Problem 3: Perceptrons

IA 2025/26

November 10, 2025

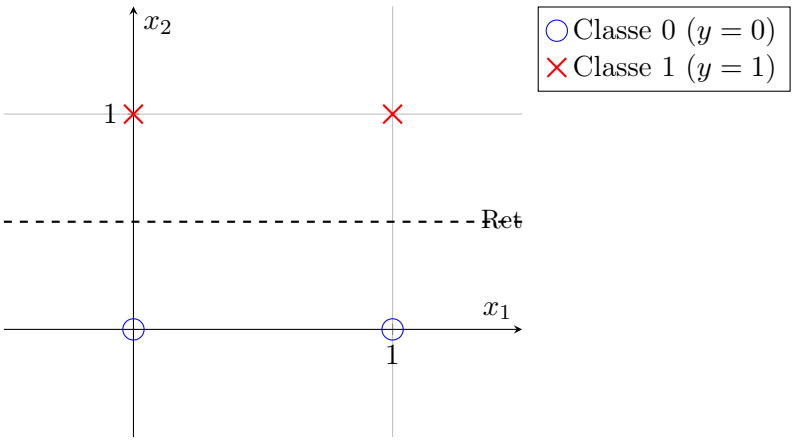
Tarefa 1: Propor um conjunto de dados

A tarefa pede um conjunto de dados com 4 exemplos que seja **linearmente separável**. Propomos a função lógica $\mathbf{y = x_2}$.

A tabela de verdade para esta função é:

x_1	x_2	y (Saída)
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**1**

Como a função é $y = x_2$, os pontos da "Classe 0" ($y = 0$) são (0,0) e (1,0). Os pontos da "Classe 1" ($y = 1$) são (0,1) e (1,1). Este problema é **linearmente separável**, como se vê no plano cartesiano abaixo, onde uma única reta (ex: $x_2 = 0.5$) pode separar as duas classes.



Tarefa 2: Calcular pesos para um único neurónio

A tarefa pede para calcular, sem treino, os pesos de um **único neurónio** que resolva o conjunto de dados da Tarefa 1 com erro zero.

Para manter a consistência com a Tarefa 4, usaremos a **Função Degrau (Binary Step)** como função de ativação, em vez da sigmoide:

$$\text{Saída} = \begin{cases} 1 & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases} \tag{1}$$

A soma ponderada (input líquido) é $z = w_0 + w_1x_1 + w_2x_2$.

Para resolver $y = x_2$, precisamos de encontrar w_0, w_1, w_2 que satisfaçam:

- **(0, 0) → 0:** $z = w_0 + w_1(0) + w_2(0) = w_0 < 0$
- **(0, 1) → 1:** $z = w_0 + w_1(0) + w_2(1) = w_0 + w_2 \geq 0$
- **(1, 0) → 0:** $z = w_0 + w_1(1) + w_2(0) = w_0 + w_1 < 0$
- **(1, 1) → 1:** $z = w_0 + w_1(1) + w_2(1) = w_0 + w_1 + w_2 \geq 0$

Uma solução simples de pesos inteiros é:

- $w_0 = -1$ (satisfaz $w_0 < 0$)
- $w_2 = 1$ (satisfaz $w_0 + w_2 = -1 + 1 = 0 \geq 0$)
- $w_1 = 0$ (satisfaz $w_0 + w_1 = -1 + 0 = -1 < 0$)

Pesos do Neurónio Único: $w_0 = -1$, $w_1 = 0$, $w_2 = 1$.

Tarefa 3: Implementar e testar o neurónio

Testamos o neurónio único configurado na Tarefa 2 com os pesos $w_0 = -1, w_1 = 0, w_2 = 1$.

