

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

*



BÁO CÁO ĐỒ ÁN TỐT NGHIỆP

Đề tài:

Sinh viên thực hiện : **Nguyễn Lê Hoàng**

Giáo viên hướng dẫn : **Ts. Hà Thị Ngọc Yến**

HÀ NỘI

Ngày 24 tháng 5 năm 2018

BÁO CÁO

Nguyễn Lê Hoàng

Ngày 24 tháng 5 năm 2018

Mục lục

1	Giới thiệu về hệ chuyển mạch	2
1.1	Khái niệm về hệ động lực chuyển mạch	2
1.2	Ví dụ về hệ chuyển mạch	5
1.3	Tính ổn định và khả ổn định của hệ chuyển mạch	6
1.4	Tính ổn định đảm bảo dưới sự chuyển mạch tùy ý	7
1.5	Tính ổn định thời gian chứng	8
2	Tính ổn định của hệ chuyển mạch dưới sự chuyển mạch tùy ý	10
2.1	Một số khái niệm cơ bản	10
2.2	Hệ chuyển mạch phi tuyến	12
2.2.1	Hàm Lyapunov chung	12
2.2.2	Định lý Lyapunov đảo	15
2.3	Hệ chuyển mạch tuyến tính	17
2.3.1	Hệ nối lỏng	18
2.3.2	Hàm Lyapunov phổ dụng	23
2.3.3	Tiêu chuẩn đại số	27

Chương 1

Giới thiệu về hệ chuyển mạch

1.1 Khái niệm về hệ động lực chuyển mạch

Hệ động lực chuyển mạch là một hệ động lực mà việc chuyển đổi trạng thái có vai trò không nhất định trong vận hành cũng như sự ổn định của hệ. Cụ thể hơn, hệ động lực chuyển mạch là hệ ghép hai mức độ. Mức thấp được điều khiển bởi tập các trạng thái vận hành. Mỗi trạng thái vận hành được mô tả bằng một phương trình vi phân hoặc phương trình sai phân. Hệ động lực chuyển mạch tuân thủ nghiêm ngặt các nguyên tắc cơ bản:

- Mỗi thời điểm chỉ có đúng một trạng thái vận hành.
- Việc chuyển đổi giữa các trạng thái không diễn ra đột ngột, tùy ý.

Ví dụ 1.1. Động cơ xe máy số:

Đối với các loại xe máy thông thường như (dream, wave,...) ta có hộp số xoay vòng gồm số Mo, số 1, số 2, số 3, số 4 tương ứng với các trạng thái vận hành của một hệ chuyển mạch. Khi bắt đầu xe ở số Mo. Tại mỗi thời điểm khi xe đang chạy thì ta chỉ có thể đi được một số trong các số trên. Việc chuyển số luôn tuân theo một quy tắc nhất định số tăng dần hoặc giảm dần và quay vòng như sau số Mo \leftrightarrow số 1 \leftrightarrow số 2 \leftrightarrow số 3 \leftrightarrow số 4 \leftrightarrow số Mo.

Một hệ động lực chuyển mạch được mô tả dưới dạng như sau:

$$x^+(t) = f_\sigma(x(t)), \quad (1.1)$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là trạng thái liên tục, σ là trạng thái rời rạc nhận giá trị trong tập $M = \{1, \dots, m\}$ và $f_k, k \in M$ là trường véc-tơ. x^+ là

toán tử đạo hàm với thời gian liên tục $t \in \mathbb{R}$ (tức là: $x^+(t) = \frac{d}{dt}x(t)$) và là toán tử dịch chuyển tịnh tiến với thời gian là rời rạc $t \in \mathbb{N}$ (tức là: $x^+(t) = x(t+1)$). Như vậy, không gian trạng thái liên tục là không gian Euclid n chiều và không gian trạng thái rời rạc là tập chỉ số M có hữu hạn phần tử. Thời gian là tập các số thực với thời gian là liên tục hay là tập các số nguyên với thời gian là rời rạc. Dựa vào tính chất liên tục hoặc rời rạc của thời gian mà ta gọi hệ là hệ chuyển mạch liên tục hay hệ chuyển mạch rời rạc. Khi có m hệ động lực con thì ta gọi là hệ chuyển mạch m -dạng và với $k \in M$ hệ được mô tả dưới dạng:

$$x^+(t) = f_k(x(t)). \quad (1.2)$$

Trạng thái rời rạc σ được gọi là tín hiệu chuyển mạch. Nếu $\sigma(t) = i$ thì ta nói rằng hệ con thứ i được kích hoạt tại thời điểm t . Đặc trưng cho tính chất của hệ chuyển mạch là tại một thời điểm có một và chỉ một hệ con được kích hoạt.

Ký hiệu \mathcal{T} là tập thời gian. \mathcal{T} có thể đó là tập số thực ($\mathcal{T} = \mathbb{R}$) hay tập số nguyên ($\mathcal{T} = \mathbb{N}$). Cho một số thực s , ký hiệu \mathcal{T}_s là tập thời gian mà trong đó thời gian lớn hơn hoặc bằng s (ví dụ: $\mathcal{T}_s = \{t \in \mathcal{T} : t \geq s\}$). Cho hai số thực t_1 và t_2 với $t_1 < t_2$, khoảng thời gian $[t_1, t_2)$ được hiểu là

$$[t_1, t_2) = \{t \in \mathcal{T} : t \geq t_1, t < t_2\}.$$

Mặt khác khoảng thời gian còn có thể hiểu là đoạn $t_2 - t_1$ với thời gian liên tục hay là các điểm thời gian trong $[t_1, t_2)$ với thời gian rời rạc.

Cho hàm liên tục từng khúc χ xác định trên khoảng $[t_1, t_2)$ và thời điểm $t \in (t_1, t_2)$ như sau:

$$\chi(t+) = \lim_{s \downarrow t} \chi(s), \chi(t-) = \lim_{s \uparrow t} \chi(s)$$

với thời gian là liên tục và

$$\chi(t+) = \chi(t+1), \chi(t-) = \chi(t-1)$$

với thời gian là rời rạc.

Khi các hệ con (1.2) được cho trước, dáng điệu của hệ chuyển mạch được quyết định bởi tín hiệu chuyển mạch. Ta sẽ phân biệt quỹ đạo chuyển mạch, tín hiệu chuyển mạch và quy luật chuyển mạch.

Một quỹ đạo chuyển mạch là một hàm liên tục phải, xác định trên một khoảng thời gian hữu hạn, nhận giá trị trong M . Cho trước khoảng

thời gian $[t_0, t_f)$ với $-\infty < t_0 < t_f < +\infty$, một quỹ đạo chuyển mạch p xác định trên đoạn đó được ký hiệu là $p_{[t_0, t_f)}$. Với một quỹ đạo chuyển mạch $p_{[t_0, t_f)}$, thời điểm $t \in (t_0, t_f)$ được gọi là thời điểm bước nhảy nếu:

$$\sigma(t-) \neq \sigma(t).$$

Giả sử rằng các thời điểm bước nhảy trong (t_0, t_f) được sắp xếp theo thứ tự $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$, thì dãy $t_0, t_1, t_2 \dots$ được gọi là dãy thời điểm chuyển mạch của σ trên $[t_0, t_f)$. Tương tự, dãy các trạng thái rời rạc được sắp thứ tự $\sigma(t_0), \sigma(t_1), \sigma(t_2) \dots$ được gọi là dãy chỉ số chuyển mạch của σ trên $[t_0, t_f)$. Dãy cặp thứ tự:

$$(t_0, i_0), (t_1, i_1), \dots, (t_s, i_s)$$

với $i_k = \sigma(t_k)$, được gọi là dãy chuyển mạch của σ trên $[t_0, t_f)$.

Quỹ đạo chuyển mạch được gọi là hoàn toàn xác định nếu có một số hữu hạn thời điểm bước nhảy trên khoảng đó. Tập những quỹ đạo chuyển mạch hoàn toàn xác định trên $[t_0, t_f)$ được ký hiệu là $S_{[t_0, t_f)}$.

Một tín hiệu chuyển mạch là một hàm xác định trên một khoảng thời gian vô hạn, nhận giá trị trong M .

Giả sử rằng θ là một tín hiệu chuyển mạch xác định trên $[t_0, +\infty)$ và $[s_1, s_2)$ là đoạn con có độ dài hữu hạn của $[t_0, +\infty)$ thì quỹ đạo chuyển mạch $p_{[s_1, s_2)}$ được gọi là quỹ đạo con của θ nếu $p(t) = \theta(t)$ với mọi $t \in [s_1, s_2)$. Khái niệm dãy chỉ số và dãy thời điểm chuyển mạch được định nghĩa một cách tương tự như đối với quỹ đạo chuyển mạch. Một tín hiệu chuyển mạch được gọi là hoàn toàn xác định nếu tất cả các quỹ đạo con của nó là hoàn toàn xác định. Ký hiệu $\theta_{[t_0, +\infty)}$ là tín hiệu chuyển mạch θ xác định trên $[t_0, +\infty)$. Tập những tín hiệu chuyển mạch hoàn toàn xác định trên $[t_0, +\infty)$ được ký hiệu bởi $\mathcal{S}_{[t_0, +\infty)}$ hoặc \mathcal{S} khi $t_0 = 0$.

Cho trước một cặp hàm $(x(\cdot), \theta(\cdot))$ trên đoạn $[t_0, t_1)$, trong đó $x : [t_0, t_1) \mapsto \mathbb{R}^n$ là hàm liên tục và $\theta : [t_0, t_1) \mapsto M$ là hàm hằng từng khúc. Cặp $(x(\cdot), \theta(\cdot))$ được gọi là nghiệm của hệ (1.1) trên $[t_0, t_1)$ nếu với hầu hết $t \in [t_0, t_1)$ ta có:

$$x^+(t) = f_{\theta(t)}(x(t)).$$

Hệ chuyển mạch (1.1) được gọi là hoàn toàn xác định (xác định một cách toàn cục) nếu với bất kỳ $\theta \in \mathcal{S}_{[0, +\infty)}$ và $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tồn tại duy nhất một hàm liên tục x trên $[0, +\infty)$ với $x(0) = x_0$ sao cho cặp $(x(\cdot), \theta(\cdot))$ là

một nghiệm của hệ (1.1) trên $[0, +\infty)$.

Khi mỗi hệ con thỏa mãn điều kiện Lipchitz toàn cục:

$$\limsup_{x_1 \neq x_2} \frac{|f_k(x_1) - f_k(x_2)|}{|x_1 - x_2|} < +\infty, \quad k \in M,$$

thì hệ chuyển mạch là hoàn toàn xác định. Trong đề án này, ta luôn giả thiết rằng các hệ con thỏa mãn điều kiện Lipchitz, và do đó tính hoàn toàn xác định của hệ luôn được đảm bảo.

Một quy luật chuyển mạch là một quy tắc chuyển mạch mà sinh ra một quỹ đạo chuyển mạch hoặc một tín hiệu chuyển mạch từ một tập các cấu hình ban đầu. Trong đề án này, ta chỉ xét những quy luật chuyển mạch có dạng:

$$\sigma(t) = \phi(t, \sigma(t-), x(t)), \quad (1.3)$$

trong đó ϕ là hàm hằng từng khúc nhận giá trị trong M .

