Problem 3: Perceptrons

IA 2025/26

November 6, 2025

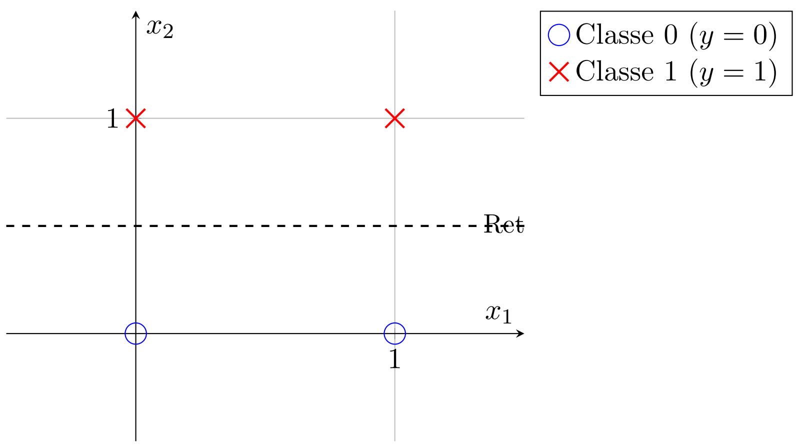
Tarefa 1: Propor um conjunto de dados

A tarefa pede um conjunto de dados com 4 exemplos que seja **linearmente separável**. Propomos a função lógica $\mathbf{y} = \mathbf{x_2}$.

A tabela de verdade para esta função é:

x_1	x_2	y (Saída)
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**1**

Como a função é $y = x_2$, os pontos da "Classe 0" ($y = 0$) são (0,0) e (1,0). Os pontos da "Classe 1" ($y = 1$) são (0,1) e (1,1). Este problema é **linearmente separável**, como se vê no plano cartesiano abaixo, onde uma única reta (ex: $x_2 = 0.5$) pode separar as duas classes.



Tarefa 2: Calcular pesos para um único neurónio

A tarefa pede para calcular, sem treino, os pesos de um **único neurónio** que resolva o conjunto de dados da Tarefa 1 com erro zero.

Para manter a consistência com a Tarefa 4, usaremos a **Função Degrau (Step Function)** como função de ativação, em vez da sigmoide:

$$\text{Saída} = \begin{cases} 1 & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases} \tag{1}$$

A soma ponderada (input líquido) é $z = w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2$.

Para resolver $y = x_2$, precisamos de encontrar w_0, w_1, w_2 que satisfaçam:

- **(0, 0) → 0:** $z = w_0 + w_1(0) + w_2(0) = w_0 < 0$
- **(0, 1) → 1:** $z = w_0 + w_1(0) + w_2(1) = w_0 + w_2 \geq 0$
- **(1, 0) → 0:** $z = w_0 + w_1(1) + w_2(0) = w_0 + w_1 < 0$
- **(1, 1) → 1:** $z = w_0 + w_1(1) + w_2(1) = w_0 + w_1 + w_2 \geq 0$

Uma solução simples de pesos inteiros é:

- $w_0 = -1$ (satisfaz $w_0 < 0$)
- $w_2 = 1$ (satisfaz $w_0 + w_2 = -1 + 1 = 0 \geq 0$)
- $w_1 = 0$ (satisfaz $w_0 + w_1 = -1 + 0 = -1 < 0$)

Pesos do Neurónio Único: $w_0 = -1$, $w_1 = 0$, $w_2 = 1$.

Tarefa 3: Implementar e testar o neurónio

Testamos o neurónio único configurado na Tarefa 2 com os pesos $w_0 = -1, w_1 = 0, w_2 = 1$.

Entrada x_1	x_2	Cálculo ($z = -1 + 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2$) z	Saída y (se $z \geq 0$)	Esperada
0	0	$z = -1 + 0 + 0 = -1$	**0**	**0**
0	1	$z = -1 + 0 + 1 = 0$	**1**	**1**
1	0	$z = -1 + 0 + 0 = -1$	**0**	**0**
1	1	$z = -1 + 0 + 1 = 0$	**1**	**1**

O neurónio único funciona perfeitamente para o problema linearmente separável.

