(\cos\gamma_2)}, \tag{2}$$

де $P_{\nu-1/2}(\cdot)$ функція Лежандра, γ_1, γ_2 — кути розхилу біконуса.

$$R_{\nu-1/2}(\cos\gamma_2) = P_{\nu-1/2}(\cos\gamma_2) P_{\nu-1/2}(-\cos\gamma_1) - P_{\nu-1/2}(-\cos\gamma_2) P_{\nu-1/2}(\cos\gamma_1).$$

Доводимо, що пара операторів

$$\begin{aligned} &A : \left\{ a_{jm} = (\xi_j - z_m)^{-1} \right\}_{j,m=1}^{\infty}, \\ &A^{-1} : \left\{ \tau_{nj} = \left\{ \{[M_-(\xi_j)]^{-1}\}' [M_-(z_n)]' (z_n - \xi_j) \right\}^{-1} \right\}_{n,j=1}^{\infty}, \end{aligned} \tag{3}$$

є регуляризуючими для НСЛАР (1), де $M_-(\nu)$ — відома функція, яку утворюємо в результаті факторизації функції (2). Використовуючи оператори (3), з (1) отримуємо НСЛАР другого роду:

$$X - A^{-1}(A - A_{11})X = A^{-1} F_1,$$

яка допускає розв'язок методом редукції у класі послідовностей $x_n = O(n^{-1/2})$ при $n \to \infty$, що забезпечує виконання усіх необхідних умов, включаючи умови Мейкснера на краю.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ F-МОНОГЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В. А. Шилинец, Г. А. Скребец, Ж. С. Тополь
Белорусский государственный педагогический университет, Минск, Беларусь
shilinets@bspu.unibel.by

Как известно, дифференциальные операторы (формальные производные) $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ использовались рядом авторов при исследовании уравнений в частных производных. В частности, И.Н. Векуа успешно применял эти операторы для исследования дифференциального уравнения

$$\Delta u+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y).$$

Целью данного исследования является решение с помощью функций, моногенных в смысле В. С. Фёдорова (F-моногенных), следующей системы дифференциальных уравнений в формальных производных $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$:

$$\frac{\partial f}{\partial z}=A\frac{\partial \phi}{\partial z}+B\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}},\quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=A_1\frac{\partial \phi}{\partial z}+B_1\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}},\tag{1}$$

где A, B, A_1, B_1 — действительные или комплексные константы; D — односвязная область плоскости x, y; f, ϕ — искомые комплексные функции класса $C^1(D)$. Считаем $A_1\neq 0,\ \ B\neq 0$.

Введем замену $w=f,\ \ u=A_1\phi$, тогда система (1) примет вид:

$$\frac{\partial w}{\partial z}=a\frac{\partial u}{\partial z}+b\frac{\partial u}{\partial \bar{z}},\quad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial u}{\partial z}+(c+a)\frac{\partial u}{\partial \bar{z}},\tag{2}$$

где a, b, c – некоторые постоянные, $b\neq 0$. Если положить $v=w-au$, то система (2) редуцируется к виду

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \bar{z}},\quad \frac{\partial v}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{s}{r}\frac{\partial u}{\partial \bar{z}},\tag{3}$$

где $s, r=\mathrm{const}, r\neq 0$.

Пусть τ_1 и τ_2 – корни уравнения $\tau^2=s\tau+r$.

Из (3), очевидно, следует:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}-\tau_k\frac{\partial}{\partial z}\right)f_k=0\qquad (k=1,\ 2),\tag{4}$$

где $f_k=u+\tau_k v\ \ (k=1,2)$.

1°. $\tau_1\neq\tau_2$; τ_1,τ_2 – действительные. Полагаем $p=z+\tau_1\bar{z},\ \ q=\bar{z}$. Имеем $\delta=p'_x q'_y-p'_y q'_x=-2i$.

Вводим формальные производные

$$\frac{\partial f_1}{\partial p} = \frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) = \frac{\partial f_1}{\partial \overline{z}},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial q} = \frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + i\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - i\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\tau_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \overline{z}} - \tau_1\frac{\partial f_1}{\partial z}.$$

Уравнение (4) для $k = 1$ примет вид $\dfrac{\partial f_1}{\partial q} = 0$, откуда делаем вывод, что $u + \tau_1 v = \phi_1(z + \tau_1\overline{z})$ — любая F-моногенная по функции $p = z + \tau_1\overline{z}$ функция.

Аналогично: $u + \tau_2 v = \phi_2(z + \tau_2\overline{z})$ — любая F-моногенная по функции $p = z + \tau_2\overline{z}$ в области D функция. Из равенств $u + \tau_1 v = \phi_1(z + \tau_1\overline{z})$, $u + \tau_2 v = \phi_2(z + \tau_2\overline{z})$ находим u и v.

2°. $\tau_1 \neq \tau_2$; τ_1, τ_2 — комплексные. Положим $p = z + \tau_1\overline{z}$, $q = z - \tau_1\overline{z}$. Имеем $\delta = p'_x q'_y - p'_y q'_x = 4i\tau_1$.

Вводим формальные производные

$$\frac{\partial f_1}{\partial p} = \frac{1}{2\tau_1}\frac{\partial f_1}{\partial \overline{z}} + \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial q} = -\frac{1}{2\tau_1}\frac{\partial f_1}{\partial \overline{z}} + \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial z}.$$

Легко видеть, что

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_1}{\partial p} + \frac{\partial f_1}{\partial q}, \frac{\partial f_1}{\partial \overline{z}} = \tau_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial p} - \frac{\partial f_1}{\partial q}\right).$$

Отсюда следует, что уравнение (4) при $k = 1$ равносильно уравнению $\dfrac{\partial f_1}{\partial q} = 0$, а потому получим, что $f_1 = u + \tau_1 v = \phi_1(z + \tau_1\overline{z})$ – F-моногенная по функции $p = z + \tau_1\overline{z}$ функция. Аналогично: $f_2 = u + \tau_2 v = \phi_2(z + \tau_2\overline{z})$ — функция, F-моногенная по функции $p = z + \tau_2\overline{z}$. Далее находим u и v.

3°. $\tau_1 = \tau_2$. Имеем $u + \tau_1 v = \phi_1(p)$, $p = z + \tau_1\overline{z}$, причем $\tau_1 = \dfrac{s}{2}, r = -\dfrac{s^2}{4}$.

Отсюда $u = \phi_1(p) - \tau_1 v$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \phi_1'(p) - \tau_1\dfrac{\partial v}{\partial z}$, $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{z}} = \phi_1'(p)\tau_1 - \tau_1\dfrac{\partial v}{\partial \overline{z}}$.

Первое уравнение системы (3) примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{s}{2}\left(\phi_1'(p) - \frac{\partial v}{\partial \overline{z}}\right), \quad \left(\frac{s}{2r} = -\frac{2}{s}\right);$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{2}{s}\frac{\partial v}{\partial \overline{z}} - \frac{2}{s}\phi_1'(p); \quad \frac{\partial v}{\partial \overline{z}} - \tau_1\frac{\partial v}{\partial z} = \phi_1'(p).$$

Отсюда $\dfrac{\partial v}{\partial q} = \phi_1'(p)$, а потому $v = \phi_1'(p)q + \theta(p)$, где $q = \overline{z}$, $\theta(p)$ — любая F-моногенная по p функция.