Một hàm $x(t)$ được gọi là một quỹ đạo trạng thái (liên tục) của hệ (??) qua quy luật chuyển mạch (1.3) trên $[t_0, t_1]$ nếu (1.1) và (1.3) đúng với hầu hết $t \in [t_0, t_1]$. Tín hiệu chuyển mạch tương ứng σ được gọi là sinh bởi quy luật chuyển mạch (1.3) dọc theo $x(\cdot)$ với trạng thái ban đầu x_0 trên $[t_0, t_1]$.

Một quy luật chuyển mạch được gọi là hoàn toàn xác định nếu nó sinh ra một tín hiệu chuyển mạch hoàn toàn xác định với trạng thái ban đầu bất kỳ.

Với hệ chuyển mạch (1.1), một quy luật chuyển mạch hoàn toàn xác định có thể biểu diễn bởi tập $\{\theta^x : x \in \mathbb{R}^n\}$ trong đó θ^x là tín hiệu chuyển mạch được hoàn toàn xác định, sinh bởi quy luật chuyển mạch đó với trạng thái ban đầu x . Hệ chuyển mạch có nghiệm duy nhất với cấu hình ban đầu bất kỳ nếu cả hệ chuyển mạch và quy luật chuyển mạch hoàn toàn xác định. Để thuận tiện, ta ký hiệu quỹ đạo trạng thái liên tục bởi $\phi(\cdot; t_0, x_0, \sigma)$ hoặc $\phi(\cdot; x_0, \sigma)$ khi $t_0 = 0$.

1.2 Ví dụ về hệ chuyển mạch

Cho hệ phương trình trong \mathbb{R}^2 :

$$x^+(t) = \begin{cases} A_1 x(t) & \text{nếu } x_2 \geq 0, \\ A_2 x(t) & \text{nếu } x_2 \leq 0, \end{cases}$$

trong đó $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, t liên tục trên đoạn $[0, +\infty)$ và

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.01 & -0.5 \\ 2 & -0.01 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.01 & -2 \\ 0.5 & -0.01 \end{bmatrix}.$$

Ma trận A_1 và A_2 đều có các giá trị riêng $-0.01 \pm i$ nên từng hệ con đều ổn định tiệm cận. Tuy nhiên, tính ổn định của hệ ghép không chỉ phụ thuộc vào các hệ con mà còn phụ thuộc nhiều vào chế độ chuyển mạch giữa chúng.

1.3 Tính ổn định và khả ổn định của hệ chuyển mạch

Trong các hệ thống động lực, các trạng thái chuyển đổi của hệ thống hoàn toàn được quyết định bởi các cơ chế chuyển đổi. Các hệ thống chuyển mạch có thể rất phức tạp và đa dạng thậm chí khi ta xét một hệ thống con đơn giản cố định. Như vậy ta cần xét đến tính ổn định của các hệ thống chuyển mạch theo các cơ chế chuyển đổi khác nhau. Để xét được tính ổn định, ta cần biết được các khái niệm về tính ổn định của hệ động lực chuyển mạch. Cho $\Upsilon = \{\Lambda^x : x \in \mathbb{R}^n\}$ với Λ^x là tập con khác rỗng của \mathcal{S} - tập các tín hiệu chuyển mạch. Tập này được gọi là tập các tín hiệu chuyển chấp nhận được nếu với mỗi trạng thái ban đầu đều được gán với một tập tín hiệu chuyển mạch. Tập này cảm sinh từ một tập chấp nhận được những quỹ đạo trạng thái liên tục $\{\Gamma_x : x \in \mathbb{R}^n\}$, trong đó Γ_x là tập các quỹ đạo trạng thái với trạng thái bắt đầu x và tín hiệu chuyển mạch trong Λ^x :

$$\Gamma_x = \{\phi(\cdot; 0, x, \theta) : \theta \in \Lambda^x\}.$$

Hàm thực $\alpha : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ được gọi là lớp \mathcal{K} nếu nó là hàm liên tục, tăng chặt và $\alpha(0) = 0$. Hàm α không bị chặn còn được gọi là lớp \mathcal{K}_∞ . Hàm $\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ được gọi là lớp \mathcal{KL} nếu $\beta(\cdot, t)$ là lớp \mathcal{K} với mỗi điểm cố định $t \geq 0$ và $\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(r, t) = 0$ với mỗi $r \geq 0$ cố định.

Định nghĩa 1.2. (Tính ổn định) Giả sử $\Upsilon = \{\Lambda^x : x \in \mathbb{R}^n\}$ là tập các tín hiệu chuyển mạch chấp nhận được. Hệ chuyển mạch 1.1 được gọi là (1) ổn định Υ nếu tồn tại lớp \mathcal{K} hàm ζ và một số thực dương δ sao cho:

$$|\phi(t; 0, x_0, \theta)| \leq \zeta(|x_0|) \quad \forall t \in [0, +\infty), x_0 \in \mathbf{B}_\delta, \theta \in \Lambda^{x_0}$$

(2) tiệm cận ổn định Υ nếu tồn tại lớp \mathcal{KL} hàm ξ sao cho:

$$|\phi(t; 0, x_0, \theta)| \leq \xi(|x_0|, t) \quad \forall t \in [0, +\infty), x_0 \in \mathbb{R}^n, \theta \in \Lambda^{x_0}$$

(3) ổn định mũ Υ nếu tồn tại các số thực dương α và β sao cho:

$$|\phi(t; 0, x_0, \theta)| \leq \beta e^{-\alpha t} |x_0| \quad \forall t \in [0, +\infty), x_0 \in \mathbb{R}^n, \theta \in \Lambda^{x_0}$$

Định nghĩa 1.3. (Tính khả ổn định) Giả sử $\Upsilon = \{\Lambda^x : x \in \mathbb{R}^n\}$ là tập các tín hiệu chuyển mạch chấp nhận được. Hệ chuyển mạch ?? được gọi là

(1) khả ổn định Υ nếu tồn tại lớp \mathcal{K} hàm ζ và một số thực dương δ và luật chuyển $\{\theta^x : x \in \mathbb{R}^n\}$ với $\theta^x \in \Lambda^x$ sao cho

$$|\phi(t; 0, x_0, \theta^x)| \leq \zeta(|x_0|) \quad \forall t \in [0, +\infty), x_0 \in \mathbf{B}_\delta, \theta \in \Lambda^{x_0}$$

(2) khả tiệm cận ổn định Υ nếu tồn tại lớp \mathcal{KL} hàm ξ và luật chuyển $\{\theta^x : x \in \mathbb{R}^n\}$ với $\theta^x \in \Lambda^x$ sao cho

$$|\phi(t; 0, x_0, \theta^x)| \leq \xi(|x_0|, t) \quad \forall t \in [0, +\infty), x_0 \in \mathbb{R}^n, \theta \in \Lambda^{x_0}$$

(3) khả ổn định mũ Υ nếu tồn tại số thực dương α và β và luật chuyển $\{\theta^x : x \in \mathbb{R}^n\}$ với $\theta^x \in \Lambda^x$ sao cho

$$|\phi(t; 0, x_0, \theta^x)| \leq \beta e^{-\alpha t} |x_0| \quad \forall t \in [0, +\infty), x_0 \in \mathbb{R}^n, \theta \in \Lambda^{x_0}$$

Khi các hệ con là cố định, tính chất ổn định được xác định bởi tập chấp nhận được các tín hiệu chuyển mạch. Nếu $\Upsilon_1 \subseteq \Upsilon_2$ thì tính ổn định Υ_2 kéo theo tính ổn định Υ_1 và tính khả ổn định Υ_1 kéo theo tính khả ổn định Υ_2

1.4 Tính ổn định đảm bảo dưới sự chuyển mạch tùy ý

Khi sự chuyển mạch giữa các hệ con xuất hiện theo cách bất kỳ thì khi đó tính ổn định được gọi là tính ổn định đảm bảo. Tập chấp nhận được các tín hiệu chuyển mạch được cho bởi:

$$\Upsilon_{as} = \{\Lambda^x : x \in \mathbb{R}^n\}, \quad \Lambda^x = \mathcal{S}, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

là tập lớn nhất trong tất cả các tập chấp nhận được các tín hiệu chuyển mạch. Do đó, tính ổn định đảm bảo là khái niệm chặt nhất trong các khái niệm ổn định. Đặc biệt, khi hệ chuyển mạch ổn định đảm bảo sẽ kéo theo tính ổn định của các hệ con. Điều ngược lại không đúng và được chứng minh thông qua ví dụ sau.

Ví dụ 1.4. Cho hai hệ con tuyến tính phẳng:

$$\dot{x} = A_1 x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x$$

và

$$\dot{x} = A_2 x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 3a & -1 - a \end{bmatrix} x,$$

trong đó a là một tham số thực không âm. Do các trị riêng của cả hai hệ con đều có phần thực âm nên chúng đều ổn định mũ. Khi $a = 0$ thì hai hệ con trùng nhau nên hệ chuyển mạch là ổn định mũ đảm bảo. Khi $a \approx 36.512$ thì hệ chuyển mạch là ổn định biên đảm bảo. Khi $a > 36.512$ hệ chuyển mạch không ổn định đảm bảo.

1.5 Tính ổn định thời gian chũng

Một tín hiệu chuyển mạch được gọi là thời gian chũng τ nếu $t_{i+1} - t_i \geq \tau$ với t_i và t_{i+1} là hai thời điểm bước nhảy liên tiếp bất kỳ. Cho \mathcal{S}_τ là tập tín hiệu chuyển mạch hoàn toàn xác định với thời gian chũng τ . Rõ ràng rằng $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \supseteq \mathcal{S}_{\tau_1} \supseteq \mathcal{S}_{\tau_2}$ với $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$, và quan hệ tập con là chặt nếu $0 < \tau_1 < \tau_2$.

Tập tín hiệu chuyển mạch \mathcal{S} cho phép sự điều khiển chuyển mạch nhanh một cách tùy ý, thậm chí không có một thời gian chũng đều giữa các thời điểm chuyển mạch.

Ví dụ, cho tín hiệu chuyển mạch:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t \in [k, k + \frac{1}{k+2}), k = 0, 1, 2, \dots, \\ 2 & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

là hoàn toàn xác định, nhưng độ dài của khoảng thời gian chuyển mạch $[k, k + \frac{1}{k+2})$ tiến dần tới 0 khi $k \rightarrow +\infty$. Rõ ràng những tín hiệu chuyển mạch này thuộc \mathcal{S}_0 nhưng nó không thuộc bất kỳ \mathcal{S}_τ nào với $\tau > 0$.

