수치해석과최적화 - 기말고사

Handwriting Problems

1. 주어진 다항식으로부터 orthonormal set을 얻는 방법의 이름을 쓰고, 그 방법으로 얻은 orthonormal set의 이름을 쓰시오.

   orthonormal set을 얻는 방법 : Gram-Schmit process
   orthonormal set의 이름 : Gram-Schmidt orthonormalization

2. 이번 학기 강의 중 다항식의 interpolation에 사용되는 basis 세 종류를 배웠다. 이것들의 이름을 쓰시오.

   Monomial basis, Lagrange basis, Newton basis

3. Chebyshev points를 쓰시오. 그리고 Chebyshev points는 언제 사용하는지 설명하시오.

   Chebyshev points are zeros of $T_k(t) = \cos(k \arccos(t))$, by $t_i = \cos(\frac{(2i-1)\pi}{2k})$, $\quad i = 1, \ldots, k$

   Equally spaced interpolation points often yield unsatisfactory results near ends of interval.
   So Use of Chebyshev points distributes error evenly and yields convergence throughout interval for any sufficiently smooth function.

4. `Optimization Problem'이란 무엇인지 설명하시오. Optimization Problem에서 `Uncontstrained'와 `Constrained' 란 무엇인지 설명하시오。

   최적화 문제(Optimization problems)란 여러개의 선택가능한 후보 중에서 최적의 해(Optimal value) 또는 최적의 해에 근접한 값을 찾는 문제를 일컫는다.

   $f : R^n \rightarrow R, \mathrm{and}\, set\, SSUBSETR^n,\ find x^* INS\ \ such\, that\ f(x*) \leqq f(x)$ for $all\ \ x\, INS$

   별도의 제약조건이 없는 경우($S = R^n$)를 unconstrained optimization 문제라 하고

   Find x $\in$ R^n such that min f(x) subject to g(x) = 0 and h(x) $\leq$ 0

   목적함수 외에 파라미터가 만족해야 할 별도의 제약조건이 있는 경우를 constrained optimization 문제라 한다.

5. Golden section search에서 구간을 특별한 비율로 분할하는 이유를 설명하시오.

   특별한 비율로 분할하지 않고 임의의 비율로 분할할 경우, Golden section search을 통해 구한 구역을 해당 비율로 새롭게 구역을 나눌 2개의 값을 찾아야 한다.
   반대로 특별한 비율로 분할하는 경우, Golden section search을 통해 구한 구역에 대해 새롭게 구역을 나눌 때, 이전에 Golden section search을 통해 구한 값이 새롭게 나눌 값인 경우가 되어 새롭게 구역을 나눌 1개의 값을 찾으면 된다.
   즉, Golden section search에서 구간을 특별한 비율로 분할하면 연산횟수를 줄일 수 있다.

6. Unconstrained optimization problem을 풀기 위한 Newton's method의 장점과 단점을 구분하여 쓰시오.

   장점 : 최적값을 포함하는 구간에 대한 초기 추측값을 몰라도 사용가능하다.
   단점 : 선택한 초기 추측값에 따라 수렴되지 않고 발산될 수가 있다.

7. Steepest Descent Method와 Conjugate Gradient Method에서 one dimension optimization problem을 풀어야 하는 이유를 쓰시오.

Given descent direction, such as negative gradient, determining appropriate value for αk at each iteration is one-dimensional minimization problem

$$\min_{a_k} f(x_k - a_k \nabla f(x_k))$$

that can be solved by methods already discussed

8. 아래에 주어진 함수 f : R^2 → R의 극소값이 (0, 0)임을 보이시오.

$$f(x) = 0.5x_1^2 + 2.5x_2^2$$

Newton's method를 사용하여 풀면,

$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 5x_2 \end{bmatrix}, H_f(x) = \begin{bmatrix} 1\,0 \\ 0\,5 \end{bmatrix}$이고 $x_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$에 대해 $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$이므로

Linear system for Newton step은 $\begin{bmatrix} 1\,0 \\ 0\,5 \end{bmatrix} s_0 = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix}$이다.