Задача решается формулами $u = \phi_1(p) - \tau_1 v$ и $v = \phi_1'(p)q + \theta(p)$.

МАСШТАБУВАННЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ЕФЕКТИВНОСТІ ПАРАЛЕЛЬНОГО ІТЕРАЦІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА НА КЛАСТЕРАХ З ГРАФІЧНИМИ ПРИСКОРЮВАЧАМИ

Є. О. Шквар, Т. В. Козлова
Національний авіаційний університет, Київ, Україна
eush@ukr.net

Рівняння Пуассона є одним з типових елементів постановок багатьох задач математичної фізики. Актуальність зусиль у напрямку паралелізації розв'язання цього рівняння зумовлена тим, що його аналітичні розв'язки можуть бути знайдені лише для вкрай обмеженого набору порівняно простих межових умов і структури правої частини, тоді як при числовому інтегруванні дане рівняння є однією з найвимогливіших до обчислювальних ресурсів складовою багатьох числових методів і, зокрема, методів обчислювальної аерогідродинаміки. Сучасні графічні прискорювачі (GPU) забезпечують дешевшу і водночас набагато перспективнішу альтернативу прискорення обчислень у порівнянні з традиційними ще донедавна технологіями обчислень на центральних процесорах (CPU) багатоядерних, багатопроцесорних чи кластерних систем. До того ж, кількість GPU навіть в межах однієї системи можна масштабувати значно легше, ніж кількість процесорів чи навіть їх ядер. Тому дане дослідження ставило на меті визначення ефективності масштабування процесу паралельного розв'язання рівняння Пуассона в просторовій постановці на кластерних обчислювальних системах з GPU шляхом поєднаного застосування технології обчислень на GPU виробництва компанії NVIDIA (CUDA) та традиційних багатопоточної (OpenMP) та міжвузлової (MPI) технологій обміну проміжною розрахунковою інформацією між задіяними для проведення обчислень GPU. Побудований CUDA алгоритм ґрунтувався на одному з найефективніших методів масивно-паралельної обробки – Red/Black з одночасним застосуванням верхньої релаксації зі змінним коефіцієнтом. У результаті проведених досліджень показано, що при порівнянні часу виконання обчислень на усіх 6 ядрах одного з найсучасніших CPU I7-3960x при задіюванні технології Hyper-threading та на одній графічній карті NVidia GeForce GTX 680, остання вже при розмірності розрахункової сітки в інтервалі $200^3 \geq N \geq 500^3$ забезпечує перевагу близько 20%. Прискорення обчислень по мірі збільшення кількості задіяних GPU кластерної системи також демонструє тенденцію до покращення масштабування по мірі збільшення розмірності задачі. Вже при розмірності розрахункової сітки $N \geq 300^3$ залежність прискорення від кількості задіяних GPU має близький до лінійного вигляд, хоч і з різним градієнтом зростання, який монотонно збільшується по мірі збільшення N. При використанні для обчислень 12-ти GPU, розташованих на 4 вузлах кластера, максимально досягнуте прискорення дорівнювало 9,44 рази з 12-ти максимально можливих теоретично. Отже, кластерні GPU системи демонструють спроможність забезпечити ефективне масштабування продуктивності обчислень при числовому паралельному розв'язанні рівняння Пуассона.

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ З КОМПОЗИТНОГО МАТЕРІАЛУ З ДВОМА ОТВОРАМИ

К. І. Шнеренко, А. С. Богатирчук
Інститут механіки НАН України,
Національний університет харчових технологій, Київ, Україна
an1952@ukr.net

Розглядається напружений стан циліндричної оболонки з двома близько розташованими круговими отворами. Оболонка виготовлена із композитного матеріалу з малою зсувною жорсткістю. Отвори розташовані в напрямку окружної координати. Контури отворів підкріплені пружними кільцями. Оболонка знаходиться під дією внутрішнього тиску [1].

Основний напружений стан оболонки вважається відомим. Для знаходження збуреного стану використовуються рівняння пологих оболонок в рамках двомірної теорії оболонок типу Тимошенка.

Для розв’язку задачі використовується метод скінчених елементів. Область розбивається на квадратичні ізопараметричні елементи, з якими зв’язуються локальні системи координат. Шукані переміщення для кожного елемента подаються в вигляді інтерполяційних многочленів [2].

Із варіаційного рівняння знаходиться система лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів розв’язку [3].

Досліджено залежність коефіцієнтів концентрації напружень від зміни зсувної жорсткості при різних значеннях відстані між контурами отворів. Подано порівняння значень коефіцієнтів концентрації напружень для підкріплених і непідкріплених контурів отворів.

Список літератури

1. Методи розрахунку оболонок. В 5 т. Т. 1. Гузь О. М., Чернишенко І. С., Чехов Вал. М., Чехов Вік. М., Шнеренко К. І. Теорія тонких оболонок, послаблених отворами. — К.: Наук. думка, 1980. — 636 с.

2. Богатырчук А. С., Шнеренко К. И. Применение метода конечных элементов к расчету трансверсально-изотропной цилиндрической оболочки с отверстием // Прикл. механика. — 1987. — 23, №9. — С. 125–128.

3. Богатырчук А. С., Гузь А. Н., Шнеренко К. И. Исследование концентрации напряжений около двух отверстий в композитных оболочках методом конечных элементов // Прикл. механика. — 1990. — 26, № 7. — С. 34–38.

ГЛАДКЕ НЕЛІНІЙНЕ КЕРУВАННЯ В КОЕФІЦІЄНТАХ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ: РЕЗУЛЬТАТ ІСНУВАННЯ

І. Я. Юрків
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна
ivanka.yurkiv24@yandex.ru

Основним об’єктом дослідження є наступна задача оптимального керування:

$$L(\mathcal{U}, y) = \int\limits_{\Omega} \left| y(x) - z_{\partial}(x) \right|^2 dx \to \inf, \tag{1}$$

$$\mathcal{U} \in \mathcal{U}_{ad}, y \in K, \tag{2}$$

$$\left\langle -div(\mathcal{U}(x)\left[(\nabla y)^{p-2}\right]\nabla y) + \left|y\right|^{p-2} y, v - y \right\rangle_V \leq \left\langle f, v - y \right\rangle_V \ \forall v \in K, \tag{3}$$

де Ω — непорожня відкрита підмножина $\mathbb{R}^N$ з достатньо гладкою межею, $z_{\partial} \in L^p(\Omega)$ — задане розподілення, K — замкнена опукла підмножина простору $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, $f \in L^q(\Omega)$ — фіксована функція, матриця $\left[\eta^{p-2}\right]$ визначається наступним чином:

$$\left[\eta^{p-2}\right] = \operatorname{diag}\left\{\left|\eta_1\right|^{p-2}, ..., \left|\eta_N\right|^{p-2}\right\} \forall \eta \in \mathbb{R}^N,$$

U_{ad} — множина допустимих керувань, що визначається так:

$$U_{ad} = \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{U} = [a_{ij}] \in M_p^{\alpha,\beta}(\Omega) \mid \xi_1(x) \leq a_{ij}(x) \leq \xi_2(x) \\ \textit{для м. в. } x \in \Omega, \forall i, j = 1, ..., N \end{array} \right\}.$$

а $M_p^{\alpha,\beta}(\Omega)$ — сукупність квадратних симетричних матриць $\mathcal{U}(x) = \{a_{ij}(x)\}_{1 \leq i,j \leq N}$, константи $\alpha, \beta : 0 < \alpha \leq \beta < +\infty$.