Cố định $\tau \geq 0$, cho một tập chấp nhận được các tín hiệu chuyển mạch:

$$\Upsilon_\tau = \{\Lambda^x : x \in \mathbb{R}^n\}, \quad \Lambda^x = \mathcal{S}_\tau, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Tính ổn định của hệ chuyển mạch theo Υ_τ được gọi là tính ổn định thời gian chứng τ . Một điều kiện cần đối với tính ổn định thời gian chứng τ là mỗi hệ con đều ổn định. Điều ngược lại đúng cho trường hợp ổn định mũ, tức là nếu các hệ con ổn định mũ thì hệ chuyển mạch ổn định mũ thời gian chứng τ với τ đủ lớn. Thật vậy, từ tính ổn định mũ của các hệ con, ta suy ra sự tồn tại của một thời gian $T > 0$ sao cho:

$$|\phi_i(t; x_0)| \leq \frac{1}{2}|x_0| \quad \forall t \in \mathcal{T}_T, x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

trong đó $\phi_i(\cdot; x_0)$ ký hiệu cho quỹ đạo trạng thái của hệ con thứ i với $x(0) = x_0$. Do đó hệ chuyển mạch là ổn định mũ thời gian chứng τ . Tuy nhiên, khẳng định này không đúng cho trường hợp ổn định tiệm cận và ổn định biên.

Ví dụ 1.5. Cho

Chương 2

Tính ổn định của hệ chuyển mạch dưới sự chuyển mạch tùy ý

2.1 Một số khái niệm cơ bản

Trong chương này, ta sử dụng thuật ngữ "ổn định đảm bảo" để mô tả tính ổn định của hệ chuyển mạch khi sự chuyển mạch xuất hiện một cách tùy ý.

Xét hệ động lực chuyển mạch sau:

$$x^+(t) = f(x(t), \sigma(t)), \quad (2.1)$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là trạng thái liên tục, $\sigma(t) \in M = \{1, \dots, m\}$ là trạng thái rời rạc và $f : \mathbb{R}^n \times M \mapsto \mathbb{R}^n$ là trường vec-tơ với $f(\cdot, i)$ là hàm liên tục Lipschitz với mọi $i \in M$.

Ta định nghĩa hàm $f_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$:

$$f_i(x) = f(x, i), \quad i \in M.$$

Hệ 2.1 được viết lại

$$x^+(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)). \quad (2.2)$$

Trong chương này, ta sẽ đi phân tích tính ổn định của hệ 2.2. Ta có một vài giả thiết sau:

- (1) $f_i(0) = 0$ với mọi $i \in M$, đó là gốc cân bằng.
- (2) Hệ là liên tục Lipschitz toàn cục, tồn tại hằng số dương L sao cho

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, i \in M, \quad (2.3)$$

đảm bảo tính xác định được của hệ thống chuyển mạch.

Ta định nghĩa $\phi(t; t_0, x_0, \sigma)$ là trạng thái chuyển liên tục của hệ 2.2 tại thời điểm t với điều kiện ban đầu $x(t_0) = x_0$ và cơ chế chuyển σ . Ta sử dụng $\phi(t; x_0, \sigma)$ là nghiệm tại thời điểm $t_0 = 0$. Với mọi điều kiện ban đầu $x(t_0) = x_0$ và thời điểm $t > t_0$, với thời gian rời rạc ta có

$$\phi(t; t_0, x_0, \sigma) = f_{\sigma(t-1)} \circ \cdots \circ f_{\sigma(t_0+1)} \circ f_{\sigma(t_0)}(x_0), \quad (2.4)$$

trong đó \circ là hàm hợp, $f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x))$. Với thời gian là liên tục ta có

$$\phi(t; t_0, x_0, \sigma) = \Phi_{t-t_s}^{f_{i_s}} \circ \Phi_{t_s-t_{s-1}}^{f_{i_{s-1}}} \circ \cdots \circ \Phi_{t_2-t_1}^{f_{i_1}} \circ \Phi_{t_1-t_0}^{f_{i_0}}(x_0) \quad (2.5)$$

trong đó $\Phi_t^f(x_0)$ là giá trị của tích phân hàm f đi qua $x(0) = x_0$ và $(t_0, i_0), \dots, (t_s, i_s)$ là trình tự chuyển của σ trong $[t_0, t]$.

Để đưa ra định nghĩa về tính ổn định của hệ chuyển mạch, ta cần thêm một vài định nghĩa sau. Gọi $d(x, y)$ là khoảng cách Euclide giữa x và y . Cho tập $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ và véc-tơ $x \in \mathbb{R}^n$, đặt $|x|_\Omega = \inf_{y \in \Omega} d(x, y)$. Cho tập $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ và một số thực dương τ , gọi $\mathbf{B}(\Omega, \tau)$ là τ -lân cận của Ω :

$$\mathbf{B}(\Omega, \tau) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_\Omega \leq \tau\}.$$

Tương tự, gọi $\mathbf{H}(\Omega, \tau)$ là τ -mặt cầu của Ω :

$$\mathbf{H}(\Omega, \tau) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_\Omega = \tau\}.$$

Đặc biệt, hình cầu đóng $\mathbf{B}(\{0\}, \tau)$ được ký hiệu là \mathbf{B}_τ , và mặt cầu $\mathbf{H}(\{0\}, \tau)$ được ký hiệu là \mathbf{H}_τ .

Định nghĩa 2.1. Gốc cân bằng của hệ 2.2 được gọi là

(1) đảm bảo hút toàn cục nếu

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\phi(t; x, \sigma)| = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \sigma \in \mathcal{S}$$

(2) đảm bảo hút toàn cục đều nếu với mọi $\delta > 0$ và $\epsilon > 0$, tồn tại $T > 0$ sao cho

$$|\phi(t; x, \sigma)| < \epsilon \quad \forall t \in \mathcal{T}_T, |x| < \delta, \sigma \in \mathcal{S}$$

(3) đảm bảo ổn định nếu với mọi $\epsilon > 0$ và $\sigma \in \mathcal{S}$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$|\phi(t; x, \sigma)| < \epsilon \quad \forall t \in \mathcal{T}_0, |x| < \delta$$

(4) đảm bảo ổn định đều nếu tồn tại $\delta > 0$ và lớp \mathcal{K} hàm γ sao cho

$$|\phi(t; x, \sigma)| \leq \gamma(|x|) \quad \forall t \in \mathcal{T}_0, |x| < \delta, \sigma \in \mathcal{S}$$

(5) đảm bảo ổn định tiệm cận toàn cục nếu nó vừa đảm bảo ổn định và đảm bảo hút toàn cục (6) đảm bảo ổn định tiệm cận đều toàn cục nếu nó vừa đảm bảo ổn định đều và đảm bảo hút toàn cục đều (7) đảm bảo ổn định mũ toàn cục nếu với mọi $\sigma \in \mathcal{S}$, tồn tại $\alpha > 0$ và $\beta > 0$ sao cho

$$|\phi(t; x, \sigma)| \leq \beta e^{-\alpha t} |x| \quad \forall t \in \mathcal{T}_0, x \in \mathbb{R}^n$$

(8) đảm bảo ổn định mũ đều toàn cục nếu tồn tại $\alpha > 0$ và $\beta > 0$ sao cho

$$|\phi(t; x, \sigma)| \leq \beta e^{-\alpha t} |x| \quad \forall t \in \mathcal{T}_0, x \in \mathbb{R}^n, \sigma \in \mathcal{S}$$

Hệ được đảm bảo ổn định/hút nếu gốc cân bằng của nó là đảm bảo ổn định/hút. Từ chương này trở đi để cho gọn các từ "đảm bảo" và "toàn cục" sẽ được loại bỏ. Sự ổn định tiệm cận/mũ thống nhất phù hợp trong định nghĩa 1.2.

2.2 Hệ chuyển mạch phi tuyến

Trong phần này, ta sẽ xét vấn đề ổn định của hệ chuyển mạch phi tuyến

$$x^+(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)) \quad (2.6)$$

dưới sự chuyển mạch bất kỳ.

2.2.1 Hàm Lyapunov chung

Hàm liên tục $V(x) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ với $V(0) = 0$ là:

- (1) xác định dương ($V(x) \succ 0$) nếu $V(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$
- (2) nửa xác định dương ($V(x) \succeq 0$) nếu $V(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$
- (3) tia không bị chặn nếu tồn tại lớp \mathcal{K}_∞ hàm $\alpha(\cdot)$ sao cho $V(x) \geq \alpha(|x|) \forall x \in \mathbb{R}^n$

Định nghĩa 2.2. Cho Ω là lân cận ở gốc. Hàm $V : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ được gọi là hàm Lyapunov yếu (CWLF) cho hệ chuyển mạch (2.6) nếu

- (1) nó là nửa liên tục dưới trên Ω
- (2) nó chấp nhận lớp \mathcal{K} hàm α_1 và α_2 sao cho

$$\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|) \quad \forall x \in \Omega$$

(3) với mọi $x \in \Omega$ và $i \in M$ ta có

$$\mathcal{D}^+V(x)|_{f_i} = \limsup_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{V(\phi(\tau; 0, x, \hat{i})) - V(x)}{\tau} \leq 0$$

với thời gian là liên tục, trong đó \hat{i} là hằng tín hiệu chuyển $\sigma(t) = i \forall t$, và

$$\mathcal{D}^+V(x)|_{f_i} = V(f_i(x)) - V(x) \leq 0$$

với thời gian là rời rạc

Lưu ý: Hàm Lyapunov yếu không cần là liên tục. Thực tế, ngay cả một hệ thống phi tuyến ổn định đều $\dot{x} = f(x)$ với f là hàm đủ trơn có thể không chấp nhận hàm Lyapunov yếu nào cả.

Định nghĩa 2.3. Hàm $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ được gọi là hàm Lyapunov mạnh (CLF) cho hệ chuyển mạch (2.6) nếu

- (1) nó liên tục tại mọi điểm và liên tục khả vi trừ điểm gốc
- (2) nó chấp nhận lớp \mathcal{K}_∞ bị chặn là lớp \mathcal{K}_∞ hàm α_1 và α_2 sao cho

$$\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

- (3) có lớp \mathcal{K} hàm $\alpha_3 : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+$ sao cho

$$\mathcal{D}^+V(x)|_{f_i} \leq -\alpha_3(|x|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, i \in M \quad (2.7)$$

Với thời gian là liên tục thì

$$\mathcal{D}^+V(x)|_{f_i} = \limsup_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{V(x + f_i(x)\tau) - V(x)}{\tau} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, i \in M, \quad (2.8)$$

do tính liên tục Lipschitz địa phương của V . Cho hàm khả vi liên tục V ta có

$$\mathcal{D}^+V(x)|_f = \frac{d}{dt}V(x) = L_fV(x) = \frac{\partial}{\partial x}V(x)f(x).$$

Giả sử hệ (2.6) chấp nhận một hàm Lyapunov yếu. Với mọi vết trạng thái $x(t) = \phi(t; x_0, \sigma)$ trên σ , ta có $V(x(t)) \leq V(x_0)$ với mọi $t \geq 0$. Với mọi $\epsilon > 0$, chọn δ sao cho

$$\mathbf{B}_\delta \subset \Omega, \quad \{x : V(x) \leq \delta\} \subset \mathbf{B}_\epsilon.$$

Ta có $|x(t)| \leq \epsilon$ với mọi $t \geq 0$ nếu $x_0 \in \mathbf{B}_\delta$ thì hệ là ổn định đều.

