ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

PHẠM THỊ TUYẾT

TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ CHUYỂN MẠCH TUYẾN TÍNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - Năm 2011

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

PHẠM THỊ TUYẾT

TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ CHUYỂN MẠCH TUYẾN TÍNH

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số : **60 46 01**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
GS.TSKH. PHẠM KỲ ANH

Hà Nội - Năm 2011

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Trong những thập niên gần đây, hệ chuyển mạch đã được nhiều nhà toán học tập trung nghiên cứu và đã thu được nhiều kết quả có ý nghĩa. Động lực thúc đẩy việc nghiên cứu hệ chuyển mạch xuất phát từ ý nghĩa của nó trong thực tế và kỹ thuật. Có ba bài toán cơ bản đối với tính ổn định của hệ chuyển mạch : (i) tìm điều kiện ổn định của hệ khi sự chuyển mạch là tùy ý; (ii) xác định một lớp hẹp nhưng quan trọng của các quy luật chuyển mạch ổn định hóa; (iii) xây dựng một luật chuyển mạch ổn định.

Đã có nhiều hướng nghiên cứu liên quan đến hệ chuyển mạch như phương pháp đại số Lie, phương pháp hàm Lyapunov bội, phương pháp đại số tuyến tính, bất đẳng thức ma trận tuyến tính . . . Trong khi rất nhiều vấn đề quan trọng về hệ chuyển mạch đã được giải quyết thì vẫn còn nhiều vấn đề vẫn đang còn là bài toán mở.

Bản luận văn tập trung trình bày những điều kiện để một hệ chuyển mạch là ổn định dưới sự chuyển mạch tùy ý và việc sử dụng lý thuyết Floquet để nghiên cứu tính ổn định của hệ chuyển mạch tuyến tính tuần hoàn. Nội dung bản luận văn gồm ba chương:

Chương 1: Giới thiệu một số khái niệm cơ bản về hệ chuyển mạch.

Chương 2: Trình bày các điều kiện để hệ chuyển mạch phi tuyến và tuyến tính là ổn định khi sự chuyển mạch là tùy ý.

Chương 3: Nghiên cứu các điều kiện để hệ chuyển mạch tuyến tính tuần hoàn là ổn định bằng việc áp dụng lý thuyết Floquet.

Trong quá trình làm luận văn, em đã nhận được sự giúp đỡ, chỉ bảo rất tận tình của thầy giáo, GS TSKH Phạm Kỳ Anh. Em xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới thầy, người đã dành nhiều thời gian chỉ bảo, hướng dẫn em viết bản luận văn này.

Trong quá trình học tập, em đã được các thầy cô trong khoa Toán -

Cơ - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội đã truyền dạy những kiến thức quý giá, em xin gửi lời cảm ơn chân thành tới thầy cô, những nhà giáo hết lòng vì khoa học và sự nghiệp giáo dục.

Mặc dù đã hết sức cố gắng nhưng do trình độ còn hạn chế và thời gian có hạn nên bản luận văn không thể tránh khỏi có thiếu sót. Em rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và bạn bè để bản luận văn được hoàn thiện hơn.

Hà Nội, tháng 11 năm 2011

Phạm Thị Tuyết

0.1 Khái niệm về hệ chuyển mạch

Hệ chuyển mạch là một hệ bao gồm một số hữu hạn các hệ con và một quy tắc chuyển mạch giữa các hệ con đó. Hệ này được mô tả bởi phương trình:

$$x^+(t) = f_\sigma(x(t)), \tag{1.1}$$

trong đó $x \in \mathbf{R}^n$ là trạng thái liên tục; σ là trạng thái rời rạc, nhận giá trị trong tập chỉ số $M = \{1, 2, ...m\}$ và $f_k,\ k \in M$ là các trường vectơ; x^+ là kí hiệu cho toán tử đạo hàm trong trường hợp thời gian liên tục (tức là $x^+(t) = \frac{d}{dt}x(t)$) và toán tử dịch chuyển tiến trong trường hợp thời gian rời rạc (tức là $x^+(t) = x(t+1)$).

Như vậy, không gian trạng thái liên tục là không gian Euclid n chiều và không gian trạng thái rời rạc là tập chỉ số M có hữu hạn phần tử. Tập thời gian hoặc là tập các số thực trong trường hợp thời gian liên tục, hoặc là tập các số nguyên trong trường hợp thời gian rời rạc. Dựa vào tính chất liên tục hoặc rời rạc của tập thời gian mà ta gọi là hệ chuyển mạch liên tục hoặc hệ chuyển mạch rời rạc. Nếu tất cả các hệ con của

(1.1) là tuyến tính thì ta gọi là hệ chuyển mạch tuyến tính. Khi có m hệ con thì ta gọi là hệ chuyển mạch *$m-$dạng*.

Với mỗi $k \in M$, ta gọi

$$x^+(t) = f_k(x(t)) \tag{1.2}$$

là một hệ con của hệ chuyển mạch.

Trạng thái rời rạc σ được gọi là tín hiệu chuyển mạch. Nếu $\sigma(t) = i$ thì ta nói rằng hệ con thứ i được kích hoạt tại thời điểm t. Một đặc tính của hệ chuyển mạch là tại một thời điểm có một và chỉ một hệ con được kích hoạt.

