ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

PHẠM THỊ TUYẾT

TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ CHUYỂN MẠCH TUYẾN TÍNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - Năm 2011

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

PHẠM THỊ TUYẾT

TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ CHUYỂN MẠCH TUYẾN TÍNH

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số : **60 46 01**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
GS.TSKH. PHẠM KỲ ANH

Hà Nội - Năm 2011

Mục lục

Danh mục các ký hiệu

$\mathbf{R}$	Trường số thực.
$\mathbf{C}$	Trường số phức.
$\mathbf{Z}$	Tập số nguyên.
$\mathbf{R}^+$	Tập các số thực dương.
$\mathbf{R}_+$	Tập các số thực không âm.
$\mathbf{Z}^+$	Tập các số nguyên dương.
$\mathbf{Z}_+$	Tập các số nguyên không âm.
$\mathbf{R}^n$	Tập các vectơ thực n chiều.
$\mathbf{R}^{n\times m}$	Tập các ma trận thực $n \times m$ chiều.
I_n	Ma trận đơn vị $n \times n$ chiều.
x^T	Vectơ chuyển vị của vectơ x.
A^T	Ma trận chuyển vị của ma trận A.
$P > 0 (P \geq 0)$	P là ma trận Hermit và xác định (nửa xác định) dương.
$P < 0 (P \leq 0)$	P là ma trận Hermit và xác định (nửa xác định) âm.
$\lambda(A)$	Giá trị riêng của A.
$\rho(\mathbf{A})$	Bán kính phổ của tập ma trận $\mathbf{A}$.
$\|x\|$	Chuẩn của vectơ x.
$\|\|A\|\|$	Chuẩn của ma trận A được cảm sinh từ một chuẩn vectơ.
$\mu_{\|.\|}$	Độ đo ma trận được cảm sinh bởi chuẩn $\|.\|$.

$\min S$	Phần tử nhỏ nhất của tập S.
$\sup S$	Số nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng mỗi phần tử của S.
$\inf S$	Số lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng mỗi phần tử của S.
$S_1 \backslash S_2$	Tập $\{s \in S_1 : s \notin S_2\}$.
Ω°	Phần trong của tập Ω.
$\mathbf{B}_r$	Hình cầu tâm tại gốc tọa độ, bán kính r.
$\mathbf{H}_r$	Mặt cầu tâm tại gốc tọa độ, bán kính r.
$\lim\limits_{s \uparrow t} f(s)$	Giới hạn trái của hàm $f(.)$ tại t.
$\lim\limits_{s \downarrow t} f(s)$	Giới hạn phải của hàm $f(.)$ tại t.
C^k	Tập các hàm có đạo hàm cấp k liên tục.
$MF_{\mathit{\Gamma}}$	Hàm Minkovski của miền $\mathit{\Gamma}$.
$\mathcal{T}$	Tập thời gian.
$\mathcal{T}_s$	Tập $\{t \in \mathcal{T} : t \geq s\}$.
σ	Tín hiệu chuyển mạch của hệ chuyển mạch.
$\mathcal{S}_{[a,b)}$	Tập các quỹ đạo chuyển mạch hoàn toàn xác định trên $[a, b)$.
$\mathcal{S}_{[t_0,+\infty)}$	Tập các tín hiệu chuyển mạch hoàn toàn xác định trên $[t_0, +\infty)$.
$\phi(t; t_0, x_0, \sigma)$	Nghiệm của hệ chuyển mạch.
$\Phi(t_1, t_2, \sigma)$	Ma trận chuyển trạng thái của hệ chuyển mạch tuyến tính.

LỜI NÓI ĐẦU

Trong những thập niên gần đây, hệ chuyển mạch đã được nhiều nhà toán học tập trung nghiên cứu và đã thu được nhiều kết quả có ý nghĩa. Động lực thúc đẩy việc nghiên cứu hệ chuyển mạch xuất phát từ ý nghĩa của nó trong thực tế và kỹ thuật. Có ba bài toán cơ bản đối với tính ổn định của hệ chuyển mạch : (i) tìm điều kiện ổn định của hệ khi sự chuyển mạch là tùy ý; (ii) xác định một lớp hẹp nhưng quan trọng của các quy luật chuyển mạch ổn định hóa; (iii) xây dựng một luật chuyển mạch ổn định.

Đã có nhiều hướng nghiên cứu liên quan đến hệ chuyển mạch như phương pháp đại số Lie, phương pháp hàm Lyapunov bội, phương pháp đại số tuyến tính, bất đẳng thức ma trận tuyến tính . . . Trong khi rất nhiều vấn đề quan trọng về hệ chuyển mạch đã được giải quyết thì vẫn còn nhiều vấn đề vẫn đang còn là bài toán mở.

Bản luận văn tập trung trình bày những điều kiện để một hệ chuyển mạch là ổn định dưới sự chuyển mạch tùy ý và việc sử dụng lý thuyết Floquet để nghiên cứu tính ổn định của hệ chuyển mạch tuyến tính tuần hoàn. Nội dung bản luận văn gồm ba chương:

Chương 1: Giới thiệu một số khái niệm cơ bản về hệ chuyển mạch.

Chương 2: Trình bày các điều kiện để hệ chuyển mạch phi tuyến và tuyến tính là ổn định khi sự chuyển mạch là tùy ý.

Chương 3: Nghiên cứu các điều kiện để hệ chuyển mạch tuyến tính tuần hoàn là ổn định bằng việc áp dụng lý thuyết Floquet.

Trong quá trình làm luận văn, em đã nhận được sự giúp đỡ, chỉ bảo rất tận tình của thầy giáo, GS TSKH Phạm Kỳ Anh. Em xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới thầy, người đã dành nhiều thời gian chỉ bảo, hướng dẫn em viết bản luận văn này.

Trong quá trình học tập, em đã được các thầy cô trong khoa Toán -

Cơ - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội đã truyền dạy những kiến thức quý giá, em xin gửi lời cảm ơn chân thành tới thầy cô, những nhà giáo hết lòng vì khoa học và sự nghiệp giáo dục.

Mặc dù đã hết sức cố gắng nhưng do trình độ còn hạn chế và thời gian có hạn nên bản luận văn không thể tránh khỏi có thiếu sót. Em rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và bạn bè để bản luận văn được hoàn thiện hơn.

Hà Nội, tháng 11 năm 2011

Phạm Thị Tuyết

Chương 1

Giới thiệu về hệ chuyển mạch

1.1 Một ví dụ đơn giản về hệ chuyển mạch

Trong $\mathbf{R}^2$, cho hệ phương trình:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \begin{cases} A_1 x(t) & \text{nếu } x_2 \geq 0, \\ A_2 x(t) & \text{nếu } x_2 \leq 0, \end{cases}$$

trong đó $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ và

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.01 & -0.5 \\ 2 & -0.01 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.01 & -2 \\ 0.5 & -0.01 \end{bmatrix}.$$

Ma trận A_1 và A_2 đều có các giá trị riêng $-0.01 \pm i$ nên từng hệ con đều ổn định tiệm cận. Tuy nhiên, tính ổn định của hệ lai ghép không chỉ phụ thuộc vào các hệ con mà còn phụ thuộc nhiều vào chế độ chuyển mạch giữa chúng.
Nghiệm của hệ con thứ nhất và thứ hai lần lượt là:

$$\begin{cases} x_1 = e^{-0.01t}(A\cos t + B\sin t) \\ x_2 = 2e^{-0.01t}(A\sin t - B\cos t) \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x_1 = e^{-0.01t}(A\cos t + B\sin t) \\ x_2 = \frac{1}{2}e^{-0.01t}(A\sin t - B\cos t). \end{cases}$$

Khi đó quỹ đạo của chúng lần lượt là:

$$x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} = e^{-0.02t}(A^2 + B^2) \quad \text{và} \quad x_1^2 + 4x_2^2 = e^{-0.02t}(A^2 + B^2).$$

Bức tranh pha của mỗi hệ con là các ellip đồng dạng thu hẹp dần. Khi t đủ lớn thì các ellip này co về gốc tọa độ. Từ đó ta sẽ suy ra bức tranh pha của hệ chuyển mạch.

1.2 Sơ lược về sự ổn định của hệ không chuyển mạch

Xét hệ
$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t), \quad x(t) \in \mathbf{R}^n, A \in \mathbf{R}^{n\times n}.$$
Hệ trên được gọi là:
• Ổn định, nếu tất cả các nghiệm bị chặn.
• Ổn định tiệm cận, nếu tất cả các nghiệm hội tụ tới không khi $t \to \infty$.
• Không ổn định trong các trường hợp khác.
Nghiệm của hệ có dạng:

$$x(t) = e^{At}x_0, \quad x_0 \in \mathbf{R}^n,$$

$$e^{At} = V \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} V^{-1}.$$

Trong đó $\lambda_1, ..., \lambda_n$ là các giá trị riêng của A, các cột của ma trận V là các vectơ riêng tương ứng.

Định lý 1.2.1. (1) *Hệ ma trận A là ổn định tiệm cận khi và chỉ khi tất cả các giá trị riêng của A có phần thực âm.*
(2) *Hệ ma trận A là ổn định khi và chỉ khi tất cả các giá trị riêng của A có phần thực không dương.*

Tiếp theo, ta sẽ nhắc lại khái niệm hàm Lyapunov.
Cho $P = P^T > 0$ là một ma trận xác định dương sao cho:

$$A^TP + PA = -Q < 0.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x(t)^T Px(t)) &= \dot{x}(t)^T Px(t) + x(t)^T P\dot{x}(t) \\ &= (Ax(t))^T Px(t) + x(t)^T PAx(t) \\ &= x(t)^T (A^T P + PA)x(t) \\ &= -x(t)^T Qx(t) < 0.\end{aligned}$$

Đặt $V(x) = x^T Px$. Khi đó:

$$\begin{aligned}&V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0, \\ &V(0) = 0, \\ &\frac{d}{dt}V(x(t)) < 0.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

$V(x)$ được gọi là hàm Lyapunov của hệ $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$.

Định lý 1.2.2. (1) *Tất cả các giá trị riêng của A có phần thực âm khi và chỉ khi với mọi ma trận $Q = Q^T > 0$, tồn tại một ma trận $P = P^T > 0$ sao cho:*

$$A^T P + PA = -Q \quad \text{(phương trình Lyapunov)}.$$

(2) *Với hầu mọi A: Tất cả các giá trị riêng của A có phần thực không dương khi và chỉ khi tồn tại $P = P^T > 0$ sao cho:*

$$A^T P + P \leq 0.$$

Hàm Lyapunov liên đới $V(x) = x^T Px$.

Như vậy, tính ổn định (tiệm cận) của phương trình $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$ có thể được kiểm tra bằng cách giải một tập các phương trình tuyến tính.

Tiếp theo, chúng ta nhắc lại một số khái niệm cơ bản.

Một hàm giá trị thực $\alpha : \mathbf{R}_+ \mapsto \mathbf{R}_+$ được gọi là thuộc lớp $\mathcal{K}$ nếu nó liên tục, tăng chặt và $\alpha(0) = 0$. Nếu α không bị chặn thì ta nói nó thuộc lớp $\mathcal{K}_\infty$.

Một hàm $\beta : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \mapsto \mathbf{R}_+$ được gọi là thuộc lớp $\mathcal{KL}$ nếu $\beta(., t)$ thuộc lớp $\mathcal{K}$ với mỗi $t \geq 0$ cố định và $\lim\limits_{t\to+\infty} \beta(r, t) = 0$ với mỗi $r \geq 0$ cố định.

Một hàm liên tục $V(x) : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ với $V(0) = 0$ được gọi là:

• Xác định dương nếu $V(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$.

• Nửa xác định dương nếu $V(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$.

• Không bị chặn theo tia nếu tồn tại một hàm $\alpha(.)$ thuộc lớp $\mathcal{K}_\infty$ sao cho $V(x) \geq \alpha(|x|) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$.

1.3 Khái niệm về hệ chuyển mạch

Hệ chuyển mạch là một hệ bao gồm một số hữu hạn các hệ con và một quy tắc chuyển mạch giữa các hệ con đó. Hệ này được mô tả bởi phương trình:

$$x^+(t) = f_\sigma(x(t)), \tag{1.1}$$

trong đó $x \in \mathbf{R}^n$ là trạng thái liên tục; σ là trạng thái rời rạc, nhận giá trị trong tập chỉ số $M = \{1, 2, ...m\}$ và $f_k,\ k \in M$ là các trường vectơ; x^+ là kí hiệu cho toán tử đạo hàm trong trường hợp thời gian liên tục (tức là $x^+(t) = \frac{d}{dt}x(t)$) và toán tử dịch chuyển tiến trong trường hợp thời gian rời rạc (tức là $x^+(t) = x(t+1)$).

Như vậy, không gian trạng thái liên tục là không gian Euclid n chiều và không gian trạng thái rời rạc là tập chỉ số M có hữu hạn phần tử. Tập thời gian hoặc là tập các số thực trong trường hợp thời gian liên tục, hoặc là tập các số nguyên trong trường hợp thời gian rời rạc. Dựa vào tính chất liên tục hoặc rời rạc của tập thời gian mà ta gọi là hệ chuyển mạch liên tục hoặc hệ chuyển mạch rời rạc. Nếu tất cả các hệ con của (1.1) là tuyến tính thì ta gọi là hệ chuyển mạch tuyến tính. Khi có m hệ con thì ta gọi là hệ chuyển mạch *$m-$dạng*.

Với mỗi $k \in M$, ta gọi

$$x^+(t) = f_k(x(t)) \tag{1.2}$$

là một hệ con của hệ chuyển mạch.

Trạng thái rời rạc σ được gọi là tín hiệu chuyển mạch. Nếu $\sigma(t) = i$ thì ta nói rằng hệ con thứ i được kích hoạt tại thời điểm t. Một đặc tính của hệ chuyển mạch là tại một thời điểm có một và chỉ một hệ con được kích hoạt.

Kí hiệu $\mathcal{T}$ là tập thời gian. $\mathcal{T}$ có thể là tập số thực ($\mathcal{T} = \mathbf{R}$) hoặc tập số nguyên ($\mathcal{T} = \mathbf{Z}$). Cho một số thực s, kí hiệu $\mathcal{T}_s = \{t \in \mathcal{T} : t \geq s\}$. Cho hai số thực t_1 và t_2 với $t_1 < t_2$. Độ đo của $[t_1, t_2)$ là độ dài $t_2 - t_1$ trong trường hợp liên tục, và là lực lượng của $[t_1, t_2)$ trong trường hợp rời rạc.

Cho χ là một hàm liên tục từng khúc xác định trên khoảng $[t_1, t_2)$. Với mỗi $t \in (t_1, t_2)$ ta định nghĩa:

$$\chi(t+) = \lim_{s \downarrow t} \chi(s), \qquad \chi(t-) = \lim_{s \uparrow t} \chi(s)$$

cho trường hợp liên tục và

$$\chi(t+) = \chi(t+1), \qquad \chi(t-) = \chi(t-1)$$

cho trường hợp rời rạc

Khi các hệ con (1.2) được cho trước, dáng điệu của hệ chuyển mạch được quyết định bởi tín hiệu chuyển mạch. Ta sẽ phân biệt quỹ đạo chuyển mạch, tín hiệu chuyển mạch và quy luật chuyển mạch.

