圏論から見る準同型定理

kang(X, twitter)

2024/12/21

目次

注意

ここでは準同型定理といったら群論における次の定理またはその類似を指す.

任意の群準同型 $f : G \to H$ に対し群の同型 $G/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(f)$ がある.

カジュアルな書き方をしてます. ご容赦を.

圏の定義を知る B3, B4 がメインターゲット. (別で 1 度使った資料を少し手直ししてます.)

本稿は圏論 AdventCalender2024 の 21 日目の記事です. T. Leinster "Basic Category Theory"[1] と J. Adámek et al. "Algebraic Theories"[2] を参考にしています.

導入・要約

圏論の使い道の 1 つを見てみよう.

準同型定理も圏論も知らない人向け

線形代数に出てくるベクトル空間のように, 集合に演算を入れたものは様々な種類がこれから現れる. それらのいずれも共通して現れる" 準同型定理"は圏論というものを用いると, どうして共通に現れるのかわかる.

準同型定理は知っているが圏論を知らない人向け

群・加群・環に現れる準同型定理は, 証明を思い出すと群論から来ているように見え, 群論では (なんか勝手に)well-defined になっている (と感じる). しかし, 新たな視点である圏論を通してみると, 各種構造がしかるべき性質を満たしていることから, 準同型定理が来ている (とも思える).

準同型定理も圏論も知っている人向け

準同型定理を圏論的な設定のもと, 圏論的に証明ができる. 具体的には圏が引き戻しと余等化子を持ち, 全射に関する選択公理を満たすという仮定があれば, その圏の任意の射は正則エピとモノに分解できる。

1　各代数構造で現れる準同型定理

そもそも準同型定理とは何か？その証明を思い出しながら, いろいろな場合を見ていこう.

1.1　ベクトル空間と線形写像

ベクトル空間と線形写像で準同型定理を見てみよう.

体 K を 1 つ固定してそのベクトル空間を考える. $f : V \to W$ をベクトル空間の間の線形写像とする.(有限次元とは限らない.)

命題 1. $\mathrm{Im}(f) = \{w \in W |$ ある $v \in V$ で $w = f(v)\}$ は W の部分ベクトル空間である.

Proof. 略 □

定義 2. 新しいベクトル空間 $V/\mathrm{Ker}(f)$ を次で定める.

$$V/\mathrm{Ker}(f) = \{v + \mathrm{Ker}(f) | v \in V\}. \text{ ただし } v + \mathrm{Ker}(f) = \{v + k | k \in \mathrm{Ker}(f)\}$$

演算は次で定める.$c \in K$ とする.

$$c \cdot (v + \mathrm{Ker}(f)) = (c \cdot v) + \mathrm{Ker}(f).$$
$$(v + \mathrm{Ker}(f)) + (v' + \mathrm{Ker}(f)) = (v + v') + \mathrm{Ker}(f)$$

これは well-defined である. つまり次の 2 つが成り立つ.(演算は代表元 v, v' の取り方によらない)

$$v + \mathrm{Ker}(f) = w + \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow (c \cdot v) + \mathrm{Ker}(f) = (c \cdot w) + \mathrm{Ker}(f)$$
$$v + \mathrm{Ker}(f) = w + \mathrm{Ker}(f), v' + \mathrm{Ker}(f) = w' + \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow v + \mathrm{Ker}(f) + v' + \mathrm{Ker}(f) = w + \mathrm{Ker}(f) + w' + \mathrm{Ker}(f)$$

この演算でちゃんと K ベクトル空間になる. 実際に確認してみる: 略.

定理 3 (ベクトル空間と線形写像での準同型定理)**.** ベクトル空間として次の同型が成り立つ.

$$V/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(f)$$

このとき, 次の図式が可換で π は全射かつ ι は単射である. ただし ι は証明中に与えられる.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ V/\mathrm{Ker}(f) \arrow[ur, "\iota"'] & \end{tikzcd}$$

Proof. 写像 $\iota : V/\mathrm{Ker}(f) \to W, v+\mathrm{Ker}(f) \mapsto f(v)$ は well-defined である. つまり $v+\mathrm{Ker}(f) = v'+\mathrm{Ker}(f)$ なら $f(v) = f(v')$ である.(写像がきちんと定まる.) 実際に確認してみる: $v + \mathrm{Ker}(f) = v' + \mathrm{Ker}(f)$ は $v - v' \in \mathrm{Ker}(f)$ と同値で, これにより $0 = f(v - v') = f(v) - f(v')$ をえる.

