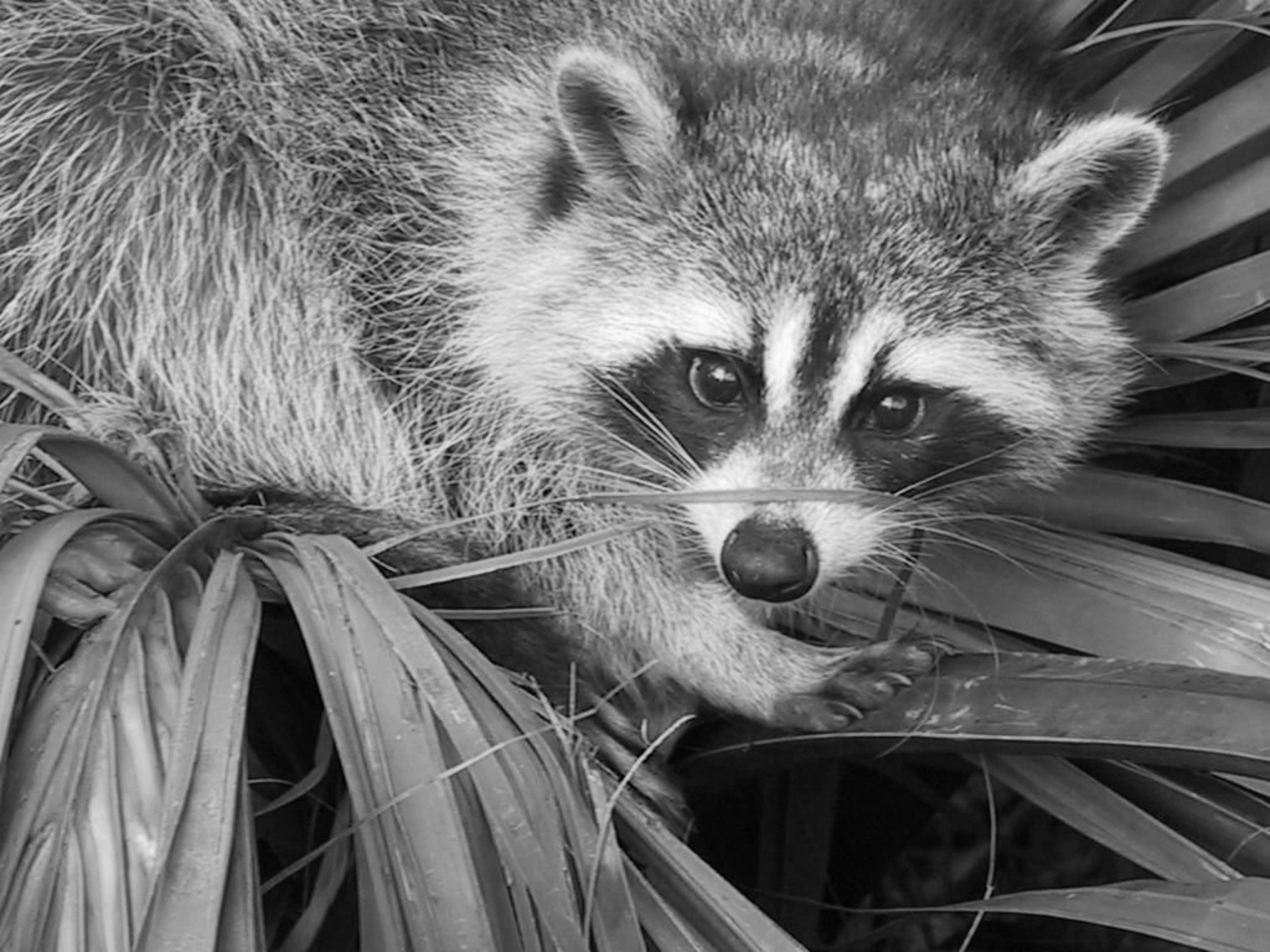
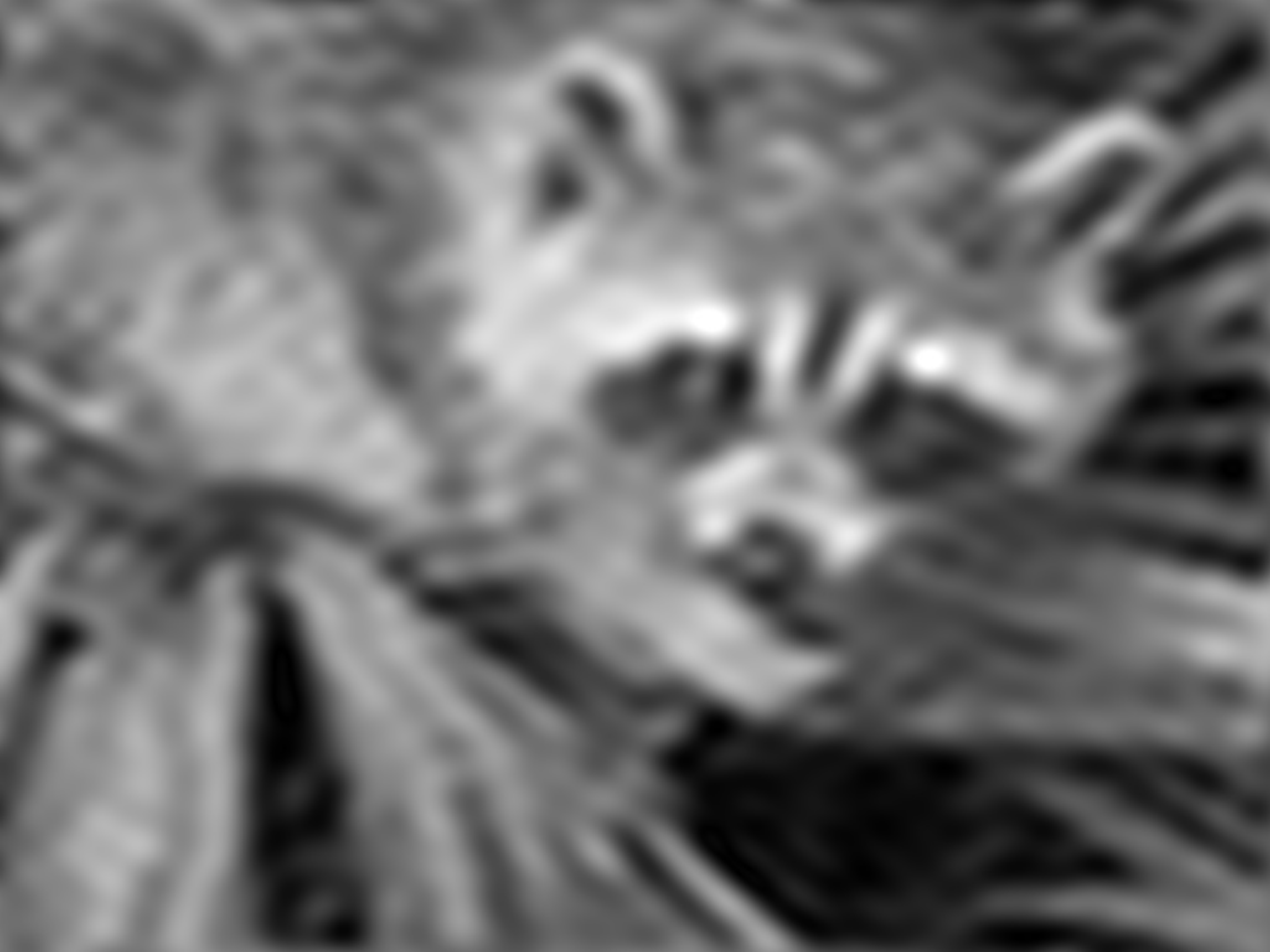