У межах даного дослідження за допомогою прямого методу варіаційного числення (див [2]) аналогічно до [1] обґрунтовано питання розв’язності задачі (1)–(3) у випадку гладких керувань, тобто коли $M_p^{\alpha,\beta}(\Omega) \in \left(W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})\right)$. Також показано важливу топологічну властивість множини допустимих пар – секвенціальну замкненість її в вибраній топології добутку просторів керувань та станів, адже саме серед її елементів шукається оптимальний розв’язок.

Список літератури

1. *Kogut O. P.* On optimal control problem in coefficients for nonlinear elliptic variational inequalities // Вісник Дніпропетровського університету. — 2011. — 19, № 8. — С. 86–99.

2. *Лионс Ж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 587 с.

ДИНАМИКА ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ТИПА «РЕАКЦИЯ — ДИФФУЗИЯ» С КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Н. А. Якушкин

НИЯУ «Московский инженерно-физический институт», Обнинск, Россия

nickolya@obninsk.ru

В работе рассмотрены условия и вид (мягкость или жесткость) бифуркации потери устойчивости неподвижной точки системы обыкновенных дифференциальных уравнений с кубической нелинейностью, а также вид бифуркации потери устойчивости постоянного решения соответствующей одномерной системы типа «реакция — диффузия».

1. Введение

n-мерной системой типа «реакция-диффузия» называют систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dQ\left(\varsigma,t\right)}{dt}=div\left(M\Delta Q\left(\varsigma,t\right)\right)+F(Q\left(\varsigma,t\right)),$$

где ς — определенная в $\mathbb{R}^n$, координата, M — матрица $n\times n$, F — n-мерная вектор-функция.

Начало интенсивного изучения данных систем пришлось на 1930-е годы, и было обусловлено как необходимостью изучения динамики моделируемых данными системами некоторых биологических, химических и качественно сходных с ними процессов, так и логикой развития теории динамических систем.

К первым заметным работам в этом направлении можно отнести работу А. Н. Колмогорова, И. Г. Петровского, Н. С. Пискунова [4], в которой для одномерной системы

$$\frac{du}{du}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}+f(u),\ -\infty<v<\infty,$$

доказано существование решения в виде бегущей волны, скорость распространения которой стремится к предельному значению $2a\left(\sqrt{f'(0)}\right)$.

Следующей важной вехой развития теории систем типа «реакция — диффузия» можно считать выход в 1952 году работы А. Тьюринга [9], в которой показано, что результатом потери устойчивости стационарного решения систем типа «реакция — диффузия» может быть возникновение устойчивых непостоянных решений, названных позже диссипативными структурами.

1960–1980-е годы ознаменовались выходом многих работ, посвященных приложениям аппарата теории систем типа «реакция — диффузия» к решению биологических, экологических, химических задач. В качестве примера можно выделить монографии Н. Бейли [2] и Ю. М. Свирежева [7], посвященные в основном приложениям теории систем типа «реакция-диффузия» к решению задач, связанных динамикой популяций.

Следующей важной вехой развития приложений теории систем типа «реакция — диффузия» по праву можно считать экспериментальное обнаружение группой исследователей, возглавляемой Патриком де Кеппером в 1990 году, предсказанных еще в работе Тьюринга [9], диссипативных структур в некоторых химических реакциях [8].

Дальнейшей развитие теории и приложений систем типа «реакция — диффузия» было обусловлено качественным ростом производительности компьютеров, сделавшим возможными объемные численные эксперименты, позволившие существенно расширить круг известных диссипативных структур для данных систем. Так, для некоторых классов систем типа «реакция — диффузия» были обнаружены стоячие и рулонные волны, колебательные кластеры и другие диссипативные структуры [3].

Предметом исследования в настоящей работе является система обыкновенных дифференциальных уравнений (далее точечная система):

$$\frac{dx}{dt} = ax - by + f(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = lx - ly + g(x,y), \tag{1}$$

где a, b, l — вещественные параметры, $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x,y), g(x,y)$ — функции, разложения которых в ряд Тейлора в окрестности начала координат имеют соответственно вид:

$$f(x,y) = c_2 x^2 + c_3 x^3 + R_f(x,y),\ g(x,y) = R_g(x,y)\ ,$$

где $R_f(x,y)$, $R_g(x,y)$ — остатки, содержащие мономы четвертого и более высоких порядков, а также, соответствующая системе (1), система типа «реакция — диффузия» (далее распределенная система):

$$\frac{du}{dt} = d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + au - b\upsilon + f(u,\upsilon), \quad \frac{d\upsilon}{dt} = d_2 \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial v^2} + lu - l\upsilon + g(u,\upsilon), \tag{2}$$

где d_1, d_2 — коэффициенты, v— одномерная координата, определенная на интервале $\left[0; L\right]$.

Работа имеет следующую структуру. В п. 2. исследованы условия устойчивости и вид (мягкость или жесткость) бифуркации потери устойчивости неподвижной точки $x_0 = y_0 = 0$ системы (1). В п. 3. исследованы условия потери устойчивости и вид бифуркации потери устойчивости стационарного решения

$$u_0(v,t) = \upsilon_0(v,t) = 0$$

системы (2). Также, показана связь между значениями параметра L и потерей устойчивости стационарного решения системы (2).

2. Динамика точечной системы

2.1. Условия устойчивости неподвижной точки. Исследуем условия устойчивости неподвижной точки $x_0 = y_0 = 0$ по линейному приближению системы (1). Данная неподвижная точка устойчива, если собственные значения: $\lambda_1,\ \lambda_2$ матрицы $D = \begin{pmatrix} a & -b \\ l & -l \end{pmatrix}$ линеаризации системы (1) в окрестности начала координат удовлетворяют условиям: $\operatorname{Re}\lambda_1,\ \operatorname{Re}\lambda_2 < 0$.

Характеристическое уравнение для матрицы D имеет вид

$$\lambda^2 - (a-l)\lambda + (b-a)l = 0.$$

Из теоремы Виета следует, что:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a - l,\ \lambda_1\lambda_2 = (b-a)l.$$

Таким образом, условия устойчивости неподвижной точки $x_0,\ y_0$ могут быть представлены в виде системы неравенств: $a - l < 0, \quad (b-a)l > 0.$

В силу того, что $l > 0$, последняя пара неравенств верна, если: $a < l,\ b > a$.