Kí hiệu $\mathcal{T}$ là tập thời gian. $\mathcal{T}$ có thể là tập số thực ($\mathcal{T} = \mathbf{R}$) hoặc tập số nguyên ($\mathcal{T} = \mathbf{Z}$). Cho một số thực s, kí hiệu $\mathcal{T}_s = \{t \in \mathcal{T} : t \geq s\}$. Cho hai số thực t_1 và t_2 với $t_1 < t_2$. Độ đo của $[t_1, t_2)$ là độ dài $t_2 - t_1$ trong trường hợp liên tục, và là lực lượng của $[t_1, t_2)$ trong trường hợp rời rạc.

Cho χ là một hàm liên tục từng khúc xác định trên khoảng $[t_1, t_2)$. Với mỗi $t \in (t_1, t_2)$ ta định nghĩa:

$$\chi(t+) = \lim_{s \downarrow t} \chi(s), \qquad \chi(t-) = \lim_{s \uparrow t} \chi(s)$$

cho trường hợp liên tục và

$$\chi(t+) = \chi(t+1), \qquad \chi(t-) = \chi(t-1)$$

cho trường hợp rời rạc

Khi các hệ con (1.2) được cho trước, dáng điệu của hệ chuyển mạch được quyết định bởi tín hiệu chuyển mạch. Ta sẽ phân biệt quỹ đạo chuyển mạch, tín hiệu chuyển mạch và quy luật chuyển mạch.

Một quỹ đạo chuyển mạch là một hàm liên tục phải, xác định trên một khoảng thời gian hữu hạn, nhận giá trị trong M.

Cho trước một khoảng thời gian $[t_0, t_f)$ với $-\infty < t_0 < t_f < +\infty$, một quỹ đạo chuyển mạch p xác định trên đoạn đó được kí hiệu là $p_{[t_0, t_f)}$. Với một quỹ đạo chuyển mạch $p_{[t_0,t_f)}$, thời điểm $t \in (t_0, t_f)$ được gọi là thời điểm bước nhảy nếu:

$$\sigma(t-) \neq \sigma(t).$$

Giả sử rằng các thời điểm bước nhảy trong (t_0, t_f) được sắp là $t_1 < t_2 < t_3 < ...$, thì dãy thứ tự $t_0, t_1, t_2...$ được gọi là dãy thời điểm chuyển mạch của σ trên $[t_0, t_f)$. Tương tự, dãy trạng thái rời rạc được sắp thứ tự $\sigma(t_0), \sigma(t_1), \sigma(t_2)...$ được gọi là dãy chỉ số chuyển mạch của σ trên $[t_0, t_f)$. Dãy cặp thứ tự:

$$(t_0, i_0), (t_1, i_1), ..., (t_s, i_s)$$

với $i_k = \sigma(t_k)$, được gọi là dãy chuyển mạch của σ trên $[t_0, t_f)$.
Quỹ đạo chuyển mạch được gọi là hoàn toàn xác định nếu có một số hữu hạn thời điểm bước nhảy trên khoảng đó. Tập những quỹ đạo chuyển mạch hoàn toàn xác định trên $[t_0, t_f)$ được kí hiệu là $S_{[t_0,t_f)}$.

Một tín hiệu chuyển mạch là một hàm xác định trên một khoảng thời gian vô hạn, nhận giá trị trong M.

Giả sử rằng θ là một tín hiệu chuyển mạch xác định trên $[t_0, +\infty)$ và $[s_1, s_2)$ là đoạn con có độ dài hữu hạn của $[t_0, +\infty)$ thì quỹ đạo chuyển mạch $p_{[s_1,s_2)}$ được gọi là quỹ đạo con của θ nếu $p(t) = \theta(t)$ với mọi $t \in [s_1, s_2)$. Khái niệm dãy chỉ số và dãy thời điểm chuyển mạch được định nghĩa một cách tương tự như đối với quỹ đạo chuyển mạch.
Một tín hiệu chuyển mạch được gọi là hoàn toàn xác định nếu tất cả các quỹ đạo con của nó là hoàn toàn xác định. Kí hiệu $\theta_{[t_0,+\infty)}$ là tín hiệu chuyển mạch θ xác định trên $[t_0, +\infty)$. Tập những tín hiệu chuyển mạch hoàn toàn xác định trên $[t_0, +\infty)$ được kí hiệu bởi $\mathcal{S}_{[t_0,+\infty)}$ hoặc $\mathcal{S}$ khi $t_0 = 0$.