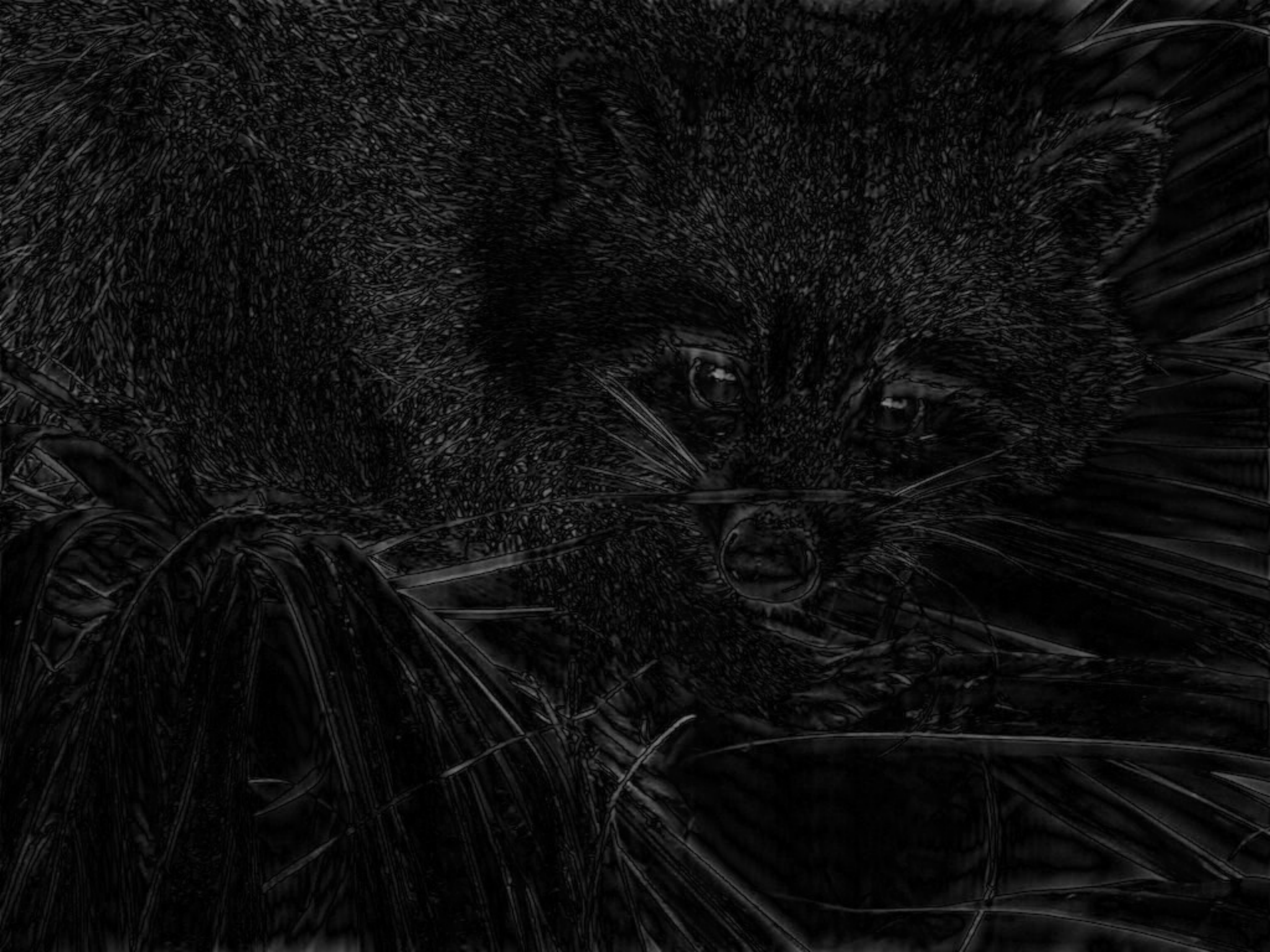
Fourier transform