Giả sử hệ (2.6) chấp nhận hàm Lyapunov V . Ta chỉ ra rằng hệ là tiệm

cận ổn định. Ta giả sử hệ là với thời gian liên tục, và với trường hợp thời gian rời rạc chỉ thể chỉ ra theo một cách tương tự. Cố định trạng thái bắt đầu $x_0 \neq 0$ và tín hiệu chuyển σ , và $x(t) = x(t; x_0, \sigma)$. Theo định nghĩa 2.3

$$\limsup_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{V(x(t+\tau)) - V(x)}{\tau} \leq -\alpha_4(V(x(t))) \quad \forall t \in \mathcal{T}_0, \quad (2.9)$$

trong đó $\alpha_4 = \alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}$. Định nghĩa hàm $\eta : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$

$$\eta(t) = \begin{cases} -\int_1^t \frac{1}{\min(\tau, \alpha_4(\tau))} d\tau, & t \in (0, 1), \\ -\int_1^t \frac{1}{\alpha_4(\tau)} d\tau, & t \geq 1. \end{cases}$$

η là hàm giảm, khả vi, và $\lim_{t \downarrow 0} \eta(t) = +\infty$. Từ (2.9) ta có

$$\eta(V(x(t))) - \eta(V(x_0)) = \int_0^1 \dot{\eta}(V(x(\tau))) dV(x(s)) \geq \int_0^1 1 ds = t \quad \forall t \geq 0 \quad (2.10)$$

Cho hàm $\pi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ xác định bởi:

$$\pi(s, t) = \begin{cases} 0, & s = 0, \\ \eta^{-1}(\eta(s) + t), & s > 0. \end{cases}$$

Ta thấy π thuộc lớp \mathcal{KL} . Vì η tăng chặt nên từ (2.10) ta có:

$$V(x(t)) \leq \pi(V(x_0), t) \quad \forall t \geq 0.$$

Lấy hàm β thuộc lớp \mathcal{KL} xác định bởi công thức:

$$\beta(s, t) = \alpha_1^{-1}(\pi(\alpha_2(s), t)), \quad s, t \in \mathbb{R}_+.$$

Có thể thấy rằng

$$|x(t)| \leq \beta(|x_0|, t) \quad \forall t \geq 0.$$

Với $\epsilon > 0$ bất kỳ, lấy $\delta = \bar{\beta}^{-1}(\epsilon)$ với $\bar{\beta}(\cdot) = \beta(\cdot, 0)$. Khi đó ta có:

$$|\phi(t; 0, x, \sigma)| \leq \epsilon \quad \forall x_0 \in \mathbf{B}_\delta, t \in \mathcal{T}_0, \sigma \in \mathcal{S}.$$

Từ đó suy ra hệ ổn định đều.

Mặt khác, với $\epsilon > 0$ và $\delta > 0$ bất kỳ, cho $T = \hat{\beta}^{-1}(\epsilon)$ với $\hat{\beta}(\cdot) = \beta(\delta, \cdot)$ suy ra:

$$|\phi(t; 0, x, \sigma)| \leq \epsilon \quad \forall x_0 \in \mathbf{B}_\delta, t \in \mathcal{T}_T, \sigma \in \mathcal{S}.$$

Vậy hệ là hút đều. Từ đó suy ra hệ ổn định tiệm cận đều.

Tổng kết, ta có mệnh đề dưới đây:

Mệnh đề 2.4. Hệ chuyển mạch 2.6 ổn định đều nếu nó có một hàm Lyapunov chung yếu, và ổn định tiệm cận đều nếu nó có một hàm Lyapunov chung.

Ví dụ 2.5. Cho hệ chuyển mạch liên tục 2-dạng, phẳng:

$$\frac{d}{dt}x(t) = f_\sigma(x(t))$$

với

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 - x_2^k \end{pmatrix}, \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - x_2^k \end{pmatrix},$$

trong đó k là số tự nhiên lẻ bất kỳ. Ta có thể kiểm tra bằng hàm $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ là hàm Lyapunov chung yếu của hệ trên. Từ mệnh đề (2.4) ta có hệ ổn định đều. Tuy nhiên, hệ này không có một hàm Lyapunov chung nào. Thật vậy, nếu hệ thừa nhận một hàm Lyapunov chung thì hệ tạo bởi tổ hợp lồi bất kỳ các hệ con đó phải ổn định tiệm cận, tức là hệ

$$\dot{x}(t) = \omega f_1(x(t)) + (1 - \omega)f_2(x(t))$$

là ổn định tiệm cận với $\omega \in [0, 1]$ bất kỳ.

Cho $\omega = \frac{1}{2}$, ta có thể thấy rằng trạng thái bất kỳ trên trục x_1 là một điểm cân bằng, do đó hệ tổ hợp lồi không ổn định tiệm cận. Điều này mâu thuẫn với giả thiết phản chứng. Vậy hệ ban đầu không có một hàm Lyapunov chung nào.

2.2.2 Định lý Lyapunov đảo

Theo mệnh đề (2.4) thì sự tồn tại của hàm Lyapunov chung yếu/mạnh sẽ đảm bảo tính ổn định đều/tiệm cận đều của hệ chuyển mạch. Vậy liệu rằng mệnh đề đảo lại còn đúng hay không? Ta sẽ có được câu trả lời qua mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 2.6. Hệ chuyển mạch ổn định đều bất kỳ sẽ có một hàm Lyapunov chung yếu và hệ chuyển mạch ổn định tiệm cận đều bất kỳ có một hàm Lyapunov chung.

Chứng minh. Trước tiên ta sẽ chứng minh khẳng định thứ nhất.

Giả sử hệ ổn định đều. Lấy $\epsilon > 0$ cố định, và $\delta > 0$ được xác định như trong định nghĩa (2.1). Ta xây dựng hàm $V : \mathbf{B}_\delta \mapsto \mathbb{R}_+$ xác định bởi:

$$V(x) = \sup_{t \in \mathcal{T}_0, \sigma \in \mathcal{S}} |\phi(t; 0, x, \sigma)|. \quad (2.11)$$

Rõ ràng rằng, hàm này hoàn toàn xác định và xác định dương trong \mathbf{B}_δ . Cho $\Omega = \mathbf{B}_\delta^o$, với D^o là ký hiệu cho phần trong của tập D . Ta sẽ đi chứng minh V là hàm Lyapunov chung yếu của hệ.

Để chứng minh tính nửa liên tục dưới của hàm V , ta cố định một $x \in \mathbf{B}_\delta$. Với $\epsilon > 0$ bất kỳ, tồn tại một thời điểm $t_x \geq 0$ và $\sigma_x \in \mathcal{S}$ sao cho

$$|\phi(t_x; 0, x, \sigma_x)| \geq V(x) - \epsilon.$$

Cho $\eta = e^L$ trong trường hợp hệ liên tục và $\eta = L$ trong trường hợp hệ rời rạc. Từ giả thuyết Lipchitz (2.3) ta suy ra:

$$\begin{aligned} V(y) &\geq |\phi(t_x; 0, y, \sigma_x)| \geq |\phi(t_x; 0, x, \sigma_x)| - |\phi(t_x; 0, y, \sigma_x) - \phi(t_x; 0, x, \sigma_x)| \\ &\geq |\phi(t_x; 0, x, \sigma_x)| - \eta^{t_x} |x - y| \geq V(x) - 2\epsilon \quad \forall y \in \mathbf{B}(x, \frac{\epsilon}{\eta^{t_x}}) \cap \mathbf{B}_\delta. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra V là nửa liên tục dưới.

Tiếp theo, với bất kỳ $x \in \mathbf{B}_\delta$, $s \in \mathcal{T}_0$ và $i \in M$ ta có:

$$\begin{aligned} V(\phi(s; 0, x, i)) &= \sup_{t \in \mathcal{T}_0, \sigma \in \mathcal{S}} |\phi(t; 0, \phi(s; 0, x, i), \sigma)| \leq \sup_{t \in \mathcal{T}_0, \sigma \in \mathcal{S}} |\phi(t+s; 0, x, \sigma)| \\ &\leq \sup_{t+s \in \mathcal{T}_0, \sigma \in \mathcal{S}} |\phi(t+s; 0, x, \sigma)| = V(x). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $D^+V(x)|_{f_i} \leq 0$ với $i \in M$ bất kỳ.

Cuối cùng $V(x) \geq |x|$ với mọi $x \in \mathbf{B}_\delta$. Mặt khác, do tính ổn định đều của hệ nên tồn tại hàm α_2 thuộc lớp \mathcal{K} sao cho $|\phi(t; 0, x, \sigma)| \leq \alpha_2(|x|)$ với mọi $x \in \mathbf{B}_\delta$, $t \in \mathcal{T}_0$ và $\sigma \in \mathcal{S}$. Do đó ta có $|x| \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|)$ với mọi $x \in \mathbf{B}_\delta$.

Từ đó suy ra hàm V trong (2.11) là hàm Lyapunov chung yếu của hệ chuyển mạch.

Để chứng minh khẳng định thứ hai của mệnh đề, ta dựa vào bổ đề dưới đây cho hệ không chuyển mạch.

Bổ đề 2.7. Cho hệ bất định

$$\dot{x}(t) = f(x(t), d(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, d(t) \in D \subset \mathbb{R}^p. \quad (2.12)$$

Giả sử rằng f là liên tục Lipchitz địa phương theo x và đều theo d , D là một tập compact và $d \in PC(\mathcal{T}_0, D)$ - tập các hàm liên tục từng khúc ánh xạ từ \mathcal{T}_0 vào D . Giả sử rằng hệ là đầy đủ tiến và tập con compact χ của \mathbb{R}^n là bất biến tiến theo nghĩa là $x(t) \in \chi$ với mọi $x_0 \in \chi$ và $d \in PC(\mathcal{T}_0, D)$. Nếu tồn tại một hàm β thuộc lớp \mathcal{KL} sao cho:

$$|x(t)|_\chi \leq \beta(|x_0|_\chi, t), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, d \in PC(\mathcal{T}_0, D), \quad (2.13)$$

thì sẽ tồn tại một hàm Lyapunov V của hệ (2.12), tức là V liên tục khắp nơi, khả vi vô hạn trên \mathbb{R}^n

chi và tồn tại hai hàm $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ và α_3 thuộc lớp \mathcal{K} sao cho:

$$\alpha_1(|x|_\chi) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|_\chi)$$

và

$$L_f V(x) \leq -\alpha_3(|x|_\chi) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, d \in D.$$

Chứng minh bổ đề này khá phức tạp về mặt kỹ thuật và được trình bày chi tiết trong [??, ??].

Áp dụng bổ đề trên cho trường hợp $D = M$ và $\chi = \{0\}$ ta suy ra khẳng định thứ hai của mệnh đề (2.6).

Từ mệnh đề (2.4) và (2.6) ta có định lý sau:

Định lý 2.8. *Hệ chuyển mạch (2.6) là ổn định đều khi và chỉ khi nó có một hàm Lyapunov chung yếu, và ổn định tiệm cận đều khi và chỉ khi nó có một hàm Lyapunov chung.*

Như vậy, định lý này đưa ra phép kiểm tra tính ổn định bằng việc tìm một hàm Lyapunov chung (yếu) thích hợp và mở rộng lý thuyết Lyapunov một cách tổng quát hơn cho hệ chuyển mạch. Mặt khác, như đã biết, trong lý thuyết Lyapunov không có phương pháp tổng quát nào để xây dựng hàm Lyapunov. Tuy nhiên, với một số lớp các hệ có cấu trúc hoặc tính chất đặc biệt thì việc xây dựng hàm Lyapunov sẽ dễ dàng hơn.