При $a = l, \lambda_1 = \overline{\lambda_2} = i\omega,$ где $\omega = \sqrt{l(b-l)}$. Также, легко видеть, что справедливы неравенства:

$$\frac{\partial}{\partial a}\operatorname{Re}\lambda_1\Big|_{a\,=\,l},\ \frac{\partial}{\partial a}\operatorname{Re}\lambda_2\Big|_{a\,=\,l} > 0,$$

являющиеся условиями бифуркации Андронова — Хопфа [1, 6].

2.2. Вид бифуркации Андронова — Хопфа. Как известно, в простейшем случае, вид (мягкость или жесткость) данной бифуркации определяется значением первой ляпуновской величины, равной вещественной части коэффициента при кубическом мономе исследуемой системы, приведенной в окрестности бифурцирующей неподвижной точки к нормальной форме Пуанкаре — Дюлака [1, 6]. Данная нормальная форма для системы (1) имеет вид

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 z + m z^2 w + r_1(w,z) \\ \lambda_2 w + \overline{m} w^2 z + r_2(w,z) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $r_1(w,z), r_2(w,z)$ — полиномы, содержащие мономы четвертого и более высоких порядков z, w — комплексные переменные.

Приведем линейную часть системы (1) к диагональному виду.

Пусть $h = (l + \lambda_1) / b$. Тогда сопоставляемые собственным значениям $\lambda_1,\ \lambda_2$ собственные векторы матрицы D представимы в виде: $\begin{pmatrix} 1 \\ \overline{h} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ h \end{pmatrix}$ соответственно.

Таким образом, замена переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

где $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \overline{h} & h \end{pmatrix}$ приводит при $a = l$ систему (1) к виду:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\xi + p_2(\xi+\eta)^2 + p_3(\xi+\eta)^3 \\ \lambda_2\eta + \overline{p}_2(\xi+\eta)^2 + \overline{p}_3(\xi+\eta)^3 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $p_2 = \dfrac{hc_2}{h-\overline{h}}$, $p_3 = \dfrac{hc_3}{h-\overline{h}}$. Приведем систему (4) к виду (3), где $r_1(w,z)$ не содержит монома mz^2w, а $r_2(w,z)$ не содержит монома mzw^2. Сделаем замену переменных

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi + \kappa_1\xi^2 + \kappa_2\eta^2 + \kappa_3\xi\eta \\ \eta + \overline{\kappa_1}\eta^2 + \overline{\kappa_2}\xi^2 + \overline{\kappa_3}\xi\eta \end{pmatrix},$$

где $\kappa_2 = c_2$, $\kappa_3 = c_3$.

Подставляя в (4) переменные z, w и отбрасывая члены четвертого порядка малости, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{d\xi}{dt} + 2\kappa_1\xi\frac{d\xi}{dt} + 2\kappa_2\eta\frac{d\eta}{dt} + \kappa_3\left(\xi\frac{d\eta}{dt} + \eta\frac{d\xi}{dt}\right) = \\ &= \lambda_1\xi + p_2(\xi+\eta)^2 + p_3(\xi+\eta)^3 + 2\kappa_1\xi(\lambda_1\xi + p_2(\xi+\eta)^2 + p_3(\xi+\eta)^3) + \\ &+ 2\kappa_2\eta(\lambda_2\eta + \overline{p}_2(\xi+\eta)^2 + \overline{p}_3(\xi+\eta)^3) + \kappa_3\xi(\lambda_2\eta + \overline{p}_2(\xi+\eta)^2 \\ &+ \overline{p}_3(\xi+\eta)^3) + \kappa_3\eta(\lambda_1\xi + p_2(\xi+\eta)^2 + p_3(\xi+\eta)^3). \end{aligned} \tag{5}$$

Если верно равенство

$$p_2(\xi+\eta)^2 + 2\kappa_1\lambda_1\xi^2 - 2\kappa_2\lambda_1\eta^2 = \lambda_1(\kappa_1\xi^2 + \kappa_2\eta^2 + \kappa_3\xi\eta),$$

то правая часть (5), кроме монома $\lambda_1\xi$, содержит только мономы третьего порядка.

Из последнего равенства следует, что $\kappa_1 = -\dfrac{p_2}{\lambda_1}$; $\kappa_2 = \dfrac{p_2}{3\lambda_1}$; $\kappa_3 = \dfrac{2p_2}{\lambda_1}$.

Подставляя в (5) значения: κ_1, κ_2, κ_3 получаем

$$\frac{dz}{dt} = \lambda_1\xi + \lambda_1(\kappa_1\xi^2 + \kappa_2\eta^2 + \kappa_3\xi\eta) + (...) = \lambda_1 z + (...),$$

где $(\ldots)$ — мономы третьего и более высоких порядков.

Выразим из (5) коэффициент m при мономе $\xi^2\eta$

$$m = 3p_3 + 4\kappa_1 p_2 + 2\kappa_2 \overline{p}_2 + 2\kappa_3 \overline{p}_2 + \kappa_3 p_2 = 3p_3 + \frac{1}{\lambda_1}\left(-2p_2^2 + \frac{14 p_2 \overline{p}_2}{3}\right).$$

Очевидно, что $\operatorname{Re}\dfrac{14 p_2 \overline{p}_2}{3\lambda_1} = 0$. Поэтому $\operatorname{Re} m = \operatorname{Re} m_1 = \operatorname{Re}\left(3p_3 - \dfrac{2p_2^2}{\lambda_1}\right)$.

Принимая во внимание равенство $\lambda_1 = i\omega$, нетрудно увидеть, что $\dfrac{h}{h - \overline{h}} = \dfrac{l + i\omega}{2i\omega}$. Таким образом,

$$m_1 = \left(\frac{3}{2} - \frac{3il}{2\omega}\right)\kappa_3 + \left(\frac{l}{2\omega^2} + \frac{i(l^2 - \omega^2)}{4\omega^3}\right)\kappa_2^2.$$

Ввиду того, что $\omega^2 = l(b - l)$, $\operatorname{Re} m_1 = \dfrac{3}{2}\kappa_3 + \dfrac{l}{2\omega^2}\kappa_2^2 = \dfrac{3}{2}\kappa_3 + \dfrac{1}{b - l}\kappa_2^2$.

Отсюда следует, что мягкость или жесткость рассматриваемой бифуркации определяется значением выражения

$$3\kappa_3 + \frac{2\kappa_2^2}{b - l} = 3c_3 + \frac{2c_2^2}{b - l}.$$

Если $3c_3 + \dfrac{2c_2^2}{b - l} < 0$ — рассматриваемая бифуркация мягкая, если $3c_3 + \dfrac{2c_2^2}{b - l} > 0$ — жесткая.

3. Динамика распределенной системы

3.1. Условия диффузионной неустойчивости постоянного решения. Исследуем устойчивость постоянного решения $u_0 = \upsilon_0 = 0$ системы (2), при значениях параметров a, b, лежащих в области устойчивости неподвижной точки x_0, y_0 системы (1).