따라서 $x_1 = x_0 + s_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$이므로 극소값은 (0, 0)이다.

9. `Method of Least Squares'란 무엇인지, 왜 사용하는지 설명하시오.

Method of Least Squares는 $\| Ax - b \|^2$의 최소값을 구하는 방법이다.
특정 데이터에 대한 값을 구할 때, 오차로 인해 생긴 실제값과 다를 수 있으므로 여러 데이터를 구한 후 Method of Least Squares를 통해 가장 오차 범위가 작은 경우의 값을 구할 수 있다.

10. Normal equation을 사용하여 linear least square problem을 풀 때 실패하는 예시 보이고 그 이유를 설명하시오.

예) $A = \begin{bmatrix} 1\,1 \\ \epsilon\,0 \\ 0\,\epsilon \end{bmatrix}$, ϵ *is positive νmber smaller than* $\sqrt{\epsilon_{match}}$

$A^T A = \begin{bmatrix} 1+\epsilon^2 & 1 \\ 1 & 1+\epsilon^2 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1\,1 \\ 1\,1 \end{bmatrix}$로 minimizer x를 구할 수 없다

11. Linear least square problem을 풀기 위한 orthogonalization 방법 두 가지의 이름을 쓰시오.

Gram-Schmidt QR Factorization, Householder QR Factorization

12. Linear least square problem을 풀 때, orthogonalization methods은 실패하기에 SVD 방법으로 풀어야 하는 예시를 보이고 그 이유를 설명하시오.

$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 711 \\ 1177 \\ 475 \end{bmatrix}$

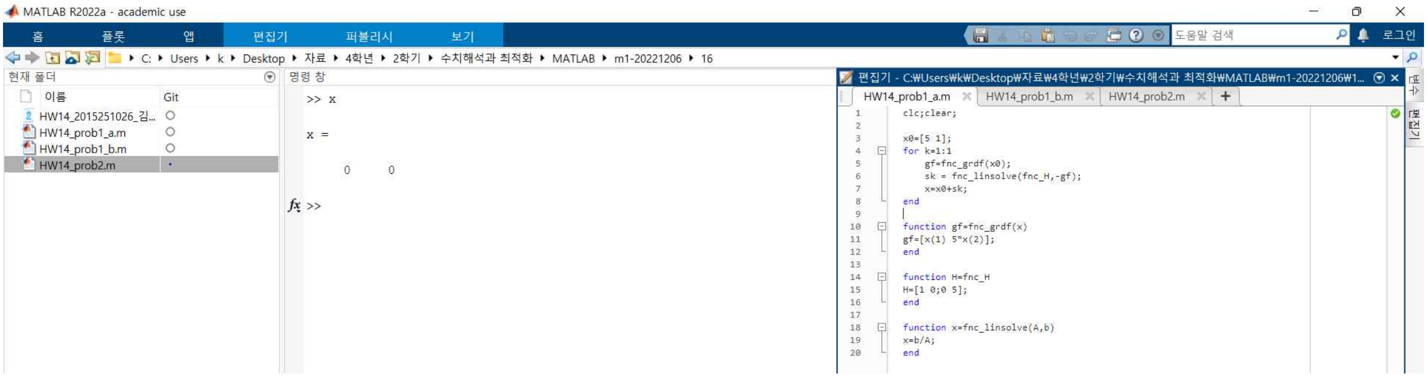
orthogonalization methods로 구한 QR factorization

$A = \begin{bmatrix} -0.7071 & 0.4082 & 0.5774 \\ -0.7071 & -0.4082 & -0.5774 \\ 0 & -0.8165 & 0.5774 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.4142 & -0.7071 & -0.7071 \\ 0 & 1.2247 & -1.2247 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = QR$으로 $Rx = c = Q^T * b$에 대한 R의 rank가 A의 rank와 달라서 제대로 된 값이 나오지 않게 된다.