Cho trước một cặp hàm $(x(.), \theta(.))$ trên đoạn $[t_0, t_1)$, trong đó $x : [t_0, t_1) \mapsto \mathbf{R}^n$ là hàm tuyệt đối liên tục và $\theta : [t_0, t_1) \mapsto M$ là hàm hằng từng khúc. Cặp $(x(.), \theta(.))$ được gọi là nghiệm của hệ (1.1) trên $[t_0, t_1)$

nếu với hầu mọi $t \in [t_0, t_1)$ ta có:

$$x^+(t) = f_{\theta(t)}(x(t)).$$

Hệ chuyển mạch (1.1) được gọi là hoàn toàn xác định (một cách toàn cục) nếu với bất kỳ $\theta \in S_{[0,+\infty)}$ và $x_0 \in \mathbf{R}^n$, tồn tại duy nhất một hàm tuyệt đối liên tục x trên $[0, +\infty)$ với $x(0) = x_0$ sao cho cặp $(x(.), \theta(.))$ là một nghiệm của hệ (1.1) trên $[0, +\infty)$.

Khi mỗi hệ con thỏa mãn điều kiện Lipchitz toàn cục, tức là

$$\limsup_{x_1 \neq x_2} \frac{|f_k(x_1) - f_k(x_2)|}{|x_1 - x_2|} < +\infty, \quad k \in M,$$

thì hệ chuyển mạch là hoàn toàn xác định vì các bài toán Cauchy tương ứng giải được duy nhất. Trong bản luận văn này, ta luôn giả thiết rằng các hệ con thỏa mãn điều kiện Lipchitz, và do đó tính hoàn toàn xác định của hệ chuyển mạch luôn được đảm bảo.

Một quy luật chuyển mạch là một quy tắc chuyển mạch mà sinh ra một quỹ đạo chuyển mạch hoặc một tín hiệu chuyển mạch từ một tập các cấu hình ban đầu. Trong luận văn này, chúng ta chỉ xét những quy luật chuyển mạch có dạng:

$$\sigma(t) = \varphi(t, \sigma(t-), x(t)), \tag{1.3}$$

trong đó φ là hàm hằng từng khúc, nhận giá trị trong M.

Một hàm $x(t)$ được gọi là một quỹ đạo trạng thái (liên tục) của hệ (1.1) qua quy luật chuyển mạch (1.3) trên $[t_0, t_1)$ nếu cả phương trình (1.1) và (1.3) đúng với hầu mọi $t \in [t_0, t_1)$. Tín hiệu chuyển mạch tương ứng σ được gọi là sinh bởi quy luật chuyển mạch (1.3) dọc theo $x(.)$ với trạng thái ban đầu x_0 trên $[t_0, t_1)$.

Một quy luật chuyển mạch được gọi là hoàn toàn xác định nếu nó sinh ra một tín hiệu chuyển mạch hoàn toàn xác định với trạng thái ban đầu bất kì.

Với hệ chuyển mạch (1.1), một quy luật chuyển mạch hoàn toàn xác định có thể biểu diễn bởi tập $\{\theta^x : x \in \mathbf{R}^n\}$ trong đó θ^x là tín hiệu chuyển mạch được hoàn toàn xác định, sinh bởi quy luật chuyển mạch đó với trạng thái ban đầu x. Hệ chuyển mạch có nghiệm duy nhất với cấu hình ban đầu bất kì nếu cả hệ chuyển mạch và quy luật chuyển mạch hoàn toàn xác định. Để thuận tiện về mặt kí hiệu, quỹ đạo trạng thái liên tục sẽ được kí hiệu bởi $\phi(.;t_0,x_0,\sigma)$ hoặc $\phi(.;x_0,\sigma)$ khi $t_0 = 0$.

0.2 Tính ổn định và khả ổn định của hệ chuyển mạch

Cho $\Upsilon = \{\Lambda^x : x \in \mathbf{R}^n\}$ với Λ^x là tập con khác rỗng của $\mathcal{S}$-tập những tín hiệu chuyển mạch hoàn toàn xác định. Tập này được gọi là tập chấp nhận được những tín hiệu chuyển mạch, nó gán cho mỗi trạng thái ban đầu một tập tín hiệu chuyển mạch. Tập này cảm sinh một tập chấp nhận được những quỹ đạo trạng thái liên tục $\{\Gamma_x : x \in \mathbf{R}^n\}$, trong đó Γ_x là tập những quỹ đạo trạng thái với trạng thái ban đầu x và tín hiệu chuyển mạch trong Λ^x, tức là:

$$\Gamma_x = \{\phi(.;0,x,\theta) : \theta \in \Lambda^x\}.$$

Định nghĩa 0.2.1. Giả sử rằng $\Upsilon = \{\Lambda^x, x \in \mathbf{R}^n\}$ là tập chấp nhận được những tín hiệu chuyển mạch. Hệ chuyển mạch (1.1) được gọi là :
1) Ổn định theo Υ nếu tồn tại một hàm $\zeta \in \mathcal{K}$ và một số thực dương δ sao cho:

$$|\phi(t;0,x_0,\theta)| \le \zeta(|x_0|) \quad \forall t \in [0,+\infty),\ x_0 \in \mathbf{B}_\delta,\ \theta \in \Lambda^{x_0}.$$

2) Ổn định tiệm cận theo Υ nếu tồn tại một hàm $\xi \in \mathcal{KL}$ sao cho:

$$|\phi(t;0,x_0,\theta)| \le \xi(|x_0|,t) \quad \forall t \in [0,+\infty),\ x_0 \in \mathbf{R}^n,\ \theta \in \Lambda^{x_0}.$$

