

Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной
физики

**Отчет по лабораторной работе №2
“Интервальный анализ”**

Выполнили студент группы 5030102/10201:

Теплов Андрей Сергеевич

Преподаватель:

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2024

Содержание

1	Постановка задачи	2
2	Необходимая теория	2
2.1	Допусковое множество	2
2.2	b -коррекция ИСЛАУ	3
2.3	A -коррекция ИСЛАУ	3
2.4	Ab -коррекция ИСЛАУ	3
3	Реализация	3
4	Результаты	4
4.1	Максимум распознающего функционала	4
4.2	Достижение разрешимости за счёт коррекции левой части (A -коррекция)	4
4.3	Достижение разрешимости за счёт коррекции правой части (b -коррекция) . . .	6
4.4	Достижение разрешимости за счёт Ab -коррекции	7
5	Выводы	7

1 Постановка задачи

Дан набор ИСЛАУ 1

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}, \quad x = (x_1, x_2) \quad (1)$$

с матрицей и вектором правой части:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.7, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.7, 1.3] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \end{pmatrix}; \quad (2)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.7, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.7, 1.3] \\ [0.8, 1.4] & [0.7, 1.3] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \\ [2.90, 3.3] \end{pmatrix}; \quad (3)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.7, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.7, 1.3] \\ [0.8, 1.4] & [0.7, 1.3] \\ [-0.3, 0.3] & [0.7, 1.3] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \\ [2.90, 3.3] \\ [1.8, 2.2] \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Необходимо:

- Проверить непустоту допускового множества ИСЛАУ 1,
- Построить график функционала $\text{Tol}(x)$ для 1,
- Построить допусковое множество ИСЛАУ 1,
- Найти $\arg\max \text{Tol}$ и образующие допускового функционала.

Для достижения непустого допускового множества провести коррекцию ИСЛАУ 1:

- Правой части ИСЛАУ — b -коррекция,
- Матрицы ИСЛАУ — A -коррекция,
- Комбинацией предыдущих методов с одновременным изменением правой части и матрицы ИСЛАУ — Ab -коррекция.

Для всех видов коррекции построить график функционала $\text{Tol}(x)$, допускового множества, отобразить $\arg\max \text{Tol}$ и найденные ранее частные решения набора СЛАУ.

2 Необходимая теория

2.1 Допусковое множество

Пусть даны интервальная $m \times n$ матрица \mathbf{A} и интервальный вектор правой части \mathbf{b} .

Допусковым множеством решений ИСЛАУ называется множество

$$\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall A \in \mathbf{A} \exists b \in \mathbf{b} : Ax = b\}. \quad (5)$$

Функционалом $\text{Tol}(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{IR}^{m \times n} \times \mathbb{IR}^m \rightarrow \mathbb{R}$ называется выражение

$$\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad} \mathbf{b}_i - \left| \text{mid} \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\}. \quad (6)$$

Тогда принадлежность $x \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ равносильна $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0$, то есть допустовое множество решений интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ есть множество уровня

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0\}$$

функционала Tol .

2.2 b -коррекция ИСЛАУ

Пусть матрица \mathbf{A} ИСЛАУ неизменна, и значения $\text{mid} \mathbf{b}_i, i \in \overline{1, m}$ зафиксированы. Тогда расширение вектора \mathbf{b} путем его замены на вектор

$$\mathbf{b} + K\mathbf{e}, \quad K \geq 0, \quad \mathbf{e} = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^T \quad (7)$$

приведет к тому, что значение абсолютного максимума T распознающего функционала $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ возрастет на постоянную K :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b} + K\mathbf{e}) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) + K = T + K$$

прием $\arg\max \text{Tol}$ — положение точки T — не изменится.