次に ι は線形写像かつ単射である. 実際に確認してみる:$c \in K, v + \mathrm{Ker}(f), v' + \mathrm{Ker}(f) \in V/\mathrm{Ker}(f)$ とする. 線形であることについて

$$c \cdot \iota(v + \mathrm{Ker}(f)) = c \cdot f(v) = f(c \cdot v) = \iota(c \cdot v + \mathrm{Ker}(f))$$

$$\iota(v+\mathrm{Ker}(f)+v'+\mathrm{Ker}(f)) = \iota(v+v'+\mathrm{Ker}(f)) = f(v+v') = f(v)+f(v') = \iota(v+\mathrm{Ker}(f))+\iota(v'+\mathrm{Ker}(f))$$

であるためわかる. また単射であることについて

$$\iota(v+\mathrm{Ker}(f)) = \iota(v'+\mathrm{Ker}(f)) \Rightarrow f(v) = f(v') \Rightarrow f(v-v') = 0 \Rightarrow v-v' \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow v+\mathrm{Ker}(f) = v'+\mathrm{Ker}(f)$$

によりわかる.

したがって ι のコドメインを ι の像に制限すれば $\mathrm{Im}(f)$ はベクトル空間だったのでベクトル空間の同型を得る. □

この定理の証明で使ったのは

(1) $V/\mathrm{Ker}(f)$ がベクトル空間になること
(2) f が線形写像であること
(3) $\mathrm{Im}(f)$ がベクトル空間になること

の 3 つ. (1) と (3) は f が線形写像であればうまくいっていた. (2) は準同型定理の証明中では演算と f が可換であることに使っていた. これは (1) と (3) を証明するときでも同じ. これなら, 群や環など他の代数構造でも上手くいきそう！

1.2 群と群準同型写像

おそらくカリキュラム上, 群論で始めて準同型定理という名前に出会うと思われる.

命題 4. $f : G \to H$ が群準同型のとき, $G/\mathrm{Ker}(f), \mathrm{Im}(f)$ はどちらも群になる.

Proof. 略 □

定理 5 (群と群準同型写像の準同型定理)**.** $f : G \to H$ が群準同型のとき, 群として次の同型が成り立つ.

$$G/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(f)$$

このとき, 次の図式が可換で π は全射かつ ι は単射である. ただし ι は証明中に与えられる.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ G/\mathrm{Ker}(f) \arrow[ur, "\iota"'] & \end{tikzcd}$$

1.3 環と環準同型写像

人によっては群論より環論の方で先に準同型定理に出会うかも. ここでいう環は単位的環 (可換とは限らない) のことで, 準同型は単位元を保つ.

命題 6. $f : R \to S$ が環準同型のとき, $R/\mathrm{Ker}(f), \mathrm{Im}(f)$ はどちらも環になる.

Proof. 略 □

定理 7 (環と環準同型写像の準同型定理)**.** $f : R \to S$ が環準同型のとき, 環として次の同型が成り立つ.

$$R/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(f)$$

このとき, 次の図式が可換で π は全射かつ ι は単射である. ただし ι は証明中に与えられる.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & S \\ R/\mathrm{Ker}(f) \arrow[ur, "\iota"'] & \end{tikzcd}$$

1.4 集合と写像

実は集合と写像でも似たようなことは起こっている. $f : X \to Y$ を集合の間の写像とする.

定義 8. f に関する X 上の同値関係 K_f を次で定める.

$$x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$$

集合 X/K_f を上の同値関係で割ったものと定める. すなわち

$$X/K_f = \{f^{-1}(\{y\}) | y \in Y\} - \{\varphi\}.\ \text{ただし}\ f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X | f(x) = y\}$$

定理 9 (集合と写像での準同型定理)**.** 次の全単射が成り立つ.

$$X/K_f \cong \mathrm{Im}(f)$$

このとき, 次の図式が可換で π は全射かつ ι は単射である.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/K_f \arrow[ur, "\iota"'] & \end{tikzcd}$$

核を使って同値関係を定めていたが, 本当に必要なのは同値関係のみ！ (たしかに核を定めるには単位元が必要だが, 単位元がない代数構造もあり, そこでも準同型定理は成り立つ.) 準同型定理の成立は集合と写像の圏での様子から来ていそう.

2　圏論の言葉で見る準同型定理

いろいろな種類の”空間”と”準同型”で同じ話ができた．一般にそれぞれを”対象”と”射”とよぶことにして，それらを全部まとめたものを圏と呼ぶことにしよう．例えば 1 つの K ベクトル空間 V が 1 つの対象 V, 1 つの線形写像 f が 1 つの射 f, 全ての K ベクトル空間 V たちと全ての射 f たちをまとめて 1 つの圏 $\mathrm{Vect}_{\mathrm{K}}$ である．

さらにいくつか用語を用意すると, 圏論を使って以上の準同型定理を 1 つの定理にまとめることができる．

2.1　圏論の言葉に言い換える

準同型定理の証明でやったことを圏論の言葉に置き換える．証明を思い出すと射 $f : A \to B$ について

- 定義域 A からいい感じの同値関係 K_f をつくり
- $\pi : X \to X/K_f$ と $\iota : X/K_f \to Y$ をつくった
- π と ι はそれぞれ全射, 単射になっていた