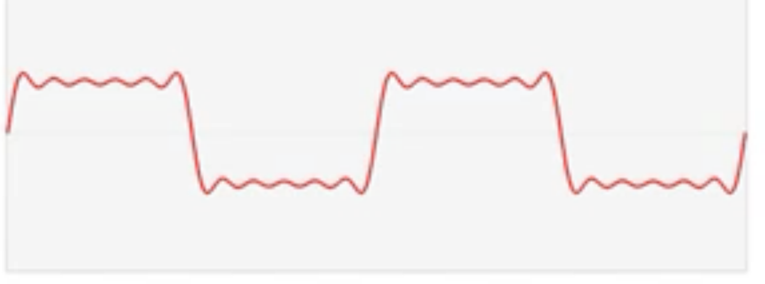
By: 会飞的吴克







什么是频域：



二、傅里叶变换的由来

傅里叶级数:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$$

三角函数系正交性:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\sin kx\cos nx dx=0$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\sin kx\sin nx dx=\begin{cases}0, k\neq n\\ \pi, k=n\neq 0\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos kx\cos nx dx=\begin{cases}0, k\neq n\\ \pi, k=n\neq 0\end{cases}$$

正交性的证明:

1): $\int_{-\pi}^{+\pi}\sin kx\cos nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}[\sin(k+n)x+\sin(k-n)x]dx$ （积化和差）

当 $k\neq n$ 时,上式 $=-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(k+n)x}{k+n}+\frac{\cos(k-n)x}{k-n}\right]_{-\pi}^{+\pi}=0$