Một quỹ đạo chuyển mạch là một hàm liên tục phải, xác định trên một khoảng thời gian hữu hạn, nhận giá trị trong M.

Cho trước một khoảng thời gian $[t_0, t_f)$ với $-\infty < t_0 < t_f < +\infty$, một quỹ đạo chuyển mạch p xác định trên đoạn đó được kí hiệu là $p_{[t_0,t_f)}$. Với một quỹ đạo chuyển mạch $p_{[t_0,t_f)}$, thời điểm $t \in (t_0, t_f)$ được gọi là thời điểm bước nhảy nếu:

$$\sigma(t-) \neq \sigma(t).$$

Giả sử rằng các thời điểm bước nhảy trong (t_0, t_f) được sắp là $t_1 < t_2 < t_3 < ...$, thì dãy thứ tự $t_0, t_1, t_2 ...$ được gọi là dãy thời điểm chuyển mạch của σ trên $[t_0, t_f)$. Tương tự, dãy trạng thái rời rạc được sắp thứ tự $\sigma(t_0), \sigma(t_1), \sigma(t_2) ...$ được gọi là dãy chỉ số chuyển mạch của σ trên $[t_0, t_f)$. Dãy cặp thứ tự:

$$(t_0, i_0), (t_1, i_1), ..., (t_s, i_s)$$

với $i_k = \sigma(t_k)$, được gọi là dãy chuyển mạch của σ trên $[t_0, t_f)$.
Quỹ đạo chuyển mạch được gọi là hoàn toàn xác định nếu có một số hữu hạn thời điểm bước nhảy trên khoảng đó. Tập những quỹ đạo chuyển mạch hoàn toàn xác định trên $[t_0, t_f)$ được kí hiệu là $S_{[t_0, t_f)}$.

Một tín hiệu chuyển mạch là một hàm xác định trên một khoảng thời gian vô hạn, nhận giá trị trong M.

Giả sử rằng θ là một tín hiệu chuyển mạch xác định trên $[t_0, +\infty)$ và $[s_1, s_2)$ là đoạn con có độ dài hữu hạn của $[t_0, +\infty)$ thì quỹ đạo chuyển mạch $p_{[s_1, s_2)}$ được gọi là quỹ đạo con của θ nếu $p(t) = \theta(t)$ với mọi $t \in [s_1, s_2)$. Khái niệm dãy chỉ số và dãy thời điểm chuyển mạch được định nghĩa một cách tương tự như đối với quỹ đạo chuyển mạch.
Một tín hiệu chuyển mạch được gọi là hoàn toàn xác định nếu tất cả các quỹ đạo con của nó là hoàn toàn xác định. Kí hiệu $\theta_{[t_0, +\infty)}$ là tín hiệu chuyển mạch θ xác định trên $[t_0, +\infty)$. Tập những tín hiệu chuyển mạch hoàn toàn xác định trên $[t_0, +\infty)$ được kí hiệu bởi $\mathcal{S}_{[t_0, +\infty)}$ hoặc $\mathcal{S}$ khi $t_0 = 0$.

Cho trước một cặp hàm $(x(.), \theta(.))$ trên đoạn $[t_0, t_1)$, trong đó $x : [t_0, t_1) \mapsto \mathbf{R}^n$ là hàm tuyệt đối liên tục và $\theta : [t_0, t_1) \mapsto M$ là hàm hằng từng khúc. Cặp $(x(.), \theta(.))$ được gọi là nghiệm của hệ (1.1) trên $[t_0, t_1)$ nếu với hầu mọi $t \in [t_0, t_1)$ ta có:

$$x^+(t) = f_{\theta(t)}(x(t)).$$

Hệ chuyển mạch (1.1) được gọi là hoàn toàn xác định (một cách toàn cục) nếu với bất kỳ $\theta \in S_{[0, +\infty)}$ và $x_0 \in \mathbf{R}^n$, tồn tại duy nhất một hàm tuyệt đối liên tục x trên $[0,+\infty)$ với $x(0)=x_0$ sao cho cặp $(x(.),\theta(.))$ là một nghiệm của hệ (1.1) trên $[0,+\infty)$.

Khi mỗi hệ con thỏa mãn điều kiện Lipchitz toàn cục, tức là

$$\limsup_{x_1\neq x_2}\frac{|f_k(x_1)-f_k(x_2)|}{|x_1-x_2|}<+\infty, \quad k\in M,$$

thì hệ chuyển mạch là hoàn toàn xác định vì các bài toán Cauchy tương ứng giải được duy nhất. Trong bản luận văn này, ta luôn giả thiết rằng các hệ con thỏa mãn điều kiện Lipchitz, và do đó tính hoàn toàn xác định của hệ chuyển mạch luôn được đảm bảo.

Một quy luật chuyển mạch là một quy tắc chuyển mạch mà sinh ra một quỹ đạo chuyển mạch hoặc một tín hiệu chuyển mạch từ một tập các cấu hình ban đầu. Trong luận văn này, chúng ta chỉ xét những quy luật chuyển mạch có dạng:

$$\sigma(t)=\varphi(t,\sigma(t-),x(t)), \tag{1.3}$$

trong đó φ là hàm hằng từng khúc, nhận giá trị trong M.

Một hàm $x(t)$ được gọi là một quỹ đạo trạng thái (liên tục) của hệ (1.1) qua quy luật chuyển mạch (1.3) trên $[t_0,t_1)$ nếu cả phương trình (1.1) và (1.3) đúng với hầu mọi $t\in[t_0,t_1)$. Tín hiệu chuyển mạch tương ứng σ được gọi là sinh bởi quy luật chuyển mạch (1.3) dọc theo $x(.)$ với trạng thái ban đầu x_0 trên $[t_0,t_1)$.

Một quy luật chuyển mạch được gọi là hoàn toàn xác định nếu nó sinh ra một tín hiệu chuyển mạch hoàn toàn xác định với trạng thái ban đầu bất kì.

Với hệ chuyển mạch (1.1), một quy luật chuyển mạch hoàn toàn xác định có thể biểu diễn bởi tập $\{\theta^x : x\in\mathbf{R}^n\}$ trong đó θ^x là tín hiệu chuyển mạch được hoàn toàn xác định, sinh bởi quy luật chuyển mạch đó với trạng thái ban đầu x. Hệ chuyển mạch có nghiệm duy nhất với cấu hình ban đầu bất kì nếu cả hệ chuyển mạch và quy luật chuyển mạch hoàn toàn xác định. Để thuận tiện về mặt kí hiệu, quỹ đạo trạng thái liên tục sẽ được kí hiệu bởi $\phi(.;t_0,x_0,\sigma)$ hoặc $\phi(.;x_0,\sigma)$ khi $t_0=0$.

1.4 Tính ổn định và khả ổn định của hệ chuyển mạch

Cho $\Upsilon=\{\Lambda^x : x\in\mathbf{R}^n\}$ với Λ^x là tập con khác rỗng của $\mathcal{S}$-tập những tín hiệu chuyển mạch hoàn toàn xác định. Tập này được gọi là tập chấp nhận được những tín hiệu chuyển mạch, nó gán cho mỗi trạng thái ban đầu một tập tín hiệu chuyển mạch. Tập này cảm sinh một tập chấp nhận được những quỹ đạo trạng thái liên tục $\{\Gamma_x : x\in\mathbf{R}^n\}$, trong đó Γ_x là tập những quỹ đạo trạng thái với trạng thái ban đầu x và tín hiệu chuyển mạch trong Λ^x, tức là:

$$\Gamma_x=\{\phi(.;0,x,\theta) : \theta\in\Lambda^x\}.$$

Định nghĩa 1.4.1. Giả sử rằng $\Upsilon=\{\Lambda^x, x\in\mathbf{R}^n\}$ là tập chấp nhận được những tín hiệu chuyển mạch. Hệ chuyển mạch (1.1) được gọi là :
1) Ổn định theo Υ nếu tồn tại một hàm $\zeta\in\mathcal{K}$ và một số thực dương δ sao cho:

$$|\phi(t;0,x_0,\theta)|\le\zeta(|x_0|)\quad\forall t\in[0,+\infty),\ x_0\in\mathbf{B}_\delta,\ \theta\in\Lambda^{x_0}.$$

2) Ổn định tiệm cận theo Υ nếu tồn tại một hàm $\xi\in\mathcal{KL}$ sao cho:

$$|\phi(t;0,x_0,\theta)|\le\xi(|x_0|,t)\quad\forall t\in[0,+\infty),\ x_0\in\mathbf{R}^n,\ \theta\in\Lambda^{x_0}.$$

3) Ổn định mũ theo Υ nếu tồn tại các số thực dương α và β sao cho:

$$|\phi(t;0,x_0,\theta)|\le\beta e^{-\alpha t}|x_0|\quad\forall t\in[0,+\infty),\ x_0\in\mathbf{R}^n,\ \theta\in\Lambda^{x_0}.$$

Định nghĩa 1.4.2. Giả sử rằng $\Upsilon=\{\Lambda^x, x\in\mathbf{R}^n\}$ là tập chấp nhận được những tín hiệu chuyển mạch. Hệ chuyển mạch (1.1) được gọi là :

1) Khả ổn định theo Υ nếu tồn tại một hàm $\zeta \in \mathcal{K}$, một số thực dương δ và một quy luật chuyển mạch $\{\theta^x : x \in \mathbf{R}^n\}$ với $\theta^x \in \Lambda^x$ sao cho:

$$|\phi(t; 0, x_0, \theta^{x_0})| \leq \zeta(|x_0|) \quad \forall t \in [0, +\infty),\ x_0 \in \mathbf{B}_\delta.$$

2) Khả ổn định tiệm cận theo Υ nếu tồn tại một hàm $\xi \in \mathcal{KL}$ và một quy luật chuyển mạch $\{\theta^x : x \in \mathbf{R}^n\}$ với $\theta^x \in \Lambda^x$ sao cho:

$$|\phi(t; 0, x_0, \theta^{x_0})| \leq \xi(|x_0|, t) \quad \forall t \in [0, +\infty),\ x_0 \in \mathbf{R}^n.$$

3) Khả ổn định mũ theo Υ nếu tồn tại các số thực dương α và β và một quy luật chuyển mạch $\{\theta^x : x \in \mathbf{R}^n\}$ với $\theta^x \in \Lambda^x$ sao cho:

$$|\phi(t; 0, x_0, \theta^{x_0})| \leq \beta e^{-\alpha t}|x_0| \quad \forall t \in [0, +\infty),\ x_0 \in \mathbf{R}^n.$$

Khi các hệ con là cố định, tính chất ổn định được xác định bởi tập chấp nhận được các tín hiệu chuyển mạch. Nếu $\Upsilon_1 \subseteq \Upsilon_2$ thì tính ổn định theo Υ_2 kéo theo tính ổn định theo Υ_1 và tính khả ổn định theo Υ_1 kéo theo tính khả ổn định theo Υ_2.

1.4.1 Tính ổn định đảm bảo dưới sự chuyển mạch tùy ý

Khi sự chuyển mạch giữa các hệ con xuất hiện theo cách bất kì thì khi đó tính ổn định được gọi là *tính ổn định đảm bảo*. Tập chấp nhận được các tín hiệu chuyển mạch được cho bởi:

$$\Upsilon_{as} = \left\{\Lambda^x : x \in \mathbf{R}^n\right\}, \quad \Lambda^x = \mathcal{S},\ \forall x \in \mathbf{R}^n$$

là tập lớn nhất trong tất cả các tập chấp nhận được các tín hiệu chuyển mạch. Do đó, tính ổn định đảm bảo là khái niệm chặt nhất trong các khái niệm ổn định. Đặc biệt, khi hệ chuyển mạch ổn định đảm bảo sẽ kéo theo tính ổn định của các hệ con. Điều ngược lại không đúng và được chứng minh qua ví dụ sau.

Ví dụ 1.4.3. Cho hai hệ con tuyến tính phẳng:

$$\dot{x} = A_1 x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x$$

và

$$\dot{x} = A_2 x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 3a & -1 - a \end{bmatrix} x,$$

trong đó a là một tham số thực không âm. Rõ ràng, các giá trị riêng của cả hai hệ con đều có phần thực âm nên chúng đều ổn định mũ. Khi $a = 0$ thì hai hệ con trùng nhau và hệ chuyển mạch là ổn định mũ đảm bảo. Khi $a \approx 36.512$ thì hệ chuyển mạch là ổn định biên đảm bảo. Khi $a > 36.512$ hệ chuyển mạch không ổn định đảm bảo.

Hình 1.2 mô tả bức tranh pha (giá trị ban đầu tại $x_0 = [-1/3, 1]^T$) của hệ chuyển mạch dưới quy luật chuyển mạch làm mất tính ổn định, được chỉ ra trong hình bên trái phía trên.

1.4.2 Tính ổn định thời gian chững

Một tín hiệu chuyển mạch được gọi là với thời gian chững τ nếu $t_{i+1} - t_i \geq \tau$ với t_i và t_{i+1} là hai thời điểm bước nhảy liên tiếp bất kì. Cho $\mathcal{S}_\tau$ là tập tín hiệu chuyển mạch hoàn toàn xác định với thời gian chững τ. Rõ ràng rằng $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \supseteq \mathcal{S}_{\tau_1} \supseteq \mathcal{S}_{\tau_2}$ với $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$, và quan hệ tập con là chặt nếu $0 < \tau_1 < \tau_2$.

Tập tín hiệu chuyển mạch $\mathcal{S}$ cho phép sự điều khiển chuyển mạch nhanh một cách tùy ý, thậm chí không có một thời gian chững đều giữa các thời điểm chuyển mạch.

Ví dụ, cho tín hiệu chuyển mạch:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t \in [k, k + \frac{1}{k+2}),\ k = 0, 1, 2, ..., \\ 2 & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

là hoàn toàn xác định, nhưng độ dài của khoảng thời gian chuyển mạch $[k, k + \frac{1}{k+2})$ tiến dần tới 0 khi $k \to +\infty$. Rõ ràng những tín hiệu chuyển mạch này thuộc $\mathcal{S}_0$ nhưng nó không thuộc bất kì $\mathcal{S}_\tau$ nào với $\tau > 0$.

Cố định $\tau \geq 0$, cho một tập chấp nhận được các tín hiệu chuyển mạch:

$$\Upsilon_\tau = \{\Lambda^x : x \in \mathbf{R}^n\}, \quad \Lambda^x = \mathcal{S}_\tau,\ \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

Tính ổn định của hệ chuyển mạch theo Υ_τ được gọi là tính ổn định thời gian chững τ. Một điều kiện cần đối với tính ổn định thời gian chững τ là mỗi hệ con đều ổn định. Điều ngược lại đúng cho trường hợp ổn định mũ, tức là nếu các hệ con ổn định mũ thì hệ chuyển mạch ổn định mũ thời gian chững τ với τ đủ lớn. Thật vậy, từ tính ổn định mũ của các hệ con, ta suy ra sự tồn tại của một thời gian $T > 0$ sao cho:

$$|\phi_i(t; x_0)| \leq \frac{1}{2}|x_0| \quad \forall t \in \mathcal{T}_T,\ x_0 \in \mathbf{R}^n,$$

trong đó $\phi_i(.; x_0)$ kí hiệu cho quỹ đạo trạng thái của hệ con thứ i với $x(0) = x_0$. Do đó hệ chuyển mạch là ổn định mũ thời gian chững τ. Tuy nhiên, khẳng định này không đúng cho trường hợp ổn định tiệm cận và ổn định biên.