2.3 Hệ chuyển mạch tuyến tính

Trong phần này, ta tập trung vào một hệ chuyển mạch đặc biệt nhưng cũng rất quan trọng, hệ mà trong đó các hệ con đều là tuyến tính bất

biến theo thời gian. Các hệ này được gọi là hệ chuyển mạch tuyến tính và có dạng:

$$x^+(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \quad x(0) = x_0, \quad (2.14)$$

trong đó $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \in M$, là các ma trận hằng số.

Đặt $\mathbf{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$. \mathbf{A} có thể được xem như hệ các ma trận của hệ chuyển mạch tuyến tính.

Do tính tuyến tính của các hệ con, nghiệm của hệ xác định bởi

$$\phi(t; t_0, x_0, \sigma) = \Phi(t; t_0, \sigma), \quad (2.15)$$

trong đó $\Phi(t; t_0, \sigma)$ là ma trận chuyển trạng thái. Với thời gian rời rạc, ma trận chuyển trạng thái là

$$\Phi(t; t_0, \sigma) = A_{\sigma(t-1)} \cdots A_{\sigma(t_0)}$$

còn đối với thời gian là liên tục

$$\Phi(t; t_0, \sigma) = e^{A_{i_s}(t-t_s)} e^{A_{i_{s-1}}(t_s-t_{s-1})} \cdots e^{A_{i_1}(t_2-t_1)} e^{A_{i_0}(t_1-t_0)},$$

trong đó t_0, t_1, \dots, t_s và i_0, i_1, \dots, i_s là thời gian và thứ tự chuyển trong $[t_0, t)$.

Ta có

$$\phi(t; t_0, \lambda x_0, \sigma) = \lambda \phi(t; t_0, x_0, \sigma) \quad \forall t, t_0, x_0, \sigma, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.16)$$

gọi là tính chất tuyến tính xuyên tâm và

$$\phi(t; t_0, x_0, \sigma) = \phi(t - t_0; 0, x_0, \sigma') \quad \forall t, t_0, x_0, \sigma, \quad (2.17)$$

trong đó $\sigma'(t) = \sigma(t + t_0)$ với mọi t . Phần đằng sau được biết là tính bất biến của thời gian.

Do có hai tính bất biến trên, với hệ chuyển mạch tuyến tính, tính hút địa phương tương đương với tính hút toàn cục, và không mất tính tổng quát thời gian ban đầu luôn là $t_0 = 0$.

2.3.1 Hệ nối lỏng

Khi phân tích tính ổn định của hệ chuyển mạch tuyến tính, các tín hiệu chuyển có thể lấy tùy ý. Khi các tín hiệu chuyển mạch là hằng số và

được lấy trong tập hữu hạn các giá trị rời rạc hữu hạn, thì ta có thể làm trơn, làm mịn chúng. Điều này dẫn đến hệ nối lỏng hoặc mở rộng như sau.

Cho

$$\mathcal{W} = \{w \in \mathbb{R}^m : w_i \geq 0, i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m w_i \leq 1\}$$

$$A(w) = \sum_{i=1}^m w_i A_i, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.18)$$

và

$$\mathcal{A}(x) = \{A(\omega)x : \omega \in \mathcal{W}\}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.19)$$

Xét hệ bao hàm thức vi phân/sai phân (lồi)

$$x^+(t) \in \mathcal{A}(x(t)) \quad (2.20)$$

và hệ bất định tuyến tính đa hộp (polytopic linear uncertain system)

$$x^+(t) = A(w(t))x(t), \quad (2.21)$$

trong đó $w(\cdot)$ là hàm liên tục từng khúc. Thông thường hệ (2.20) được gọi là bao hàm thức vi phân/sai phân (nối lỏng). Chú ý rằng, cả hệ (2.20) và (2.21) có thể kết nối với hệ chuyển mạch tuyến tính theo kiểu 1 – 1, và hệ chuyển mạch tuyến tính có thể được xem như là hệ cực biên của các hệ khác.

Nghiệm của (2.20) là một vectơ $x : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}^n$ với các phần tử liên tục tuyệt đối, thỏa mãn (2.20) hầu khắp nơi. Nghiệm của hệ (2.21) được hiểu theo nghĩa tương tự.

Ký hiệu Γ_s là tập nghiệm của hệ chuyển mạch tuyến tính, Γ_p là tập nghiệm của hệ đa hộp và Γ_d là tập nghiệm của hệ bao hàm thức vi phân. Ta có thể thấy rằng

$$\Gamma_s \subset \Gamma_p \subset \Gamma_d$$

Tuy nhiên, với những giả thiết khá nhẹ, mỗi nghiệm của hệ bao hàm thức vi phân có thể xấp xỉ bởi một quỹ đạo của hệ chuyển mạch tuyến tính theo nghĩa được xác định dưới đây.

Bổ đề 2.9. Cố định $\xi \in \mathbb{R}^n$ và $z : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}^n$ là nghiệm của

$$\dot{z}(t) \in \mathcal{A}(z(t)), \quad z(0) = \xi.$$

Đặt $r : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ là hàm liên tục thỏa mãn $r(t) > 0$ với mọi $t \geq 0$.
Tồn tại η với $|\eta - \xi| \leq r(0)$ và nghiệm $x : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}^n$ của

$$\dot{x}(t) \in \{A_1x(t), \dots, A_mx(t)\}, \quad x(0) = \eta,$$

sao cho

$$|z(t) - x(t)| \leq r(t) \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Bổ đề trên thiết lập mối liên hệ giữa tính ổn định của hệ chuyển mạch tuyến tính với tính ổn định của hệ nối lỏng của nó. Giả sử nghiệm của hệ tuyến tính là hội tụ thì nghiệm của hệ nối lỏng cũng hội tụ. Với thời gian rời rạc, mối tương quan này vẫn đúng.

Hệ quả 2.10. Các phát biểu sau là tương đương:

- (1) Hệ chuyển mạch tuyến tính là hút.
- (2) Hệ bất định tuyến tính đa hộp là hút.
- (3) Hệ bao hàm thức vi phân tuyến tính là hút.

Đối với hệ tuyến tính, tính hút cũng thể hiện tính ổn định mũ. Với hệ chuyển mạch tuyến tính cũng có thể chứng minh một vài tính chất là tương đương với nhau.

Mệnh đề 2.11. Các phát biểu sau là tương đương:

- (1) Hệ chuyển mạch tuyến tính là hút.
- (2) Hệ chuyển mạch tuyến tính là hút đều.
- (3) Hệ chuyển mạch tuyến tính là tiệm cận ổn định.
- (4) Hệ chuyển mạch tuyến tính là tiệm cận ổn định đều.
- (5) Hệ chuyển mạch tuyến tính là ổn định mũ.
- (6) Hệ chuyển mạch tuyến tính là ổn định mũ đều.

Chứng minh Trước hết, tính ổn định mũ đều tương đương với mọi tính ổn định khác, và tính hút cũng tương đương với mọi tính ổn định khác. Vì thế, ta chỉ cần chứng minh tính hút tương đương với tính ổn định mũ đều.

Với mọi trạng thái x trên hình cầu đơn vị, theo tính hút ta có thời điểm t^x sao cho

$$\sup_{\sigma \in \mathcal{S}} |\phi(t^x; 0, x, \sigma)| < \frac{1}{2}. \quad (2.22)$$

Với mọi x cố định $x \in \mathbf{H}_1$, ta cần chứng minh $\sup_{\sigma \in \mathcal{S}} |\phi(t^x; 0, y, \sigma)| \leq \frac{1}{2}$

nếu y là lân cận của x . Đặt $\eta = \max_{i \in M} |A_i|$. Theo (2.15) và (2.22) ta có

$$\begin{aligned} |\phi(t^x; 0, y, \sigma)| &= |\phi(t^x; 0, x, \sigma) + \phi(t^x; 0, y - x, \sigma)| \\ &\leq |\phi(t^x; 0, x, \sigma)| + |\phi(t^x; 0, y - x, \sigma)| \\ &\leq |\phi(t^x; 0, x, \sigma)| + e^{\eta t^x} |y - x| \\ &\leq \frac{1}{2} \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}, |y - x| \leq e^{-\eta t^x} \left(\frac{1}{2} - \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} |\phi(t^x; 0, x, \sigma)| \right). \end{aligned}$$

Với mọi $x \in \mathbf{H}_1$, lân cận N_x của x sao cho

$$\sup_{\sigma \in \mathcal{S}} |\phi(t^x; 0, y, \sigma)| \leq \frac{1}{2} \quad \forall y \in N_x.$$

Vì x thuộc mặt cầu đơn vị nên

$$\bigcup_{x \in \mathbf{H}_1} N_x \supseteq \mathbf{H}_1.$$

Vì mặt cầu đơn vị là tập compact nên theo định lý phủ hữu hạn, tồn tại số hữu hạn l và tập các trạng thái x_1, \dots, x_l trên mặt cầu đơn vị sao cho

$$\bigcup_{i=1}^l N_{x_i} \supseteq \mathbf{H}_1.$$

Do đó, ta có thể chia mặt cầu đơn vị thành l phần R_1, \dots, R_l sao cho

- (a) $\bigcup_{i=1}^l R_i = \mathbf{H}_1$, và $R_i \cap R_j = \emptyset$ với $i \neq j$;
- (b) với mỗi $i, 1 \leq i \leq l, x_i \in R_i$, và

$$\sup_{\sigma \in \mathcal{S}} |\phi(t^{x_i}; 0, y, \sigma)| \leq \frac{1}{2}, \quad y \in R_i$$

Định nghĩa nón

$$\Omega_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \lambda \neq 0, y \in R_i | x = \lambda y\}, \quad i = 1, \dots, l.$$

Đặt $\Omega_0 = 0$. Có $\bigcup_{i=0}^l \Omega_i = \mathbb{R}^n$ và $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ với $i \neq j$. Đặc biệt, Ω_0 là bất biến với chuyển mạch và hình thành sự cân bằng bất biến.

Với mọi $i = 1, \dots, l$ và $x \in \Omega_i$, đặt $t_x = t^{x_i}$:

$$\max_{x \neq 0} t_x = \max_{i=1}^l t^{x_i} = T_1 < +\infty. \quad (2.23)$$

Theo tính chất (a) và (b), với mọi $x \in \Omega_i, i = 1, \dots, l$, mọi tín hiệu chuyển σ luôn mang x vào trong hình cầu $\mathbf{B}_{\frac{|x|}{2}}$ tại thời điểm t_x .

Cuối cùng, với mọi trạng thái bắt đầu x_0 và tín hiệu chuyển σ , ta định nghĩa đệ quy tập thời gian và trạng thái

$$s_0 = 0,$$

$$z_0 = x_0$$

$$s_k = s_{k-1} + t_{z_{k-1}},$$

$$z_k = \phi(s_k; 0, x_0, \sigma), \quad k = 1, 2, \dots.$$

Có thể thấy rằng

$$s_k \leq kT_1, \quad |z_{k+1}| \leq \frac{|z_k|}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.24)$$

nghĩa là

$$|\phi(s_k; 0, x_0, \sigma)| \leq \frac{|x_0|}{2^k} \leq e^{-\gamma s_k} |x_0|, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

trong đó $\gamma = \frac{\ln 2}{T_1}$. Mặt khác, đặt $\eta = 2 \exp(T_l \max\{\|A_1\|, \dots, \|A_m\|\})$.