当 $k=n$ 时,上式 $=\int_{-\pi}^{+\pi}\sin kx\cos nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin 2kxdx=0$

2): $\int_{-\pi}^{+\pi}\sin kx\sin nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}[\cos(k-n)x-\cos(k+n)x]dx$ （积化和差）

当$k\neq n$时,上式 $=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(k-n)x}{k-n}-\frac{\sin(k+n)x}{k+n}\right]_{-\pi}^{+\pi}=0$

当 $k=n\neq 0$ 时,上式 $=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}(1-\cos 2kx)dx=\pi$

对傅里叶级数左右两边在 $-\pi \sim +\pi$ 上积分:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)dt = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} dt + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos ntdt + b_n \int_{-\pi}^{+\pi} \sin ntdt)$$

由三角函数系正交性得：

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)dt$$

同理，在原式左右两端乘以 $\cos kt$ 再在$-\pi \sim +\pi$ 上积分:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos ktdt = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos ktdt + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kt \cos ntdt + b_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kt \sin ntdt)$$

由三角函数系正交性得: $\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos ktdt = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kt \cos ntdt = a_k \pi$

即： $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos ktdt$

同理： $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sin ktdt$

已知傅里叶级数 $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$ $\quad T=2\pi$

令 $\varphi(t)=f(\frac{\pi}{l}t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}t+b_n\sin\frac{n\pi}{l}t)$ $\quad T=2l$

其中 $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi}{l}tdt, n=0,1,2,3...$ $\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{n\pi}{l}tdt, n=1,2,3....$

由欧拉公式 $e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$ 得

$$\cos\omega t=\frac{1}{2}e^{j\omega t}+\frac{1}{2}e^{-j\omega t} \qquad \sin\omega t=j(\frac{1}{2}e^{-j\omega t}-\frac{1}{2}e^{j\omega t})$$

带入 $\varphi(t)$ 得

$$\varphi(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{a_n}{2}(e^{j\frac{n\pi}{l}t}+e^{-j\frac{n\pi}{l}t})-\frac{jb_n}{2}(e^{j\frac{n\pi}{l}t}-e^{-j\frac{n\pi}{l}t})\right]$$

$$\varphi(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{a_n}{2}(e^{j\frac{n\pi}{l}t}+e^{-j\frac{n\pi}{l}t})-\frac{jb_n}{2}(e^{j\frac{n\pi}{l}t}-e^{-j\frac{n\pi}{l}t})\right]$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{a_n-jb_n}{2}\cdot e^{j\frac{n\pi}{l}t}+\frac{a_n+jb_n}{2}\cdot e^{-j\frac{n\pi}{l}t}\right]$$

令 $c_0=\frac{a_0}{2},c_n=\frac{a_n-jb_n}{2},c_{-n}=\frac{a_n+jb_n}{2}$

则 $\varphi(t)=c_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[c_n\cdot e^{j\frac{n\pi}{l}t}+c_{-n}\cdot e^{-j\frac{n\pi}{l}t}\right]$

由于 $c_0=c_0\cdot e^{j\frac{0\pi}{l}t}$

于是 $\varphi(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\cdot e^{j\frac{n\pi t}{l}}$

其中 $c_0=\frac{a_0}{2},c_n=\frac{a_n-jb_n}{2},c_{-n}=\frac{a_n+jb_n}{2}$

由上 $\varphi(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{j\frac{n\pi t}{l}}$ 其中 $c_0=\frac{a_0}{2}, c_n=\frac{a_n-jb_n}{2}, c_{-n}=\frac{a_n+jb_n}{2}$

由于 $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}tdt, n=0,1,2,3...$ $b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi}{l}tdt, n=1,2,3....$

故

$$\begin{cases} c_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{-j\frac{0\pi t}{l}}dt \\ c_n=\frac{a_n-jb_n}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}tdt-j\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi}{l}tdt\right]=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{-j\frac{n\pi t}{l}}dt \\ c_{-n}=\frac{a_n+jb_n}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}tdt+j\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi}{l}tdt\right]=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{j\frac{n\pi t}{l}}dt \end{cases}$$

综上，

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{-j\frac{n\pi t}{l}}dt, n=0,\pm1,\pm2,...$$

由上 $\varphi(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{j\frac{n\pi t}{l}}$ $\quad c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\omega)e^{-j\frac{n\pi\omega}{l}}d\omega, n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

