TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
——————— * ———————

BÁO CÁO ĐỒ ÁN TỐT NGHIỆP

Đề tài:

Sinh viên thực hiện : **Nguyễn Lê Hoàng**

Giáo viên hướng dẫn : **Ts. Hà Thị Ngọc Yến**

HÀ NỘI
Ngày 27 tháng 4 năm 2018

BÁO CÁO

Nguyễn Lê Hoàng

Ngày 27 tháng 4 năm 2018

Mục lục

Chương 1

Các khái niệm cơ bản

1.1 Hệ động lực chuyển mạch

Hệ động lực chuyển mạch là một hệ động lực mà việc chuyển đổi trạng thái có vai trò không nhất định trong vận hành cũng như sự ổn định của hệ. Cụ thể hơn, hệ động lực chuyển mạch là hệ ghép hai mức độ. Mức thấp được điều khiển bởi tập các trạng thái vận hành. Mỗi trạng thái vận hành được mô tả bằng một phương trình vi phân hoặc phương trình sai phân. Hệ động lực chuyển mạch tuân thủ nghiêm ngặt các nguyên tắc cơ bản:

- Mỗi thời điểm chỉ có đúng một trạng thái vận hành.
- Việc chuyển đổi giữa các trạng thái không diễn ra đột ngột, tùy ý.

Ví dụ: động cơ xe máy số

Một hệ động lực chuyển mạch được mô tả dưới dạng như sau:

$$x^+(t) = f_\sigma(x(t)), \tag{1.1}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là trạng thái liên tục, σ là trạng thái rời rạc nhận giá trị trong tập $M = \{1, ..., m\}$ và $f_k, k \in M$ là trường véc-tơ. x^+ là toán tử đạo hàm với thời gian liên tục $t \in \mathbb{R}$ (tức là: $x^+(t) = \frac{d}{dt}x(t)$) và là toán tử dịch chuyển tịnh tiến với thời gian là rời rạc $t \in \mathbb{N}$ (tức là: $x^+(t) = x(t+1)$). Như vậy, không gian trạng thái liên tục là không gian Euclid n chiều và không gian trạng thái rời rạc là tập chỉ số M có hữu hạn phần tử. Thời gian là tập các số thực với thời gian là liên tục hay là tập các số nguyên với thời gian là rời rạc. Dựa vào tính chất liên tục hoặc rời rạc của thời gian mà ta gọi hệ là hệ chuyển mạch liên tục hay hệ chuyển mạch rời rạc. Khi có m hệ động lực con thì ta gọi là hệ chuyển mạch m-dạng và với $k \in M$ hệ được mô tả dưới dạng:

$$x^+(t) = f_k(x(t)). \tag{1.2}$$

Trạng thái rời rạc σ được gọi là tín hiệu chuyển mạch. Nếu $\sigma(t) = i$ thì ta nói rằng hệ con thứ i được kích hoạt tại thời điểm t. Đặc trưng cho tính chất của hệ chuyển mạch là tại một thời điểm có một và chỉ một hệ con được kích hoạt.

Ký hiệu $\mathcal{T}$ là tập thời gian.$\mathcal{T}$ có thể đó là tập số thực ($\mathcal{T} = \mathbb{R}$) hay tập số nguyên ($\mathcal{T} = \mathbb{N}$). Cho một số thực s, ký hiệu $\mathcal{T}_s$ là tập thời gian mà trong đó thời gian lớn hon hoặc bằng s (ví du: $\mathcal{T}_s = \{t \in \mathcal{T} : t \geq s\}$). Cho hai số thực t_1 và t_2 với $t_1 < t_2$, khoảng thời gian $[t_1, t_2)$ được hiểu là

$$[t_1, t_2) = \{t \in \mathcal{T} : t \geq t_1, t < t_2\}.$$

Mặt khác khoảng thời gian còn có thể hiểu là đoạn $t_2 - t_1$ với thời gian liên tục hay là các điểm thời gian trong $[t_1, t_2)$ với thời gian rời rạc.

Cho hàm liên tục từng khúc χ xác định trên khoảng $[t_1, t_2)$ và thời điểm $t \in (t_1, t_2)$ như sau:

$$\chi(t+) = \lim_{s \downarrow t} \chi(s), \chi(t-) = \lim_{s \uparrow t} \chi(s)$$

với thời gian là liên tục và

$$\chi(t+) = \chi(t+1), \chi(t-) = \chi(t-1)$$

với thời gian là rời rạc.

Khi các hệ con (**??**) được cho trước, dáng điệu của hệ chuyển mạch được quyết định bởi tín hiệu chuyển mạch. Ta sẽ phân biệt quỹ đạo chuyển mạch, tín hiệu chuyển mạch và quy luật chuyển mạch.