Ta có

$$|\phi(t; 0, x_0, \sigma)| \leq \eta e^{-\gamma t} |x_0| \quad \forall t \geq 0 \quad (2.25)$$

Từ đó suy ra hệ là ổn định mũ đều.

Qua sự tương đương giữa tính hút và tính ổn định mũ, cùng với hệ quả 2.10 ta được kết quả sau.

Định lý 2.12. *Các phát biểu dưới đây là tương đương cho hệ chuyển mạch tuyến tính và hệ nối lỏng:*

- (1) Hệ có tính hút.
- (2) Hệ có tính tiệm cận ổn định.
- (3) Hệ có tính ổn định mũ.
- (4) Hệ chuyển mạch có một hàm Lyapunov chung.

Ta định nghĩa

$$\varrho(\mathbf{A}) = \limsup_{t \rightarrow +\infty, \sigma \in \mathcal{S}, |x|=1} \frac{\ln |\phi(t; 0, x, \sigma)|}{t}, \quad (2.26)$$

là số mũ Lyapunov lớn nhất, xác định tỷ lệ cao nhất có thể nghiệm phân kỳ, và

$$R(\mathbf{A}) = \{\phi(t; 0, x, \sigma) : t \in \mathcal{T}_0, x \in \mathbf{H}_1, \sigma \in \mathcal{S}\}, \quad (2.27)$$

là tập trạng thái đạt được của hệ trên mặt cầu đơn vị.

Định nghĩa 2.13. Hệ chuyển mạch tuyến tính \mathbf{A} được gọi là

- (1) ổn định nếu $\rho(\mathbf{A}) < 0$
- (2) ổn định biên nếu $\rho(\mathbf{A}) = 0$ và tập $R(\mathbf{A})$ bị chặn
- (3) không ổn định biên nếu $\rho(\mathbf{A}) = 0$ và tập $R(\mathbf{A})$ không bị chặn
- (4) không ổn định nếu $\rho(\mathbf{A}) > 0$

2.3.2 Hàm Lyapunov phổ dụng

Trong phần này, nếu không nói gì thêm, ta luôn giả thiết hệ chuyển mạch tuyến tính là ổn định. Theo Định lý (2.8) hệ này có một hàm Lyapunov chung, trơn. Do đó tập những hàm xác định dương, trơn là phổ dụng đối với hệ chuyển mạch tuyến tính. Ở đây, hàm Lyapunov phổ dụng được hiểu là tập những hàm sao cho mỗi hệ chuyển mạch tuyến tính ổn định có một hàm Lyapunov chung thuộc tập đó.

Định lý dưới đây đưa ra một vài tập các hàm Lyapunov chung phổ dụng cho hệ chuyển mạch tuyến tính.

Định lý 2.14. *Mỗi tập hàm dưới đây cung cấp các hàm Lyapunov phổ dụng cho hệ chuyển mạch tuyến tính ổn định:*

- (1) Các hàm lồi và thuần nhất bậc hai.
- (2) Các đa thức.
- (3) Các hàm tuyến tính từng khúc.
- (4) Các hàm toàn phương từng khúc.
- (5) Các chuẩn, tức là các hàm xác định dương $N : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+$ sao cho $N(\lambda x) = |\lambda|N(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ và $N(x + y) \leq N(x) + N(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Ý tưởng chủ đạo của việc chứng minh sự tồn tại các hàm Lyapunov phổ dụng được phác họa dưới đây.

Trước tiên, trong phương pháp hàm Lyapunov thông thường, với một hệ chuyển mạch tuyến tính ổn định, ta định nghĩa hàm $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+$ xác định bởi

$$V(x) = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} \int_0^{+\infty} |\phi(t; 0, x, \sigma)|^2 dt$$

trong trường hợp liên tục, và

$$V(x) = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} \sum_{t=0}^{+\infty} |\phi(t; 0, x, \sigma)|^2$$

trong trường hợp rời rạc.

Có thể kiểm tra trực tiếp rằng, hàm này liên tục, xác định dương, lồi chặt và thuần nhất bậc hai. Hơn nữa, với quỹ đạo trạng thái không tầm thường $y(\cdot)$ bất kỳ của hệ chuyển mạch, chúng ta có:

$$\begin{aligned}
 V(y(t_2)) &= \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} \int_0^{+\infty} |\phi(t; 0, y(t_2), \sigma)|^2 dt \\
 &= \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} \int_0^{+\infty} |\phi(t + t_2 - t_1; 0, y(t_1), \sigma)|^2 dt \\
 &= \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} \int_{t_2 - t_1}^{+\infty} |\phi(t; 0, y(t_1), \sigma)|^2 dt \\
 &< \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} \int_0^{+\infty} |\phi(t; 0, y(t_1), \sigma)|^2 dt \\
 &= V(y(t_1)) \quad \forall t_2 > t_1.
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Từ đó suy ra hàm V là giảm chặt dọc theo quỹ đạo. Chú ý rằng, hàm này liên tục nhưng có thể không khả vi. Bước tiếp theo ta phải làm trơn hàm này bằng việc dùng tích phân:

$$\tilde{V}(x) = \int_{SO(n)} f(R) V(Rx) dR, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

trong đó $SO(n)$ là tập ma trận trực giao $n \times n$ với định thức dương, $f : SO(n) \mapsto \mathbb{R}_+$ là một hàm trơn với giá nằm trong một lân cận đủ nhỏ của ma trận đơn vị, và $\int_{SO(n)} f(R) dR = 1$.

Có thể thấy rằng, hàm \tilde{V} là khả vi liên tục, có thể trừ gốc tọa độ. Một hàm trơn thuộc lớp \mathcal{C}^k với k bất kỳ có thể nhận được bằng cách thực hiện lặp tương tự. Hàm mới bảo toàn tính chất lồi và thuần nhất bậc hai. Hơn nữa, hàm này là giảm chặt dọc theo quỹ đạo trạng thái không tầm thường bất kỳ của hệ chuyển mạch. Theo định nghĩa, hàm này là hàm Lyapunov chung của hệ và mục (1) của định lý được thiết lập. Sự tồn tại của lớp các hàm Lyapunov phổ dụng khác có thể được đảm bảo bởi thực tế là một tập mức lồi có thể được xấp xỉ tới bậc bất kỳ bởi tập mức của các đa thức, hàm tuyến tính từng khúc và hàm toàn phương từng khúc một cách tương ứng.

Theo khẳng định đầu tiên của định lý, tồn tại một hàm Lyapunov

chung có dạng:

$$V(x) = x^T P(x)x \quad \text{với } P(\lambda x) = P(x) > 0 \quad \forall \lambda \neq 0, x \neq 0.$$

Chú ý rằng, hàm này có dạng toàn phương và ma trận xác định dương $P(x)$ là thuần nhất bậc không. Do đó nó được xác định duy nhất bởi ảnh của nó trên mặt cầu đơn vị. Một trường hợp đặc biệt là $P(x)$ độc lập với trạng thái, mà tương ứng với một hàm Lyapunov toàn phương. Trong trường hợp này, việc nghiên cứu một hàm Lyapunov thích hợp có thể được quy về giải bất đẳng thức ma trận tuyến tính

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Một hàm tuyến tính từng khúc có dạng:

$$V(x) = \max\{l_i^T x : i = 1, \dots, s\},$$

trong đó, j_i là vectơ cột trong \mathbb{R}^n . Nó là lồi và thuần nhất dương bậc một. Tập mức của nó:

$$\Gamma = \{x : l_i^T x \leq 1, \quad i = 1, \dots, s\}$$

là một tập lồi, compact và chứa gốc tọa độ như một điểm trong. Ta gọi một tập như vậy là C -tập. Tập mức Γ cũng là một khối đa diện và nó cảm sinh hàm dạng cõ, còn gọi là hàm Minkovski của Γ , được xác định như sau:

$$MF_\Gamma(x) = \inf\{\mu \in \mathbb{R}_+ : x \in \mu\Gamma\}.$$

trong đó $\mu\Gamma = \{\mu y : y \in \Gamma\}$.

Từ định nghĩa suy ra, hàm MF_Γ chính là hàm V , nghĩa là $MF_\Gamma(x) = V(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Hàm Minkovski là một chuẩn khi và chỉ khi tập mức là 0—đối xứng, tức là nếu $x \in \Gamma$ thì $-x \in \Gamma$. Tính phổ dụng của hàm tuyến tính từng khúc suy ra rằng hệ chuyển mạch tuyến tính bất kỳ có một C -tập đa diện như tập mức hút của nó, tức là, $D^+V(x) \leq -\beta$ với x bất kỳ nằm trên biên của tập mức, trong đó β là một số thực dương nào đó. Từ đó suy ra, việc kiểm tra tính ổn định quy về việc nghiên cứu một C -tập đa diện hút.

Một trường hợp đặc biệt và khá thú vị, đó là hàm Lyapunov chung là một chuẩn. Trong trường hợp này ta có thể thấy rằng chuẩn là co dạng

mũ dọc theo quỹ đạo trạng thái không tầm thường bất kỳ của hệ chuyển mạch.

Một hàm toàn phương từng khúc có dạng:

$$V_{\max}(x) = \max\{x^T P_i x : i = 1, \dots, s\},$$

trong đó P_i là ma trận xác định dương, đối xứng. Rõ ràng hàm này là xác định dương thuần nhất bậc hai. Một tập mức của V_{\max} là giao của một số các hình ellipsoid và là lồi chặt. Từ đó suy ra hàm đó cũng lồi chặt, do đó có thể được phân vào lớp đầu tiên của định lý này.

Từ định lý (2.14), ta có bổ đề dưới đây thiết lập mối quan hệ giữa một hệ liên tục ổn định và hệ xấp xỉ Euler rời rạc của nó.

Bổ đề 2.15. Giả sử hệ chuyển mạch tuyến tính liên tục là ổn định. Khi đó hệ xấp xỉ Euler được xác định bởi :

$$x(t+1) = (I_n + \tau A_\sigma)x(t) \quad (2.29)$$

cũng ổn định với τ đủ nhỏ.

Chứng minh. Bổ đề này được chứng minh dựa trên cơ sở là mỗi hệ chuyển mạch tuyến tính ổn định có một hàm Lyapunov đa diện chung V . Với tập mức $\Gamma = \{x : V(x) \leq 1\}$, lấy $\beta = \min_{x \in \partial\Gamma} \alpha_3(|x|)$, với α_3 thuộc lớp \mathcal{K} và được xác định như trong định nghĩa (2.3), $\partial\Gamma$ bất kỳ. Điều này chỉ ra rằng tập Γ là hút đối với hệ rời rạc (2.29) khi τ đủ nhỏ. Do đó, hệ rời rạc ổn định với τ đủ nhỏ.

Mệnh đề sau nói về tính ổn định biên của hệ chuyển mạch tuyến tính.

Mệnh đề 2.16. Một hệ chuyển mạch tuyến tính ổn định biên có một hàm Lyapunov chung yếu là một chuẩn.