Ví dụ 1.4.4. Cho hệ chuyển mạch tuyến tính phẳng với hai hệ con ổn định biên:

$$\dot{x} = A_1 x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x$$

và

$$\dot{x} = A_2 x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Hệ chuyển mạch không ổn định nếu ta lấy hệ con thứ nhất khi trạng thái nằm trong góc phần tư thứ hai và thứ tư, lấy hệ con thứ hai trong các trường hợp khác. Hình 1.3 mô tả bức tranh pha của hệ chuyển mạch dưới quy luật chuyển mạch đó. Khi quỹ đạo của mỗi hệ con là tuần hoàn, bằng việc kết nạp một hoặc nhiều chu kì vào mỗi khoảng thời gian chuyển mạch thì trạng thái luôn phân kì. Hình bên phải, phía dưới của hình 1.3 mô tả bức tranh pha của hệ khi một chu kì được kết nạp vào mỗi khoảng thời gian chuyển mạch. Từ đó suy ra, với $\tau > 0$ bất kì, tập chấp nhận được Υ_τ chứa những tín hiệu chuyển mạch làm mất tính ổn định.

Theo phân tích ở trên, với tính ổn định thời gian chững, bài toán đặt ra là phải đi tìm τ nhỏ nhất sao cho hệ chuyển mạch là ổn định thời gian chững τ.

.

Chương 2

Tính ổn định của hệ chuyển mạch dưới sự chuyển mạch tùy ý

2.1 Một số khái niệm cơ bản

Trong chương này, chúng ta sử dụng thuật ngữ "tính ổn định đảm bảo" để mô tả tính ổn định của hệ chuyển mạch khi sự chuyển mạch xuất hiện một cách tùy ý.

Xét hệ chuyển mạch cho bởi:

$$x^{+}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)), \tag{2.1}$$

trong đó $x(t) \in \mathbf{R}^n$ là trạng thái liên tục, $\sigma(t) \in M = \{1, 2, ..., m\}$ là trạng thái rời rạc, $f_i : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$ là trường vectơ.

Trong chương này, chúng ta giả thiết rằng:

1) $f_i(0) = 0$ với mọi $i \in M$, điều kiện này suy ra gốc tọa độ là điểm cân bằng.

2) Các hàm $f_i(x)$ là liên tục Lipchitz toàn cục, tức là tồn tại một hằng số L sao cho:

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n, i \in M \; . \tag{2.2}$$

Điều kiện này đảm bảo tính hoàn toàn xác định của hệ chuyển mạch.

Chúng ta kí hiệu $\phi(t; t_0, x_0, \sigma)$ là quỹ đạo trạng thái liên tục của hệ (2.1) tại thời điểm t với điều kiện ban đầu $x(t_0) = x_0$ và quỹ đạo chuyển mạch σ; kí hiệu $\phi(t; x_0, \sigma)$ khi $t_0 = 0$. Sự tiến hóa của quỹ đạo trạng thái có thể biểu diễn trực tiếp qua các trường vectơ $f_i, i \in M$. Thật vậy, với điều kiện ban đầu $x(t_0) = x_0$ và thời điểm $t > t_0$ bất kì, trong trường hợp rời rạc ta có:

$$\phi(t; t_0, x_0, \sigma) = f_{\sigma(t-1)} \circ ... \circ f_{\sigma(t_0+1)} \circ f_{\sigma(t_0)}(x_0),$$

trong đó $\circ$ là kí hiệu hợp của các hàm số, tức là $f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x))$. Với hệ chuyển mạch liên tục, ta có:

$$\phi(t; t_0, x_0, \sigma) = \Phi^{f_{i_s}}_{t-t_s} \circ \Phi^{f_{i_{s-1}}}_{t_s - t_{s-1}} \circ ... \circ \Phi^{f_{i_1}}_{t_2-t_1} \circ \Phi^{f_{i_0}}_{t_1-t_0}(x_0),$$

trong đó $\Phi^f_t(x_0)$ là kí hiệu cho giá trị đường cong tích phân của f tại t qua $x(t_0) = x_0$, và $(t_0, i_0), ..., (t_s, i_s)$ là dãy chuyển mạch của σ trên $[t_0, t)$. Tuy nhiên, trong trường hợp tổng quát, ta không biết biểu thức giải tích của đường cong $\Phi^f_t(x_0)$.

Để trình bày tính ổn định của hệ chuyển mạch, chúng ta đưa thêm một số khái niệm.

Cho $d(x, y)$ là khoảng cách Euclid giữa hai vectơ x và y. Cho tập $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ và một vectơ $x \in \mathbf{R}^n$, khi đó:

$$|x|_\Omega = \inf_{y \in \Omega} d(x, y) = d(x, \Omega).$$

Đặc biệt $|x|_{\{0\}}$ kí hiệu bởi $|x|$.

Cho tập $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ và một số thực dương τ, $\mathbf{B}(\Omega, \tau)$ được gọi là τ-lân cận của Ω, tức là:

$$\mathbf{B}(\Omega, \tau) = \{x \in \mathbf{R}^n : |x|_\Omega \leq \tau\} .$$

Tương tự, $\mathbf{H}(\Omega, \tau)$ được gọi là τ-mặt cầu của Ω, tức là:

$$\mathbf{H}(\Omega, \tau) = \{x \in \mathbf{R}^n : |x|_\Omega = \tau\}.$$

Đặc biệt, hình cầu đóng $\mathbf{B}(\{0\}, \tau)$ được kí hiệu bởi $\mathbf{B}_\tau$ và mặt cầu $\mathbf{H}(\{0\}, \tau)$ kí hiệu bởi $\mathbf{H}_\tau$.

Định nghĩa 2.1.1. Điểm cân bằng gốc của hệ (2.1) được gọi là:
1) Hút toàn cục đảm bảo nếu:

$$\lim_{t \to +\infty} |\phi(t; x, \sigma)| = 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n,\ \sigma \in S.$$

2) Hút đều toàn cục đảm bảo nếu với $\delta > 0$ và $\epsilon > 0$ bất kì, tồn tại $T > 0$ sao cho:

$$|\phi(t; x, \sigma)| < \epsilon \quad \forall t \in \mathcal{T}_T,\ |x| \leq \delta,\ \sigma \in \mathcal{S}.$$

3) Ổn định đảm bảo nếu với $\epsilon > 0$ và $\sigma \in \mathcal{S}$ bất kì, tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

$$|\phi(t; x, \sigma)| \leq \epsilon \quad \forall t \in \mathcal{T}_0,\ |x| \leq \delta.$$

4) Ổn định đều đảm bảo nếu tồn tại $\delta > 0$ và $\gamma \in \mathcal{K}$ sao cho:

$$|\phi(t; x, \sigma)| \leq \gamma(|x|) \quad \forall t \in \mathcal{T}_0,\ |x| \leq \delta,\ \sigma \in \mathcal{S}.$$

5) Ổn định tiệm cận toàn cục đảm bảo nếu nó vừa ổn định đảm bảo, vừa hút toàn cục đảm bảo.
6) Ổn định tiệm cận đều toàn cục đảm bảo nếu nó vừa ổn định đều đảm bảo, vừa hút đều toàn cục đảm bảo.
7) Ổn định mũ toàn cục đảm bảo nếu với $\sigma \in \mathcal{S}$ bất kỳ, tồn tại $\alpha > 0$ và $\beta > 0$ sao cho:

$$|\phi(t; x, \sigma)| \leq \beta e^{-\alpha t}|x| \quad \forall t \in \mathcal{T}_0,\ x \in \mathbf{R}^n.$$

8) Ổn định mũ đều toàn cục đảm bảo nếu tồn tại $\alpha > 0$ và $\beta > 0$ sao cho:

$$|\phi(t; x, \sigma)| \leq \beta e^{-\alpha t}|x| \quad \forall t \in \mathcal{T}_0,\ x \in \mathbf{R}^n\ \sigma \in \mathcal{S}.$$

Chú ý: Ta nói rằng hệ ổn định (hút) đảm bảo nếu điểm cân bằng gốc là ổn định (hút) đảm bảo. Trong chương này, chúng ta sẽ đặt trọng tâm vào tính ổn định đảm bảo và tính hút toàn cục. Để ngắn gọn, ta sẽ lược bỏ các từ "đảm bảo" và "toàn cục".

2.2 Hệ chuyển mạch phi tuyến

Trong mục này, chúng ta nghiên cứu tính ổn định của hệ chuyển mạch phi tuyến

$$x^+(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)) \tag{2.3}$$

dưới sự chuyển mạch bất kì. Giả thiết rằng mỗi trường vectơ f_i là khả vi liên tục.

2.2.1 Hàm Lyapunov chung

Định nghĩa 2.2.1. Cho Ω là một lân cận của gốc. Một hàm $V : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ được gọi là hàm Lyapunov chung yếu của hệ (2.3) nếu:

(1) Nó là nửa liên tục dưới trên Ω .

(2) Tồn tại hàm α_1 và α_2 thuộc lớp $\mathcal{K}$ sao cho:

$$\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|) \quad \forall x \in \Omega.$$

(3) Đạo hàm Dini dưới của V dọc theo mỗi vectơ f_i không dương, tức là với $\forall x \in \Omega$ và $i \in M$, ta có:

$$\mathcal{D}^+V(x)|_{f_i} = \limsup_{\tau \to 0^+} \frac{V(\phi(\tau; 0, x, \hat{i})) - V(x)}{\tau} \leq 0$$

trong trường hợp liên tục, trong đó $\hat{i}$ kí hiệu cho tín hiệu chuyển mạch hằng $\sigma(t) = i \ \forall t$ và

$$\mathcal{D}^+V(x)|_{f_i} = V(f_i(x)) - V(x) \leq 0$$

trong trường hợp rời rạc.

Định nghĩa 2.2.2. Một hàm $V : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ được gọi là hàm Lyapunov chung (mạnh) của hệ chuyển mạch (2.3) nếu:
(1) Nó liên tục mọi nơi và khả vi liên tục có thể trừ điểm gốc.
(2) Tồn tại hàm α_1 và α_2 thuộc lớp $\mathcal{K}_\infty$ sao cho:

$$\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

(3) Tồn tại một hàm α_3 thuộc lớp $\mathcal{K}$, $\alpha_3 : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}_+$ sao cho:

$$\mathcal{D}^+V(x)|_{f_i} \leq -\alpha_3(|x|) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n,\ i \in M.$$

Chú ý: Trong trường hợp liên tục, ta có:

$$\mathcal{D}^+V(x)|_{f_i} = \limsup_{\tau \to 0^+} \frac{V(x + f_i(x)\tau) - V(x)}{\tau} \quad \forall x \in \mathbf{R}^n,\ i \in M,$$

do tính liên tục Lipchitz địa phương của V.

2.2.2 Định lý Lyapunov

Mệnh đề 2.2.3. *Hệ chuyển mạch* (2.3) *ổn định đều nếu nó có một hàm Lyapunov chung yếu, và ổn định tiệm cận đều nếu nó có một hàm Lyapunov chung.*

Chứng minh. Giả sử hệ (2.3) có một hàm Lyapunov chung yếu V. Khi đó với quỹ đạo trạng thái $x(t) = \phi(t; x_0, \sigma)$ bất kì trong Ω, chúng ta có:

$$V(x(t)) \leq V(x_0) \quad \forall t \geq 0.$$

Với $\epsilon > 0$ bất kì, chọn δ sao cho

$$\mathbf{B}_\delta \subset \Omega, \quad \{x : V(x) \leq \delta\} \subset \mathbf{B}_\epsilon.$$

Khi đó ta có $|x(t)| \leq \epsilon$ với $\forall t \geq 0$ nếu $x_0 \in \mathbf{B}_\delta$. Do đó hệ ổn định đều Tiếp theo, giả sử hệ (2.3) có một hàm Lyapunov chung V. Ta sẽ chỉ ra rằng hệ này ổn định tiệm cận đều. Thật vậy, ta sẽ chứng minh cho trường hợp hệ liên tục, trường hợp hệ rời rạc được chứng minh tương tự.

Cố định trạng thái ban đầu $x_0 \neq 0$ và một tín hiệu chuyển mạch σ, kí hiệu $x(t) = x(t; x_0, \sigma)$. Từ Định nghĩa (2.2.2) ta có:

$$\limsup_{\tau \to 0^+} \frac{V(x(t+\tau)) - V(x)}{\tau} \leq -\alpha_4(V(x(t))) \quad \forall t \in \mathcal{T}_0, \tag{2.4}$$

trong đó $\alpha_4 = \alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}$. Xây dựng hàm $\eta : \mathbf{R}^+ \mapsto \mathbf{R}$ cho bởi:

$$\eta(t) = \begin{cases} -\int_1^t \frac{1}{\min(\tau, \alpha_4(\tau))} d\tau, & t \in (0,1), \\ -\int_1^t \frac{1}{\alpha_4(\tau)} d\tau, & t \geq 1. \end{cases}$$

Rõ ràng rằng η là hàm tăng chặt, khả vi và $\lim\limits_{t \downarrow 0} \eta(t) = +\infty$

Từ (2.4) ta thấy:

$$\begin{aligned} \eta(V(x(t))) - \eta(V(x_0)) &= \int_0^t \dot{\eta}(V(x(\tau))) dV(x(s)) \\ &\geq \int_0^t 1 ds = t \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Cho hàm $\pi : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \mapsto \mathbf{R}_+$ xác định bởi:

$$\pi(s,t) = \begin{cases} 0, & s = 0, \\ \eta^{-1}(\eta(s) + t), & s > 0. \end{cases}$$

Ta thấy π thuộc lớp $\mathcal{KL}$. Vì η tăng chặt nên từ (2.5) ta có:

$$V(x(t)) \leq \pi(V(x_0), t) \quad \forall t \geq 0.$$

Lấy hàm β thuộc lớp $\mathcal{KL}$ xác định bởi công thức:

$$\beta(s,t) = \alpha_1^{-1}(\pi(\alpha_2(s), t)), \quad s, t \in \mathbf{R}_+ .$$

Có thể thấy rằng
$$|x(t)| \leq \beta(|x_0|, t) \quad \forall t \geq 0.$$
Bây giờ ta sẽ chứng minh hệ ổn định đều. Thật vậy, với $\epsilon > 0$ bất kì, lấy $\delta = \bar{\beta}^{-1}(\epsilon)$ với $\bar{\beta}(.) = \beta(., 0)$. Khi đó ta có:
$$|\phi(t; 0, x, \sigma)| \leq \epsilon \quad \forall x_0 \in \mathbf{B}_\delta, t \in \mathcal{T}_0, \sigma \in \mathcal{S}.$$
Từ đó suy ra hệ ổn định đều.
Mặt khác, với $\epsilon > 0$ và $\delta > 0$ bất kì, cho $T = \hat{\beta}^{-1}(\epsilon)$ với $\hat{\beta}(.) = \beta(\delta, .)$ suy ra:
$$|\phi(t; 0, x, \sigma)| \leq \epsilon \quad \forall x_0 \in \mathbf{B}_\delta, t \in \mathcal{T}_T, \sigma \in \mathcal{S}.$$
Vậy hệ là hút đều. Từ đó suy ra hệ ổn định tiệm cận đều. □