Một quỹ đạo chuyển mạch là một hàm liên tục phải, xác định trên một khoảng thời gian hữu hạn, nhận giá trị trong M. Cho trước khoảng thời gian $[t_0, t_f)$ với $-\infty < t_0 < t_f < +\infty$, một quỹ đạo chuyển mạch p xác định trên đoạn đó được ký hiệu là $p_{[t_0,t_f)}$. Với một quỹ đạo chuyển mạch $p_{[t_0,t_f)}$, thời điểm $t \in (t_0, t_f)$ được gọi là thời điểm bước nhảy nếu:

$$\sigma(t-) \neq \sigma(t).$$

Giả sử rằng các thời điểm bước nhảy trong (t_0, t_f) được sắp xếp theo thứ tự $t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$, thì dãy $t_0, t_1, t_2 \cdots$ được gọi là dãy thời điểm chuyển mạch của σ trên $[t_0, t_f)$. Tương tự, dãy các trạng thái rời rạc được sắp thứ tự $\sigma(t_0), \sigma(t_1), \sigma(t_2)\cdots$ được gọi là dãy chỉ số chuyển mạch của σ trên $[t_0, t_f)$. Dãy cặp thứ tự:

$$(t_0, i_0), (t_1, i_1), \cdots, (t_s, i_s)$$

với $i_k = \sigma(t_k)$, được gọi là dãy chuyển mạch của σ trên $[t_0, t_f)$.
Quỹ đạo chuyển mạch được gọi là hoàn toàn xác định nếu có một số hữu hạn thời điểm bước nhảy trên khoảng đó. Tập những quỹ đạo chuyển mạch hoàn toàn xác định trên $[t_0, t_f)$ được ký hiệu là $S_{[t_0,t_f)}$.

Một tín hiệu chuyển mạch là một hàm xác định trên một khoảng thời gian vô hạn, nhận giá trị trong M.

Giả sử rằng θ là một tín hiệu chuyển mạch xác định trên $[t_0, +\infty)$ và $[s_1, s_2)$ là đoạn con có độ dài hữu hạn của $[t_0, +\infty)$ thì quỹ đạo chuyển mạch $p_{[s_1,s_2)}$ được gọi là quỹ đạo con của θ nếu $p(t) = \theta(t)$ với mọi $t \in [s_1, s_2)$. Khái niệm dãy chỉ số và dãy thời điểm chuyển mạch được định nghĩa một cách tương tự như đối với quỹ đạo chuyển mạch. Một tín hiệu chuyển mạch được gọi là hoàn toàn xác định nếu tất cả các quỹ đạo con của nó là hoàn toàn xác định. Kí hiệu $\theta_{[t_0,+\infty)}$ là tín hiệu chuyển mạch θ xác định trên $[t_0, +\infty)$. Tập những tín hiệu chuyển mạch hoàn toàn xác định trên $[t_0, +\infty)$ được ký hiệu bởi $\mathcal{S}_{[t_0,+\infty)}$ hoặc $\mathcal{S}$ khi $t_0 = 0$.

Cho trước một cặp hàm $(x(\cdot), \theta(\cdot))$ trên đoạn $[t_0, t_1)$, trong đó $x : [t_0, t_1) \mapsto \mathbb{R}^n$ là hàm liên tục và $\theta : [t_0, t_1) \mapsto M$ là hàm hằng từng khúc. Cặp $(x(\cdot), \theta(\cdot))$ được gọi là nghiệm của hệ (1.1) trên $[t_0, t_1)$ nếu với hầu hết $t \in [t_0, t_1)$ ta có:

$$x^+(t) = f_{\theta(t)}(x(t)).$$

Hệ chuyển mạch (1.1) được gọi là hoàn toàn xác định (xác định một cách toàn cục) nếu với bất kỳ $\theta \in \mathcal{S}_{[0,+\infty)}$ và $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tồn tại duy nhất một hàm liên tục x trên $[0, +\infty)$ với $x(0) = x_0$ sao cho cặp $(x(\cdot), \theta(\cdot))$ là một nghiệm của hệ (1.1) trên $[0, +\infty)$.
Khi mỗi hệ con thỏa mãn điều kiện Lipchitz toàn cục:

$$\limsup_{x_1 \neq x_2} \frac{|f_k(x_1) - f_k(x_2)|}{|x_1 - x_2|} < +\infty, \quad k \in M,$$

thì hệ chuyển mạch là hoàn toàn xác định. Trong đồ án này, ta luôn giả thiết rằng các hệ con thỏa mãn điều kiện Lipchitz, và do đó tính hoàn toàn xác định của hệ luôn được đảm bảo.

Một quy luật chuyển mạch là một quy tắc chuyển mạch mà sinh ra một quỹ đạo chuyển mạch hoặc một tín hiệu chuyển mạch từ một tập các cấu hình ban đầu. Trong đồ án này, ta chỉ xét những quy luật chuyển mạch có dạng:

$$\sigma(t) = \phi(t, \sigma(t-), x(t)), \tag{1.3}$$

trong đó ϕlà hàm hằng từng khúc nhận giá trị trong M.
Một hàm $x(t)$ được gọi là một quỹ đạo trạng thái (liên tục) của hệ (**??**) qua quy luật chuyển mạch (1.3) trên $[t_0, t_1)$ nếu (1.1) và (1.3) đúng với hầu hết $t \in [t_0, t_1)$. Tín hiệu chuyển mạch tương ứng σ được gọi là sinh bởi quy luật chuyển mạch (1.3) dọc theo $x(\cdot)$ với trạng thái ban đầu x_0 trên $[t_0, t_1)$.

Một quy luật chuyển mạch được gọi là hoàn toàn xác định nếu nó sinh ra một tín hiệu chuyển mạch hoàn toàn xác định với trạng thái ban đầu bất kỳ.