Chứng minh. Ta đi chứng minh rằng, hàm Lyapunov chung yếu V xác định trong (2.11) là một chuẩn. Ta có:

$$\begin{aligned} V(x) + V(y) &\geq \sup_{t \in \mathcal{T}_0, \sigma \in \mathcal{S}} \{|\phi(t; x, \sigma)| + |\phi(t; y, \sigma)|\} \\ &\geq \sup_{t \in \mathcal{T}_0, \sigma \in \mathcal{S}} \{|\phi(t; x, \sigma) + \phi(t; y, \sigma)|\} \\ &\geq V(x + y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Do V tuyến tính theo tia nên với $\forall \lambda \in [0, 1], \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ ta có:

$$|\phi(t; 0, x, \sigma)| \leq \epsilon \quad \forall t \in \mathcal{T}_0, \sigma \in \mathcal{S}, x \in \mathbf{B}_\delta.$$

Từ tính chất tuyến tính theo tia (2.16) suy ra $V(x) \leq \frac{\epsilon}{\delta}|x|$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$.

Kết hợp với tính lồi của V ta suy ra :

$$|V(x) - V(y)| \leq V(x - y) \leq \frac{\epsilon}{\delta}|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Do đó V là liên tục Lipchitz toàn cục. Rõ ràng V là 0–đối xứng và thuần nhất dương bậc một. Vậy nó là một chuẩn.

Một hệ chuyển mạch tuyến tính \mathbf{A} được gọi là chính quy nếu $\varrho(\mathbf{A})$ là hữu hạn, trong đó $\varrho(\mathbf{A})$ là tốc độ phân kỳ lớn nhất được định nghĩa trong (2.26). Rõ ràng hệ chuyển mạch tuyến tính liên tục bất kỳ là chính quy và một hệ rời rạc là chính quy nếu $\varrho(\mathbf{A}) \neq -\infty$. Với hệ chuyển mạch tuyến tính liên tục $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, hệ chuyển mạch chuẩn hóa là hệ chuyển mạch $\bar{\mathbf{A}} = \{A_1 - \varrho(\mathbf{A})I_n, \dots, A_m - \varrho(\mathbf{A})I_n\}$. Một cách tương tự, đối với hệ rời rạc chính quy $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, hệ chuẩn hóa của nó là hệ chuyển mạch $\bar{\mathbf{A}} = \{\frac{A_1}{e^{\varrho(\mathbf{A})}}, \dots, \frac{A_m}{e^{\varrho(\mathbf{A})}}\}$. Một hệ chuẩn hóa bất kỳ hoặc là ổn định biên, hoặc là không ổn định biên.

2.3.3 Tiêu chuẩn đại số

Trên thực tế, đã có rất nhiều nỗ lực của các nhà toán học để tìm ra tiêu chuẩn đại số cho tính ổn định của hệ chuyển mạch. Phần này sẽ trình bày về một số điều kiện đại số cho tính ổn định của hệ chuyển mạch tuyến tính.

Giả sử rằng, $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ là một tập hữu hạn các ma trận trong $\mathbb{R}^{n \times n}$. Với $k \in \mathbb{Z}^+$, ký hiệu $\Pi_k(\mathbf{A})$ là tập các tích có độ dài k của \mathbf{A} , tức là

$$\Pi_k(\mathbf{A}) = \{A_{i_1} \cdots A_{i_k} : i_1, \dots, i_k \in M\}$$

và

$$\Pi(\mathbf{A}) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^+} \Pi_k(\mathbf{A})$$

là tập tất cả các tích mà các thừa số là các phần tử của \mathbf{A} .

Cho $\|\cdot\|$ là một chuẩn ma trận được cảm sinh từ chuẩn vectơ bất kỳ, và $\rho(\cdot)$ là bán kính phổ của ma trận. Định nghĩa

$$\widehat{\rho}_k(\mathbf{A}) = \max\{\|P\| : P \in \Pi_k(\mathbf{A})\} \quad (2.31)$$

là chuẩn lớn nhất của tất cả các tích k ma trận của tập \mathbf{A} . Đặc biệt, ký hiệu cho $\widehat{\rho}_1(\mathbf{A})$ bởi $\|\mathbf{A}\|$. Bán kính phổ chung của \mathbf{A} được xác định bởi:

$$\widehat{\rho}(\mathbf{A}) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \widehat{\rho}_k(\mathbf{A})^{\frac{1}{k}} \quad (2.32)$$

là chuẩn tiệm cận lớn nhất của tích các ma trận. Rõ ràng $\widehat{\rho}(\mathbf{A})$ không phụ thuộc vào việc chọn chuẩn do tính tương đương giữa các chuẩn. Tương tự, ta định nghĩa đại lượng:

$$\bar{\rho}_k(\mathbf{A}) = \max\{\rho(P) : P \in \Pi_k(\mathbf{A})\}$$

là bán kính phổ lớn nhất của tất cả các tích k ma trận của \mathbf{A} . Hơn nữa, ta định nghĩa bán kính phổ tổng quát của \mathbf{A} như sau:

$$\bar{\rho}(\mathbf{A}) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \bar{\rho}_k(\mathbf{A})^{\frac{1}{k}} \quad (2.33)$$

là bán kính phổ tiệm cận lớn nhất của tích các ma trận.

Nhắc lại rằng, với một ma trận A ta có:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \rho(A^k)^{\frac{1}{k}} = \rho(A).$$

Bây giờ ta sẽ biểu diễn một vài tính chất của bán kính phổ chung và bán kính phổ tổng quát.

Cho Υ là tập các chuẩn vectơ trong \mathbb{R}^n . Với một tập các ma trận $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ và một chuẩn $|\cdot| \in \Upsilon$, ta định nghĩa chuẩn (được cảm sinh) của \mathbf{A} là

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{x \neq 0, i \in M} \frac{|A_i x|}{|x|}.$$

Chuẩn nhỏ nhất của \mathbf{A} được định nghĩa bởi:

$$LN_{\mathbf{A}} = \inf_{|\cdot| \in \Upsilon} \|\mathbf{A}\|.$$

Một chuẩn $\|\cdot\|^*$ là một chuẩn cực biên của \mathbf{A} nếu:

$$\|\mathbf{A}\|^* = LN_{\mathbf{A}}.$$

Với mỗi số thực μ , $\mu\mathbf{A}$ là ký hiệu cho tập ma trận $\{\mu A_1, \dots, \mu A_m\}$.

Bổ đề 2.17. Giả sử \mathbf{A} là một tập các ma trận thực. Khi đó các mệnh đề dưới đây là đúng

- (1) $\bar{\rho}(\mathbf{A}) \leq \hat{\rho}(\mathbf{A}) \leq LN_{\mathbf{A}}$.
- (2) $\bar{\rho}(\mu\mathbf{A}) = |\mu|\bar{\rho}(\mathbf{A})$ và $\hat{\rho}(\mu\mathbf{A}) = |\mu|\hat{\rho}(\mathbf{A}) \forall \mu \in \mathbb{R}$.
- (3) $\bar{\rho}(\mathbf{A}) < 1$ suy ra tính ổn định của \mathbf{A} .

Chứng minh. Ta có $\rho(A) \leq \|A\|$ với chuẩn $\|\cdot\|$ bất kỳ. Khi đó:

$$\bar{\rho}_k(\mathbf{A}) \leq \hat{\rho}_k(\mathbf{A}),$$

Điều này suy ra

$$\bar{\rho}(\mathbf{A}) \leq \hat{\rho}(\mathbf{A}).$$

Mặt khác, ta lại có: $\hat{\rho} \leq \|\mathbf{A}\|$ nên suy ra: $\hat{\rho}(\mathbf{A}) \leq LN_{\mathbf{A}}$.

Mệnh đề thứ hai được suy ra từ tính chất tuyến tính của bán kính phổ.

Cuối cùng, ta thấy rằng nếu $\bar{\rho}(\mathbf{A}) < 1$ thì

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t; 0, \sigma) = 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}.$$

Từ đó suy ra hệ chuyển mạch là hút và do đó nó ổn định. Mệnh đề thứ ba được chứng minh.

Định lý 2.18. Với hệ chuyển mạch tuyến tính \mathbf{A} bất kỳ, ta có:

$$\bar{\rho}(\mathbf{A}) = \hat{\rho}(\mathbf{A}) = LN_{\mathbf{A}} = \exp(\varrho(\mathbf{A})). \quad (2.34)$$

Chứng minh. Từ bổ đề (2.17), để chứng minh $\bar{\rho}(\mathbf{A}) = \hat{\rho}(\mathbf{A}) = LN_{\mathbf{A}}$, ta chỉ cần chứng minh $\bar{\rho}(\mathbf{A}) \geq LN_{\mathbf{A}}$. Giả sử phản chứng rằng $\bar{\rho}(\mathbf{A}) < LN_{\mathbf{A}}$. Cố định một số thực μ sao cho $\bar{\rho}(\mathbf{A}) < \mu < LN_{\mathbf{A}}$. Đặt

$$B_i = \frac{A_i}{\mu}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

và

$$\mathbf{B} = \{B_1, \dots, B_m\}.$$

Từ bổ đề (2.17) ta suy ra:

$$\bar{\rho}(\mathbf{B}) < 1 < LN_{\mathbf{B}}. \quad (2.35)$$

Áp dụng bổ đề (2.17) ta có hệ chuyển mạch tuyến tính \mathbf{B} là ổn định. Khi đó, từ định lý (2.14), tồn tại một chuẩn V như một hàm Lyapunov chung của hệ chuyển mạch. Ta luôn có:

$$LN_{\mathbf{B}} \leq \|\mathbf{B}\| \leq 1.$$

Điều này mâu thuẫn với (2.35). Vậy điều giả sử trên là sai. Do đó

$$\bar{\rho}(\mathbf{A}) = \widehat{\rho}(\mathbf{A}) = LN_{\mathbf{A}}.$$

Mặt khác, theo định nghĩa số mũ Lyapunov lớn nhất trong (2.26) ta có:

$$\exp(\rho(\mathbf{A})) \leq LN_{\mathbf{A}}.$$

Chúng minh tương tự như trên ta có $\exp(\rho(\mathbf{A})) = LN_{\mathbf{A}}$.

Vậy định lý được chứng minh.

Hệ quả 2.19. Hệ chuyển mạch tuyến tính rời rạc là ổn định khi và chỉ khi bán kính phổ nhỏ hơn 1 và không ổn định khi và chỉ khi bán kính phổ lớn hơn 1.

Hệ quả này đưa ra một tiêu chuẩn mới cho tính ổn định của hệ chuyển mạch tuyến tính bằng việc sử dụng bán kính phổ và cũng chính là một mở rộng của tiêu chuẩn bán kính phổ cho hệ tuyến tính bất biến theo thời gian.

Mệnh đề 2.20. Hệ chuyển mạch tuyến tính rời rạc \mathbf{A} là ổn định biên khi và chỉ khi nó có một chuẩn cực biên với $\|\mathbf{A}\|^* = 1$.