Entrada x_1	Entrada x_2	Cálculo ($z = -1 + 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2$) z	Saída y (se $z \geq 0$)	Esperada
0	0	$z = -1 + 0 + 0 = -1$	**0**	**0**
0	1	$z = -1 + 0 + 1 = 0$	**1**	**1**
1	0	$z = -1 + 0 + 0 = -1$	**0**	**0**
1	1	$z = -1 + 0 + 1 = 0$	**1**	**1**

O neurónio único funciona perfeitamente para o problema linearmente separável.

Implementação em Java

Abaixo está o código-fonte em Java que implementa o neurónio único (usando a classe MLP como um neurónio único) e o testa.

O código usa pesos ligeiramente diferentes ($w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_0(bias) = -0.5$), que também são uma solução válida para as inequações da Tarefa 2, como se pode verificar:

- **(0, 0) → 0:** $z = -0.5 + 0(0) + 1(0) = -0.5 < 0$ (Correto)
- **(0, 1) → 1:** $z = -0.5 + 0(0) + 1(1) = 0.5 \geq 0$ (Correto)
- **(1, 0) → 0:** $z = -0.5 + 0(1) + 1(0) = -0.5 < 0$ (Correto)
- **(1, 1) → 1:** $z = -0.5 + 0(1) + 1(1) = 0.5 \geq 0$ (Correto)

```java
package apps;

import math.Matrix;
import neural.MLP;
import neural.activation.IDifferentiableFunction;
import neural.activation.Step;

import java.util.Scanner;

public class SingleNeuron0101 {
```

```
public static void main(String[] args) {
    // 1. Define the dataset for the logic y = x2 (pattern 0101)
    double[][] inputs = {
            {0, 0},
            {0, 1},
            {1, 0},
            {1, 1}
    };
    double[] expectedOutputs = {0, 1, 0, 1};

    // 2. Define the weights and bias calculated manually
    // For y = x2, we can use weights that focus on x2 and ignore
       x1.
    Matrix weights = new Matrix(new double[][]{{0.0}, {1.0}}); //
       Shape: 2x1
    double bias = -0.5;

    // 3. Create and configure an MLP to act as a single neuron
    int[] topology = {2, 1}; // 2 inputs, 1 output neuron
    IDifferentiableFunction[] activations = {new Step()};
    MLP mlp = new MLP(topology, activations, -1);

    // Use setters to apply the manually calculated weights and
       bias
    mlp.setWeights(new Matrix[]{weights});
    mlp.setBiases(new double[]{bias});

    System.out.println("Testing an MLP as a single neuron for the
       logic y = x2 (pattern 0101):");
    System.out.println("Weights: w1=0.0, w2=1.0, Bias: -0.5");
    System.out.println("----------------------------------------")
       ;

    // Test with the predefined dataset
    Matrix testMatrix = new Matrix(inputs);
    Matrix predictions = mlp.predict(testMatrix);

    for (int i = 0; i < inputs.length; i++) {
        double prediction = predictions.get(i, 0);
        System.out.printf("Input: [%.0f, %.0f] -> Predicted: %.0f,
           Expected: %.0f\n",
                inputs[i][0], inputs[i][1], prediction,
                   expectedOutputs[i]);
    }

    // --- Interactive Testing Part ---
    System.out.println("\n--- Interactive Test Mode ---");
    System.out.println("Enter the number of pairs to test, followed
        by the pairs (e.g., 1.0 0.9)");

    Scanner sc = new Scanner(System.in);
    int n;
    try {
        n = sc.nextInt();
    } catch (java.util.InputMismatchException e) {
        System.err.println("\nError: Invalid input. Please enter an
            integer for the number of pairs first.");
        sc.close();
```

```
            return; // Exit the program gracefully
        }

        for (int i = 0; i < n; i++) {
            // Create an array for the two input values
            double[][] testInput = new double[1][2];
            testInput[0][0] = Double.parseDouble(sc.next().replace(',',
                '.'));
            testInput[0][1] = Double.parseDouble(sc.next().replace(',',
                '.'));

            // Get the neuron's prediction
            double prediction = mlp.predict(new Matrix(testInput)).get
               (0, 0);

            System.out.printf("Input: [%.1f, %.1f] -> Predicted: %d\n",
                testInput[0][0], testInput[0][1], (int)prediction);
        }
        sc.close();
    }
}
```

Listing 1: SingleNeuron0101.java

Tarefa 4: Configurar a Rede Multicamada (MLP) para NOT XOR

A tarefa pede para configurar a rede **multilayer perceptron** para que funcione como uma função **NOT XOR** (também conhecida como XNOR). Este é um problema clássico **não linearmente separável**.