3) Ổn định mũ theo Υ nếu tồn tại các số thực dương α và β sao cho:

$$|\phi(t;0,x_0,\theta)| \leq \beta e^{-\alpha t}|x_0| \quad \forall t \in [0,+\infty),\ x_0 \in \mathbf{R}^n,\ \theta \in \Lambda^{x_0}.$$

Định nghĩa 0.2.2. Giả sử rằng $\Upsilon = \{\Lambda^x, x \in \mathbf{R}^n\}$ là tập chấp nhận được những tín hiệu chuyển mạch. Hệ chuyển mạch (1.1) được gọi là :
1) Khả ổn định theo Υ nếu tồn tại một hàm $\zeta \in \mathcal{K}$, một số thực dương δ và một quy luật chuyển mạch $\{\theta^x : x \in \mathbf{R}^n\}$ với $\theta^x \in \Lambda^x$ sao cho:

$$|\phi(t;0,x_0,\theta^{x_0})| \leq \zeta(|x_0|) \quad \forall t \in [0,+\infty),\ x_0 \in \mathbf{B}_\delta.$$

2) Khả ổn định tiệm cận theo Υ nếu tồn tại một hàm $\xi \in \mathcal{KL}$ và một quy luật chuyển mạch $\{\theta^x : x \in \mathbf{R}^n\}$ với $\theta^x \in \Lambda^x$ sao cho:

$$|\phi(t;0,x_0,\theta^{x_0})| \leq \xi(|x_0|,t) \quad \forall t \in [0,+\infty),\ x_0 \in \mathbf{R}^n.$$

3) Khả ổn định mũ theo Υ nếu tồn tại các số thực dương α và β và một quy luật chuyển mạch $\{\theta^x : x \in \mathbf{R}^n\}$ với $\theta^x \in \Lambda^x$ sao cho:

$$|\phi(t;0,x_0,\theta^{x_0})| \leq \beta e^{-\alpha t}|x_0| \quad \forall t \in [0,+\infty),\ x_0 \in \mathbf{R}^n.$$

Khi các hệ con là cố định, tính chất ổn định được xác định bởi tập chấp nhận được các tín hiệu chuyển mạch. Nếu $\Upsilon_1 \subseteq \Upsilon_2$ thì tính ổn định theo Υ_2 kéo theo tính ổn định theo Υ_1 và tính khả ổn định theo Υ_1 kéo theo tính khả ổn định theo Υ_2.

chapterTính ổn định của hệ chuyển mạch dưới sự chuyển mạch tùy ý

0.3 Một số khái niệm cơ bản

Trong chương này, chúng ta sử dụng thuật ngữ "tính ổn định đảm bảo" để mô tả tính ổn định của hệ chuyển mạch khi sự chuyển mạch xuất hiện một cách tùy ý.

Xét hệ chuyển mạch cho bởi:

$$x^{+}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)), \tag{2.1}$$

trong đó $x(t) \in \mathbf{R}^n$ là trạng thái liên tục, $\sigma(t) \in M = \{1, 2, ..., m\}$ là trạng thái rời rạc, $f_i : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$ là trường vectơ.

Trong chương này, chúng ta giả thiết rằng:

1) $f_i(0) = 0$ với mọi $i \in M$, điều kiện này suy ra gốc tọa độ là điểm cân bằng.

2) Các hàm $f_i(x)$ là liên tục Lipchitz toàn cục, tức là tồn tại một hằng số L sao cho:

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n, i \in M \ . \tag{2.2}$$

Điều kiện này đảm bảo tính hoàn toàn xác định của hệ chuyển mạch.

Chúng ta kí hiệu $\phi(t; t_0, x_0, \sigma)$ là quỹ đạo trạng thái liên tục của hệ (2.1) tại thời điểm t với điều kiện ban đầu $x(t_0) = x_0$ và quỹ đạo chuyển mạch σ; kí hiệu $\phi(t; x_0, \sigma)$ khi $t_0 = 0$. Sự tiến hóa của quỹ đạo trạng thái có thể biểu diễn trực tiếp qua các trường vectơ $f_i, i \in M$. Thật vậy, với điều kiện ban đầu $x(t_0) = x_0$ và thời điểm $t > t_0$ bất kì, trong trường hợp rời rạc ta có:

$$\phi(t; t_0, x_0, \sigma) = f_{\sigma(t-1)} \circ ... \circ f_{\sigma(t_0+1)} \circ f_{\sigma(t_0)}(x_0),$$

trong đó $\circ$ là kí hiệu hợp của các hàm số, tức là $f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x))$. Với hệ chuyển mạch liên tục, ta có:

$$\phi(t; t_0, x_0, \sigma) = \Phi^{f_{i_s}}_{t-t_s} \circ \Phi^{f_{i_{s-1}}}_{t_s - t_{s-1}} \circ ... \circ \Phi^{f_{i_1}}_{t_2 - t_1} \circ \Phi^{f_{i_0}}_{t_1 - t_0}(x_0),$$

trong đó $\Phi^f_t(x_0)$ là kí hiệu cho giá trị đường cong tích phân của f tại t qua $x(t_0) = x_0$, và $(t_0, i_0), ..., (t_s, i_s)$ là dãy chuyển mạch của σ trên $[t_0, t)$. Tuy nhiên, trong trường hợp tổng quát, ta không biết biểu thức giải tích của đường cong $\Phi^f_t(x_0)$.