Ví dụ 2.2.4. Cho hệ chuyển mạch liên tục 2−dạng, phẳng:
$$\frac{d}{dt}x(t) = f_\sigma(x(t))$$
với
$$f_1(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 - x_2^k \end{pmatrix}, \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - x_2^k \end{pmatrix},$$
trong đó k là số tự nhiên lẻ bất kì. Ta có thể kiểm tra rằng hàm $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ là hàm Lyapunov chung yếu của hệ trên. Từ Mệnh đề (2.2.3) ta có hệ ổn định đều. Tuy nhiên, hệ này không có một hàm Lyapunov chung nào. Thật vậy, nếu hệ thừa nhận một hàm Lyapunov chung thì hệ tạo bởi tổ hợp lồi bất kì của các hệ con đó phải ổn định tiệm cận, tức là hệ
$$\dot{x}(t) = \omega f_1(x(t)) + (1 - \omega) f_2(x(t))$$
là ổn định tiệm cận với $\omega \in [0, 1]$ bất kì.
Cho $\omega = \frac{1}{2}$, ta có thể thấy rằng trạng thái bất kì trên trục x_1 là một điểm cân bằng, do đó hệ tổ hợp lồi không ổn định tiệm cận. Điều này

mâu thuẫn với giả thiết phản chứng. Vậy hệ ban đầu không có một hàm Lyapunov chung nào.
Theo Mệnh đề (2.2.3) thì sự tồn tại của hàm Lyapunov chung yếu/mạnh sẽ đảm bảo tính ổn định đều/tiệm cận đều của hệ chuyển mạch. Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là liệu rằng mệnh đề đảo lại có đúng không? Câu hỏi này sẽ được trả lời trong mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 2.2.5. *Hệ chuyển mạch ổn định đều bất kì sẽ có một hàm Lyapunov chung yếu và hệ chuyển mạch ổn định tiệm cận đều bất kì có một hàm Lyapunov chung.*

Chứng minh. Trước tiên ta sẽ chứng minh khẳng định thứ nhất.
Giả sử hệ ổn định đều. Lấy $\epsilon > 0$ cố định, và $\delta > 0$ được xác định như trong Định nghĩa (2.1.1). Ta xây dựng hàm $V : \mathbf{B}_\delta \mapsto \mathbf{R}_+$ xác định bởi :

$$V(x) = \sup_{t \in \mathcal{T}_0, \sigma \in \mathcal{S}} |\phi(t; 0, x, \sigma)|. \tag{2.6}$$

Rõ ràng rằng, hàm này hoàn toàn xác định và xác định dương trong $\mathbf{B}_\delta$. Cho $\Omega = \mathbf{B}_\delta^o$, với D^o là kí hiệu cho phần trong của tập D. Ta sẽ đi chứng minh V là hàm Lyapunov chung yếu của hệ.

Để chứng minh tính nửa liên tục dưới của hàm V, ta cố định một $x \in \mathbf{B}_\delta$. Với $\epsilon > 0$ bất kì, tồn tại một thời điểm $t_x \geq 0$ và $\sigma_x \in \mathcal{S}$ sao cho

$$|\phi(t_x; 0, x, \sigma_x)| \geq V(x) - \epsilon.$$

Cho $\eta = e^L$ trong trường hợp hệ liên tục và $\eta = L$ trong trường hợp hệ rời rạc. Từ giả thuyết Lipchitz (2.2) ta suy ra:

$$\begin{aligned} V(y) \geq & |\phi(t_x; 0, y, \sigma_x)| \geq |\phi(t_x; 0, x, \sigma_x)| - |\phi(t_x; 0, y, \sigma_x) - \phi(t_x; 0, x, \sigma_x)| \\ & \geq |\phi(t_x; 0, x, \sigma_x)| - \eta^{t_x}|x - y| \geq V(x) - 2\epsilon \quad \forall y \in \mathbf{B}(x, \frac{\epsilon}{\eta^{t_x}}) \cap \mathbf{B}_\delta. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra V là nửa liên tục dưới.

Tiếp theo, với bất kì $x \in \mathbf{B}_\delta$, $s \in \mathcal{T}_0$ và $i \in M$ ta có:

$$V(\phi(s; 0, x, \hat{i})) = \sup_{t \in \mathcal{T}_0, \sigma \in \mathcal{S}} |\phi(t; 0, \phi(s; 0, x, \hat{i}), \sigma)| \leq \sup_{t \in \mathcal{T}_0, \sigma \in \mathcal{S}} |\phi(t + s; 0, x, \sigma)|$$

$$\leq \sup_{t+s\in\mathcal{T}_0, \sigma\in\mathcal{S}} |\phi(t+s;0,x,\sigma)| = V(x).$$

Từ đó suy ra $D^+V(x)|_{f_i} \leq 0$ với $i \in M$ bất kì.

Cuối cùng, rõ ràng rằng $V(x) \geq |x|$ với mọi $x \in \mathbf{B}_\delta$. Mặt khác, do tính ổn định đều của hệ nên tồn tại hàm α_2 thuộc lớp $\mathcal{K}$ sao cho $|\phi(t;0,x,\sigma) \leq \alpha_2(|x|)|$ với mọi $x \in \mathbf{B}_\delta$, $t \in \mathcal{T}_0$ và $\sigma \in \mathcal{S}$. Do đó ta có $|x| \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|)$ với mọi $x \in \mathbf{B}_\delta$.
Từ đó suy ra hàm V trong (2.6) là hàm Lyapunov chung yếu của hệ chuyển mạch.

Chứng minh khẳng định thứ hai của mệnh đề dựa vào bổ đề dưới đây cho hệ không chuyển mạch.

Bổ đề 2.2.6. *Cho hệ bất định*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), d(t)), \quad x(t) \in \mathbf{R}^n,\ d(t) \in D \subset \mathbf{R}^p. \tag{2.7}$$

Giả sử rằng f là liên tục Lipchitz địa phương theo x và đều theo d, D là một tập compact và $d \in PC(\mathcal{T}_0, D)$ - tập các hàm liên tục từng khúc ánh xạ từ $\mathcal{T}_0$ vào D. Giả sử rằng hệ là đầy đủ tiến và tập con compact $\mathcal{X}$ của $\mathbf{R}^n$ là bất biến tiến theo nghĩa là $x(t) \in \mathcal{X}$ với mọi $x_0 \in \mathcal{X}$ và $d \in PC(\mathcal{T}_0, D)$. Nếu tồn tại một hàm β thuộc lớp $\mathcal{KL}$ sao cho:

$$|x(t)|_{\mathcal{X}} \leq \beta(|x_0|_{\mathcal{X}}, t), \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}^n\backslash\mathcal{X},\ t \geq 0,\ d \in PC(\mathcal{T}_0, D), \tag{2.8}$$

thì sẽ tồn tại một hàm Lyapunov V của hệ (2.7), tức là V liên tục khắp nơi, khả vi vô hạn trên $\mathbf{R}^n\backslash\mathcal{X}$ và tồn tại hai hàm $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ và α_3 thuộc lớp $\mathcal{K}$ sao cho:

$$\alpha_1(|x|_{\mathcal{X}}) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|_{\mathcal{X}})$$

và

$$L_f V(x) \leq -\alpha_3(|x|_{\mathcal{X}}) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n,\ d \in D.$$

Chứng minh bổ đề này khá phức tạp về mặt kĩ thuật và được trình bày chi tiết trong [4, 5].

Áp dụng bổ đề trên cho trường hợp $D = M$ và $\mathcal{X} = \{0\}$ ta suy ra khẳng định thứ hai của Mệnh đề (2.2.5). $\square$

Từ Mệnh đề (2.2.3) và (2.2.5) ta có định lý sau:

Định lý 2.2.7. *Hệ chuyển mạch* (2.3) *là ổn định đều khi và chỉ khi nó có một hàm Lyapunov chung yếu, và ổn định tiệm cận đều khi và chỉ khi nó có một hàm Lyapunov chung.*

Như vậy, định lý này đưa ra phép kiểm tra tính ổn định bằng việc tìm một hàm Lyapunov chung (yếu) thích hợp và mở rộng lý thuyết Lyapunov một cách tổng quát hơn cho hệ chuyển mạch. Mặt khác, như đã biết, trong lý thuyết Lyapunov không có phương pháp tổng quát nào để xây dựng hàm Lyapunov. Tuy nhiên, với một số lớp các hệ có cấu trúc hoặc tính chất đặc biệt thì việc xây dựng hàm Lyapunov sẽ dễ dàng hơn.

2.3 Hệ chuyển mạch tuyến tính

Trong mục này, ta sẽ đi sâu nghiên cứu một lớp hệ chuyển mạch đặc biệt, trong đó các hệ con là tuyến tính bất biến theo thời gian. Những hệ này được gọi là *hệ chuyển mạch tuyến tính* và được biểu diễn dưới dạng

$$x^+(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \qquad x(0) = x_0, \tag{2.9}$$

trong đó $A_k \in \mathbf{R}^{n\times n},\ k \in M$ là ma trận hằng.
Cho $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ với $A_i, i = 1, ...n$ là ma trận của hệ con thứ i. $\mathbf{A}$ được gọi là tập ma trận của hệ chuyển mạch tuyến tính. Để ngắn gọn, ta gọi hệ chuyển mạch tuyến tính là hệ $\mathbf{A}$.

Do tính tuyến tính của các hệ con, ta có thể biểu diễn:

$$\phi(t; t_0, x_0, \sigma) = \Phi(t; t_0, \sigma)x_0, \tag{2.10}$$

trong đó $\Phi(t; t_0, \sigma)$ được gọi là ma trận chyển trạng thái. Trong trường hợp rời rạc, ma trận chuyển trạng thái là

$$\Phi(t; t_0, \sigma) = A_{\sigma(t-1)} \cdots A_{\sigma(t_0)}.$$

Trong trường hợp liên tục thì

$$\Phi(t; t_0, \sigma) = e^{A_{i_s}(t-t_s)} e^{A_{i_{s-1}}(t_s - t_{s-1})} \cdots e^{A_{i_1}(t_2-t_1)} e^{A_{i_0}(t_1-t_0)},$$

trong đó $t_0, t_1, ..., t_s$ và $i_0, i_1, ..., i_s$ lần lượt là dãy thời gian và dãy chỉ số chuyển mạch trong khoảng $[t_0, t)$.

Từ các biểu thức trên ta suy ra

$$\phi(t; t_0, \lambda x_0, \sigma) = \lambda \phi(t; t_0, x_0, \sigma) \quad \forall t, t_0, x_0, \sigma, \ \forall \lambda \in \mathbf{R}. \tag{2.11}$$

Tính chất này được gọi là tính chất tuyến tính theo tia. Ngoài ra,

$$\phi(t; t_0, x_0, \sigma) = \phi(t - t_0; 0, x_0, \sigma') \quad \forall t, t_0, x_0, \sigma \ , \tag{2.12}$$

trong đó $\sigma'(t) = \sigma(t + t_0)$ với mọi t.

Từ hai tính chất trên của hệ chuyển mạch tuyến tính ta thấy tính hút địa phương tương đương với tính hút toàn cục. Do đó, không giảm tính tổng quát, ta luôn coi thời điểm ban đầu là $t_0 = 0$.

2.3.1 Hệ nới lỏng

Đối với hệ chuyển mạch tuyến tính, những tín hiệu chuyển mạch có thể tùy ý và tính ổn định đảm bảo yêu cầu rằng hệ đó phải ổn định với cơ cấu chuyển mạch là bất định. Khi những tín hiệu chuyển mạch là hằng số từng khúc, nhận giá trị trong một tập rời rạc hữu hạn, thì ta có thể làm trơn chúng theo nghĩa nào đó. Điều này dẫn đến hệ nới lỏng hoặc mở rộng như sau:

Cho

$$\mathcal{W} = \left\{ \omega(\omega_1, ..., \omega_m) \in \mathbf{R}^m : \omega_i \geq 0, i = 1, ..., m, \sum_{i=1}^{m} \omega_i \leq 1 \right\},$$

$$A(\omega) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i A_i, \quad \omega \in \mathcal{W} \tag{2.13}$$

và

$$\mathcal{A}(x) = \{A(\omega)x : \omega \in \mathcal{W}\}, \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{2.14}$$

Xét hệ bao hàm thức vi phân/sai phân (lồi)

$$x^+(t) \in \mathcal{A}(x(t)) \tag{2.15}$$

và hệ bất định tuyến tính đa hộp (polytopic linear uncertain system)

$$x^+(t) = A(\omega(t))x(t), \tag{2.16}$$

trong đó $\omega(.) \in \mathcal{W}$ là một hàm liên tục từng khúc. Thông thường, hệ (2.15) được gọi là bao hàm thức vi phân/sai phân (nới lỏng). Chú ý rằng, cả hệ (2.15) và (2.16) có thể được kết nối với hệ chuyển mạch tuyến tính theo kiểu $1 - 1$, và hệ chuyển mạch tuyến tính có thể được xem như là hệ cực biên của các hệ khác.

Nghiệm của (2.15) là một dòng vectơ $x : [0, +\infty) \mapsto \mathbf{R}^n$ với các phần tử liên tục tuyệt đối, thỏa mãn (2.15) hầu khắp nơi. Nghiệm của hệ (2.16) được hiểu theo nghĩa tương tự.

Kí hiệu Γ_s là tập nghiệm của hệ chuyển mạch tuyến tính, Γ_p là tập nghiệm của hệ đa hộp và Γ_d là tập nghiệm của hệ bao hàm thức vi phân. Có thể thấy rằng: $\Gamma_s \subset \Gamma_p \subset \Gamma_d$.

Tuy nhiên, với những giả thiết khá nhẹ, mỗi nghiệm của hệ bao hàn thức vi phân có thể được xấp xỉ bởi một quỹ đạo của hệ chuyển mạch tuyến tính theo nghĩa được xác định dưới đây (Xem [2]).

Bổ đề 2.3.1. *Cố định $\xi \in \mathbf{R}^n$ và cho $z : [0, +\infty) \mapsto \mathbf{R}^n$ là một nghiệm của*

$$\dot{z}(t) \in \mathcal{A}(z(t)), \qquad z(0) = \xi.$$

Cho $r : [0, +\infty) \mapsto \mathbf{R}$ là một hàm liên tục thỏa mãn $r(t) > 0,\ \forall t \geq 0$. Khi đó tồn tại η với $|\eta - \xi| \leq r(0)$ và một nghiệm $x : [0, +\infty) \mapsto \mathbf{R}^n$ của

$$\dot{x}(t) \in \{A_1 x(t), ..., A_m x(t)\}, \quad x(0) = \eta$$

sao cho:

$$|z(t) - x(t)| \leq r(t) \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Bổ đề này tạo nên mối liên hệ giữa tính ổn định của hệ chuyển mạch tuyến tính và tính ổn định của hệ nới lỏng của nó. Đối với hệ rời rạc, mối quan hệ trên vẫn đúng.