Пусть некоторое пространство H вложено в пространство непрерывных на отрезке $[0; L]$ функций, например, в пространство Соболева H^m, $m \geq 1$.

Определим в пространстве H оператор

$$\mathcal{L}\begin{pmatrix}\phi_1 \\ \phi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\phi_1 - b\phi_2 + d_1\left(\phi_1\right)_{vv} \\ l\phi_1 - l\phi_2 + d_2\left(\phi_2\right)_{vv}\end{pmatrix}$$

со значениями в $\mathbb{R}^2$.

Систему (2) можно рассматривать как эволюционное уравнение:

$$\frac{d}{dt}\Phi = \mathcal{L}\Phi + F(\Phi)$$

в пространстве H.

Из хорошо известных результатов следует, что если оператор $\mathcal{L}$ является секториальным и спектр данного оператора полностью лежит левее нуля, то постоянное решение u_0, υ_0 системы (2) устойчиво [5].

Собственные функции оператора $\mathcal{L}$ представимы в виде

$$\Phi(v) = \begin{pmatrix} \phi_1(v) \\ \phi_2(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix} \cos \omega v,$$

где ϕ_1^*, ϕ_2^*, — некоторые, в общем случае, комплексные числа. Отметим, что ω может принимать значения $\omega = \pi n / L,\ \ n = 0,1,\ldots$ Подставляя функции: $\phi_1(v),\ \phi_2(v)$ в уравнение $\mathcal{L}\Phi = \mu\Phi$, получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} a - d_1\omega^2 & -b \\ l & -l - d_2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix}.$$

Таким образом, μ — собственное значение, $\begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix}$ — соответствующий данному собственному значению, собственный вектор матрицы

$$\tilde{D}(\omega) = \begin{pmatrix} a - d_1\omega^2 & -b \\ l & -l - d_2\omega^2 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для матрицы $\tilde{D}(\omega)$ имеет вид

$$\mu^2(\omega) - \left(a - l - (d_1 + d_2)\omega^2\right)\mu(\omega) - \left(a - d_1\omega^2\right)\left(l + d_2\omega^2\right) + bl = 0.$$

Корни данного уравнения: $\mu_1(\omega), \mu_2(\omega)$ могут быть либо вещественными, либо комплексно-сопряженными.

Соответствующие данным собственным значениям, собственные функции оператора $\mathcal{L}$ определяются равенствами:

$$\psi_1(v,\omega) = \begin{pmatrix} 1 \\ h_1 \end{pmatrix} \cos \omega v, \quad \psi_2(v,\omega) = \begin{pmatrix} 1 \\ h_2 \end{pmatrix} \cos \omega v,$$

где $h_1 = \dfrac{a - d_1\omega^2 - \mu_1(\omega)}{b}$, $h_2 = \dfrac{a - d_1\omega^2 - \mu_2(\omega)}{b}$.

В силу теоремы Виета

$$\mu_1(\omega) + \mu_2(\omega) = a - l - (d_1 + d_2)\omega^2,$$
$$\mu_1(\omega)\mu_2(\omega) = (b - a)l + (ld_1 - ad_2)\omega^2 + d_1 d_2 \omega^4.$$

Таким образом, если неподвижная точка x_0, y_0 системы (1) устойчива (т. е. $a < l$), то $\mu_1(\omega) + \mu_2(\omega) < 0$. Поэтому постоянное решение $u_0,\ \upsilon_0$ системы (2) может быть неустойчивым только если существуют допустимые значения ω(т.е. $\omega = \pi n / L, n = 1, 2, \ldots$), такие, что $\mu_1(\omega)\mu_2(\omega) < 0$.

Введя обозначения: $s = d_2\omega^2$, $\alpha = d_1 / d_2$, получаем

$$\mu_1(\omega)\mu_2(\omega) = (b - a)l - (a - l\alpha)s + \alpha s^2. \tag{6}$$

Если для всех допустимых значений s ($s = d_2\left(\pi n / L\right)^2, n = 1, 2, \ldots$) выражение в правой части (6) положительно, то стационарное решение u_0, υ_0 системы (2) устойчиво. Если же при каких-то допустимых значениях s это выражение отрицательно, то возможна неустойчивость. Если при каких-то допустимых значениях s, правая часть (6) равна нулю, а при остальных отрицательна, то по линейному приближению заключение об устойчивости стационарного решения u_0, υ_0 сделать невозможно.

При $s = \dfrac{a - l\alpha}{2\alpha}$ выражение в правой части (6) достигает минимума, равного

$$(b - a)l - \frac{(a - l\alpha)^2}{4\alpha}.$$

Ввиду того, что $(b - a)l - \dfrac{(a - l\alpha)^2}{4\alpha} < 0$, диффузионная неустойчивость постоянного решения u_0, υ_0 системы (2) возможна, если

$$l\alpha < a < l, \quad a < b < a + \frac{(a - l\alpha)^2}{4\alpha l}.$$

Предположим, что последние неравенства выполнены. Тогда неподвижная точка $x_0,\ y_0$ системы (1) устойчива, а выражение в правой части (6) имеет относительно s два корня, которые мы обозначим через s_1 и s_2 соответственно. Если $s \in (s_1, s_2)$, то $\mu_1(\omega)\mu_2(\omega) < 0$ и, следовательно, $\operatorname{sign}\left(\mu_1(\omega)\right) = -\operatorname{sign}\left(\mu_2(\omega)\right)$. Если L таково, что при некотором n, верно равенство $\omega = \pi n / L$ то постоянное решение u_0, υ_0 системы (2) неустойчиво.

3.2. Резонансные значения. Предположим, что значения параметров (a, b) принадлежат границе области диффузионной неустойчивости (т.е. $l\alpha < a < l$, $b = a + \dfrac{(a - l\alpha)^2}{4\alpha l}$). Тогда одно из собственных значений оператора $\mathcal{L}$ равно нулю при $\omega = \sqrt{\dfrac{a - l\alpha}{2\alpha}}$. С другой стороны, $\omega = \pi n / L$. Поэтому $L = n\pi\sqrt{\dfrac{2\alpha}{a - l\alpha}}$. Такие значения параметра L будем называть *резонансными*.