Để trình bày tính ổn định của hệ chuyển mạch, chúng ta đưa thêm một số khái niệm.

Cho $d(x, y)$ là khoảng cách Euclid giữa hai vectơ x và y. Cho tập $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ và một vectơ $x \in \mathbf{R}^n$, khi đó:

$$|x|_\Omega = \inf_{y \in \Omega} d(x, y) = d(x, \Omega).$$

Đặc biệt $|x|_{\{0\}}$ kí hiệu bởi $|x|$.

Cho tập $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ và một số thực dương τ, $\mathbf{B}(\Omega, \tau)$ được gọi là τ-lân cận của Ω, tức là:

$$\mathbf{B}(\Omega, \tau) = \{x \in \mathbf{R}^n : |x|_\Omega \leq \tau\}.$$

Tương tự, $\mathbf{H}(\Omega, \tau)$ được gọi là τ-mặt cầu của Ω, tức là:

$$\mathbf{H}(\Omega, \tau) = \{x \in \mathbf{R}^n : |x|_\Omega = \tau\}.$$

Đặc biệt, hình cầu đóng $\mathbf{B}(\{0\}, \tau)$ được kí hiệu bởi $\mathbf{B}_\tau$ và mặt cầu $\mathbf{H}(\{0\}, \tau)$ kí hiệu bởi $\mathbf{H}_\tau$.

Định nghĩa 0.3.1. Điểm cân bằng gốc của hệ (2.1) được gọi là:

1) Hút toàn cục đảm bảo nếu:

$$\lim_{t \to +\infty} |\phi(t; x, \sigma)| = 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n,\ \sigma \in S.$$

2) Hút đều toàn cục đảm bảo nếu với $\delta > 0$ và $\epsilon > 0$ bất kì, tồn tại $T > 0$ sao cho:

$$|\phi(t; x, \sigma)| < \epsilon \quad \forall t \in \mathcal{T}_T,\ |x| \leq \delta,\ \sigma \in \mathcal{S}.$$

3) Ổn định đảm bảo nếu với $\epsilon > 0$ và $\sigma \in \mathcal{S}$ bất kì, tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

$$|\phi(t; x, \sigma)| \leq \epsilon \quad \forall t \in \mathcal{T}_0,\ |x| \leq \delta.$$

4) Ổn định đều đảm bảo nếu tồn tại $\delta > 0$ và $\gamma \in \mathcal{K}$ sao cho:

$$|\phi(t; x, \sigma)| \leq \gamma(|x|) \quad \forall t \in \mathcal{T}_0,\ |x| \leq \delta,\ \sigma \in \mathcal{S}.$$

5) Ổn định tiệm cận toàn cục đảm bảo nếu nó vừa ổn định đảm bảo, vừa hút toàn cục đảm bảo.
6) Ổn định tiệm cận đều toàn cục đảm bảo nếu nó vừa ổn định đều đảm bảo, vừa hút đều toàn cục đảm bảo.
7) Ổn định mũ toàn cục đảm bảo nếu với $\sigma \in \mathcal{S}$ bất kỳ, tồn tại $\alpha > 0$ và $\beta > 0$ sao cho:

$$|\phi(t; x, \sigma)| \leq \beta e^{-\alpha t}|x| \quad \forall t \in \mathcal{T}_0,\ x \in \mathbf{R}^n.$$

8) Ổn định mũ đều toàn cục đảm bảo nếu tồn tại $\alpha > 0$ và $\beta > 0$ sao cho:

$$|\phi(t; x, \sigma)| \leq \beta e^{-\alpha t}|x| \quad \forall t \in \mathcal{T}_0,\ x \in \mathbf{R}^n\ \sigma \in \mathcal{S}.$$

Chú ý: Ta nói rằng hệ ổn định (hút) đảm bảo nếu điểm cân bằng gốc là ổn định (hút) đảm bảo. Trong chương này, chúng ta sẽ đặt trọng tâm vào tính ổn định đảm bảo và tính hút toàn cục. Để ngắn gọn, ta sẽ lược bỏ các từ "đảm bảo" và "toàn cục".

0.4 Hệ chuyển mạch phi tuyến

Trong mục này, chúng ta nghiên cứu tính ổn định của hệ chuyển mạch phi tuyến

$$x^+(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)) \tag{2.3}$$

dưới sự chuyển mạch bất kì. Giả thiết rằng mỗi trường vectơ f_i là khả vi liên tục.