Hệ quả 2.3.2. *Các phát biểu sau là tương đương:*
(1) *Hệ chuyển mạch tuyến tính là hút.*
(2) *Hệ bất định tuyến tính đa hộp là hút.*
(3) *Hệ bao hàm thức vi phân tuyến tính là hút.*

Với hệ tuyến tính, chúng ta đã biết rằng, tính hút kéo theo tính ổn định mũ. Với hệ chuyển mạch, ta có thể chứng minh được rằng tính chất tương tự cũng đúng qua mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 2.3.3. *Các phát biểu sau là tương:*
(1) *Hệ chuyển mạch tuyến tính là hút.*
(2) *Hệ chuyển mạch tuyến tính là hút đều.*
(3) *Hệ chuyển mạch tuyến tính ổn định tiệm cận.*
(4) *Hệ chuyển mạch tuyến tính ổn định tiệm cận đều.*
(5) *Hệ chuyển mạch tuyến tính ổn định mũ.*
(6) *Hệ chuyển mạch tuyến tính ổn định mũ đều.*

Chứng minh. Trước hết, rõ ràng rằng tính ổn định mũ đều kéo theo bất kì tính ổn định khác trong mệnh đề và tính hút được suy ra bởi các tính ổn định khác. Do đó ta chỉ cần chứng minh tính hút kéo theo tính ổn định mũ đều.

Tiếp theo, với trạng thái x bất kì trên mặt cầu đơn vị, từ tính hút suy ra tồn tại một thời điểm t^x sao cho:

$$\sup_{\sigma\in\mathcal{S}} |\phi(t^x;0,x,\sigma)| < \frac{1}{2}. \tag{2.17}$$

Cố định $x \in \mathbf{H}_1$ bất kì, ta chứng minh rằng $\sup_{\sigma\in\mathcal{S}} |\phi(t^x;0,y,\sigma)| \leq \frac{1}{2}$ với y đủ gần x. Thật vậy, lấy $\eta = \max_{i\in M}|A_i|$. Từ (2.10) và (2.17) ta suy ra:

$$\begin{aligned}
|\phi(t^x;0,y,\sigma)| &= |\phi(t^x;0,x,\sigma) + \phi(t^x;0,y-x,\sigma)| \\
&\leq |\phi(t^x;0,x,\sigma)| + |\phi(t^x;0,y-x,\sigma)| \\
&\leq |\phi(t^x;0,x,\sigma)| + e^{\eta t^x}|y-x| \\
&\leq \frac{1}{2} \quad \forall\sigma\in\mathcal{S}, |y-x| \leq e^{-\eta t^x}(\frac{1}{2} - \sup_{\sigma\in\mathcal{S}}|\phi(t^x;0,x,\sigma)|).
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra với $x \in \mathbf{H}_1$ bất kì, tồn tại một lân cậnN_x của x sao cho:

$$\sup_{\sigma\in\mathcal{S}} |\phi(t^x;0,y,\sigma)| \leq \frac{1}{2} \quad \forall y \in N_x.$$

Tiếp theo, cho x biến thiên trên mặt cầu đơn vị, rõ ràng rằng:

$$\bigcup_{x\in\mathbf{H}_1} N_x \supseteq \mathbf{H}_1.$$

Do mặt cầu đơn vị là tập compact nên theo định lí phủ hữu hạn, tồn tại một số hữu hạn l và một tập trạng thái $x_1,...,x_l$ trên mặt cầu đơn vị sao cho:

$$\bigcup_{i=1}^{l} N_{x_i} \supseteq \mathbf{H}_1.$$

Theo đó, ta có thể phân hoạch mặt cầu đơn vị thành l miền $R_1, ..., R_l$ sao cho:
(a) $\bigcup_{i=1}^{l} R_i = \mathbf{H}_1$ và $R_i \cap R_j = \emptyset$ với mọi $i \neq j$.
(b) Với mỗi $i,\ 1 \leq i \leq l,\ x_i \in R_i$ và

$$\sup_{\sigma \in \mathcal{S}} |\phi(t^{x_i}; 0, y, \sigma)| \leq \frac{1}{2}, \quad \forall y \in R_i.$$

Định nghĩa nón:

$$\Omega_i = \left\{ x \in \mathbf{R}^n : \exists \lambda \neq 0 \text{ và } y \in R_i \text{ sao cho } x = \lambda y \right\}, \quad i = 1, ..., l.$$

Cho $\Omega_0 = \{0\}$. Có thể thấy rằng $\bigcup_{i=0}^{l} \Omega_i = \mathbf{R}^n$ và $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ với mọi $i \neq j$. Đặc biệt, Ω_0 tạo thành điểm cân bằng bất biến của hệ dưới sự chuyển mạch túy ý.
Tiếp theo, với bất kì $i = 1, ..., l$ và $x \in \Omega_i$, cho $t_x = t^{x_i}$. Rõ ràng rằng

$$\max_{x \neq 0} t_x = \max_{i=1}^{l} t^{x_i} := T_1 < +\infty. \tag{2.18}$$

Theo tính chất (a) và (b), với bất kì $x \in \Omega_i,\ i = 1, ..., l$ và với tín hiệu chuyển mạch σ bất kì, hệ (2.9) sẽ đưa x vào trong hình cầu $\mathbf{B}_{\frac{|x|}{2}}$ tại thời điểm t_x.
Cuối cùng, với trạng thái ban đầu x_0 và quỹ đạo chuyển mạch σ bất kì, ta xây dựng hồi quy một dãy thời gian và trạng thái:

$$\begin{aligned} s_0 &= 0, \\ z_0 &= x_0, \\ s_k &= s_{k-1} + t_{z_{k-1}}, \\ z_k &= \phi(s_k; 0, x_0, \sigma), \quad k = 1, 2, ... \end{aligned}$$

Có thể thấy rằng:

$$s_k \leq kT_1, \qquad |z_{k+1}| \leq \frac{|z_k|}{2}, \quad k = 0, 1, ...$$

Từ đó suy ra

$$|\phi(s_k; 0, x_0, \sigma)| \leq \frac{|x_0|}{2^k} \leq e^{-\gamma s_k}|x_0| \quad k = 0, 1, 2...,$$

trong đó $\gamma = \frac{\ln 2}{T_1}$.
Mặt khác, cho $\eta = 2\exp(T_1 \max\{||A_1||, ..., ||A_m||\})$, ta có:

$$|\phi(t; 0, x_0, \sigma)| \leq \eta e^{-\gamma t}|x_0| \quad \forall t \geq 0.$$

Bất đẳng thức trên đúng với x_0 và σ bất kì, các tham số γ và η là độc lập với x_0 và σ. Từ đó suy ra hệ là ổn định mũ đều. Mệnh đề được chứng minh. □

Từ Định lý (2.2.7), Hệ quả (2.3.2) và Mệnh đề (2.3.3) ta suy ra những kết quả sau:

Định lý 2.3.4. *Các phát biểu sau là tương đương cho hệ chuyển mạch tuyến tính, hệ đa hộp và hệ bao hàm thức vi phân/sai phân một cách tương ứng:*
(1) *Hệ là hút.*
(2) *Hệ ổn định tiệm cận.*
(3) *Hệ ổn định mũ.*
(4) *Hệ chuyển mạch có một hàm Lyapunov chung.*

Từ định lí trên cho phép ta định nghĩa tính ổn định theo nghĩa được làm mịn hơn cho hệ chuyển mạch tuyến tính $\mathbf{A}$. Để thực hiện điều này, trước tiên ta định nghĩa:

$$\varrho(\mathbf{A}) = \limsup_{t\to+\infty, \sigma\in\mathcal{S}, |x|=1} \frac{\ln|\phi(t; 0, x, \sigma)|}{t} \tag{2.19}$$

là số mũ Lyapunov lớn nhất, nó xác định tốc độ phân kì lớn nhất của quỹ đạo trạng thái và

$$R(\mathbf{A}) = \{\phi(t; 0, x, \sigma) : t \in \mathcal{T}_0,\ x \in \mathbf{H}_1,\ \sigma \in \mathcal{S}\} \tag{2.20}$$

là tập trạng thái đạt được trên mặt cầu đơn vị.

Định nghĩa 2.3.5. Hệ chuyển mạch tuyến tính $\mathbf{A}$ được gọi là:
(1) Ổn định (mũ) nếu $\varrho(\mathbf{A}) < 0$.
(2) Ổn định biên nếu $\varrho(\mathbf{A}) = 0$ và tập $R(\mathbf{A})$ bị chặn.
(3) Không ổn định biên nếu $\varrho(\mathbf{A}) = 0$ và tập $R(\mathbf{A})$ không bị chặn.
(4) Không ổn định (mũ) nếu $\varrho(\mathbf{A}) > 0$.

2.3.2 Hàm Lyapunov phổ dụng

Trong mục này, nếu không nói gì thêm, ta luôn giả thiết hệ chuyển mạch tuyến tính là ổn định. Theo Định lý (2.2.7) hệ này có một hàm Lyapunov chung, trơn. Do đó tập những hàm xác định dương, trơn là phổ dụng đối với hệ chuyển mạch tuyến tính. Ở đây, hàm Lyapunov phổ dụng được hiểu là tập những hàm sao cho mỗi hệ chuyển mạch tuyến tính ổn định có một hàm Lyapunov chung thuộc tập đó.

Định lý dưới đây đưa ra một vài tập các hàm Lyapunov chung phổ dụng cho hệ chuyển mạch tuyến tính.

Định lý 2.3.6. *Mỗi tập hàm dưới đây cung cấp các hàm Lyapunov phổ dụng cho hệ chuyển mạch tuyến tính ổn định:*
(1) *Các hàm lồi và thuần nhất bậc hai.*
(2) *Các đa thức.*
(3) *Các hàm tuyến tính từng khúc.*
(4) *Các hàm toàn phương từng khúc .*
(5) *Các chuẩn, tức là các hàm xác định dương $N : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}_+$ sao cho $N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}$ và $N(x+y) \leq N(x) + N(y) \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n$.*

Ý tưởng chủ đạo của việc chứng minh sự tồn tại các hàm Lyapunov phổ dụng được phác họa dưới đây.
Trước tiên, trong phương pháp hàm Lyapunov thông thường, với một hệ chuyển mạch tuyến tính ổn định, ta định nghĩa hàm $V : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}_+$

xác định bởi

$$V(x) = \sup_{\sigma \in \mathbf{S}} \int_0^{+\infty} |\phi(t; 0, x, \sigma)|^2 dt$$

trong trường hợp liên tục, và

$$V(x) = \sup_{\sigma \in \mathbf{S}} \sum_{t=0}^{+\infty} |\phi(t; 0, x, \sigma)|^2$$

trong trường hợp rời rạc.

Có thể kiểm tra trực tiếp rằng, hàm này liên tục, xác định dương, lồi chặt và thuần nhất bậc hai. Hơn nữa, với quỹ đạo trạng thái không tầm thường $y(.)$ bất kỳ của hệ chuyển mạch, chúng ta có:

$$\begin{aligned}
V(y(t_2)) &= \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} \int_0^{+\infty} |\phi(t; 0, y(t_2), \sigma)|^2 dt \\
&= \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} \int_0^{+\infty} |\phi(t + t_2 - t_1; 0, y(t_1), \sigma)|^2 dt \\
&= \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} \int_{t_2 - t_1}^{+\infty} |\phi(t; 0, y(t_1), \sigma)|^2 dt \\
&< \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} \int_0^{+\infty} |\phi(t; 0, y(t_1), \sigma)|^2 dt \\
&= V(y(t_1)) \quad \forall t_2 > t_1.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra hàm V là giảm chặt dọc theo quỹ đạo. Chú ý rằng, hàm này liên tục nhưng có thể không khả vi. Bước tiếp theo ta phải là trơn hàm này bằng việc dùng tích phân:

$$\tilde{V}(x) = \int_{SO(n)} f(R) V(Rx) dR, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

trong đó SO(n) là tập ma trận trực giao $n \times n$ với định thức dương, $f : SO(n) \mapsto \mathbf{R}_+$ là một hàm trơn với giá nằm trong một lân cận đủ nhỏ của ma trận đơn vị, và $\int_{SO(n)} f(R) dR = 1$.

Có thể thấy rằng, hàm $\tilde{V}$ là khả vi liên tục, có thể trừ gốc tọa độ. Một hàm trơn thuộc lớp $\mathcal{C}^k$ với k bất kì có thể nhận được bằng cách thực hiện lặp tương tự. Hàm mới bảo toàn tính chất lồi và thuần nhất bậc hai. Hơn nữa, hàm này là giảm chặt dọc theo quỹ đạo trạng thái không tầm thường bất kì của hệ chuyển mạch. Theo định nghĩa, hàm này là hàm Lyapunov chung của hệ và mục (1) của định lí được thiết lập. Sự tồn tại của lớp các hàm Lyapunov phổ dụng khác có thể được đảm bảo bởi thực tế là một tập mức lồi có thể được xấp xỉ tới bậc bất kì bởi tập mức của các đa thức, hàm tuyến tính từng khúc và hàm toàn phương từng khúc một cách tương ứng.

Theo khẳng định đầu tiên của định lí, tồn tại một hàm Lyapunov chung có dạng:

$$V(x) = x^T P(x) x \quad \text{với } P(\lambda x) = P(x) > 0 \quad \forall \lambda \neq 0, x \neq 0.$$

Chú ý rằng, hàm này có dạng toàn phương và ma trận xác định dương $P(x)$ là thuần nhất bậc không. Do đó nó được xác định duy nhất bởi ảnh của nó trên mặt cầu đơn vị. Một trường hợp đặc biệt là $P(x)$ độc lập với trạng thái, mà tương ứng với một hàm Lyapunov toàn phương. Trong trường hợp này, việc nghiên cứu một hàm Lyapunov thích hợp có thể được quy về giải bất đẳng thức ma trận tuyến tính

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Một hàm tuyến tính từng khúc có dạng:

$$V(x) = \max \left\{ l_i^T x : i = 1, ..., s \right\},$$

trong đó, l_i là vectơ cột trong $\mathbf{R}^n$. Nó là lồi và thuần nhất dương bậc một. Tập mức của nó:

$$\mathit{\Gamma} = \left\{ x : l_i^T x \leq 1, \quad i = 1, ..., s \right\}$$

là một tập lồi, compact và chứa gốc tọa độ như một diểm trong. Ta gọi một tập như vậy là $C-$ tập. Tập mức $\mathit{\Gamma}$ cũng là một khối đa diện và nó cảm sinh hàm dạng cỡ, còn gọi là hàm Minkovski của Γ, được xác định như sau:

$$MF_{\Gamma}(x) = \inf \{\mu \in \mathbf{R}_{+} : x \in \mu\Gamma\},$$

trong đó $\mu\Gamma = \{\mu y : y \in \Gamma\}$.

Từ định nghĩa suy ra, hàm MF_{Γ} chính là hàm V, nghĩa là $MF_{\Gamma}(x) = V(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$. Hàm Minkovski là một chuẩn khi và chỉ khi tập mức là $0-$đối xứng, tức là nếu $x \in \Gamma$ thì $-x \in \Gamma$. Tính phổ dụng của hàm tuyến tính từng khúc suy ra rằng hệ chuyển mạch tuyến tính bất kì có một $\mathcal{C}-$ tập đa diện như là tập mức hút của nó, tức là, $D^{+}V(x) \leq -\beta$ với x bất kì nằm trên biên của tập mức, trong đó β là một số thực dương nào đó. Từ đó suy ra, việc kiểm tra tính ổn định quy về việc nghiên cứu một $\mathcal{C}-$ tập đa diện hút.