3.3. Вид бифуркации потери устойчивости. Исследуем вид (мягкость или жесткость) бифуркации потери бифуркации потери устойчивости постоянного решения u_0, υ_0 системы (2), в случае, когда значения $\left(a_0, b_0\right)$ параметров (a, b) принадлежат границе области устойчивости, а значение параметра L — резонансное, т. е. $L = n\pi\sqrt{\dfrac{2\alpha}{a - l\alpha}}$. Положим $\omega = \sqrt{\dfrac{a - l\alpha}{2\alpha}}$. Будем считать значение параметра a фиксированным $a = a_0$, а значение параметра b меняющимся вблизи B_0. Тогда одно из значений: $\mu_1(\omega)$ или $\mu_2(\omega)$ равно нулю при $B = B_0$. Пусть $\mu_1(\omega) = 0$. Тогда, если $B = B_0$, то $\mu_2(\omega) = a - l - (d_1 + d_2)\omega^2$. Соответствующие данным собственным значениям, собственные функции оператора $\mathcal{L}$ имеют вид:

$$\psi_1(v, \omega) = \begin{pmatrix} 1 \\ h_1 \end{pmatrix} \cos v\omega, \quad \psi_2(v, \omega) = \begin{pmatrix} 1 \\ h_2 \end{pmatrix} \cos v\omega,$$

Обозначим через π^* проектор на одномерное пространство E_1, порожденное функцией $\psi_1(v, \omega)$, вдоль пространства, порожденного остальными собственными функциями. Этот проектор можно записать в виде

$$\pi^*\left(\Phi\right) = c\psi_1(v, \omega)\int_0^L \Im\Phi(v)\cos\omega v dv,$$

где $\Im = \begin{pmatrix} 1 \\ -h_2 \end{pmatrix}$.

Отметим, что

$$\pi^* \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \cos\omega v = \frac{\phi_2 - h_2\phi_1}{h_1 - h_2} \begin{pmatrix} 1 \\ h_1 \end{pmatrix} \cos\omega v.$$

Введем в пространстве E_1 координату z. Ту же координату введем и на центральном многообразии. Отметим, что центральное многообразие касается пространства E_1 в начале координат и может быть представлено в виде

$$\Phi(z) = z\Phi_1 + z^2\Phi_2 + z^3\Phi_3 + R(z),$$

где $\Phi_2, \Phi_3, R \in E_2$. Система (2) на центральном многообразии имеет вид

$$\frac{d}{dt}z = m(z) = m_1 z + m_2 z^2 + m_3 z^3 + R(z),$$

где $R(z)$ — полиномы, содержащие мономы четвертого и более высоких порядков малости. Так как $\frac{d}{dt}\Phi$ касается центрального многообразия, то система (1) на центральном многообразии имеет вид

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{dz}{dt}z = (\Phi_1 + 2z\Phi_2 + 3z^2\Phi_3 + R(z))(m_1 z + m_2 z^2 + m_3 z^3 + R(z) = \mathcal{L}\Phi + F(\Phi). \quad (7)$$

Приравнивая в левой и в правой частях (7) коэффициенты при одинаковых степенях z, вычислим $\Phi_2, \Phi_3, m_1, m_2, m_3$. Заметим, что если $\Phi_i = \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_i \\ \tilde{\psi}_i \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$, то

$$F(\Phi) = \begin{pmatrix} c_2 z^2 \left(\tilde{\phi}_i\right)^2 + 2\left(c_2\tilde{\phi}_1\tilde{\phi}_2 + c_3\left(\tilde{\phi}_i\right)^3\right) z^3 + R(z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Приравнивая коэффициенты при z в (7), получаем, что $m_1\Phi_1 = \mathcal{L}\Phi_1$.

Таким образом, Φ_1 — собственная функция оператора $\mathcal{L}$. Как показано выше, $\tilde{\phi}_1 = \cos\omega v$, $\tilde{\psi}_1 = h_1 \cos\omega v$, m_1 — соответсвующее собственное значение.

Приравнивая в левой и правой частях (7) коэффициенты при z^2, получаем

$$\Phi_1 m_2 + 2\Phi_2 m_1 = \mathcal{L}\Phi_2 + \begin{pmatrix} c_2\left(\tilde{\phi}_i\right)^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\Phi_2 + \begin{pmatrix} c_2 \cos^2\omega v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $\cos^2\omega v = \frac{1}{2}(\cos 2\omega v + 1)$, получаем уравнение для m_2, Φ_2:

$$(\mathcal{L} - 2m_1)\Phi_2 = m_2\Phi_1 - \frac{1}{2}c_2\begin{pmatrix} \cos 2\omega v + 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\frac{1}{2}c_2\begin{pmatrix} \cos 2\omega v + 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_2$. Применяя проектор π^* к обеим частям последнего равенства, получаем равенство $m_2\pi^*\Phi_1 = 0$. Учитывая, что $\pi^*\Phi_1 = \Phi_1 \neq 0$, получаем, что $m_2 = 0$.

Учитывая вид оператора $\mathcal{L}$, получаем, что

$$\tilde{\phi}_2 = a_1\cos 2\omega v + a_2, \quad \tilde{\phi}_2 = b_1\cos 2\omega v + b_2,$$

где (a_1, b_1), (a_2, b_2) — решения систем линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} (a - 4d_1\omega^2 - 2m_1) & -b \\ l & -(l + 4d_2\omega^2 + 2m_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 / 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} (a - 2m_1) & -b \\ l & -(l + 2m_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 / 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из этих систем получаем

$$a_1 = \frac{c_2}{2\left(bl / \left(l + 4d_2\omega^2 + 2m_1\right) - (a - 4d_1\omega^2 - 2m_1)\right)},$$

$$a_2 = \frac{c_2}{2\left(bl / \left(l + 2m_1\right) - (a - 2m_1)\right)},$$

$$b_1 = \frac{-c_2 l}{2\left(\left(a - 4d_1\omega^2 - 2m_1\right)\left(l + 4d_2\omega^2 + 2m_1\right) + bl\right)},$$

$$b_2 = \frac{-c_2 l}{2\left((a - 2m_1)\left(l + 2m_1\right) + bl\right)}$$

Вычислим m_3, Φ_3. Из (7) получаем

$$m_3\Phi_1 + 2m_2\Phi_2 + 3m_1\Phi_3 = L\Phi_3 + \begin{pmatrix} 2c_2\,\tilde{\phi}_1\,\tilde{\phi}_2 + c_3\left(\tilde{\phi}_1\right)^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что

$$\tilde{\phi}_1 = \cos\omega v,\ \tilde{\psi}_1 = a_1\cos 2\omega v + a_2,$$

$2\cos 2\omega v\cos\omega v = \cos 3\omega v + \cos\omega v$, $4\cos^3\omega v = \cos 3\omega v + 3\cos\omega v$, $m_2 = 0$, получаем, что

$$m_3\Phi_1 + 3m_1\Phi_3 = L\Phi_3 + \begin{pmatrix} \left(c_2a_1 + \frac{1}{4}c_3\right)\cos 3\omega v + \left(c_2a_1 + c_2a_2 + \frac{3}{4}c_3\right)\cos\omega v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\pi^*\Phi_3 = 0$. Поэтому, применяя π^* к последнему равенству, получаем

$$m_3\Phi_1 = \pi^*\begin{pmatrix} c_2a_1 + 3c_3 / 4 \\ 0 \end{pmatrix}\cos\omega x = \frac{-h_2(c_2a_1 + c_2a_2 + 3c_3 / 4)}{h_1 - h_2}\Phi_1.$$

Отсюда получаем выражение для

$$m_3 = \frac{h_2(4c_2a_1 + 4c_2a_2 + 3c_3)}{4(h_2 - h_1)}.$$

Выразим последнее равенство через исходные переменные участвующие в системе (2) и L, в случае, когда значения параметров (a, b) принадлежат границе области устойчивости, т.е., когда $\mu_1 = 0$. В этом случае, из (8) получаем

$$m_3 = \frac{h_2}{4(h_2 - h_1)}\left(2c_2^2 \frac{2a + 8l(d_1 / d_2)}{9(b-a)l(d_1 / d_2)} + 3c_3\right).$$

Учитывая, что $h_2 > 0$, $h_2 - h_1 > 0$, получаем, что если

$$\left(2c_2^2 \frac{2a + 8l(d_1 / d_2)}{9(b-a)l(d_1 / d_2)} + 3c_3\right) < 0$$

— исследуемая бифуркация мягкая, если

$$\left(2c_2^2 \frac{2a + 8l(d_1 / d_2)}{9(b-a)l(d_1 / d_2)} + 3c_3\right) > 0$$

— жесткая.