Lógica (Álgebra Booleana)

A tabela de verdade para o XNOR é:

x_1	x_2	y (Saída)
0	0	**1**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

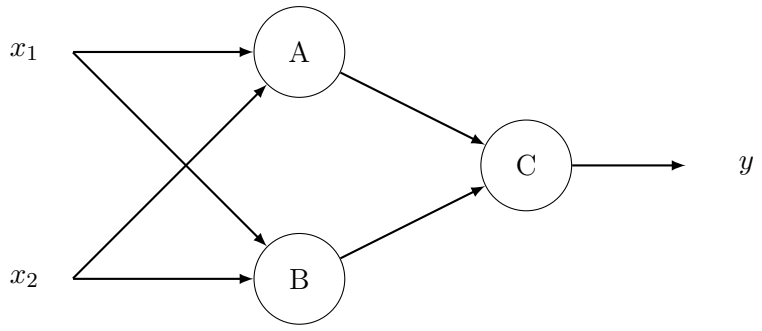
Como visto nas notas, decompomos a lógica em duas partes que são linearmente separáveis, e depois combinamo-las:

$$y = (\neg x_1 \cdot \neg x_2) + (x_1 \cdot x_2) \tag{2}$$

Isto significa que o Neurónio A irá implementar $(\neg x_1 \cdot \neg x_2)$ (Porta NOR), o Neurónio B irá implementar $(x_1 \cdot x_2)$ (Porta AND), e o Neurónio C irá combinar os resultados (Porta OR).

Diagrama da Rede Neuronal

Usamos a mesma arquitetura 2-2-1:



Condição (Binary Step)

Para todos os neurónios (A, B, e C), usamos a mesma Função Degrau:

$$\text{Saída} = \begin{cases} 1 & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases} \tag{3}$$

Resolução (Configurar os Pesos da MLP)

Configuramos os pesos de cada neurónio com base nos cálculos das notas.

Neurónio A $= \neg x_1 \cdot \neg x_2$ (Porta NOR)

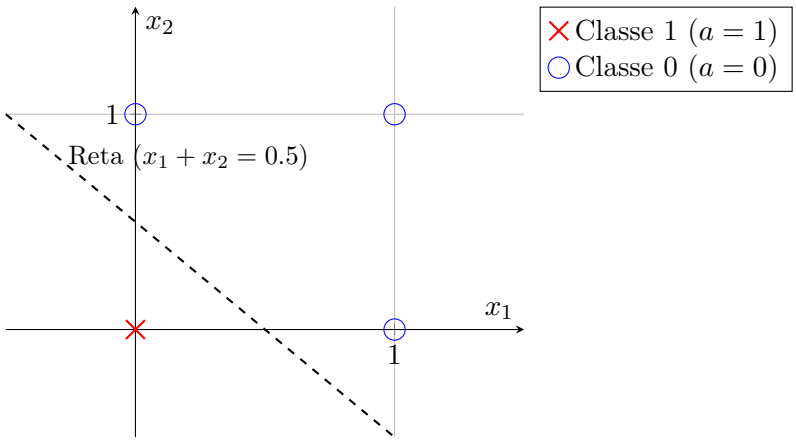
Deve dar 1 **apenas** para (0, 0).