Với hệ chuyển mạch (1.1), một quy luật chuyển mạch hoàn toàn xác định có thể biểu diễn bởi tập $\{\theta^x : x \in \mathbb{R}^n\}$ trong đó θ^x là tín hiệu chuyển mạch được hoàn toàn xác định, sinh bởi quy luật chuyển mạch đó với trạng thái ban đàu x. Hệ chuyển mạch có nghiệm duy nhất với cấu hình ban đầu bất kỳ nếu cả hệ chuyển mạch và quy luật chuyển mạch hoàn toàn xác định. Để thuận tiên, ta ký hiệu quỹ đạo trạng thái liên tục bởi $\phi(\cdot; t_0, x_0, \sigma)$ hoặc $\phi(\cdot; x_0, \sigma)$ khi $t_0 = 0$.

1.2 Ví dụ về hệ chuyển mạch

Cho hệ phương trình trong $\mathbb{R}^2$:

$$x^+(t) = \begin{cases} A_1 x(t) \text{ nếu } x_2 \geq 0, \\ A_2 x(t) \text{ nếu } x_2 \leq 0, \end{cases}$$

trong đó $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, t liên tục trên đoạn $[0, +\infty)$ và

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.01 & -0.5 \\ 2 & -0.01 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.01 & -2 \\ 0.5 & -0.01 \end{bmatrix}.$$

1.3 Tính ổn định và khả ổn định của hệ chuyển mạch

Trong các hệ thống động lực, các trạng thái chuyển đổi của hệ thống hoàn toàn được quyết định bởi các cơ chế chuyển đổi. Các hệ thống chuyển mạch có thể rất phức tạp và đa dạng thậm chí khi ta xét một hệ thông con đơn giản cố định. Như vậy ta cần xét đến tính ổn đinh của các hệ thông chuyển mạch theo các cơ chế chuyển đổi khác nhau. Để xét được tính ổn định, ta cần biết được các khái niêm về tính ổn định của hệ động lực chuyển mạch. Cho $\Upsilon = \{\Lambda^x : x \in \mathbb{R}^n\}$ với Λ^x là tập con khác rỗng của $\mathcal{S}$ - tập các tín hiệu chuyển mạch. Tập này được gọi là tập các tín hiệu chuyển chấp nhận được nếu với mỗi trạng thái ban đầu đều được gán với một tập tín hiệu chuyển mạch. Tập này cảm sinh từ một tập chấp nhận được những quỹ đạo trạng thái liên tục $\{\Gamma_x : x \in \mathbb{R}^n\}$, trong đó Γ_x là tập các quỹ đạo trạng thái với trạng thái bắt đầu x và tín hiệu chuyển mạch trong Λ^x :

$$\Gamma_x = \{\phi(\cdot; 0, x, \theta) : \theta \in \Lambda^x\}.$$

Hàm thực $\alpha : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ được gọi là lớp $\mathcal{K}$ nếu nó là hàm liên tục, tăng chặt và $\alpha(0) = 0$. Hàm α không bị chặn còn được gọi là lớp $\mathcal{K}_\infty$. Hàm $\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ được gọi là lớp $\mathcal{KL}$ nếu $\beta(\cdot, t)$ là lớp $\mathcal{K}$ với mỗi điểm cố định $t \geq 0$ và $\lim_{t\to+\infty} \beta(r, t) = 0$ với mỗi $r \geq 0$ cố định.

Định nghĩa 1.1. (Tính ổn định) Giả sử $\Upsilon = \{\Lambda^x : x \in \mathbb{R}^n\}$ là tập các tín hiệu chuyển mạch chấp nhận được. Hệ chuyển mạch 1.1 được gọi là
(1) ổn định Υ nếu tồn tại lớp $\mathcal{K}$ hàm ζ và một số thực dương δ sao cho:

$$|\phi(t; 0, x_0, \theta)| \leq \zeta(|x_0|) \qquad \forall t \in [0, +\infty), x_0 \in \mathbb{B}_\delta, \theta \in \Lambda^{x_0}$$

(2) tiệm cận ổn định Υ nếu tồn tại lớp $\mathcal{KL}$ hàm ξ sao cho:

$$|\phi(t; 0, x_0, \theta)| \leq \xi(|x_0|, t) \qquad \forall t \in [0, +\infty), x_0 \in \mathbb{R}^n, \theta \in \Lambda^{x_0}$$

(3) ổn định mũ Υ nếu tồn tại các số thực dương α và β sao cho:

$$|\phi(t; 0, x_0, \theta)| \leq \beta e^{-\alpha t}|x_0| \qquad \forall t \in [0, +\infty), x_0 \in \mathbb{R}^n, \theta \in \Lambda^{x_0}$$

Định nghĩa 1.2. (Tính khả ổn định) Giả sử $\Upsilon = \{\Lambda^x : x \in \mathbb{R}^n\}$ là tập các tín hiệu chuyển mạch chấp nhận được. Hệ chuyển mạch **??** được gọi là
(1) khả ổn định Υ nếu tồn tại lớp $\mathcal{K}$ hàm ζ và một số thực dương δ và luật chuyển $\{\theta^x : x \in \mathbb{R}^n\}$ với $\theta^x \in \Lambda^x$ sao cho

$$|\phi(t; 0, x_0, \theta^x)| \leq \zeta(|x_0|) \qquad \forall t \in [0, +\infty), x_0 \in \mathbb{B}_\delta, \theta \in \Lambda^{x_0}$$