これらは圏の言葉であるところの核対 (kernel pair), 余等化子 (coequalizer), 正則エピ (regular epi), モノ (mono) を使うと言い換えることができる．これらの用語を定義していこう．

定義 10. (f, f) の引き戻し (p, q) を f の核対 (kernel pair) とよぶ．すなわち, 次の条件をすべて満たす $p, q : K \to A$ である:

- $fp = fq$.
- p, q は $fg = fh$ を満たす $g, h : X \to A$ の中で終対象的である．つまり, 任意の $fg = fh$ に対し, ある $u : X \to K$ が下の図式を可換にするよう一意に存在する．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& K \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & A \arrow[d, "f"] \\
& A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

命題 11. 同値関係の集合は集合の圏の核対である．すなわち写像 $f : A \to B$ に対し

$$K = \{(a, a') \in A \times A | f(a) = f(a')\}$$

とし, $p, q : K \to A$ をその射影とおけば f の核対になっている．

Proof. 略 □

定義 12. $g, h : X \to Y$ の余等化子とは, 次の条件をすべて満たす $\pi : Y \to C$ である．

- $\pi g = \pi h$
- $fg = fh$ を満たす f の中で始対象的である．つまり, 任意の $fg = fh$ に対し, ある $u : C \to Z$ が下の

図式を可換にするよう一意に存在する.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & C \arrow[d, "u"] \\ & & Z \end{tikzcd}$$

命題 13. 同値関係の自然な全射は集合の圏の余等化子である. すなわち f の核対 $p, q : K \to X$ に対し, 自然な全射 $\pi : X \to X/K_f$ は p, q の余等化子である.

Proof. 略 □

定義 14. 圏が全射に関する選択公理を満たすとは, 任意のエピ射 $e : A \to B$ と対象 X に対し

$$e \cdot - : \mathrm{Hom}(X, A) \to \mathrm{Hom}(X, B), f \mapsto ef$$

が全射であることをいう. つまり下図において φ があれば, 図を可換にする φ' がある.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "e"] \\ X \arrow[ur, "\varphi'"] \arrow[r, "\varphi"'] & B \end{tikzcd}$$

定義 15. $e : X \to Y$ が正則エピであるとは, ある $g, h : W \to X$ で e が g, h の余等化子となること.

命題 16. 集合の圏の正則エピは全射と同値.

Proof. 略 □

定義 17. 射 $m : X \to Y$ がモノであるとは, 任意の $\varphi, \psi : W \to X$ に対し $m\varphi = m\psi \Rightarrow \varphi = \psi$ が成り立つこと.

命題 18. 集合の圏のモノは単射と同値.

Proof. 略 □

2.2 圏論の言葉で書いた準同型定理 (の 1 例)

定理 19. 圏 $\mathscr{A}$ は核対と余等化子を持ち, 全射に関する選択公理を満たすとする. 任意の射 $f : A \to B$ に対し, 次の図式を可換にする正則エピ e, モノ m が存在する.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\ C \arrow[ur, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

Proof. f の核対をとり p, q とおく. p, q の余等化子を $\pi : B \to C$ とおく.π は正則エピである. 余等化子の普

遍性から $\iota : C \to B$ で $f = \iota\pi$ を満たす射 ι をえる.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\
X \arrow[ur, shift left, "g'"] \arrow[ur, shift right, "h'"'] \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & C \arrow[ur, "\iota"'] &
\end{tikzcd}$$

さらにこの ι はモノである. 実際, $\iota g = \iota h$ なら選択公理を満たすことよりある g', h' で $g = \pi g', h = \pi h'$ である. よって $fg' = fh'$ により核対の普遍性からある u で $pu = g', qu = h'$. ゆえに $g = \pi g' = \pi pu = \pi qu = \pi h' = h$ である. したがって ι はモノである. $\square$

この証明と元の準同型定理の証明を見比べると, 確かに (だいたい) 圏の言葉に翻訳されていることがわかる.

- f が定める同値関係 K_f をとる $\longleftrightarrow$ f の核対をとる
- A/K_f をつくる $\longleftrightarrow$ p, q の余等化子をとる
- 線形写像 ι がとれる $\longleftrightarrow$ 普遍射 ι がとれる
- ι が単射 (かつ $\mathrm{Im}(\iota)$ がベクトル空間) $\longleftrightarrow$ ι がモノ

これによって 1 つの定理から各種準同型定理が系として出る! (実は集合の圏の性質が各種代数構造に移っている. これが圏論を使った議論で分かるのである. ΩΩΩ. 圏論的普遍代数へ続く... .)

3　参考文献

参考文献

[1] Tom Leinster. *Basic category theory*. Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, 2014.

[2] Jiří Adámek, Jiří Rosický, Enrico. M. Vitale, and Francis. W. Lawvere. *Algebraic theories : a categorical introduction to general algebra*. Cambridge tracts in mathematics. Cambridge University Press, 2011.