- $z_A = w_{0,A} + w_{1,A} \cdot x_1 + w_{2,A} \cdot x_2$
- **Condições:**
  - (0,0) $\rightarrow$ 1: $w_0 \geq 0$
  - (0,1) $\rightarrow$ 0: $w_2 + w_0 < 0$
  - (1,0) $\rightarrow$ 0: $w_1 + w_0 < 0$
  - (1,1) $\rightarrow$ 0: $w_1 + w_2 + w_0 < 0$
- **Cálculo (das notas):** Procuramos uma reta $w_1x_1 + w_2x_2 + w_0 = 0$ que separe o ponto (0,0) [Classe 1] dos restantes pontos (0,1), (1,0), (1,1) [Classe 0].

  Como visto nas notas, a reta $x_1 + x_2 = 0.5$ (ou $x_1 + x_2 - 0.5 = 0$) serve de fronteira.

  Queremos que o lado de (0,0) seja ≥ 0. Testamos a função $z = -x_1 - x_2 + 0.5$:
  - (0,0): $z = -0 - 0 + 0.5 = 0.5 \geq 0 \rightarrow 1$ (Correto)
  - (0,1): $z = -0 - 1 + 0.5 = -0.5 < 0 \rightarrow 0$ (Correto)
  - (1,0): $z = -1 - 0 + 0.5 = -0.5 < 0 \rightarrow 0$ (Correto)
  - (1,1): $z = -1 - 1 + 0.5 = -1.5 < 0 \rightarrow 0$ (Correto)
- **Pesos (das notas):** $w_0 = 0.5$, $w_1 = -1$, $w_2 = -1$.

O plano de separação deste neurónio é:



Neurónio B $= x_1 \cdot x_2$ (Porta AND)

Deve dar 1 apenas para (1, 1).

- $z_B = w_{0,B} + w_{1,B} \cdot x_1 + w_{2,B} \cdot x_2$
- **Pesos (das notas):** $w_0 = -1.5$, $w_1 = 1$, $w_2 = 1$
- **Verificação:**
  - (0,0): $z = -1.5 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = -1.5 < 0 \rightarrow 0$ (Correto)
  - (0,1): $z = -1.5 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = -0.5 < 0 \rightarrow 0$ (Correto)
  - (1,0): $z = -1.5 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -0.5 < 0 \rightarrow 0$ (Correto)
  - (1,1): $z = -1.5 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0.5 \geq 0 \rightarrow 1$ (Correto)

Neurónio C $= A + B$ (Porta OR)

Recebe as saídas a (de A) e b (de B). Deve dar 1 se $a = 1$ ou $b = 1$.

- $z_C = w_{0,C} + w_{A,C} \cdot a + w_{B,C} \cdot b$
- **Pesos (das notas):** $w_0 = -0.5$, $w_A = 1$, $w_B = 1$
- **Verificação:**
  - (a=0, b=0): $z = -0.5 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = -0.5 < 0 \rightarrow 0$ (Correto)
  - (a=1, b=0): $z = -0.5 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0.5 \geq 0 \rightarrow 1$ (Correto)
  - (a=0, b=1): $z = -0.5 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0.5 \geq 0 \rightarrow 1$ (Correto)

Verificação Final da Rede Completa

Testamos a rede inteira, passo a passo, com todas as entradas originais x_1, x_2.

Entrada		Neurónio A (NOR)		Neurónio B (AND)		Neurónio C (OR)		Saída
x_1	x_2	z_A	Saída a	z_B	Saída b	z_C	Saída y	Esperada
0	0	0.5	**1**	-1.5	**0**	1+0-0.5 = 0.5	**1**	**1**
0	1	-0.5	**0**	-0.5	**0**	0+0-0.5 = -0.5	**0**	**0**
1	0	-0.5	**0**	-0.5	**0**	0+0-0.5 = -0.5	**0**	**0**
1	1	-1.5	**0**	0.5	**1**	0+1-0.5 = 0.5	**1**	**1**

A rede (MLP) funciona perfeitamente para a função NOT XOR.