2.3 A -коррекция ИСЛАУ

A -коррекцией ИСЛАУ $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ заключается в замене матрицы \mathbf{A} ее интервальной матрицей $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$ такой, что

$$\text{rad}(\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}) < \text{rad} \mathbf{A}, \quad \text{mid}(\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}) = \text{mid} \mathbf{A}, \quad \mathbf{e}_{ij} = [-e_{ij}, e_{ij}].$$

2.4 Ab -коррекция ИСЛАУ

Ab -коррекцией ИСЛАУ $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ заключается в комбинированном применении A -коррекции и b -коррекции, при этом первый этап процесса — сужение элементов матрицы \mathbf{A} , второй этап — уширение вектора правой части \mathbf{b} .

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена на языке программирования Python. В ходе работы были также использованы библиотеки `numpy` и `matplotlib`.

Ссылка на GitHub репозиторий: <https://github.com/vladimir-skvortsov/spbstu-interval-analysis>

4 Результаты

4.1 Максимум распознающего функционала

Максимум со значением $T = -0.7$ расположен в точке $\tau = (1, 2)^T$, для всех формулировок. Образующая функционала в начальном случае для 4:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -0.7 \\ -0.7 \\ -0.7 \\ -0.7 \end{pmatrix} \quad (8)$$

В таком случае допустовое множество пусто.

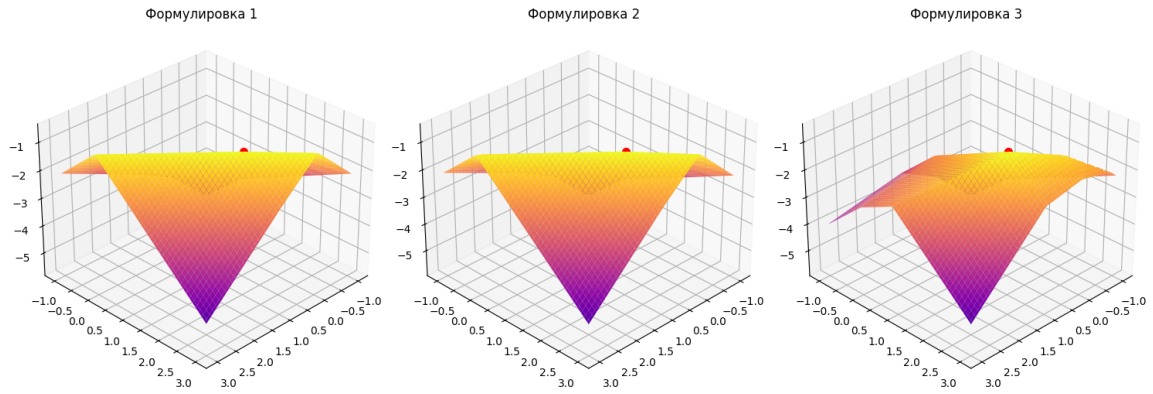


Рис. 1: Расположение максимума распознающего функционала

4.2 Достижение разрешимости за счёт коррекции левой части (А-коррекция)

Для нахождения интервала допустимых значений ϵ для А-коррекции формулировки 2 выполним следующие действия:

$$T = \text{Tol}(\tau, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = -0.7 \Rightarrow |T| = 0.7,$$

$$\tau = \text{Arg max}_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = (1, 2)^T \Rightarrow |\tau_1| = 1, |\tau_2| = 2.$$

Найдем точечную матрицу

$$\text{rad}A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

и решим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leq e \leq 0.3, \\ e + 2e = K \geq |T| = 0.7 \end{cases} \Rightarrow 0.2(3) \leq e \leq 0.3.$$

Остановим свой выбор на $e_{\text{mid}} = \frac{0.2(3)+0.3}{2} = 0.2(6)$. Тогда ИСЛАУ $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ приобретает соединяющий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.917, 0.983] & [0.967, 1.033] \\ [1.017, 1.083] & [0.967, 1.033] \\ [1.067, 1.133] & [0.967, 1.033] \\ [-0.033, 0.033] & [0.967, 1.033] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \\ [2.90, 3.3] \\ [1.8, 2.2] \end{pmatrix}.$$

Максимум со значением $T = 0.1$ расположен в точке $\tau = (1, 2)^T$.