Một trường hợp đặc biệt và khá thú vị, đó là hàm Lyapunov chung là một chuẩn. Trong trường hợp này ta có thể thấy rằng chuẩn là co dạng mũ dọc theo quỹ đạo trạng thái không tầm thường bất kì của hệ chuyển mạch.

Một hàm toàn phương từng khúc có dạng:

$$V_{\max}(x) = \max \left\{x^T P_i x : i = 1, ..., s\right\},$$

trong đó P_i là ma trận xác định dương, đối xứng. Rõ ràng rằng hàm này là xác định dương thuần nhất bậc hai. Một tập mức của $V_{\max}$ là giao của một số các hình ellipsoid và là lồi chặt. Từ đó suy ra hàm đó cũng lồi chặt, do đó có thể được phân vào lớp đầu tiên của định lí này.

Từ Định lí (2.3.6), ta có bổ đề dưới đây thiết lập mối quan hệ giữa một hệ liên tục ổn định và hệ xấp xỉ Euler rời rạc của nó.

Bổ đề 2.3.7. *Giả sử hệ chuyển mạch tuyến tính liên tục là ổn định. Khi đó hệ xấp xỉ Euler được xác định bởi :*

$$x(t+1) = (I_n + \tau A_{\sigma})x(t) \tag{2.21}$$

cũng ổn định với τ đủ nhỏ.

Chứng minh. Bổ đề này được chứng minh dựa trên cơ sở là mỗi hệ chuyển mạch tuyến tính ổn định có một hàm Lyapunov đa diện chung V. Với tập mức $\mathit{\Gamma} = \{x : V(x) \le 1\}$, lấy $\beta = \min_{x\in\partial\mathit{\Gamma}} \alpha_3(|x|)$, với α_3 thuộc lớp $\mathcal{K}$ và được xác định như trong Định nghĩa (2.2.2), $\partial\mathit{\Gamma}$ là kí hiệu biên của tập $\mathit{\Gamma}$. Từ đó ta suy ra $D^+V(x) \le -\beta$ với $x \in \partial\mathit{\Gamma}$ bất kì. Điều này chỉ ra rằng tập $\mathit{\Gamma}$ là hút đối với hệ rời rạc (2.21) khi τ đủ nhỏ. Do đó, hệ rời rạc ổn định với τ đủ nhỏ. □

Mệnh đề sau nói về tính ổn định biên của hệ chuyển mạch tuyến tính.

Mệnh đề 2.3.8. *Một hệ chuyển mạch tuyến tính ổn định biên có một hàm Lyapunov chung yếu là một chuẩn.*

Chứng minh. Ta đi chứng minh rằng, hàm Lyapunov chung yếu V xác định trong (2.6) là một chuẩn. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} V(x) + V(y) &\ge \sup_{t\in\mathcal{T}_0,\sigma\in\mathcal{S}} \{|\phi(t;x,\sigma)| + |\phi(t;y,\sigma)|\} \\ &\ge \sup_{t\in\mathcal{T}_0,\sigma\in\mathcal{S}} \{|\phi(t;x,\sigma) + \phi(t;y,\sigma)|\} \\ &\ge V(x+y), \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n. \end{aligned}$$

Do V tuyến tính theo tia nên với $\forall\lambda \in [0,1], \forall x, y \in \mathbf{R}^n$ ta có:

$$V(\lambda x + (1-\lambda)y) \le V(\lambda x) + V((1-\lambda)y) = \lambda V(x) + (1-\lambda)V(y).$$

Vậy V lồi. Mặt khác, với $\epsilon > 0$ bất kì, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$|\phi(t;0,x,\sigma)| \le \epsilon \quad \forall t \in \mathcal{T}_0, \sigma \in \mathcal{S}, x \in \mathbf{B}_\delta.$$

Từ tính chất tuyến tính theo tia (2.11) suy ra $V(x) \le \frac{\epsilon}{\delta}|x|$ với mọi $x \in \mathbf{R}^n$.
Kết hợp với tính lồi của V ta suy ra:

$$|V(x) - V(y)| \le V(x-y) \le \frac{\epsilon}{\delta}|x-y| \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n.$$

Do đó V là liên tục Lipchitz toàn cục. Rõ ràng rằng V là $0-$đối xứng và thuần nhất dương bậc một. Vậy nó là một chuẩn. □

Một hệ chuyển mạch tuyến tính $\mathbf{A}$ được gọi là chính quy nếu $\varrho(\mathbf{A})$ là hữu hạn, trong đó $\varrho(\mathbf{A})$ là tốc độ phân kì lớn nhất được định nghĩa trong (2.19). Rõ ràng rằng hệ chuyển mạch tuyến tính liên tục bất kì là chính quy và một hệ rời rạc là chính quy nếu $\varrho(\mathbf{A}) \neq -\infty$. Với hệ chuyển mạch tuyến tính liên tục $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$, hệ chuyển mạch chuẩn hóa là hệ chuyển mạch $\bar{\mathbf{A}} = \{A_1 - \varrho(\mathbf{A})I_n, ..., A_m - \varrho(\mathbf{A})I_n\}$. Một cách tương tự, đối với hệ rời rạc chính quy $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$, hệ chuẩn hóa của nó là hệ chuyển mạch $\bar{\mathbf{A}} = \left\{\frac{A_1}{e^{\varrho(\mathbf{A})}}, ..., \frac{A_m}{e^{\varrho(\mathbf{A})}}\right\}$. Một hệ chuẩn hóa bất kì hoặc là ổn định biên, hoặc là không ổn định biên.

2.3.3 Tiêu chuẩn đại số

Trong thực tế, đã có rất nhiều nỗ lực của các nhà toán học để tìm ra tiêu chuẩn đại số cho tính ổn định của hệ chuyển mạch. Trong mục này, chúng ta sẽ trình bày một số điều kiện đại số cho tính ổn định của hệ chuyển mạch tuyến tính.

Giả sử rằng, $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ là một tập hữu hạn các ma trận trong $\mathbf{R}^{n\times n}$. Với $k \in \mathbf{Z}^+$, kí hiệu $\mathit{\Pi}_k(\mathbf{A})$ là tập các tích có độ dài k của $\mathbf{A}$, tức là

$$\mathit{\Pi}_k(\mathbf{A}) = \{A_{i_1}...A_{i_k} : i_1, ..., i_k \in M\}$$

và

$$\mathit{\Pi}(\mathbf{A}) = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}^+} \mathit{\Pi}_k(\mathbf{A})$$

là tập tất cả các tích mà các thừa số là các phần tử của $\mathbf{A}$.

Cho $||.||$ là một chuẩn ma trận được cảm sinh từ chuẩn vectơ bất kì, và $\rho(.)$ là bán kính phổ của ma trận. Định nghĩa

$$\hat{\rho}_k(\mathbf{A}) = \max\{||P|| : P \in \mathit{\Pi}_k(\mathbf{A})\}$$

là chuẩn lớn nhất của tất cả các tích k ma trận của tập $\mathbf{A}$. Đặc biệt, kí hiệu cho $\hat{\rho}_1(\mathbf{A})$ bởi $||\mathbf{A}||$. Bán kính phổ chung của $\mathbf{A}$ được xác định bởi:

$$\hat{\rho}(\mathbf{A}) = \limsup_{k\to+\infty} \hat{\rho}_k(\mathbf{A})^{\frac{1}{k}}$$

là chuẩn tiệm cận lớn nhất của tích các ma trận. Rõ ràng $\hat{\rho}(\mathbf{A})$ không phụ thuộc vào việc chọn chuẩn do tính tương đương giữa các chuẩn. Tương tự, ta định nghĩa đại lượng:

$$\bar{\rho}_k(\mathbf{A}) = \max\{\rho(P) : P \in \Pi_k(\mathbf{A})\}$$

là bán kính phổ lớn nhất của tất cả các tích k ma trận của $\mathbf{A}$. Hơn nữa, ta định nghĩa bán kính phổ tổng quát của $\mathbf{A}$ như sau:

$$\bar{\rho}(\mathbf{A}) = \limsup_{k\to+\infty} \bar{\rho}_k(\mathbf{A})^{\frac{1}{k}}$$

là bán kính phổ tiệm cận lớn nhất của tích các ma trận.

Nhắc lại rằng, với một ma trận A ta có:

$$\lim_{k\to+\infty} ||A^k||^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to+\infty} \rho(A^k)^{\frac{1}{k}} = \rho(A).$$

Bây giờ chúng ta sẽ biểu diễn một vài tính chất của bán kính phổ chung và bán kính phổ tổng quát.

Cho Υ là tập các chuẩn vectơ trong $\mathbf{R}^n$. Với một tập các ma trận $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ và một chuẩn $|.| \in \Upsilon$, ta định nghĩa chuẩn (được cảm sinh) của $\mathbf{A}$ là

$$||\mathbf{A}|| = \max_{x\neq 0, i\in M} \frac{|A_i x|}{|x|}.$$

Chuẩn nhỏ nhất của $\mathbf{A}$ được định nghĩa bởi:

$$LN_{\mathbf{A}} = \inf_{|.|\in\Upsilon} ||\mathbf{A}||.$$

Một chuẩn $||.||^*$ là một chuẩn cực biên của $\mathbf{A}$ nếu:

$$||\mathbf{A}||^* = LN_{\mathbf{A}}.$$

Với một số thực μ, $\mu\mathbf{A}$ là kí hiệu cho tập ma trận $\{\mu A_1, ..., \mu A_m\}$.

Bổ đề 2.3.9. *Giả sử* $\mathbf{A}$ *là một tập các ma trận thực. Khi đó các mệnh đề dưới đây là đúng*
(1) $\bar{\rho}(\mathbf{A}) \leq \hat{\rho}(\mathbf{A}) \leq LN_{\mathbf{A}}$.
(2) $\bar{\rho}(\mu\mathbf{A}) = |\mu|\bar{\rho}(\mathbf{A})$ *và* $\hat{\rho}(\mu\mathbf{A}) = |\mu|\hat{\rho}(\mathbf{A}) \quad \forall \mu \in \mathbf{R}$.
(3) $\bar{\rho}(\mathbf{A}) < 1$ *suy ra tính ổn định của* $\mathbf{A}$.

Chứng minh. Trước tiên, ta có $\rho(A) \leq ||A||$ với chuẩn $||.||$ bất kì. Khi đó:

$$\bar{\rho}_k(\mathbf{A}) \leq \hat{\rho}_k(\mathbf{A}),$$

Điều này suy ra

$$\bar{\rho}(\mathbf{A}) \leq \hat{\rho}(\mathbf{A}).$$

Mặt khác ta lại có: $\hat{\rho}(\mathbf{A}) \leq ||\mathbf{A}||$ nên suy ra: $\hat{\rho}(\mathbf{A}) \leq LN_{\mathbf{A}}$.

Mệnh đề thứ hai được suy ra từ tính chất tuyến tính của bán kính phổ. Để chứng minh mệnh đề thứ ba, ta thấy rằng nếu $\bar{\rho}(\mathbf{A}) < 1$ thì

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t; 0, \sigma) = 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}.$$

Từ đó suy ra hệ chuyển mạch là hút và do đó nó ổn định. □

Định lý 2.3.10. *Với hệ chuyển mạch tuyến tính* $\mathbf{A}$ *bất kì, ta có:*

$$\bar{\rho}(\mathbf{A}) = \hat{\rho}(\mathbf{A}) = LN_{\mathbf{A}} = \exp(\varrho(\mathbf{A})).$$

Chứng minh. Từ Bổ đề (2.3.9), để chứng minh $\bar{\rho}(\mathbf{A}) = \hat{\rho}(\mathbf{A}) = LN_{\mathbf{A}}$, ta chỉ cần chứng minh $\bar{\rho}(\mathbf{A}) \geq LN_{\mathbf{A}}$. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng $\bar{\rho}(\mathbf{A}) < LN_{\mathbf{A}}$. Cố định một số thực μ sao cho $\bar{\rho}(\mathbf{A}) < \mu < LN_{\mathbf{A}}$. Đặt

$$B_i = \frac{A_i}{\mu}, \quad i = 1, 2, ..., m$$

và

$$\mathbf{B} = \{B_1, ..., B_m\}.$$

Từ Bổ đề (2.3.9) ta suy ra:

$$\bar{\rho}(\mathbf{B}) < 1 < LN_{\mathbf{B}}. \tag{2.22}$$

Áp dụng Bổ đề (2.3.9) ta có hệ chuyển mạch tuyến tính $\mathbf{B}$ là ổn định. Khi đó, từ Định lý (2.3.6) suy ra tồn tại một chuẩn V như là một hàm Lyapunov chung của hệ chuyển mạch. Ta luôn có:

$$LN_{\mathbf{B}} \leq ||\mathbf{B}|| \leq 1.$$

Điều này mâu thuẫn với (2.22). Vậy điều giả sử là sai. Do đó

$$\bar{\rho}(\mathbf{A}) = \hat{\rho}(\mathbf{A}) = LN_{\mathbf{A}}.$$

Mặt khác, theo định nghĩa số mũ Lyapunov lớn nhất như trong (2.19) ta luôn có:

$$\exp(\varrho(\mathbf{A})) \leq LN_{\mathbf{A}}.$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự như trên ta cũng có:

$$\exp(\varrho(\mathbf{A})) = LN_{\mathbf{A}}.$$

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

Hệ quả 2.3.11. *Hệ chuyển mạch tuyến tính rời rạc là ổn định khi và chỉ khi bán kính phổ nhỏ hơn* 1 *và không ổn định khi và chỉ khi bán kính phổ lớn hơn* 1.

Hệ quả này đưa ra một tiêu chuẩn mới cho tính ổn định của hệ chuyển mạch tuyến tính bằng việc sử dụng bán kính phổ và cũng chính là một mở rộng của tiêu chuẩn bán kính phổ cho hệ tuyến tính bất biến theo thời gian đã được biết đến.

Mệnh đề 2.3.12. *Hệ chuyển mạch tuyến tính rời rạc* $\mathbf{A}$ *là ổn định biên khi và chỉ khi nó có một chuẩn cực biên với* $||\mathbf{A}||^* = 1$.

Chứng minh. Giả sử hệ ổn định biên, ta cần chứng minh tồn tại một chuẩn cực biên $||\mathbf{A}||^* = 1$. Thật vậy, từ Mệnh đề (2.3.8) ta suy ra sự tồn tại của một chuẩn Lyapunov chung yếu V. Theo định nghĩa hàm Lyapunov chung yếu ta có:

$$V(A_i(x)) \leq V(x) \quad \forall i \in M, x \in \mathbf{R}^n.$$

Từ đó suy ra $||\mathbf{A}||_V \leq 1$.
Giả sử $LN_{\mathbf{A}} < 1$ thì hệ chuyển mạch ổn định tiệm cận, điều này mâu thuẫn với giả thuyết hệ ổn định biên. Vậy $LN_{\mathbf{A}} \geq 1$. Mặt khác, do $LN_{\mathbf{A}} \leq ||\mathbf{A}||_V$ nên ta có $LN_{\mathbf{A}} = ||\mathbf{A}||_V = 1$. Vậy$||.||_V$ là một chuẩn cực biên của hệ chuyển mạch.