0.4.1 Hàm Lyapunov chung

Định nghĩa 0.4.1. Cho Ω là một lân cận của gốc. Một hàm $V : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ được gọi là hàm Lyapunov chung yếu của hệ (2.3) nếu:

(1) Nó là nửa liên tục dưới trên Ω .
(2) Tồn tại hàm α_1 và α_2 thuộc lớp $\mathcal{K}$ sao cho:

$$\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|) \quad \forall x \in \Omega.$$

(3) Đạo hàm Dini dưới của V dọc theo mỗi vectơ f_i không dương, tức là với $\forall x \in \Omega$ và $i \in M$, ta có:

$$\mathcal{D}^+V(x)|_{f_i} = \limsup_{\tau \to 0^+} \frac{V(\phi(\tau; 0, x, \hat{i})) - V(x)}{\tau} \leq 0$$

trong trường hợp liên tục, trong đó $\hat{i}$ kí hiệu cho tín hiệu chuyển mạch hằng $\sigma(t) = i \ \forall t$ và

$$\mathcal{D}^+V(x)|_{f_i} = V(f_i(x)) - V(x) \leq 0$$

trong trường hợp rời rạc.

Định nghĩa 0.4.2. Một hàm $V : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ được gọi là hàm Lyapunov chung (mạnh) của hệ chuyển mạch (2.3) nếu:
(1) Nó liên tục mọi nơi và khả vi liên tục có thể trừ điểm gốc.
(2) Tồn tại hàm α_1 và α_2 thuộc lớp $\mathcal{K}_\infty$ sao cho:

$$\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

(3) Tồn tại một hàm α_3 thuộc lớp $\mathcal{K}$, $\alpha_3 : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}_+$ sao cho:

$$\mathcal{D}^+V(x)|_{f_i} \leq -\alpha_3(|x|) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \ i \in M.$$

Chương 1

Tính ổn định của hệ chuyển mạch tuyến tính tuần hoàn

1.1 Một số kết quả ổn định của hệ chuyển mạch tuyến tính tuần hoàn

Trong mục này, ta xét hệ chuyển mạch tuyến tính tuần hoàn có dạng:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} A_1 x(t), & t_0 + lT \leq t < t_1 + lT, \\ A_2 x(t), & t_1 + lT \leq t < t_2 + lT, \\ \quad\vdots & \qquad\qquad\qquad\qquad l = 0, 1, 2, ..., t \geq t_0, \\ A_\sigma x(t), & t_{\sigma-1} + lT \leq t < t_\sigma + lT, \end{cases} \tag{3.3}$$

$x(t_0) = x_0,$

với $t_\sigma = t_0 + T$, trong đó $x(t) \in \mathbf{R}^n$ và $A_1, A_2, ..., A_\sigma \in \mathbf{R}^{n \times n}$ là ma trận hằng. Đặt:

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \quad k = 1, ..., \sigma.$$

Có thể thấy rằng, mỗi hệ con $\dot{x}(t) = A_k x(t)$ lần lượt được kích hoạt trong khoảng thời gian Δt_k. Sau đây ta sẽ đưa ra một số kết quả về tính ổn định của hệ (3.3).

Định lý 1.1.1. *Hệ (3.3) ổn định mũ khi và chỉ khi ma trận*

$$R = \prod_{k=1}^{\sigma} \exp\left(A_k \Delta t_k\right) = \exp\left(A_\sigma \Delta t_\sigma\right) \exp\left(A_{\sigma-1} \Delta t_{\sigma-1}\right) \cdots \exp\left(A_1 \Delta t_1\right) \tag{3.4}$$

là ma trận Schur. Một cách tương đương, hệ (3.3) ổn định mũ khi và chỉ khi

$$Q = \frac{1}{T} \ln\Big[\prod_{k=1}^{\sigma} \exp\left(A_k \Delta t_k\right)\Big] \tag{3.5}$$

là ma trận Hurwitz .

Chứng minh. Với mỗi $k = 1, 2, ..., \sigma$, ta xác định $p_k(t)$ như sau:

$$p_k(t) = \begin{cases} 1, & t_{k-1} + lT \leq t < t_k + lT, \quad l = 0, 1, 2, ..., \\ 0, & \text{trong các trường hợp khác.} \end{cases}$$

Đặt

$$A(t) = A_1 p_1(t) + A_2 p_2(t) + \cdots + A_\sigma p_\sigma(t).$$

Khi đó hệ (3.3) có thể viết như sau:

$$\dot{x}(t) = A(t) x(t), \quad t \geq t_0,$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Rõ ràng rằng $A(t)$ là liên tục từng khúc, bị chặn và tuần hoàn với chu kì T. Do đó, giả thiết của định lí Floquet được thỏa mãn.

Với $t_0 \leq t < t_1$, $\quad \dot{x}(t) = A_1 x(t)$. Khi đó:

$$x(t) = \exp\left[A_1(t - t_0)\right] x(t_0) = \exp\left[A_1(t - t_0)\right] x_0.$$

Tương tự, với $t_1 \leq t < t_2, \quad \dot{x}(t) = A_2x(t)$ ta có:

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp\left[A_2(t-t_1)\right]x(t_1) \\ &= \exp\left[A_2(t-t_1)\right]\exp\left[A_1(t_1-t_0)\right]x_0 \\ &= \exp\left[A_2(t-t_1)\right]\exp\left(A_1\Delta t_1\right)x_0. \end{aligned}$$

Một cách tương tự, với $t_{\sigma-1} \leq t < t_\sigma,\ \dot{x}(t) = A_\sigma x(t)$, ta có:

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp\left[A_\sigma(t-t_{\sigma-1})\right]x(t_{\sigma-1}) \\ &= \exp\left[A_\sigma(t-t_{\sigma-1})\right]\exp\left[A_{\sigma-1}(t_{\sigma-1}-t_{\sigma-2})\right]\cdots\exp\left[A_1(t_1-t_0)\right]x_0 \\ &= \exp\left[A_\sigma(t-t_{\sigma-1})\right]\exp\left(A_{\sigma-1}\Delta t_{\sigma-1}\right)\cdots\exp\left(A_1\Delta t_1\right)x_0. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$R = \Phi(t_0+T, t_0) = \exp\left(A_\sigma\Delta t_\sigma\right)\exp\left(A_{\sigma-1}\Delta t_{\sigma-1}\right)\cdots\exp\left(A_1\Delta t_1\right).$$

$$Q = \frac{1}{T}\ln\big[\Phi(t_0+T,t_0)\big] = \frac{1}{T}\ln[\exp\left(A_\sigma\Delta t_\sigma\right)\exp\left(A_{\sigma-1}\Delta t_{\sigma-1}\right)...\exp\left(A_1\Delta t_1\right)\big].$$

Từ định lí Floquet ta suy ra định lý được chứng minh.

□

Hệ quả 1.1.2. *Giả sử hệ* (3.3) *thỏa mãn điều kiện*

$$A_kA_l = A_lA_k,\ k = 1, ...\sigma;\ l = 1, ..., \sigma.$$

Khi đó hệ (3.3) *ổn định mũ khi và chỉ khi*

$$Q = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{\sigma} A_k\Delta t_k \tag{3.6}$$

là ma trận Hurwitz. Hơn nữa, nếu $\Delta t_1 = \Delta t_2 = ... = \Delta t_\sigma = T/\sigma$ *thì hệ* (3.3) *ổn định mũ khi và chỉ khi ma trận*

$$Q = \frac{1}{\sigma}\sum_{k=1}^{\sigma} A_k \tag{3.7}$$

là ma trận Hurwitz.

Chứng minh. Khi A_k và A_l giao hoán với mọi $k = 1, ...\sigma,\ l = 1, ..., \sigma$ thì từ (3.4) ta suy ra:

$$R = \exp\Big[\sum_{k=1}^{\sigma} A_k \Delta t_k\Big].$$

Do đó ma trận Q trong (3.5) trở thành (3.6). Hơn nữa, nếu $\Delta t_k = T/\sigma$ với $k = 1, ...\sigma$, ma trận Q có dạng như trong (3.7). □

Cho trước các ma trận $A_1, A_2, ..., A_\sigma$ và $\Delta t_1, \Delta t_2, ..., \Delta t_\sigma$ ứng với mỗi hệ con đó, ma trận R và Q có thể tính một cách dễ dàng. Do đó việc kiểm tra xem một hệ chuyển mạch có ổn định hay không cũng không phức tạp. Tuy nhiên, nếu cho trước một tập ma trận $A_1, A_2, ..., A_\sigma$ thì không dễ dàng để xác định $\Delta t_1, \Delta t_2, ..., \Delta t_\sigma$ sao cho R là Schur và Q là Hurwitz. Dưới đây là hai trường hợp cận biên, tín hiệu chuyển mạch chậm và nhanh, được đề cập đến. Trong mỗi trường hợp, ta đều chỉ ra rằng, tính ổn định mũ có thể đạt được dưới những giả thuyết khá nhẹ.

Định lý 1.1.3. *Xét hệ* (3.3) *và giả thiết rằng ít nhất một trong các ma trận* $A_1, A_2, ..., A_\sigma$ *là Hurwitz. Khi đó, tồn tại một* $T > 0$ *đủ lớn và các khoảng thời gian* $\Delta t_1, \Delta t_2, ..., \Delta t_\sigma$ *sao cho hệ* (3.3) *là ổn định mũ.*

Chứng minh. Với mỗi $k = 1, ..., \sigma$, giả sử giá trị riêng của ma trận A_k là $\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, ..., \lambda_{kn}$ và xác định:

$$\alpha_k = \max_{i=1,...n} Re\left\{\lambda_{ki}\right\}.$$

Khi đó, với mỗi $k = 1, ..., \sigma$, tồn tại một đa thức $\beta_k(\Delta t_k)$ sao cho:

$$||\exp\left(A_k \Delta t_k\right)|| \le \beta_k(\Delta t_k) \exp\left(\alpha_k \Delta t_k\right).$$

Với một số nguyên $r \ge 0$, xét:

$$||R||^r = ||\exp\left(A_\sigma \Delta t_\sigma\right) \exp\left(A_{\sigma-1} \Delta t_{\sigma-1}\right) \cdots \exp\left(A_1 \Delta t_1\right)||^r$$

$$\le ||\exp\left(A_\sigma \Delta t_\sigma\right)||^r ||\exp\left(A_{\sigma-1} \Delta t_{\sigma-1}\right)||^r \cdots ||\exp\left(A_1 \Delta t_1\right)||^r.$$