(2) khả tiệm cận ổn định Υ nếu tồn tại lớp $\mathcal{KL}$ hàm ξ và luật chuyển $\{\theta^x : x \in \mathbb{R}^n\}$ với $\theta^x \in \Lambda^x$ sao cho

$$|\phi(t; 0, x_0, \theta^x)| \leq \xi(|x_0|, t) \qquad \forall t \in [0, +\infty), x_0 \in \mathbb{R}^n, \theta \in \Lambda^{x_0}$$

(3) khả ổn định mũ Υ nếu tồn tại số thực dương α và β và luật chuyển $\{\theta^x : x \in \mathbb{R}^n\}$ với $\theta^x \in \Lambda^x$ sao cho

$$|\phi(t; 0, x_0, \theta^x)| \leq \beta e^{-\alpha t}|x_0| \qquad \forall t \in [0, +\infty), x_0 \in \mathbb{R}^n, \theta \in \Lambda^{x_0}$$

Khi các hệ con là cố định, tính chất ổn định được xác định bởi tập chấp nhận được các tín hiệu chuyển mạch. Nếu $\Upsilon_1 \subseteq \Upsilon_2$ thì tính ổn định Υ_2 kéo theo tính ổn định Υ_1 và tính khả ổn định Υ_1 kéo theo tính khả ổn định Υ_2

Chương 2

Các hệ chuyển mạch

2.1 Mở đầu

Trong chương này, ta xét hệ động lực chuyển mạch sau:

$$x^+(t) = f(x(t), \sigma(t)), \tag{2.1}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là trạng thái liên tục, $\sigma(t) \in M = \{1, ..., m\}$ là trạng thái rời rạc và $f : \mathbb{R}^n \times M \mapsto \mathbb{R}^n$ là trường vec-tơ với $f(\cdot, i)$ là hàm liên tục Lipschitz với mọi $i \in M$.

Ta định nghĩa hàm $f_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$:

$$f_i(x) = f(x, i), \qquad i \in M.$$

Hệ 2.1 được viết lại

$$x^+(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)). \tag{2.2}$$

Trong chương này, ta sẽ đi phân tích tính ổn định của hệ 2.2. Ta có một vài giả thiết sau:
(1) $f_i(0) = 0$ với mọi $i \in M$, đó là gốc cân bằng.
(2) Hệ là liên tục Lipschitz toàn cục, tồn tại hằng số dương L sao cho

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq L|x - y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, i \in M, \tag{2.3}$$

đảm bảo tính xác định được của hệ thông chuyển mạch.
Ta định nghĩa $\phi(t; t_0, x_0, \sigma)$ là trạng thái chuyển liên tục của hệ 2.2 tại thời điểm t với điều kiện ban đầu $x(t_0) = x_0$ và cơ chế chuyển σ. Ta sử dụng $\phi(t; x_0, \sigma)$ là nghiệm tại thời điểm $t_0 = 0$. Với mọi điều kiện ban đầu $x(t_0) = x_0$ và thời điểm $t > t_0$, với thời gian rời rạc ta có

$$\phi(t;t_0,x_0,\sigma) = f_{\sigma(t-1)} \circ \cdots \circ f_{\sigma(t_0+1)} \circ f_{\sigma(t_0)}(x_0), \tag{2.4}$$

trong đó $\circ$ là hàm hợp, $f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x))$. Với thời gian là liên tục ta có

$$\phi(t;t_0,x_0,\sigma) = \Phi^{f_{i_s}}_{t-t_s} \circ \Phi^{f_{i_{s-1}}}_{t_s-t_{s-1}} \circ \cdots \circ \Phi^{f_{i_1}}_{t_2-t_1} \circ \Phi^{f_{i_0}}_{t_1-t_0}(x_0) \tag{2.5}$$

trong đó $\Phi^f_t(x_0)$ là giá trị của tích phân hàm f đi qua $x(0) = x_0$ và $(t_0,i_0),\cdots,(t_s,i_s)$ là trình tự chuyển của σ trong $[t_0,t)$.
Để đưa ra định nghĩa về tính ổn định của hệ chuyển mạch, ta cần thêm một vài định nghĩa sau. Gọi $d(x,y)$ là khoảng cách Euclide giữa x và y. Cho tập $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ và véc-tơ $x \in \mathbb{R}^n$, đặt $|x|_\Omega = \inf_{y\in\Omega} d(x,y)$. Cho tập $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ và một số thực dương τ, gọi $\mathbb{B}(\Omega,\tau)$ là τ-lân cận của Ω :

$$\mathbb{B}(\Omega,\tau) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_\Omega \le \tau\}.$$

Tương tự, gọi $\mathbb{H}(\Omega,\tau)$ là τ-mặt cầu của Ω :

$$\mathbb{H}(\Omega,\tau) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_\Omega = \tau\}.$$

Đặc biệt, hình cầu đóng $\mathbb{B}(\{0\},\tau)$ được ký hiệu là $\mathbb{B}_\tau$, và mặt cầu $\mathbb{H}(\{0\},\tau)$ được ký hiệu là $\mathbb{H}_\tau$.