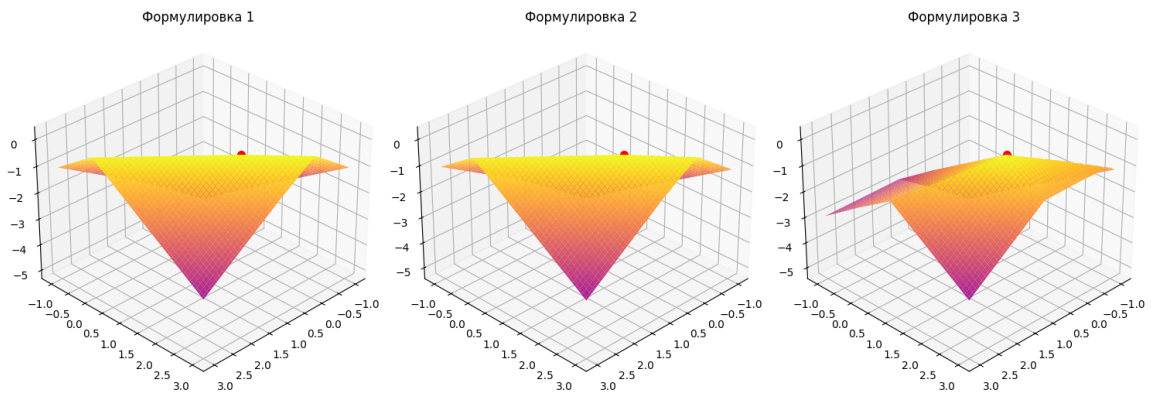


Рис. 2: Поверхности распознающих функционалов после A -корректировки

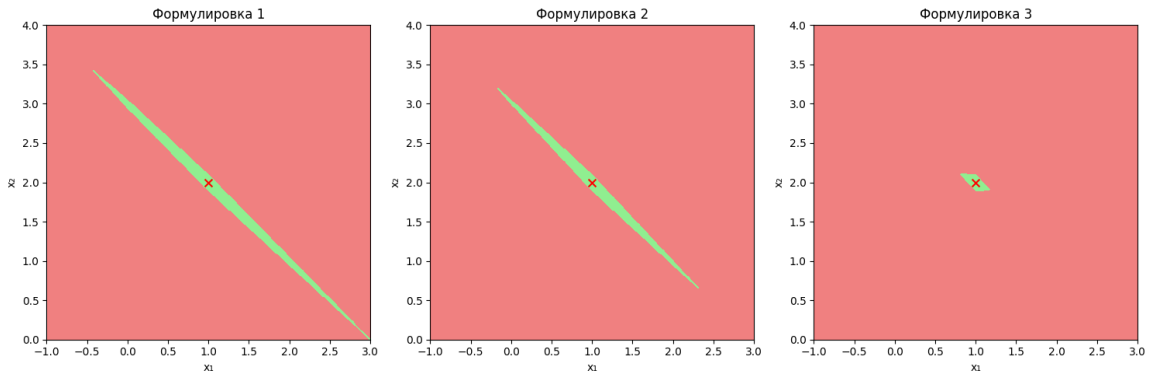


Рис. 3: Допусковое множество решений после A -корректировки

4.3 Достижение разрешимости за счёт коррекции правой части (*b*-коррекция)

Для построения интервальной матрицы был взят коэффициент $K = 1$ для всех ИСЛАУ. Для примера, задача 4, принимает вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.7, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.7, 1.3] \\ [0.8, 1.4] & [0.7, 1.3] \\ [-0.3, 0.3] & [0.7, 1.3] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [1.75, 4.15] \\ [1.85, 4.25] \\ [1.9, 4.3] \\ [0.8, 3.2] \end{pmatrix}.$$