Chứng minh. Giả sử hệ ổn định biên, ta cần chứng minh tồn tại một chuẩn cực biên $\|\mathbf{A}\|^* = 1$. Từ mệnh đề (2.16) ta suy ra được sự tồn tại của một chuẩn Lyapunov chung yếu V . Theo định nghĩa hàm Lyapunov chung yếu ta có:

$$V(A_i(x)) \leq V(x) \quad \forall i \in M, x \in \mathbb{R}^n.$$

Từ đó suy ra được $\|\mathbf{A}\|_V \leq 1$.

Giả sử $LN_{\mathbf{A}} < 1$ thì hệ chuyển mạch ổn định tiệm cận, mâu thuẫn với giả thiết hệ ổn định biên. Vậy $LN_{\mathbf{A}} \geq 1$. Mặt khác, do $LN_{\mathbf{A}} \leq \|\mathbf{A}\|_V$ nên $LN_{\mathbf{A}} = \|\mathbf{A}\|_V = 1$. Vậy $\|\cdot\|_V$ là một chuẩn cực biên của hệ chuyển mạch.

Ngược lại, giả sử hệ chuyển mạch có một chuẩn cực biên $\|\cdot\|$ với $\|\mathbf{A}\| = LN_{\mathbf{A}} = 1$. Khi đó, hệ ổn định hoặc hệ ổn định biên.

Giả sử hệ ổn định, khi đó có một chuẩn Lyapunov chung V_0 sao cho:

$$V_0(A_i x) - V_0(x) \leq -\omega(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, i \in M,$$

trong đó ω là hàm xác định dương, liên tục. Lấy $\beta = \min_{V_0(x)=1} \omega(x)$. Khi đó:

$$V_0(A_i x) - V_0(x) \leq -\beta V_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, i \in M.$$

nên $\|\mathbf{A}\|_{V_0} \leq 1 - \beta$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy hệ ổn định biên.

Ta xét trường hợp hệ liên tục. Với chuẩn $|\cdot|$ bất kỳ trong \mathbb{R}^n , độ đo ma trận được cảm sinh trên $\mathbb{R}^{n \times n}$ được định nghĩa như sau:

$$\mu_{|\cdot|}(A) = \limsup_{\tau \rightarrow 0^+, |x|=1} \frac{|x + \tau Ax| - |x|}{\tau}. \quad (2.36)$$

Độ đo ma trận có các tính chất sau (xem thêm [??]) (để ngắn gọn ta lược bỏ chỉ số ở dưới $|\cdot|$)

- (1) *Tính hoàn toàn xác định.* Độ đo ma trận hoàn toàn xác định với chuẩn vectơ bất kỳ.
- (2) *Tính thuần nhất dương.* $\mu(\alpha A) = \alpha \mu(A) \forall \alpha \geq 0$ và $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
- (3) *Tính lồi.* $\mu(\alpha A + (1 - \alpha)B) \leq \alpha \mu(A) + (1 - \alpha)\mu(B) \quad \forall \alpha \in [0, 1]$ và $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
- (4) *Ước lượng mũ.* $|e^{At}| \leq e^{\mu(A)t}|x| \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$ và $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Định nghĩa độ đo của một ma trận được mở rộng cho một tập các ma trận $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ như sau:

Với mỗi tập các ma trận $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ và một chuẩn $|\cdot|$ trong \mathbb{R}^n , độ đo (được cảm sinh) của \mathbf{A} theo $|\cdot|$ được xác định như sau:

$$\mu_{|\cdot|}(\mathbf{A}) = \max\{\mu_{|\cdot|}(A_1), \dots, \mu_{|\cdot|}(A_m)\}. \quad (2.37)$$

Có thể kiểm tra rằng, độ đo này có tính lồi và tính thuần nhất dương như độ đo của một ma trận. Với tính chất ước lượng mũ ta có:

$$|\phi(t; 0, x, \sigma)| \leq e^{\mu_{|\cdot|}(\mathbf{A})t}|x| \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \sigma \in \mathcal{S}. \quad (2.38)$$

Hơn nữa, ta có định nghĩa độ đo nhỏ nhất như sau:

$$\nu(\mathbf{A}) = \inf_{|\cdot| \in \Upsilon} \mu_{|\cdot|}(\mathbf{A}). \quad (2.39)$$

Độ đo tập ma trận μ bất kỳ với $\mu(\mathbf{A}) = \nu(\mathbf{A})$ được gọi là một độ đo cực biên của \mathbf{A} .

Hệ chuyển mạch tuyến tính \mathbf{A} là ổn định (mũ) nếu tồn tại một chuẩn $|\cdot|$ sao cho độ đo ma trận của nó âm. Từ đó suy ra, khi độ đo nhỏ nhất là âm thì hệ chuyển mạch là ổn định mũ. Tiếp theo ta sẽ chứng minh điều ngược lại cũng đúng.

Định lý 2.21. Với hệ chuyển mạch tuyến tính liên tục \mathbf{A} bất kỳ, ta có:

$$\nu(\mathbf{A}) = \varrho(\mathbf{A}). \quad (2.40)$$

Hệ có (ít nhất) một độ đo cực biên khi và chỉ khi hệ chuẩn hóa của nó ổn định biên.

Chứng minh. Trước hết, ta kiểm tra:

$$\mu_{|\cdot|}(\mathbf{A} + \lambda I_n) = \lambda + \mu_{|\cdot|}(\mathbf{A}) \quad \forall |\cdot| \in \Upsilon, \lambda \in \mathbb{R},$$

trong đó $\mathbf{A} + \lambda I_n$ là ký hiệu cho hệ chuyển mạch tuyến tính $(A_1 + \lambda I_n, \dots, A_m + \lambda I_n)$. Từ đó ta có:

$$\nu(\mathbf{A} + \lambda I_n) = \lambda + \nu(\mathbf{A}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với:

$$\varrho(\mathbf{A} + \lambda I_n) = \lambda + \varrho(\mathbf{A}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

suy ra (2.40) đúng trong trường hợp tổng quát nếu nó đúng trong trường hợp $\varrho(\mathbf{A}) = 0$, tức hệ chuyển mạch hoặc là ổn định biên, hoặc là không ổn định biên.

Giả sử hệ ổn định hoặc hệ ổn định biên. Cố định một chuẩn vectơ $|\cdot|$ trong \mathbb{R}^n và định nghĩa hàm $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+$ xác định bởi:

$$V(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}_+, \sigma \in \mathcal{S}} |\phi(t; 0, x, \sigma)|. \quad (2.41)$$

Hàm này hoàn toàn xác định dương, lồi, 0–đối xứng và thuần nhất dương bậc một. Hơn nữa, tồn tại một số thực dương L sao cho:

$$|x| \leq V(x) \leq L|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Kết hợp với tính chất tuyến tính theo tia (2.16) suy ra V là liên tục Lipchitz toàn cục. Khi đó V có dạng là một chuẩn vectơ trong \mathbb{R}^n .

Với mọi $x \in \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}_+, i \in M$, ta có

$$\begin{aligned} V(\phi(s; 0, x, \hat{i})) &= \sup_{t \in \mathbb{R}_+, \sigma \in \mathcal{S}} |\phi(t; 0, \phi(s; 0, x, \hat{i}), \sigma)| \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}_+, \sigma \in \mathcal{S}} |\phi(t + s; 0, x, \sigma)| \\ &\leq \sup_{t + s \in \mathbb{R}_+, \sigma \in \mathcal{S}} |\phi(t + s; 0, x, \sigma)| \\ &= V(x) \end{aligned} \quad (2.42)$$

trong đó \hat{i} là ký hiệu cho tín hiệu chuyển mạch $\hat{i}(t) \equiv i$. Do V là liên tục Lipchitz nên ta có:

$$\begin{aligned}\mu_V(A_i) &= \limsup_{\tau \rightarrow 0^+, x \neq 0} \frac{V(x + \tau A_i x) - V(x)}{\tau V(x)} \\ &= \limsup_{\tau \rightarrow 0^+, x \neq 0} \frac{V(\phi(\tau; 0, x, \hat{i})) - V(x)}{\tau V(x)} \\ &\leq 0 \quad \forall i \in M.\end{aligned}\tag{2.43}$$

Khi đó chuẩn V cảm sinh một độ đo tập ma trận thỏa mãn:

$$\mu_V(\mathbf{A}) \leq 0.\tag{2.44}$$

Từ đó suy ra $\nu(\mathbf{A}) \leq 0$.

Tiếp ta xét trường hợp hệ chuyển mạch không ổn định biên. Khi đó giá trị độ đo nhỏ nhất bằng không. Nếu giá trị độ đo nhỏ nhất âm thì từ hệ thức (2.38) suy ra hệ ổn định mũ. Điều này dẫn đến mâu thuẫn. Do đó, độ đo tập ma trận trong (2.44) là một độ đo cận biên.

Cuối cùng, ta xét trường hợp hệ chuyển mạch không ổn định biên. Khi đó, giá trị độ đo nhỏ nhất không âm. Giả sử rằng độ đo là dương. Khi đó tồn tại một số thực dương ϵ với $\epsilon < \nu(\mathbf{A})$ sao cho

$$\nu_{|\cdot|}(\mathbf{A} - \epsilon I_n) > 0.$$

hệ chuyển mạch $\mathbf{A} - \epsilon I_n$ hoặc không ổn định, hoặc không ổn định biên. Điều này mâu thuẫn với $\varrho(\mathbf{A} - \epsilon I_n) = -\epsilon < 0$. Do đó $\nu(\mathbf{A}) = 0$. Mặt khác, khi $\nu(\mathbf{A}) = 0$ thì sự tồn tại của một độ đo cực biên kéo theo tính bị chặn của tập $R(\mathcal{A})$ và do đó hệ là ổn định hoặc ổn định biên. Nên hệ chuyển mạch không ổn định biên sẽ không có bất cứ một độ đo cực biên nào.

Vậy tính ổn định biên kéo theo sự tồn tại của một độ đo cực biên giá trị không và tính không ổn định biên kéo theo giá trị độ đo nhỏ nhất bằng không nhưng không có bất cứ một độ đo cực biên nào. Vì phép chuẩn hóa không làm thay đổi sự tồn tại của độ đo cực biên nên từ đây suy ra mệnh đề thứ hai của định lý.

Chú ý: Với một ma trận thực, tốc độ phân kỳ lớn nhất của nó chính là phần thực lớn nhất của các giá trị riêng và nó chính là giá trị độ đo nhỏ nhất (xem thêm [??]). Định lý (2.21) chính là mở rộng cho trường hợp hệ chuyển mạch tuyến tính.

Từ định lý (2.21) ta có thể mô tả một cách đầy đủ tính ổn định theo độ đo tập ma trận.

Hệ quả 2.22. Với hệ chuyển mạch tuyến tính liên tục, ta có các phát biểu sau:

- (1) Hệ ổn định khi và chỉ khi giá trị độ đo nhỏ nhất của nó là âm.
- (2) Hệ ổn định biên khi và chỉ khi giá trị độ đo nhỏ nhất của nó bằng không và nó có một độ đo cực biên.
- (3) Hệ không ổn định biên khi và chỉ khi giá trị độ đo nhỏ nhất của nó bằng không và nó không có bất kỳ một độ đo cực biên nào.
- (4) Hệ không ổn định khi và chỉ khi giá trị độ đo nhỏ nhất của nó là dương.