将 c_n 带入 $\varphi(t)$ 得

$$\varphi(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\omega)e^{-j\frac{n\pi\omega}{l}}d\omega\cdot e^{j\frac{n\pi t}{l}}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\omega)e^{j\frac{n\pi(t-\omega)}{l}}d\omega$$

对于非周期函数，可看作周期无穷大:

$$f(t)=\lim_{l\to+\infty}\varphi(t)=\lim_{l\to+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(z)e^{j\frac{n\pi(t-z)}{l}}dz$$

$$=\lim_{l\to+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} f(z)e^{j\frac{n\pi(t-z)}{l}}dz\cdot\frac{\pi}{l}$$

令 $\omega_n=\frac{n\pi}{l},\Delta\omega=\frac{\pi}{l}$

$$f(t)=\lim_{l\to+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} f(z)e^{j\omega_n(t-z)}dz\cdot\Delta\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{j\omega(t-z)}dz\right]d\omega$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)e^{j\omega(t-z)}dz\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)e^{-j\omega z}dz\right]e^{j\omega t}d\omega$$

令 $$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

则 $$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

这就是傅里叶变换对

三、傅里叶变换算法（DFT、FFT）

计算机只能处理离散数据，故对连续的傅里叶变换对:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

做N点等距采样得离散变换对:

$$F(u)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)e^{-j\frac{2\pi}{N}xu} \qquad f(x)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1} F(u)e^{j\frac{2\pi}{N}xu}$$

以上为一元函数到情况，扩展到二元函数:

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} \qquad f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

以上为即为DFT公式

由DFT正向变换公式 $$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$
$$=\sum_{x=0}^{M-1}e^{-j2\pi\frac{ux}{M}}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi\frac{vy}{N}}$$
$$=\sum_{x=0}^{M-1}\left[\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi\frac{vy}{N}}\right]e^{-j2\pi\frac{ux}{M}}$$

由此可见，二元DFT可分为两个一元DFT的叠加。若用两个一元DFT代替二元DFT，
算法复杂度由 $O(M^2N^2)$ 降为$O(M^2N+MN^2)$
类似地，对反向变换公式同样适用。

通常，我们使用 $F(u-\frac{M}{2},v-\frac{N}{2})=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}(-1)^{x+y}f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$ 代替原式（将低频成分移动到图像中央，好看）

这是因为 $$F(u-\frac{M}{2},v-\frac{N}{2})=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi\left[\frac{(u-\frac{M}{2})x}{M}+\frac{(v-\frac{N}{2})y}{N}\right]}=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}\cdot e^{j\pi(x+y)}$$

由欧拉公式有$e^{j\pi}=-1$，于是$F(u-\frac{M}{2},v-\frac{N}{2})=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}(-1)^{x+y}f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$

基2时间抽取的FFT算法: 首先，将二维DFT等效为两个一维DFT的叠加。此时时间复杂度为 $O(M^2N+MN^2)$

对于每个一维DFT

$$
\begin{aligned}
F(u) &= \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j\frac{2\pi}{N}xu} \\
&= \sum_{x=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2x) e^{-j\frac{2\pi}{N}2xu} + \sum_{x=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2x+1) e^{-j\frac{2\pi}{N}(2x+1)u} \\
&= \sum_{x=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2x) e^{-j\frac{2\pi}{N}2xu} + e^{-j\frac{2\pi}{N}u} \cdot \sum_{x=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2x+1) e^{-j\frac{2\pi}{N}2xu}
\end{aligned}
$$

可证 $e^{-j\frac{2\pi}{N}(u+\frac{N}{2})} = -e^{-j\frac{2\pi}{N}u}$ ，于是

$$
F(u) = \begin{cases} \sum_{x=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2x) e^{-j\frac{2\pi}{N}2xu} + e^{-j\frac{2\pi}{N}u} \cdot \sum_{x=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2x+1) e^{-j\frac{2\pi}{N}2xu}, u < \frac{N}{2} \\ \sum_{x=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2x) e^{-j\frac{2\pi}{N}2xu} - e^{-j\frac{2\pi}{N}(u-\frac{N}{2})} \cdot \sum_{x=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2x+1) e^{-j\frac{2\pi}{N}2xu}, u > \frac{N}{2} \end{cases}
$$

上面两个和式是与原问题相同的子问题，但规模减半，并且 $u > \frac{N}{2}$ 时，可用之前计算过的值，无需重复计算。使用递归实现，时间复杂度降为 $O(N(\log_2 N) + M(\log_2 M))$