Tarefa 4: Configurar a Rede Multicamada (MLP)

A tarefa pede para configurar a rede **multilayer perceptron**. Embora o problema $y = x_2$ (das tarefas anteriores) seja linearmente separável, vamos resolvê-lo usando a estrutura MLP completa, decompondo a lógica.

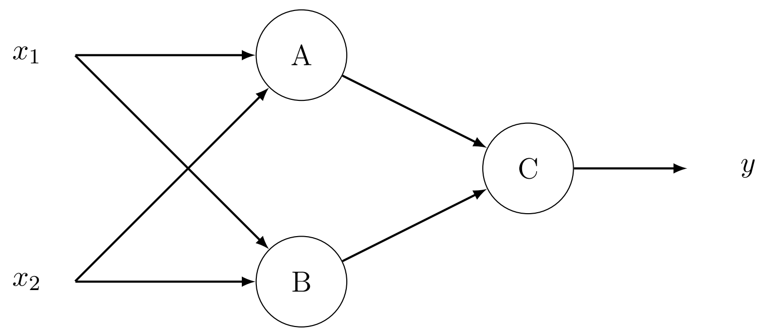
Lógica (Álgebra Booleana)

A função lógica a implementar (que é equivalente a $y = x_2$) é:

$$y = (\neg x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_2) \tag{2}$$

Diagrama da Rede Neuronal

Usamos a arquitetura do PDF, mas com os neurónios ocultos chamados A e B, e o de saída chamado C.



Condição (Função Degrau)

Para todos os neurónios (A, B, e C), usamos a mesma Função Degrau das tarefas anteriores:

$$\text{Saída} = \begin{cases} 1 & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases} \tag{3}$$

Resolução (Configurar os Pesos da MLP)

Configuramos os pesos de cada neurónio para executar a sua parte da lógica.

Neurónio A $= \neg x_1 \cdot x_2$

Deve dar 1 apenas para (0, 1).

- $z_A = w_{0,A} + w_{1,A} \cdot x_1 + w_{2,A} \cdot x_2$
- **Pesos:** $w_0 = -1$, $w_1 = -2$, $w_2 = 2$
- **Verificação:**
  - (0,0): $z = -1 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 0 = -1 \to 0$
  - (0,1): $z = -1 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 1 \to 1$
  - (1,0): $z = -1 + (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 0 = -3 \to 0$
  - (1,1): $z = -1 + (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 1 = -1 \to 0$

Neurónio B $= x_1 \cdot x_2$

Deve dar 1 apenas para (1, 1).

- $z_B = w_{0,B} + w_{1,B} \cdot x_1 + w_{2,B} \cdot x_2$
- **Pesos:** $w_0 = -2$, $w_1 = 1$, $w_2 = 1$
- **Verificação:**
  - (0,0): $z = -2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = -2 \to 0$
  - (0,1): $z = -2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = -1 \to 0$
  - (1,0): $z = -2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -1 \to 0$
  - (1,1): $z = -2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0 \to 1$

Neurónio C $= A + B$ (A OR B)

Recebe as saídas a e b de A e B. Deve dar 1 se $a = 1$ ou $b = 1$.

- $z_C = w_{0,C} + w_{A,C} \cdot a + w_{B,C} \cdot b$
- **Pesos:** $w_0 = -1$, $w_A = 1$, $w_B = 1$
- **Verificação:**
  - (a=0, b=0): $z = -1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = -1 \to 0$
  - (a=1, b=0): $z = -1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 \to 1$
  - (a=0, b=1): $z = -1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0 \to 1$

Verificação Final da Rede Completa

Testamos a rede inteira, passo a passo, com todas as entradas.

Entrada		Neurónio A		Neurónio B		Neurónio C		Saída
x_1	x_2	z_A	Saída a	z_B	Saída b	z_C	Saída y	Esperada
0	0	-1	**0**	-2	**0**	-1 + 0 + 0 = -1	**0**	**0**
0	1	1	**1**	-1	**0**	-1 + 1 + 0 = 0	**1**	**1**
1	0	-3	**0**	-1	**0**	-1 + 0 + 0 = -1	**0**	**0**
1	1	-1	**0**	0	**1**	-1 + 0 + 1 = 0	**1**	**1**

A rede (MLP) funciona perfeitamente para a lógica pretendida.