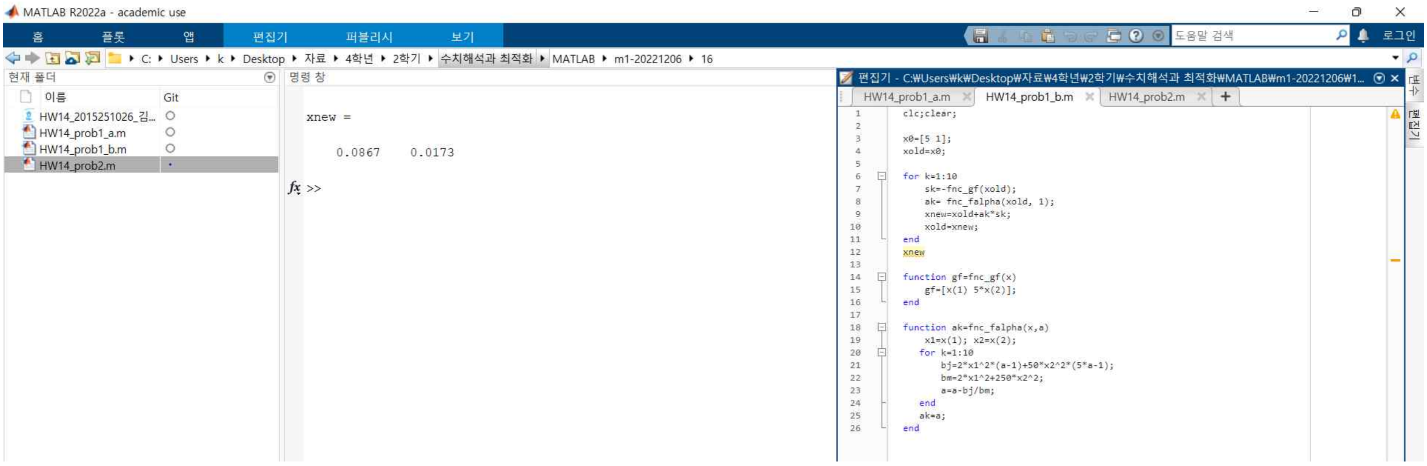
Matlab Problems

1.

(a)



(b)