Ngược lại, giả sử hệ chuyển mạch có một chuẩn cực biên $||.||$ với $||\mathbf{A}|| = LN_{\mathbf{A}} = 1$. Khi đó, hệ hoặc ổn định, hoặc ổn định biên.
Giả sử hệ ổn định, khi đó có một chuẩn Lyapunov chung V_0 sao cho:

$$V_0(A_i x) - V_0(x) \leq -\omega(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, i \in M,$$

trong đó ω là hàm xác định dương, liên tục. Lấy $\beta = \min_{V_0(x)=1} \omega(x)$. Khi đó:

$$V_0(A_i x) - V_0(x) \leq -\beta V_0(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, i \in M.$$

$\Rightarrow ||\mathbf{A}||_{V_0} \leq 1 - \beta$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy hệ ổn định biên. $\square$

Tiếp theo, ta xét trường hợp hệ liên tục.
Với chuẩn $|.|$ bất kì trong $\mathbf{R}^n$, độ đo ma trận được cảm sinh trên $\mathbf{R}^{n\times n}$ được định nghĩa như sau:

$$\mu_{|.|}(A) = \limsup_{\tau \to 0^+, |x|=1} \frac{|x + \tau Ax| - |x|}{\tau}. \tag{2.23}$$

Độ đo ma trận có các tính chất sau (xem [9]) (để ngắn gọn, ta bỏ qua chỉ số dưới $|.|$)
(1) *Tính hoàn toàn xác định.* Độ đo ma trận hoàn toàn xác định với chuẩn vectơ bất kì.

(2) *Tính thuần nhất dương.* $\mu(\alpha A) = \alpha\mu(A) \quad \forall \alpha \geq 0, A \in \mathbf{R}^{n\times n}$.
(3) *Tính lồi.* $\mu(\alpha A+(1-\alpha)B) \leq \alpha\mu(A)+(1-\alpha)\mu(B) \quad \forall \alpha \in [0,1]; A, B \in \mathbf{R}^{n\times n}$.
(4) *Ước lượng mũ.* $|e^{At}x| \leq e^{\mu(A)t}|x| \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbf{R}^n, A \in \mathbf{R}^{n\times n}$.

Định nghĩa độ đo của một ma trận được mở rộng cho một tập các ma trận $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ như sau:

Với một tập các ma trận $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ và một chuẩn $|.|$ trong $\mathbf{R}^n$, độ đo (được cảm sinh) của $\mathbf{A}$ theo $|.|$ được xác định như sau:

$$\mu_{|.|}(\mathbf{A}) = \max\left\{\mu_{|.|}(A_1), ..., \mu_{|.|}(A_m)\right\}.$$

Có thể kiểm tra rằng, độ đo này có tính lồi và tính thuần nhất dương như độ đo của một ma trận. Với tính chất ước lượng mũ ta có:

$$|\phi(t; 0, x, \sigma)| \leq e^{\mu_{|.|}(\mathbf{A})t}|x| \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbf{R}^n, \sigma \in \mathcal{S}. \tag{2.24}$$

Hơn nữa, ta định nghĩa giá trị độ đo nhỏ nhất:

$$\nu(\mathbf{A}) = \inf_{|.|\in\Upsilon} \mu_{|.|}(\mathbf{A}).$$

Độ đo tập ma trận μ bất kì với $\mu(\mathbf{A}) = \nu(\mathbf{A})$ được gọi là một độ đo cực biên của $\mathbf{A}$.
Ta biết rằng, hệ chuyển mạch tuyến tính $\mathbf{A}$ là ổn định (mũ) nếu tồn tại một chuẩn $|.|$ sao cho độ đo ma trận của nó âm. Từ đó suy ra, khi độ đo nhỏ nhất là âm thì hệ chuyển mạch là ổn định mũ. Tiếp theo chúng ta sẽ đi chứng minh điều ngược lại vẫn đúng.

Định lý 2.3.13. *Với hệ chuyển mạch tuyến tính liên tục* $\mathbf{A}$*, ta luôn có:*

$$\nu(\mathbf{A}) = \varrho(\mathbf{A}). \tag{2.25}$$

Hơn nữa, hệ có (ít nhất) một độ đo cực biên khi và chỉ khi hệ chuẩn hóa của nó ổn định biên.

Chứng minh. Trước tiên, ta có thể kiểm tra rằng:

$$\mu_{|.|}(\mathbf{A} + \lambda I_n) = \lambda + \mu_{|.|}(\mathbf{A}) \quad \forall |.| \in \Upsilon, \lambda \in \mathbf{R},$$

trong đó $\mathbf{A} + \lambda I_n$ là kí hiệu cho hệ chuyển mạch tuyến tính $\{A_1 + \lambda I_n, ..., A_m + \lambda I_n\}$. Từ đó ta có:

$$\nu(\mathbf{A} + \lambda I_n) = \lambda + \nu(\mathbf{A}) \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}.$$

Kết hợp với:

$$\varrho(\mathbf{A} + \lambda I_n) = \lambda + \varrho(\mathbf{A}) \quad \forall \lambda \in \mathbf{R},$$

suy ra (2.25) đúng trong trường hợp tổng quát nếu nó đúng cho trường hợp $\varrho(\mathbf{A}) = 0$, tức là hệ chuyển mạch hoặc là ổn định biên, hoặc là không ổn định biên.

Tiếp theo, giả sử rằng hệ hoặc ổn định, hoặc ổn định biên. Cố định một chuẩn vectơ $|.|$ trong $\mathbf{R}^n$ và định nghĩa hàm $V : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}_+$ xác định bởi:

$$V(x) = \sup_{t \in \mathbf{R}_+, \sigma \in \mathcal{S}} |\phi(t; 0, x, \sigma)|.$$

Ta thấy rằng hàm này được hoàn toàn xác định, lồi, xác định dương, $0-$ đối xứng và thuần nhất dương bậc một. Hơn nữa, tồn tại một số thực dương L sao cho:

$$|x| \leq V(x) \leq L|x| \quad \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

Kết hợp với tính chất tuyến tính theo tia (2.11) suy ra V là liên tục Lipchitz toàn cục. Khi đó V có dạng là một chuẩn vectơ trong $\mathbf{R}^n$.

Tiếp theo, với bất kì $x \in \mathbf{R}^n, s \in \mathbf{R}_+, i \in M$, ta có

$$\begin{aligned} V(\phi(s; 0, x, \hat{i})) &= \sup_{t \in \mathbf{R}_+, \sigma \in \mathcal{S}} |\phi(t; 0, \phi(s; 0, x, \hat{i}), \sigma)| \\ &\leq \sup_{t \in \mathbf{R}_+, \sigma \in \mathcal{S}} |\phi(t + s; 0, x, \sigma)| \\ &\leq \sup_{t+s \in \mathbf{R}_+, \sigma \in \mathcal{S}} |\phi(t + s; 0, x, \sigma)| \end{aligned}$$

$$= V(x),$$

trong đó $\hat{i}$ là kí hiệu cho tín hiệu chuyển mạch $\hat{i}(t) \equiv i$. Do V là liên tục Lipchitz nên ta có:

$$\begin{aligned}
\mu_V(A_i) &= \limsup_{\tau \to 0^+, x \neq 0} \frac{V(x + \tau A_i x) - V(x)}{\tau V(x)} \\
&= \limsup_{\tau \to 0^+, x \neq 0} \frac{V(\phi(\tau; 0, x, \hat{i})) - V(x)}{\tau V(x)} \\
&\leq 0 \quad \forall i \in M.
\end{aligned}$$

Khi đó chuẩn V cảm sinh một độ đo tập ma trận thỏa mãn

$$\mu_V(\mathbf{A}) \leq 0. \tag{2.26}$$

Từ đó suy ra $\nu(\mathbf{A}) \leq 0$.

Tiếp theo, ta xét trường hợp hệ chuyển mạch ổn định biên. Khi đó giá trị độ đo nhỏ nhất bằng không. Thật vậy, nếu giá trị độ đo nhỏ nhất âm thì từ hệ thức (2.24) suy ra hệ là ổn định mũ. Điều này dẫn đến mâu thuẫn. Do đó, độ đo tập ma trận trong (2.26) là một độ đo cận biên.

Cuối cùng, ta xét trường hợp hệ chuyển mạch không ổn định biên. Khi đó, giá trị độ đo nhỏ nhất là không âm. Giả sử rằng nó dương. Khi đó, tồn tại một số thực dương ϵ với $\epsilon < \nu(\mathbf{A})$ sao cho

$$\nu_{|.|}(\mathbf{A} - \epsilon I_n) > 0.$$

Suy ra hệ chuyển mạch $\mathbf{A} - \epsilon I_n$ hoặc không ổn định hoặc không ổn định biên. Điều này mâu thuẫn với $\varrho(\mathbf{A} - \epsilon I_n) = -\epsilon < 0$. Do đó $\nu(\mathbf{A}) = 0$. Mặt khác, khi $\nu(\mathbf{A}) = 0$ thì sự tồn tại của một độ đo cực biên kéo theo tính bị chặn của tập $R(\mathbf{A})$ và do đó hệ là ổn định hoặc ổn định biên. Suy ra hệ chuyển mạch không ổn định biên sẽ không có bất cứ một độ đo cực biên nào.

Tóm lại, tính ổn định biên sẽ kéo theo sự tồn tại của một độ đo cực biên giá trị không và tính không ổn định biên kéo theo giá trị độ đo nhỏ nhất bằng không nhưng không có bất cứ một độ đo cực biên nào. Vì phép chuẩn hóa không làm thay đổi sự tồn tại của độ đo cực biên nên từ đây suy ra mệnh đề thứ hai của định lí. □

Chú ý: Với một ma trận thực, tốc độ phân kì lớn nhất của nó chính là phần thực lớn nhất của các giá trị riêng và nó chính là giá trị độ đo nhỏ nhất (xem [10]). Định lý (2.3.13) chính là mở rộng cho trường hợp hệ chuyển mạch tuyến tính.

Từ Định lý (2.3.13) ta có thể mô tả một cách đầy đủ tính ổn định theo độ đo tập ma trận.

Hệ quả 2.3.14. *Với hệ chuyển mạch tuyến tính liên tục, ta có các phát biểu sau:*

(1) *Hệ ổn định khi và chỉ khi giá trị độ đo nhỏ nhất của nó âm.*

(2) *Hệ ổn định biên khi và chỉ khi giá trị độ đo nhỏ nhất của nó bằng không và nó có một độ đo cực biên.*

(3) *Hệ không ổn định biên khi và chỉ khi giá trị độ đo nhỏ nhất của nó bằng không và nó không có bất kì một độ đo cực biên nào.*

(4) *Hệ không ổn định khi và chỉ khi giá trị độ đo nhỏ nhất của nó dương.*

Chương 3

Tính ổn định của hệ chuyển mạch tuyến tính tuần hoàn

3.1 Lý thuyết Floquet

Trong mục này ta sẽ nhắc lại một cách ngắn gọn lý thuyết Floquet. Xét hệ tuyến tính biến thiên theo thời gian:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \geq t_0, \\ x(t_0) = x_0 \ , \end{cases} \tag{3.1}$$

trong đó $x(t) \in \mathbf{R}^n$, ma trận $A(t) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ liên tục từng khúc, bị chặn và tuần hoàn với chu kì T.
Cho $\Phi(t, t_0)$ là ma trận chuyển trạng thái của hệ (3.1). Khi đó ta có:
(1) $\Phi(t + T, t_0 + T) = \Phi(t, t_0)$.
(2) Tồn tại một ma trận không suy biến $P(t, t_0)$ thỏa mãn:

$$P(t+T,t_0) = P(t,t_0)$$

và tồn tại một ma trận hằng Q sao cho:

$$\Phi(t,t_0) = P(t,t_0)\exp[(Q(t-t_0)].$$

(3) Phép biến đổi Lyapunov

$$z(t) = P^{-1}(t,t_0)x(t)$$

biến đổi hệ (3.1) thành hệ tuyến tính bất biến theo thời gian

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Qz(t), \quad t \geq t_0, \\ z(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Như vậy, theo lý thuyết Floquet, một hệ tuyến tính tuần hoàn biến thiên theo thời gian có thể đưa về một hệ tuyến tính bất biến theo thời gian qua phép biến đổi Lyapunov.
Đặt:

$$R = \Phi(t_0+T,t_0).$$

Ma trận Q được xác định như sau:

$$Q = \frac{1}{T}\ln R. \tag{3.2}$$

Các giá trị riêng $\lambda_k,\ k = 1,...,n$ của ma trận Q được gọi là số mũ đặc trưng và các giá trị riêng $\mu_k,\ k = 1,...,n$ của ma trận R được gọi là nhân tử đặc trưng. Mối liên hệ giữa số mũ đặc trưng và nhân tử đặc trưng:

$$\mu_k = e^{\lambda_k T}, \quad k = 1,...,n.$$

Ta có kết quả sau: Hệ (3.1) ổn định mũ khi và chỉ khi Q là ma trận Hurwitz, tức là tất cả các giá trị riêng của Q đều có phần thực âm. Một cách tương đương, hệ (3.1) ổn định mũ khi và chỉ khi R là ma trận

Schur, tức là tất cả các giá trị riêng của R đều có mođun nhỏ hơn một.

Chú ý rằng, ma trận Q được xác định như ở trên không nhất thiết phải là ma trận thực. Vì $A(t)$ tuần hoàn với chu kì T nên nó cũng tuần hoàn với chu kì $2T$, do đó nếu Q xác định trong (3.2) là phức thì ta có thể xác định ma trận thực Q như sau:

$$Q = \frac{1}{2T}\ln(\Phi(t_0 + 2T, t_0)) = \frac{1}{2T}\ln R^2.$$

3.2 Một số kết quả ổn định của hệ chuyển mạch tuyến tính tuần hoàn

Trong mục này, ta xét hệ chuyển mạch tuyến tính tuần hoàn có dạng:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} A_1 x(t), & t_0 + lT \le t < t_1 + lT, \\ A_2 x(t), & t_1 + lT \le t < t_2 + lT, \\ \quad\vdots & \qquad\qquad\qquad\qquad l = 0, 1, 2, ..., t \ge t_0, \\ A_\sigma x(t), & t_{\sigma-1} + lT \le t < t_\sigma + lT, \end{cases} \tag{3.3}$$

$x(t_0) = x_0,$

với $t_\sigma = t_0 + T$, trong đó $x(t) \in \mathbf{R}^n$ và $A_1, A_2, ..., A_\sigma \in \mathbf{R}^{n\times n}$ là ma trận hằng. Đặt:

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \quad k = 1, ..., \sigma.$$

Có thể thấy rằng, mỗi hệ con $\dot{x}(t) = A_k x(t)$ lần lượt được kích hoạt trong khoảng thời gian Δt_k. Sau đây ta sẽ đưa ra một số kết quả về tính ổn định của hệ (3.3).

Định lý 3.2.1. *Hệ* (3.3) *ổn định mũ khi và chỉ khi ma trận*

$$R = \prod_{k=1}^{\sigma} \exp\left(A_k \Delta t_k\right) = \exp\left(A_\sigma \Delta t_\sigma\right) \exp\left(A_{\sigma-1}\Delta t_{\sigma-1}\right) \cdots \exp\left(A_1 \Delta t_1\right) \tag{3.4}$$

là ma trận Schur. Một cách tương đương, hệ (3.3) *ổn định mũ khi và chỉ khi*

$$Q = \frac{1}{T} \ln\Big[\prod_{k=1}^{\sigma} \exp\left(A_k \Delta t_k\right)\Big] \tag{3.5}$$

là ma trận Hurwitz .