Список литературы

1. В. И. Арнольд, В.С. Афраймович, Л.П. Шильников Теория бифуркаций / Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы. — 5. ВИНИТИ 1986.

2. Н. Бейли Математика в биологических системах. — М.: Мир, 1979.

3. В. Г. Ванаг. Диссипативные структуры в реакционно-диффузионных системах. ИКИ 2008.

4. А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский, Н. С. Пискунов Исследование диффузии соединенной с изменением количества вещества и его приложение к одной биологической проблеме / Бюлл. МГУ 1937. 335–369.

5. С. Г. Крейн Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука 1971.

6. Д. Марсден, Дж. Мак-Кракен, Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Наука, 1982.

7. Ю. М. Свирежев. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. — М.: Наука, 1987.

8. A. Costets Experimental evidence of sustained studying Turing type nonequilibrium patterns // Phys. Rev. lett. 64, 2453 (1990).

9. A. M. Turing. The chemical basis of morphogenesis // Philos. Trans. R. Soc. London. B. Biol. Sci. 1952, 37–72.

ДОСЛІДЖЕННЯ РІВНЯНЬ ХВИЛЬОВОГО ТИПУ В ПРОСТОРАХ $L^2(\mathbb{R}^l, d^l x)$ ТА $L^p(\mathbb{R}^l, d^l x)$

М. І. Яременко
Міжнародний математичний центр НАН України, Київ, Україна
Math.kiev@gmail.com

Досліджуються рівняння вигляду:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} \in \mathrm{A}u(t),$$

при умовах, що $t \in [0,T]$, $u(0) = u_0 \in D(\mathrm{A})$, $\dfrac{du(0)}{dt} = v_0 \in D(\mathrm{A})$, де функції u_0, v_0 — задані функції дійсного аргументу. Нелінійний оператор A породжений диференційним виразом в частинних похідних, який має вигляд:

$$\sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} u \right) - b(x, u, \nabla u),$$

за умов його строгої еліптичності в евклідовому l-вимірному просторі, та умов на нелінійний доданок:

$$| b(x,u,\nabla u) | \le \mu_1(x) | \nabla u | + \mu_2(x) | u | + \mu_3(x),$$
$$| b(x,u,\nabla u) - b(x,v,\nabla v) | \le \mu_4(x) | u - v | + \mu_5(x) | \nabla(u - v) |,$$

де $\mu_1^2, \mu_2^2, \mu_4^2 \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^l)$, $\mu_3 \in L^2(\mathbb{R}^l)$, $\mu_5 \in L^\infty\left(\mathbb{R}^l\right)$.

Де $a(\cdot) : \mathbb{R}^l \mapsto \mathbb{R}^l \otimes \mathbb{R}^l$, $a(\cdot) \in \left[L^1_{loc}(\mathbb{R}^l) \right]^{l \times l}$ симетрична еліптична матрична функція, що задовольняє умови:

існують $\varsigma, \xi \in \mathbb{R} : 0 < \varsigma \le \xi < \infty$ виконується нерівність $\varsigma \mathrm{I} \le a(x) \le \xi \mathrm{I}$, для всіх $x \in \mathbb{R}^l$.

Теорема 1. *Для довільних елементів* $\{\gamma, \eta\} \subset H_0^1$ *існує таке дійсне число* $\tilde{\mu} > 0$ *, що для всіх* $0 < \mu < \tilde{\mu}$ *система*

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}$$

має єдиний розв'язок $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

Теорема 2. *Гіперболічне рівняння* $\dfrac{d^2u(t)}{dt^2} \in \mathrm{A}u(t)$, *за початкових умов* $t \in [0,T], u(0) = u_0 \in D(\mathrm{A}), \dfrac{du(0)}{dt} = v_0 \in D(\mathrm{A})$, *має розв'язок.*

Дослідження квазілінійних рівнянь гіперболічного типу спеціального вигляду в просторах $L^2(\mathbb{R}^l, d^l x)$

Досліджується квазілінійні диференціальні рівняння в частинних похідних гіперболічного типу, тобто:

$$\frac{d^2}{dt^2}u - \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\left(x,t\right)\frac{\partial}{\partial x_i}u\right) + \sum_{i=1}^{l} b_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}u + c\left(x,t\right)u + u\left|u\right|^{\rho} = f(x,t), \quad (1)$$

де $\rho = p-2$ при умовах, що $t \in [0,T], u(0) = u_0, \dfrac{du(0)}{dt} = v_0$; функції u_0, v_0— задані функції дійсного просторового аргументу; $a(x,t) : \mathbb{R}^l \times \left[0,\infty\right[\mapsto \mathbb{R}^l \otimes \mathbb{R}^l$, $a(\cdot) \in \left[L^1_{loc}(\mathbb{R}^l)\right]^{l\times l}$ — симетрична еліптична матрична функція, що задовольняє умови:

існують $\varsigma, \xi \in \mathbb{R} : 0 < \varsigma \le \xi < \infty$ виконується нерівність $\varsigma \mathrm{I} \le a(x,t) \le \xi \mathrm{I}$, для всіх дійсних $x \in \mathbb{R}^l$, $t \in [0,T]$.

Введемо позначення:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\left(x,t\right)\frac{\partial}{\partial x_i}u\right) + \sum_{i=1}^{l} b_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}u + c\left(x,t\right)u.$$

Для означення слабкого розв'язку рівнянь даного типу введемо поняття білінійної форми на просторі $L^2(\mathbb{R}^l, d^l x)$, а саме, задамо білінійну форму за допомогою формули:

$$h^2(u,v) = \left\langle \sum_{i,j=1}^{l} a_{ij}\left(x,t\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}u\right),\left(\frac{\partial}{\partial x_j}v\right)\right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{l} b_i(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}u\right), v\right\rangle + \left\langle c\left(x,t\right)u, v\right\rangle,$$

де $u \in W_1^2(\mathbb{R}^l, d^l x), v \in W_{1,0}^2(\mathbb{R}^l, d^l x), t \ge 0$. Зауважимо, що дана форма є функціонально залежною від часового параметру.