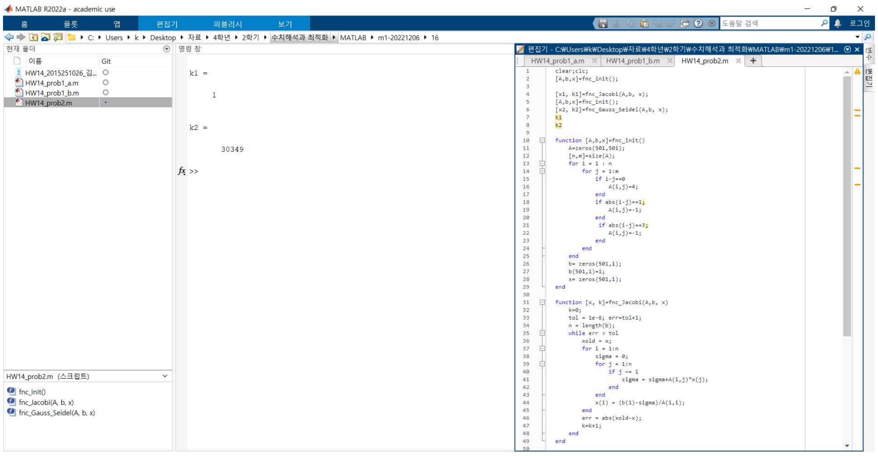


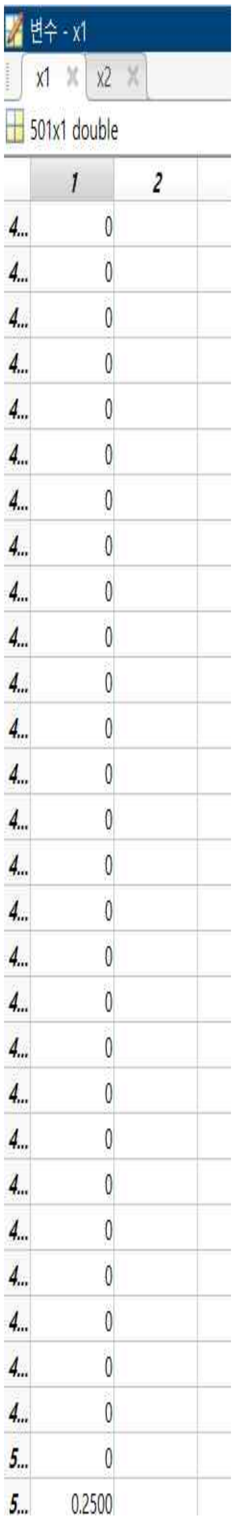
2.

Jacobi 방법: 501번째만 제외하고 나머지는 다 0이다.

Gauss-Seidel 방법: 균등하게 분포되었다.

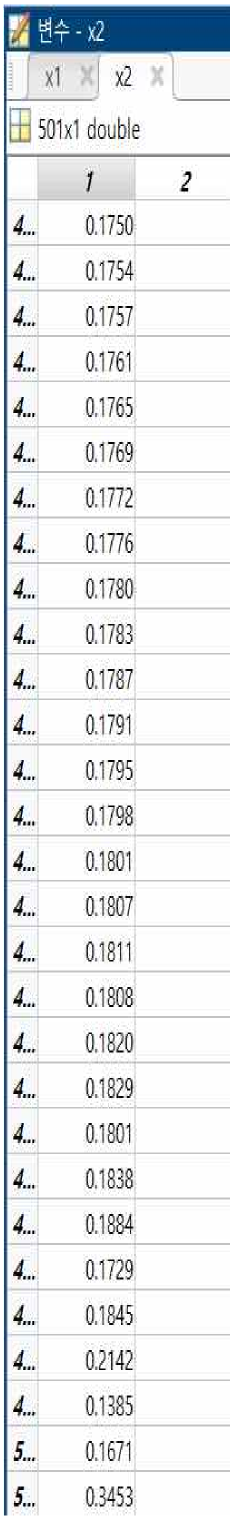
수렴속도 : 해당 행렬에 대해서는 Jacobi가 Gauss-Seidel보다 더 빨랐다




변수 - x1

501x1 double

	1	2
4...	0	
4...	0	
4...	0	
4...	0	
4...	0	
4...	0	
4...	0	
4...	0	
4...	0	
4...	0	
4...	0	
4...	0	
4...	0	
4...	0	
4...	0	
4...	0	
4...	0	
4...	0	
4...	0	
4...	0	
4...	0	
4...	0	
4...	0	
4...	0	
4...	0	
4...	0	
4...	0	
5...	0	
5...	0.2500	


변수 - x2

501x1 double

	1	2
4...	0.1750	
4...	0.1754	
4...	0.1757	
4...	0.1761	
4...	0.1765	
4...	0.1769	
4...	0.1772	
4...	0.1776	
4...	0.1780	
4...	0.1783	
4...	0.1787	
4...	0.1791	
4...	0.1795	
4...	0.1798	
4...	0.1801	
4...	0.1807	
4...	0.1811	
4...	0.1808	
4...	0.1820	
4...	0.1829	
4...	0.1801	
4...	0.1838	
4...	0.1884	
4...	0.1729	
4...	0.1845	
4...	0.2142	
4...	0.1385	
5...	0.1671	
5...	0.3453	