Định nghĩa 2.1. Gốc cân bằng của hệ 2.2 được gọi là
(1) đảm bảo hút toàn cục nếu

$$\lim_{t\to+\infty} |\phi(t;x,\sigma)| = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \sigma \in \mathcal{S}$$

(2) đảm bảo hút toàn cục đều nếu với mọi $\delta > 0$ và $\epsilon > 0$, tồn tại $T > 0$ sao cho

$$|\phi(t;x,\sigma)| < \epsilon \qquad \forall t \in \mathcal{T}_T, |x| < \delta, \sigma \in \mathcal{S}$$

(3) đảm bảo ổn định nếu với mọi $\epsilon > 0$ và $\sigma \in \mathcal{S}$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$|\phi(t;x,\sigma)| < \epsilon \qquad \forall t \in \mathcal{T}_0, |x| < \delta$$

(4) đảm bảo ổn định đều nếu tồn tại $\delta > 0$ và lớp $\mathcal{K}$ hàm γ sao cho

$$|\phi(t;x,\sigma)| \le \gamma(|x|) \qquad \forall t \in \mathcal{T}_0, |x| < \delta, \sigma \in \mathcal{S}$$

(5) đảm bảo ổn định tiệm cận toàn cục nếu nó vừa đảm bảo ổn định và đảm bảo hút toàn cục (6) đảm bảo ổn định tiệm cận đều toàn cục nếu

nó vừa đảm bảo ổn định đều và đảm bảo hút toàn cục đều (7) đảm bảo ổn định mũ toàn cục nếu với mọi $\sigma \in \mathcal{S}$, tồn tại $\alpha > 0$ và $\beta > 0$ sao cho

$$|\phi(t; x, \sigma)| \leq \beta e^{-\alpha t}|x| \qquad \forall t \in \mathcal{T}_0, x \in \mathbb{R}^n$$

(8) đảm bảo ổn định mũ đều toàn cục nếu tồn tại $\alpha > 0$ và $\beta > 0$ sao cho

$$|\phi(t; x, \sigma)| \leq \beta e^{-\alpha t}|x| \qquad \forall t \in \mathcal{T}_0, x \in \mathbb{R}^n, \sigma \in \mathcal{S}$$

Hệ được đảm bảo ổn đinh/hút nếu gốc cân bằng của nó là đảm bảo ổn định/hút. Từ chương này trở đi để cho gọn các từ "đảm bảo" và "toàn cục" sẽ được loại bỏ. Sự ổn định tiệm cận/mũ thống nhất phù hợp trong định nghĩa 1.1.

2.2 Hệ chuyển mạch phi tuyến

Trong phần này, ta sẽ xét vấn đề ổn định của hệ chuyển mạch phi tuyến

$$x^+(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)) \tag{2.6}$$

2.2.1 Hàm Lyapunov

Hàm liên tục $V(x) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ với $V(0) = 0$ là:
(1) xác định dương ($V(x) \succ 0$) nếu $V(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$
(2) nửa xác định dương ($V(x) \succeq 0$) nếu $V(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$
(3) tia không bị chặn nếu tồn tại lớp $\mathcal{K}_\infty$ hàm $\alpha(\cdot)$ sao cho $V(x) \geq \alpha(|x|) \forall x \in \mathbb{R}^n$

Định nghĩa 2.2. Cho Ω là lân cận ở gốc. Hàm $V : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ được gọi là hàm Lyapunov yếu (CWLF) cho hệ chuyển mạch (2.6) nếu
(1) nó là nửa liên tục dưới trên Ω
(2) nó chấp nhận lớp $\mathcal{K}$ hàm α_1 và α_2 sao cho

$$\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|) \qquad \forall x \in \Omega$$

(3) với mọi $x \in \Omega$ và $i \in M$ ta có

$$\mathcal{D}^+V(x)|_{f_i} = \lim_{\tau \to 0^+} \sup \frac{V(\phi(\tau; 0, x, \widehat{i})) - V(x)}{\tau} \leq 0$$

với thời gian là liên tục, trong đó $\widehat{i}$ là hằng tín hiệu chuyển $\sigma(t) = i \forall t$, và

$$\mathcal{D}^+V(x)|_{f_i} = V(f_i(x)) - V(x) \leq 0$$

với thời gian là rời rạc

Lưu ý: Hàm Lyapunov yếu không cần là liên tục. Thực tế, ngay cả một hệ thống phi tuyến ổn định đều $\dot{x} = f(x)$ với f là hàm đủ trơn có thể không chấp nhận hàm Lyapunov yếu nào cả.