Функція u розглядається як відображення, що діє за правилом:

$$u : \left[0,T\right] \to W_1^2(\mathbb{R}^l, d^l x),$$

отже при кожному фіксованому значенню параметра t задано функцію дійсного векторного аргументу $x \in \mathbb{R}^l$, тобто:

$\left[u(t)\right](x) = u(x,t)$, $t \in [0,T]$, це є означенням u.

Аналогічно, $\left[f(t)\right](x) = f(x,t)$, при $x \in \mathbb{R}^l$ і $t \in [0,T]$.

Означення. *Функція* $u \in L^2\left(0,T; W_1^2(\mathbb{R}^l, d^l x)\right)$ *і* $u' \in L^2\left(0,T; L^2(\mathbb{R}^l, d^l x)\right)$, $u'' \in L^2\left(0,T; W_{-1}^2(\mathbb{R}^l, d^l x)\right)$ *називається слабким розв'язком лінійного гіперболічного рівняння з початковими умовами, якщо для всіх* $v \in W_{1,0}^2(\mathbb{R}^l, d^l x)$ *виконується рівність:*

$$\left\langle u'',v\right\rangle + h^2(u,v) + \left\langle u\left|u\right|^{\rho},v\right\rangle = \left\langle f,v\right\rangle, \qquad t\in\left[0,T\right],$$

і задовольняються початкові умови:

$$u(0)=u_0, \qquad \frac{du(0)}{dt}=v_0.$$

Теорема 3 (про існування слабкого розв'язку лінійного рівняння гіперболічного типу). *Для задачі (1) існує єдиний слабкий розв'язок.*

Дослідження гладкості розв'язку рівняння гіперболічного типу у випадку коли коефіцієнти не залежать від часової змінної

Досліджується гладкість розв'язків рівняння:

$$\frac{d^2}{dt^2}u-\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial}{\partial x_i}u\right)+\sum_{i=1}^{l}b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u+c\left(x\right)u+u\left|u\right|^{\rho}=f(x,t),$$

де коефіцієнти $a_{ij}\left(x\right), b_i(x), c\left(x\right)$ — гладкі не залежні від часу функції.

Теорема 4. *1. Якщо*

$$u_0\in W_1^2(\mathbb{R}^l,d^lx), v_0\in L^2(\mathbb{R}^l,d^lx), f\in L^2\left(0,T;L^2(\mathbb{R}^l,d^lx)\right),\ \rho\le\frac{2}{l-2}, l\ge 3,$$

і

$$u\in L^2\left(0,T;W_1^2(\mathbb{R}^l,d^lx)\right), u'\in L^2\left(0,T;L^2(\mathbb{R}^l,d^lx)\right), u''\in L^2\left(0,T;W_{-1}^2(\mathbb{R}^l,d^lx)\right)$$

де функція u є слабкий розв'язок задачі Коші:

$$\frac{d^2}{dt^2}u-\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial}{\partial x_i}u\right)+\sum_{i=1}^{l}b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u+c\left(x\right)u+u\left|u\right|^{\rho}=f(x,t),$$

$$u(0)=u_0, \qquad \frac{d}{dt}u(0)=v_0,$$

то $u\in L^\infty\left(0,T;W_1^2(R^l,d^lx)\right)$, $u'\in L^\infty\left(0,T;L^2(R^l,d^lx)\right)$ *і є правильною оцінка:*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\left[0,T\right]}\left(\left\|u'(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^l,d_lx)}+\left\|u(t)\right\|_{W_1^2(\mathbb{R}^l,d_lx)}\right)\le$$
$$\le C\left(\left\|u_0\right\|_{W_1^2(\mathbb{R}^l,d_lx)}+\left\|v_0\right\|_{L^2(\mathbb{R}^l,d_lx)}+\left\|f\right\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^l,d_lx))}\right).$$

2. Якщо $u_0\in W_2^2(\mathbb{R}^l,d^lx), v_0\in W_1^2(\mathbb{R}^l,d^lx), f'\in L^2\left(0,T;L^2(\mathbb{R}^l,d^lx)\right)$, $\rho\le\dfrac{2}{l-2}, l\ge 3,$ *то* $u\in L^\infty\left(0,T;W_2^2(\mathbb{R}^l,d^lx)\right), u'\in L^\infty\left(0,T;W_1^2(\mathbb{R}^l,d^lx)\right)$, $u''\in L^\infty\left(0,T;L^2(\mathbb{R}^l,d^lx)\right)$, $u'''\in L^\infty\left(0,T;W_{-1}^2(\mathbb{R}^l,d^lx)\right)$ *і є правильною оцінка:*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]}\left(\left\|u(t)\right\|_{W_2^2(\mathbb{R}^l,d_lx)}+\left\|u'(t)\right\|_{W_1^2(\mathbb{R}^l,d_lx)}+\left\|u''(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^l,d_lx)}+\left\|u'''(t)\right\|_{L^2(0,T;W_{-1}^2(\mathbb{R}^l,d_lx))}\right)\le$$
$$\le C\left(\left\|u_0\right\|_{W_2^2(\mathbb{R}^l,d_lx)}+\left\|v_0\right\|_{W_1^2(\mathbb{R}^l,d_lx)}+\left\|f\right\|_{W_1^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^l,d_lx))}\right).$$

Список літератури

1. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

2. Кухарчук М. М., Яременко М. І. Про однозначну розв'язність рівняння $(\lambda-ad^2)u=f$ / М. М. Кухарчук, М. І. Яременко // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2007. — № 3. — С. 150–157.

3. Кухарчук М. М., Яременко М. І. Про однозначну розв'язність рівняння $\lambda u-ad^2u+sdu=f,\lambda>0$, та побудову нелінійної півгрупи стиску / М. М. Кухарчук, М.І. Яременко // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2007. — № 5. — С. 148–157.

4. Phillips R. S. Dissipative hyperbolic system / R. S. Phillips // Trans. Amer. Math. Soc. — Vol. 86. — 1957. — P. 109–173.

5. Phillips R. S. Dissipative operators and hyperbolic system of partial differential equations / R. S. Phillips // Trans. Amer. Math. Soc. — Vol. 90. — 1959. — P. 193–254.

ЗМІСТ

Інститут математики НАН України
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
Національний педагогічний університет ім. М. Драгоманова
Національний технічний університет України «КПІ»

П'ЯТНАДЦЯТА
МІЖНАРОДНА
НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ
ІМЕНІ АКАДЕМІКА
МИХАЙЛА КРАВЧУКА

15–17 травня 2014 р., Київ

МАТЕРІАЛИ КОНФЕРЕНЦІЇ
I

Диференціальні та інтегральні рівняння,
їх застосування

Підписано до друку 29.04.2014.
Формат 60x84/16. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 23.25 Обл.-вид.арк. 21.63

Зам.№ 222. Наклад 200 примірників.
Видавництво ТОВ «Спринт-Сервіс»
Свідоцтво: Серія ДК № 4365 від 17.07.2012
м. Київ-70, вул. Почайнинська, 28-б