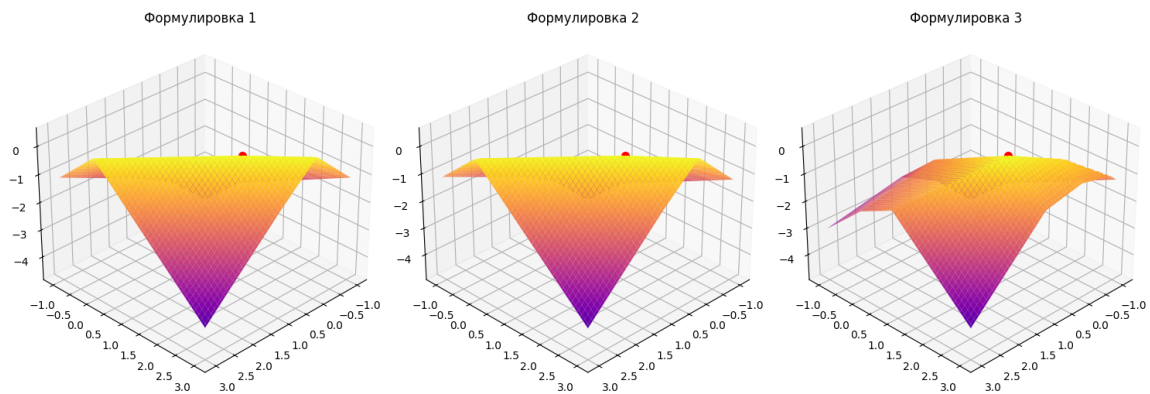


Рис. 4: Поверхности распознающих функционалов после *b*-корректировки

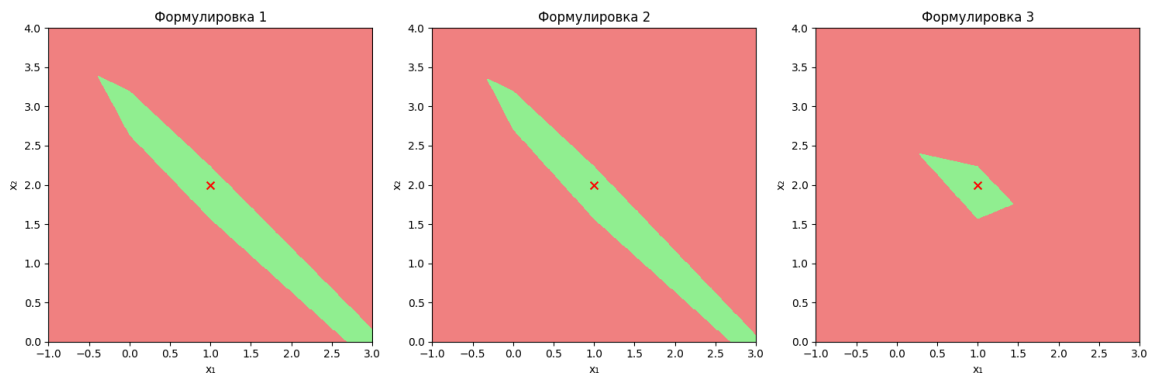


Рис. 5: Допусковое множество решений после *b*-корректировки

Минимальное значение $K = 0.7$ в предельном переходе неотрицательной области сводится к точке $\tau = (1, 2)^T$.

4.4 Достижение разрешимости за счёт Аб-коррекции

Сначала проводилось сужение левой части (A -коррекция), затем расширение правой части (b -коррекция) с коэффициентом $K = 1$.