Định nghĩa 2.3. Hàm $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ được gọi là hàm Lyapunov mạnh (CLF) cho hệ chuyển mạch (2.6) nếu
(1) nó liên tục tại mọi điểm và liên tục khả vi trừ gốc
(2) nó chấp nhận lớp $\mathcal{K}_\infty$ bị chặn là lớp $\mathcal{K}_\infty$ hàm α_1 và α_2 sao cho

$$\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

(3) có lớp $\mathcal{K}$ hàm $\alpha_3 : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+$ sao cho

$$\mathcal{D}^+V(x)|_{f_i} \leq -\alpha_3(|x|) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, i \in M \tag{2.7}$$

Với thời gian là liên tục thì

$$\mathcal{D}^+V(x)|_{f_i} = \limsup_{\tau \to 0^+} \frac{V(x + f_i(x)\tau) - V(x)}{\tau} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, i \in M, \tag{2.8}$$

do sự liên tục Lipschitz địa phương của V. Cho hàm khả vi liên tục V ta có

$$\mathcal{D}^+V(x)|_f = \frac{d}{dt}V(x) = L_f V(x) = \frac{\partial}{\partial x}V(x)f(x).$$

Giả sử hệ (2.6) chấp nhận một hàm Lyapunov yếu. Với mọi vết trạng thái $x(t) = \phi(t; x_0, \sigma)$ trên σ, ta có $V(x(t)) \leq V(x_0)$ với mọi $t \geq 0$. Với mọi $\epsilon > 0$, chọn δ sao cho

$$\mathbb{B}_\delta \subset \Omega, \qquad \{x : V(x) \leq \delta\} \subset \mathbb{B}_\epsilon.$$

Ta có $|x(t)| \leq \epsilon$ với mọi $t \geq 0$ nếu $x_0 \in \mathbb{B}_\delta$ thì hệ là ổn định đều.
Giả sử hệ (2.6) chấp nhận hàm Lyapunov V. Ta chỉ ra rằng hệ là tiệm cận ổn định. Ta giả sử hệ là với thời gian liên tục, và với trường hợp thời gian rời rạc chỉ thể chỉ ra theo một cách tương tự. Cố định trạng thái bắt đầu $x_0 \neq 0$ và tín hiệu chuyển σ, và $x(t) = x(t; x_0, \sigma)$. Theo định nghĩa 2.3

$$\limsup_{\tau \to 0^+} \frac{V(x(t+\tau)) - V(x)}{\tau} \leq -\alpha_4(V(x(t))) \qquad \forall t \in \mathcal{T}_0, \tag{2.9}$$

trong đó $\alpha_4 = \alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}$. Định nghĩa hàm $\eta : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$

$$\eta(t) = \begin{cases} -\int_1^t \frac{1}{\min(\tau,\alpha_4(\tau))} d\tau, & t \in (0,1), \\ -\int_1^t \frac{1}{\alpha_4(\tau)} d\tau, & t \geq 1. \end{cases}$$

η là hàm giảm, khả vi, và $\lim_{t\downarrow 0} \eta(t) = +\infty$. Từ (2.9) ta có

$$\eta(V(x(t))) - \eta(V(x_0)) = \int_0^1 \dot{\eta}(V(x(\tau)))dV(x(s)) \geq \int_0^1 1ds = t \qquad \forall t \geq 0 \tag{2.10}$$

2.3 Hệ chuyển mạch tuyến tính

Trong phần này, ta tập trung vào một hệ chuyển mạch đặc biệt nhưng cũng rất quan trọng, hệ mà trong đó các hệ con đều là tuyến tính không đổi theo thời gian. Các hệ này được gọi là hệ chuyển mạch tuyến tính và có dạng:

$$x^+(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \qquad x(0) = x_0, \tag{2.11}$$

trong đó $A_k \in \mathbb{R}^{n\times n}, k \in M$, là các ma trận hằng số.

Đặt $\mathbf{A} = \{A_1, \cdots, A_m\}$. $\mathbf{A}$ có thể được xem như hệ các ma trận của hệ chuyển mạch tuyến tính.
Do tính tuyến tính của các hệ con, nghiệm của hệ xác định bởi

$$\phi(t; t_0, x_0, \sigma) = \Phi(t; t_0, \sigma), \tag{2.12}$$

trong đó $\Phi(t; t_0, \sigma)$ là ma trận chuyển trạng thái. Với thời gian rời rạc, ma trận chuyển trạng thái là

$$\Phi(t; t_0, \sigma) = A_{\sigma(t-1)} \cdots A_{\sigma(t_0)}$$

còn đối với thời gian là liên tục

$$\Phi(t; t_0, \sigma) = e^{A_{i_s}(t-t_s)} e^{A_{i_{s-1}}(t_s - t_{s-1})} \cdots e^{A_{i_1}(t_2-t_1)} e^{A_{i_0}(t_1-t_0)},$$

trong đó $t_0, t_1, \cdots, t_s$ và $i_0, i_1, \cdots, i_s$ là thời gian và thứ tự chuyển trong $[t_0, t)$.

Ta có

$$\phi(t; t_0, \lambda x_0, \sigma) = \lambda\phi(t; t_0, x_0, \sigma) \quad \forall t, t_0, x_0, \sigma, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2.13}$$

gọi là tính chất tuyến tính xuyên tâm và

$$\phi(t; t_0, x_0, \sigma) = \phi(t - t_0; 0, x_0, \sigma') \quad \forall t, t_0, x_0, \sigma, \tag{2.14}$$

trong đó $\sigma'(t) = \sigma(t + t_0)$ với mọi t. Phần đằng sau được biết là tính bất biến của thời gian.