Từ đó suy ra:

$$||R||^r \le [\beta_1(\Delta t_1)\beta_2(\Delta t_2)\cdots\beta_\sigma(\Delta t_\sigma)]^r \exp\left[(\alpha_1\Delta t_1 + \alpha_2\Delta t_2 + \cdots + \alpha_\sigma\Delta t_\sigma)r\right].$$

Theo giả thiết, tồn tại ít nhất một ma trận trong các ma trận $A_1, A_2, ..., A_\sigma$ là Hurwitz nên trong các số $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\sigma$ có ít nhất một số âm. Do đó tồn tại một số T đủ lớn và các khoảng thời gian $\Delta t_1, \Delta t_2, ..., \Delta t_\sigma$ sao cho:

$$[\beta_1(\Delta t_1)\beta_2(\Delta t_2)\cdots\beta_\sigma(\Delta t_\sigma)] \exp\left(\alpha_1\Delta t_1 + \alpha_2\Delta t_2 + \cdots + \alpha_\sigma\Delta t_\sigma\right) < 1.$$

Khi đó:

$$\lim_{r\to\infty} R^r = 0.$$

Từ đó suy ra R là Schur. Áp dụng Định lí (3.2.1) suy ra hệ ổn định mũ. □

Định lý 1.1.4. *Xét hệ (3.3) và giả sử rằng $A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + \cdots + A_\sigma\eta_\sigma$ là ma trận Hurwitz với $\eta_1 \ge 0, \eta_2 \ge 0, ..., \eta_\sigma \ge 0$ sao cho $\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_\sigma$ = 1. Khi đó, tồn tại một số $T > 0$ đủ nhỏ và các khoảng thời gian $\Delta t_1, \Delta t_2, ..., \Delta t_\sigma$ sao cho hệ (3.3) ổn định mũ.*

Chứng minh. Cho $\Delta t_1 = \eta_1 T, \Delta t_2 = \eta_2 T, ..., \Delta t_\sigma = \eta_\sigma T$. Khi đó với T đủ nhỏ thì ma trận

$$Q = \frac{1}{T}\ln\left[\exp\left(A_\sigma\Delta t_\sigma\right)\exp\left(A_{\sigma-1}\Delta t_{\sigma-1}\right)\cdots\exp\left(A_1\Delta t_1\right)\right]$$

có thể biểu diễn như sau:

$$\begin{aligned} Q =& \frac{1}{T}\ln\left[I + A_1\Delta t_1 + A_2\Delta t_2 + \cdots + A_\sigma\Delta t_\sigma\right] + O(T^2) \\ &= (A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + \cdots + A_\sigma\eta_\sigma) + O(T^2), \end{aligned}$$

trong đó

$$\lim_{T\to 0}\frac{O(T^2)}{T} = 0.$$

Từ giả thiết $A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + \cdots + A_\sigma\eta_\sigma$ là ma trận Hurwitz và vì các giá trị riêng của một ma trận phụ thuộc liên tục vào các phần tử của nó nên suy ra tồn tại một số $T > 0$ đủ nhỏ sao cho Q là Hurwitz. Áp dụng Định lý (3.2.1) suy ra hệ ổn định mũ. $\square$

1.2 Ví dụ

Ví dụ 1.2.1. Xét hệ (3.3) với $\sigma = 2$ và

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -25 & 0 \end{bmatrix}.$$

Giả sử rằng $\Delta t_1 = \Delta t_2 = T/2$. Các giá trị riêng của A_1 là $-1 \pm i2$, các giá trị riêng của A_2 là $-3 \pm i4$. Mặc dù, cả A_1 và A_2 đều là ma trận Hurwitz nhưng $A_1 + A_2$ không là ma trận Hurwitz. Từ Định lý (3.2.3), với T đủ lớn, hệ này là ổn định mũ. Ví dụ trên minh họa cho trường hợp với một quy luật chuyển mạch nào đó, hệ chuyển mạch không ổn định mặc dù tất cả các hệ con ổn định tiệm cận và nó cũng minh họa cho Định lí (3.2.1) và (3.2.3).

Ví dụ 1.2.2. Xét hệ (3.3) với $\sigma = 2$ và

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3.5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Giả sử rằng $\Delta t_1 = \Delta t_2 = T/2$. Các giá trị riêng của A_1 là $1 \pm i2$, các giá trị riêng của A_2 là 0.5 và -4. Mặc dù, cả A_1 và A_2 đều không là ma trận Hurwitz nhưng $A_1 + A_2$ lại là ma trận Hurwitz. Do đó từ Định lí (3.2.4), với T đủ nhỏ, hệ là ổn định mũ. Tóm lại, bằng việc áp dụng lí thuyết Floquet, ta suy ra điều kiện cần và đủ để một hệ chuyển mạch tuyến tính tuần hoàn là ổn định mũ. Ta cũng chỉ ra rằng, nếu ít nhất một hệ con ổn định tiệm cận thì tồn tại một quy luật chuyển mạch chậm để hệ này ổn định mũ và nếu trung bình của các hệ con là ổn định thì tồn tại một quy luật chuyển mạch nhanh để hệ này ổn định mũ.