Chứng minh. Với mỗi $k = 1, 2, ..., \sigma$, ta xác định $p_k(t)$ như sau:

$$p_k(t) = \begin{cases} 1, & t_{k-1} + lT \leq t < t_k + lT, \quad l = 0, 1, 2, ..., \\ 0, & \text{trong các trường hợp khác.} \end{cases}$$

Đặt

$$A(t) = A_1 p_1(t) + A_2 p_2(t) + \cdots + A_\sigma p_\sigma(t).$$

Khi đó hệ (3.3) có thể viết như sau:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \geq t_0,$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Rõ ràng rằng $A(t)$ là liên tục từng khúc, bị chặn và tuần hoàn với chu kì T. Do đó, giả thiết của định lí Floquet được thỏa mãn.

Với $t_0 \leq t < t_1, \quad \dot{x}(t) = A_1 x(t)$. Khi đó:

$$x(t) = \exp\left[A_1(t - t_0)\right]x(t_0) = \exp\left[A_1(t - t_0)\right]x_0.$$

Tương tự, với $t_1 \leq t < t_2, \quad \dot{x}(t) = A_2 x(t)$ ta có:

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp\left[A_2(t - t_1)\right]x(t_1) \\ &= \exp\left[A_2(t - t_1)\right]\exp\left[A_1(t_1 - t_0)\right]x_0 \\ &= \exp\left[A_2(t - t_1)\right]\exp\left(A_1 \Delta t_1\right)x_0. \end{aligned}$$

Một cách tương tự, với $t_{\sigma-1} \leq t < t_\sigma,\ \dot{x}(t) = A_\sigma x(t)$, ta có:

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp\left[A_\sigma(t - t_{\sigma-1})\right]x(t_{\sigma-1}) \\ &= \exp\left[A_\sigma(t - t_{\sigma-1})\right]\exp\left[A_{\sigma-1}(t_{\sigma-1} - t_{\sigma-2})\right]\cdots\exp\left[A_1(t_1 - t_0)\right]x_0 \end{aligned}$$

$$= \exp\left[A_\sigma(t - t_{\sigma-1})\right] \exp\left(A_{\sigma-1}\Delta t_{\sigma-1}\right) \cdots \exp\left(A_1 \Delta t_1\right) x_0.$$

Từ đó suy ra:

$$R = \Phi(t_0 + T, t_0) = \exp\left(A_\sigma \Delta t_\sigma\right) \exp\left(A_{\sigma-1}\Delta t_{\sigma-1}\right) \cdots \exp\left(A_1 \Delta t_1\right).$$

$$Q = \frac{1}{T}\ln\big[\Phi(t_0{+}T, t_0)\big] = \frac{1}{T}\ln[\exp\left(A_\sigma \Delta t_\sigma\right) \exp\left(A_{\sigma-1}\Delta t_{\sigma-1}\right) \ldots \exp\left(A_1 \Delta t_1\right)\big].$$

Từ định lí Floquet ta suy ra định lý được chứng minh.

□

Hệ quả 3.2.2. *Giả sử hệ* (3.3) *thỏa mãn điều kiện*

$$A_k A_l = A_l A_k,\ \ k = 1, \ldots\sigma;\ \ l = 1, \ldots, \sigma.$$

Khi đó hệ (3.3) *ổn định mũ khi và chỉ khi*

$$Q = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{\sigma} A_k \Delta t_k \tag{3.6}$$

là ma trận Hurwitz. Hơn nữa, nếu $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \ldots = \Delta t_\sigma = T/\sigma$ *thì hệ* (3.3) *ổn định mũ khi và chỉ khi ma trận*

$$Q = \frac{1}{\sigma}\sum_{k=1}^{\sigma} A_k \tag{3.7}$$

là ma trận Hurwitz.

Chứng minh. Khi A_k và A_l giao hoán với mọi $k = 1, \ldots\sigma,\ l = 1, \ldots, \sigma$ thì từ (3.4) ta suy ra:

$$R = \exp\Big[\sum_{k=1}^{\sigma} A_k \Delta t_k\Big].$$

Do đó ma trận Q trong (3.5) trở thành (3.6). Hơn nữa, nếu $\Delta t_k = T/\sigma$ với $k = 1, \ldots\sigma$, ma trận Q có dạng như trong (3.7). □

Cho trước các ma trận $A_1, A_2, ..., A_\sigma$ và $\Delta t_1, \Delta t_2, ..., \Delta t_\sigma$ ứng với mỗi hệ con đó, ma trận R và Q có thể tính một cách dễ dàng. Do đó việc kiểm tra xem một hệ chuyển mạch có ổn định hay không cũng không phức tạp. Tuy nhiên, nếu cho trước một tập ma trận $A_1, A_2, ..., A_\sigma$ thì không dễ dàng để xác định $\Delta t_1, \Delta t_2, ..., \Delta t_\sigma$ sao cho R là Schur và Q là Hurwitz. Dưới đây là hai trường hợp cận biên, tín hiệu chuyển mạch chậm và nhanh, được đề cập đến. Trong mỗi trường hợp, ta đều chỉ ra rằng, tính ổn định mũ có thể đạt được dưới những giả thuyết khá nhẹ.

Định lý 3.2.3. *Xét hệ* (3.3) *và giả thiết rằng ít nhất một trong các ma trận $A_1, A_2, ..., A_\sigma$ là Hurwitz. Khi đó, tồn tại một $T > 0$ đủ lớn và các khoảng thời gian $\Delta t_1, \Delta t_2, ..., \Delta t_\sigma$ sao cho hệ* (3.3) *là ổn định mũ.*

Chứng minh. Với mỗi $k = 1, ..., \sigma$, giả sử giá trị riêng của ma trận A_k là $\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, ..., \lambda_{kn}$ và xác định:

$$\alpha_k = \max_{i=1,...n} Re\left\{\lambda_{ki}\right\}.$$

Khi đó, với mỗi $k = 1, ..., \sigma$, tồn tại một đa thức $\beta_k(\Delta t_k)$ sao cho:

$$||\exp\left(A_k \Delta t_k\right)|| \le \beta_k(\Delta t_k)\exp\left(\alpha_k \Delta t_k\right).$$

Với một số nguyên $r \ge 0$, xét:

$$||R||^r = ||\exp\left(A_\sigma \Delta t_\sigma\right)\exp\left(A_{\sigma-1}\Delta t_{\sigma-1}\right)\cdots\exp\left(A_1\Delta t_1\right)||^r$$

$$\le ||\exp\left(A_\sigma \Delta t_\sigma\right)||^r ||\exp\left(A_{\sigma-1}\Delta t_{\sigma-1}\right)||^r \cdots ||\exp\left(A_1 \Delta t_1\right)||^r.$$

Từ đó suy ra:

$$||R||^r \le \left[\beta_1(\Delta t_1)\beta_2(\Delta t_2)\cdots\beta_\sigma(\Delta t_\sigma)\right]^r \exp\left[(\alpha_1\Delta t_1 + \alpha_2\Delta t_2 + \cdots + \alpha_\sigma \Delta t_\sigma)r\right].$$

Theo giả thiết, tồn tại ít nhất một ma trận trong các ma trận $A_1, A_2, ..., A_\sigma$ là Hurwitz nên trong các số $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\sigma$ có ít nhất một số âm. Do đó tồn tại một số T đủ lớn và các khoảng thời gian $\Delta t_1, \Delta t_2, ..., \Delta t_\sigma$ sao cho:

$$[\beta_1(\Delta t_1)\beta_2(\Delta t_2)\cdots\beta_\sigma(\Delta t_\sigma)]\exp(\alpha_1\Delta t_1 + \alpha_2\Delta t_2 + \cdots + \alpha_\sigma\Delta t_\sigma) < 1.$$

Khi đó:

$$\lim_{r\to\infty} R^r = 0.$$

Từ đó suy ra R là Schur. Áp dụng Định lí (3.2.1) suy ra hệ ổn định mũ. □

Định lý 3.2.4. *Xét hệ (3.3) và giả sử rằng $A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + \cdots + A_\sigma\eta_\sigma$ là ma trận Hurwitz với $\eta_1 \geq 0, \eta_2 \geq 0, ..., \eta_\sigma \geq 0$ sao cho $\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_\sigma$ = 1. Khi đó, tồn tại một số $T > 0$ đủ nhỏ và các khoảng thời gian $\Delta t_1, \Delta t_2, ..., \Delta t_\sigma$ sao cho hệ (3.3) ổn định mũ.*

Chứng minh. Cho $\Delta t_1 = \eta_1 T, \Delta t_2 = \eta_2 T, ..., \Delta t_\sigma = \eta_\sigma T$. Khi đó với T đủ nhỏ thì ma trận

$$Q = \frac{1}{T}\ln[\exp(A_\sigma\Delta t_\sigma)\exp(A_{\sigma-1}\Delta t_{\sigma-1})\cdots\exp(A_1\Delta t_1)]$$

có thể biểu diễn như sau:

$$\begin{aligned} Q =& \frac{1}{T}\ln[I + A_1\Delta t_1 + A_2\Delta t_2 + \cdots + A_\sigma\Delta t_\sigma] + O(T^2) \\ &= (A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + \cdots + A_\sigma\eta_\sigma) + O(T^2), \end{aligned}$$

trong đó

$$\lim_{T\to 0}\frac{O(T^2)}{T} = 0.$$

Từ giả thiết $A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + \cdots + A_\sigma\eta_\sigma$ là ma trận Hurwitz và vì các giá trị riêng của một ma trận phụ thuộc liên tục vào các phần tử của nó nên suy ra tồn tại một số $T > 0$ đủ nhỏ sao cho Q là Hurwitz. Áp dụng Định lý (3.2.1) suy ra hệ ổn định mũ. □

3.3 Ví dụ

Ví dụ 3.3.1. Xét hệ (3.3) với $\sigma = 2$ và

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -25 & 0 \end{bmatrix}.$$

Giả sử rằng $\Delta t_1 = \Delta t_2 = T/2$. Các giá trị riêng của A_1 là $-1 \pm i2$, các giá trị riêng của A_2 là $-3 \pm i4$. Mặc dù, cả A_1 và A_2 đều là ma trận Hurwitz nhưng $A_1 + A_2$ không là ma trận Hurwitz. Từ Định lý (3.2.3), với T đủ lớn, hệ này là ổn định mũ. Môđun giá trị riêng của R là hàm của T và đồ thị của nó được thể hiện bằng nét gạch và nét gạch chấm trong hình 3.1. Từ hình vẽ này suy ra hệ không ổn định khi $T = 1$ nhưng lại ổn định mũ khi $T = 2$. Hình 3.2 chỉ ra một quỹ đạo cho mỗi trường hợp đó.

Ví dụ trên minh họa cho trường hợp với một quy luật chuyển mạch nào đó, hệ chuyển mạch không ổn định mặc dù tất cả các hệ con ổn định tiệm cận và nó cũng minh họa cho Định lí (3.2.1) và (3.2.3).

Ví dụ 3.3.2. Xét hệ (3.3) với $\sigma = 2$ và

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3.5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Giả sử rằng $\Delta t_1 = \Delta t_2 = T/2$. Các giá trị riêng của A_1 là $1 \pm i2$, các giá trị riêng của A_2 là 0.5 và -4. Mặc dù, cả A_1 và A_2 đều không là ma trận Hurwitz nhưng $A_1 + A_2$ lại là ma trận Hurwitz. Do đó từ Định lí (3.2.4), với T đủ nhỏ, hệ là ổn định mũ. Môđun giá trị riêng của R là hàm của T và đồ thị của nó được thể hiện bằng nét gạch và nét gạch chấm trong hình 3.3. Từ hình vẽ này suy ra hệ ổn định mũ khi $T = 1$ nhưng không ổn định khi $T = 2$. Hình 3.4 chỉ ra một quỹ đạo cho mỗi trường hợp đó.

Tóm lại, bằng việc áp dụng lí thuyết Floquet, ta suy ra điều kiện cần và đủ để một hệ chuyển mạch tuyến tính tuần hoàn là ổn định mũ. Ta cũng chỉ ra rằng, nếu ít nhất một hệ con ổn định tiệm cận thì tồn tại một quy luật chuyển mạch chậm để hệ này ổn định mũ và nếu trung bình của các hệ con là ổn định thì tồn tại một quy luật chuyển mạch nhanh để hệ này ổn định mũ.

.

Kết luận

Bản luận văn trình bày các vấn đề sau:

- Một số khái niệm cơ bản của hệ chuyển mạch: Khái niệm hệ chuyển mạch, dãy thời điểm chuyển mạch, dãy chỉ số chuyển mạch, tín hiệu chuyển mạch, nghiệm của hệ chuyển mạch, tính ổn định và khả ổn định của hệ chuyển mạch . . .

- Tính ổn định của hệ chuyển mạch phi tuyến và hệ chuyển mạch tuyến tính dưới sự chuyển mạch tùy ý. Trong đó, trình bày điều kiện cần và đủ để hệ chuyển mạch phi tuyến ổn định qua việc sử dụng hàm Lyapunov chung; mối liên hệ giữa tính ổn định của hệ chuyển mạch tuyến tính, hệ bao hàm thức vi phân tuyến tính và hệ bất định tuyến tính đa hộp; trình bày tiêu chuẩn đại số để hệ chuyển mạch tuyến tính ổn định.

- Tính ổn định của hệ chuyển mạch tuyến tính tuần hoàn dựa vào lí thuyết Floquet cho hệ phương trình vi phân tuyến tính tuần hoàn.

Hướng nghiên cứu tiếp theo của luận văn: Nghiên cứu tính ổn định của hệ chuyển mạch cho phương trình vi phân đại số và phương trình sai phân ẩn.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Thế Hoàn, Phạm Phu (2000), *Cơ sở phương trình vi phân và lý thuyết ổn định*, Nhà xuất bản giáo dục, Hà Nội.

[2] B. Ingalls, E. D. Sontag, Y. Wang (2003), An infinite - time relaxation theorem for differential inclusion, *Pro. Am. Math. SOC*, 131(2), 99 - 487.

[3] Cevat Gokcek (2004), Stability analysis of periodically switched linear systems using Floquet theory, *Math. Prob. Engineering*, 1 (2004), 1 - 10.

[4] Z. P. Jiang, Y. A. Wang (2002), Conserve Lyapunov theorem for discrete-time systems with disturbances, *Syst. Control Lett*, 45 (1), 49 - 59.

[5] Y. Lin, E. D. Sontag, Y. Wang (1996), A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability, *SIAMJ. Control optim*, 34 (1), 60 - 124.

[6] P. Peleties and R. A. DeCarlo (1991), Asymptotic stability of m-switched systems using Lyapunov-like functions, *Proc. IEEE. New Jersey*, 14 (3), 1679 - 1684.

[7] J. W. Polderman (2004), Stability of switched systems, *Univ. Twente.*

[8] Zhendong Sun, Shuzhi Sam Ge (2011), *Stability theory of switched dynamical systems*, Springer - Verlag London.

[9] M. Vidyasagar (1993), *Nonlinear systems analysis*, 2nd ed. Eagle wood Cliffs: Prentice Hall.

[10] Z. Zahreddine (2003), Matrix measure and application on stability of matrices and interval dynamical system, *Int. J. Math. Math. Sci*, 2, 75 - 85.