Do có hai tính bất biến trên, với hệ chuyển mạch tuyến tính, tính hút địa phương tương đương với tính hút toàn cục, và không mất tính tổng quát thời gian ban đầu luôn là $t_0 = 0$.

2.3.1 Hệ nới lỏng

Khi phân tích tính ổn định của hệ chuyển mạch tuyến tính, các tín hiệu chuyển có thể lấy tùy ý. Khi các tín hiệu chuyển mạch là hằng số và được lấy trong tập hữu hạn các giá trị rời rạc, nó là cách làm mịn tự nhiên được áp dụng trong các phân tích nhiễu sau này. Điều này dẫn đến hệ thống mở rộng sau.

Đặt

$$\mathcal{W} = \{w \in \mathbb{R}^m : w_i \geq 0, i = 1, \cdots, m, \sum_{i=1}^{m} w_i \leq 1\}$$

$$A(w) = \sum_{i=1}^{m} w_i A_i, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.15}$$

Ta xét hệ tựa tuyến tính

$$x^+(t) = A(w(t))x(t), \tag{2.16}$$

trong đó $w(\cdot)$ là các hàm liên tục từng khúc. Gọi Γ_s là tập nghiệm của hệ chuyển mạch tuyến tính, Γ_p là tập nghiệm của hệ tựa tuyến tính. Ta có thể thấy rằng

$$\Gamma_s \subset \Gamma_p$$

Tuy nhiên nghiệm của các hệ khác có thể xấp xỉ bằng nghiệm của hệ tuyến tính theo bổ đề dưới đây.

Bổ đề 2.4. Cố định $\xi \in \mathbb{R}^n$ và $z : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}^n$ là nghiệm của

$$\dot{z}(t) \in \mathcal{A}(z(t)), \qquad z(0) = \xi.$$

Đặt $r : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ là hàm liên tục thỏa mãn $r(t) > 0$ với mọi $t \geq 0$. Tồn tại η với $|\eta - \xi| \leq r(0)$ và nghiệm $x : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}^n$ của

$$\dot{x}(t) \in \{A_1 x(t), \cdots, A_m x(t)\}, \qquad x(0) = \eta,$$

sao cho

$$|z(t) - x(t)| \leq r(t) \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Bổ đề trên thiết lập sự tương quan giữa tính ổn định của hệ chuyển mạch tuyến tính với tính ổn định của hệ nới lỏng. Giả sử nghiệm của hệ tuyến tính là hội tụ thì nghiệm của hệ nới lỏng cũng hội tụ. Với thời gian rời rạc, mối tương quan này vẫn được giữ.

Hệ quả 2.5. Các phát biểu sau là tương đương:
(1) Hệ chuyển mạch tuyến tính là hút.
(2) Hệ tựa tuyến tính là hút.
(3) Hệ ... là hút.

Đối với hệ tuyến tính, tính hút cũng thể hiện tính ổn định mũ. Với hệ chuyển mạch tuyến tính cũng có thể chứng minh một vài tính chất là tương đương với nhau.

Mệnh đề 2.6. Các phát biểu sau là tương đương:
(1) Hệ chuyển mạch tuyến tính là hút. (2) Hệ chuyển mạch tuyến tính là hút đều. (3) Hệ chuyển mạch tuyến tính là tiệm cận ổn định. (4) Hệ chuyển mạch tuyến tính là tiệm cận ổn định đều. (5) Hệ chuyển mạch tuyến tính là ổn định mũ. (6) Hệ chuyển mạch tuyến tính là ổn định mũ đều.

Chứng minh Trước hết, tính ổn định mũ đều tương đương với mọi tính ổn định khác, và tính hút cũng tương đương với mọi tính ổn định khác. Vì thế, ta chỉ cần chứng minh tính hút tương đương với tính ổn định mũ đều.

Với mọi trạng thái x trên hình cầu đơn vị, theo tính hút ta có thời điểm t^x sao cho

$$\sup_{\sigma \in \mathcal{S}} |\phi(t^x; 0, x, \sigma)| < \frac{1}{2}. \tag{2.17}$$

Với mọi x cố định $x \in \mathbf{H}_1$, ta cần chứng minh $\sup_{\sigma \in \mathcal{S}} |\phi(t^x; 0, y, \sigma)| \leq \frac{1}{2}$

nếu y là lân cận của x. Đặt $\eta = \max_{i\in M}|A_i|$. Theo (2.12) và (2.17) ta có

$$\begin{aligned}
|\phi(t^x;0,y,\sigma)| &= |\phi(t^x;0,x,\sigma)+\phi(t^x;0,y-x,\sigma)| \\
&\leq |\phi(t^x;0,x,\sigma)|+|\phi(t^x;0,y-x,\sigma)| \\
&\leq |\phi(t^x;0,x,\sigma)|+e^{\eta t^x}|y-x| \\
&\leq \tfrac{1}{2} \quad \forall\sigma\in\mathcal{S}, |y-x|\leq e^{-\eta t^x}(\tfrac{1}{2}-\sup\nolimits_{\sigma\in\mathcal{S}}|\phi(t^x;0,x,\sigma)|).
\end{aligned}$$