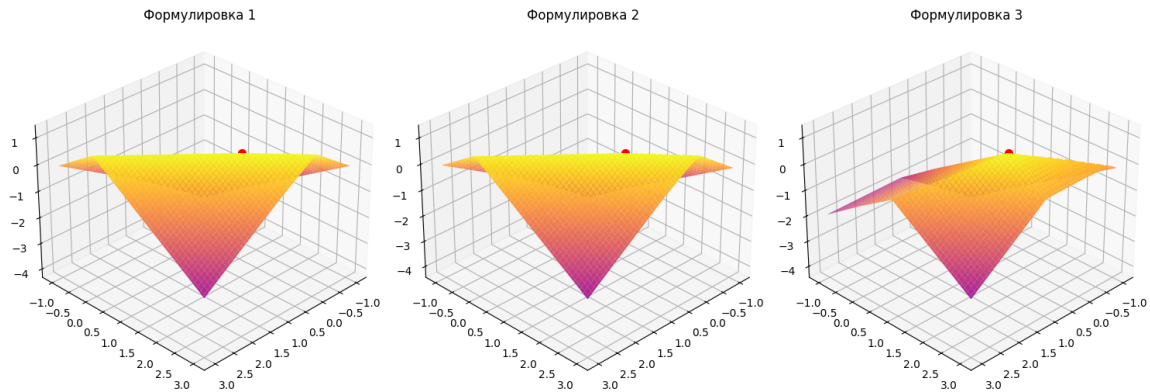


Рис. 6: Поверхности распознающих функционалов после Ab -корректировки

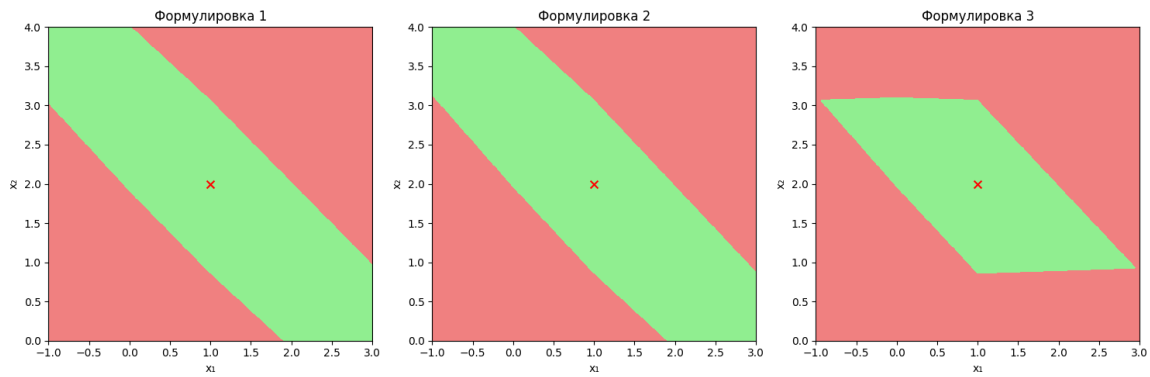


Рис. 7: Допусковое множество решений после Ab -корректировки

5 Выводы

- В результате работы установлено, что для заданных ИСЛАУ допустовое множество решений является пустым, поскольку максимальное значение распознающего функционала $T = -0.7$ оказалось меньше нуля. Это свидетельствует о несовместимости исходной системы в заданных интервалах.
- Для достижения разрешимости системы были применены методы коррекции правой части (b -коррекция) и матрицы коэффициентов (A -коррекция). В частности, после применения b -коррекции с коэффициентом $K = 1$ удалось получить положительное значение

распознающего функционала $T = 0.3$. Это указывает на то, что скорректированная система обладает непустым допусковым множеством решений.

- Применение A -коррекции также обеспечило разрешимость ИСЛАУ. Скорректированная матрица коэффициентов позволила добиться положительного значения распознающего функционала и определить допусковое множество решений, что подтверждает эффективность данного метода.
- Анализ графиков допусковых множеств и распознающего функционала показал, что после коррекции форма поверхности $\text{Tol}(x)$ изменилась. Это отражает влияние коррекции на свойства системы. Кроме того, смещение максимума распознающего функционала подтверждает улучшение совместимости системы.