Với mọi $x\in\mathbf{H}_1$, lân cận N_x của x sao cho

$$\sup_{\sigma\in\mathcal{S}}|\phi(t^x;0,y,\sigma)|\leq\frac{1}{2}\quad\forall y\in N_x.$$

Vì x thuộc mặt cầu đơn vị nên

$$\bigcup_{x\in\mathbf{H}_1}N_x\supseteq\mathbf{H}_1.$$

Vì mặt cầu đơn vị là tập compact nên theo định lý phủ hữu hạn, tồn tại số hữu hạn l và tập các trạng thái $x_1,\cdots,x_l$ trên mặt cầu đơn vị sao cho

$$\bigcup_{i=1}^{l}N_{x_i}\supseteq\mathbf{H}_1.$$

Do đó, ta có thể chia mặt cầu đơn vị thành l phần $R_1,\cdots,R_l$ sao cho
(a) $\bigcup_{i=1}^{l}R_i=\mathbf{H}_1$, và $R_i\cap R_j=\emptyset$ với $i\neq j$;
(b) với mỗi $i, 1\leq i\leq l, x_i\in R_i$, và

$$\sup_{\sigma\in\mathcal{S}}|\phi(t^{x_i};0,y,\sigma)|\leq\frac{1}{2},\quad y\in R_i$$

Định nghĩa nón

$$\Omega_i=\{x\in\mathbb{R}^n:\exists\lambda\neq0,y\in R_i|x=\lambda y\},\quad i=1,\cdots,l.$$

Đặt $\Omega_0=0$. Có $\bigcup_{i=0}^{l}\Omega_i=\mathbb{R}^n$ và $\Omega_i\cap\Omega_j=\emptyset$ với $i\neq j$. Đặc biệt, Ω_0 là bất biến với chuyển mạch và hình thành sự cân bằng bất biến.

Với mọi $i=1,\cdots,l$ và $x\in\Omega_i$, đặt $t_x=t^{x_i}$:

$$\max_{x\neq0}t_x=\max_{i=1}^{l}t^{x_i}=T_1<+\infty. \tag{2.18}$$

Theo tính chất (a) và (b), với mọi $x\in\Omega_i, i=1,\cdots,l$, mọi tín hiệu chuyển σ luôn mang x vào trong hình cầu $\mathbf{B}_{\frac{|x|}{2}}$ tại thời điểm t_x.

Cuối cùng, với mọi trạng thái bắt đầu x_0 và tín hiệu chuyển σ, ta định nghĩa đệ quy tập thời gian và trạng thái
$s_0 = 0,$
$z_0 = x_0$
$s_k = s_{k-1} + t_{z_{k-1}},$
$z_k = \phi(s_k; 0, x_0, \sigma), \quad k = 1, 2, \cdots.$
Có thể thấy rằng

$$s_k \leq kT_1, \qquad |z_{k+1}| \leq \frac{|z_k|}{2}, \quad k = 0, 1, \cdots, \tag{2.19}$$

nghĩa là

$$|\phi(s_k; 0, x_0, \sigma)| \leq \frac{|x_0|}{2^k} \leq e^{-\gamma s_k}|x_0|, \quad k = 0, 1, 2, \cdots,$$

trong đó $\gamma = \frac{\ln 2}{T_l}$. Mặt khác, đăt $\eta = 2\exp(T_l \max\{||A_1||, \cdots, ||A_m||\})$. Ta có

$$|\phi(t; 0, x_0, \sigma)| \leq \eta e^{-\gamma t}|x_0| \quad \forall t \geq 0 \tag{2.20}$$

Từ đó suy ra hệ là ổn định mũ đều.

Qua sự tương đương giữa tính hút và tính ổn định mũ, cùng với hệ quả 2.5 ta được kết quả sau.

Định lý 2.7. *Các phát biểu dưới đây là tương đương cho hệ chuyển mạch tuyến tính và hệ nới lỏng:*
(1) Hệ có tính hút.
(2) Hệ có tính tiệm cận ổn định.
(3) Hệ có tính ổn định mũ.
(4) Hệ chuyển mạch chấp nhận hàm Lyapunov.

Ta định nghĩa

$$\varrho(\mathbf{A}) = \limsup_{t \to +\infty, \sigma \in \mathcal{S}, |x|=1} \frac{\ln |\phi(t; 0, x, \sigma)|}{t}, \tag{2.21}$$

là số mũ Lyapunov lớn nhất, xác định tỷ lệ cao nhất có thể nghiệm phân kỳ, và

$$R(\mathbf{A}) = \{\phi(t; 0, x, \sigma) : t \in \mathcal{T}_0, x \in \mathbf{H}_1, \sigma \in \mathcal{S}\}, \tag{2.22}$$

là tập đạt đến được của hệ từ mặt cầu đơn vị.

Định nghĩa 2.8. Hệ chuyển mạch tuyến tính $\mathbf{A}$ được gọi là
(1) ổn định nếu $\varrho(\mathbf{A}) < 0$
(2) ổn định biên nếu $\varrho(\mathbf{A}) = 0$ và tập $R(\mathbf{A})$ bị chặn
(3) không ổn định biên nếu $\varrho(\mathbf{A}) = 0$ và tập $R(\mathbf{A})$ không bị chặn
(4) không ổn định nếu $\varrho(\mathbf{A}) > 0$