1. (Handwriting Problem) 벡터 x = (3, −4)에 대해서, 다음에 주어진 x의 크기를 손 계산을 사용하여 구하시오.

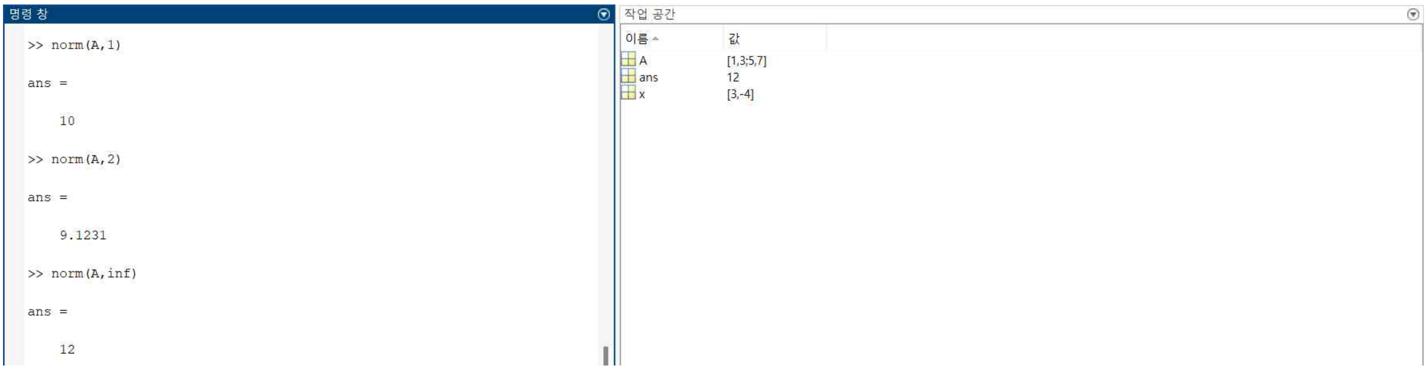
(a) 1-norm: $\| x \|_1 = \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i|^1 \right)^1 = |x_1| + |x_2| = 3 + 4 = 7$

(b) 2-norm:

$$\| x \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

(c) ∞-norm: $\| x \|_{INF} = \max |x_i| = \max\{3,\ 4\} = 4$

2. (Matlab Problem) 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$에 대해서, 다음에 주어진 A의 크기를 매트랩을 사용하여 구하시오.



(a) 1-norm: 10

(b) 2-norm: 9.1231

(c) ∞-norm: 12

3. (Handwriting Problem) 아래의 연립방정식에 대해서

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2\alpha x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + \alpha x_3 = 1 \\ 2\alpha x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

(a) α = 0일 때 근이 유일하게 존재함을 보이시오.

위의 연립방정식을 Ax=b형식으로 표현하면 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2\alpha \\ 1 & -1 & \alpha \\ 2\alpha & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$이다.

α = 0이면, $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x \end{bmatrix}$

즉, 근은 $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 2$ 로 유일하게 존재한다.

(b) α = −1일 때 근이 없음을 보이시오.

α = −1 이면, $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -1 \\ 0 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ -1.5 \\ -4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

즉, $\begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ x_2 = 1 \\ 0 = -4 \end{cases}$ 이다.

0=-4인 경우는 존재할 수 없으므로 연립방정식의 근은 없다.

(c) α = 1일 때 근이 무수히 많음을 보이시오.

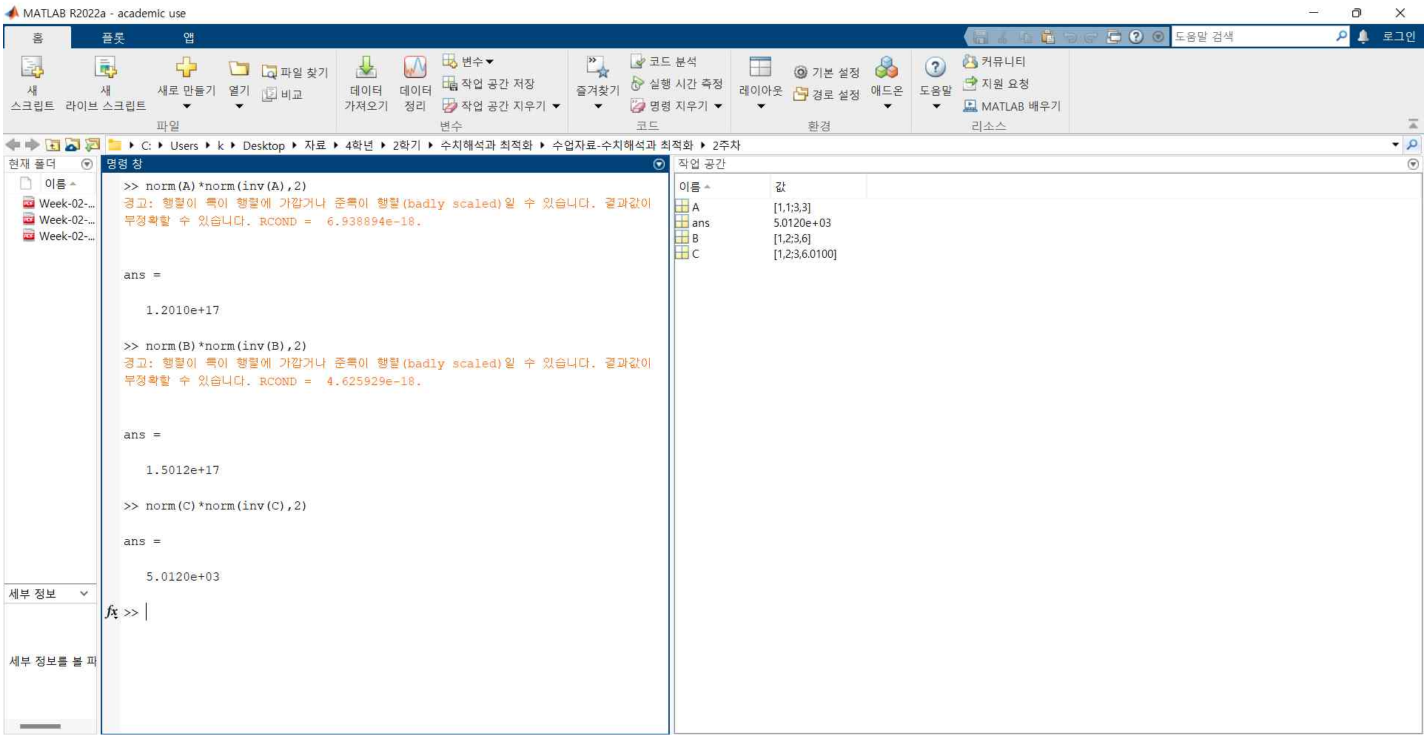
α = 1이면, $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ -1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

즉, $\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ 로 x_1=a, x_2=1 ,x_3=2-a로 연립방정식의 근이 무수히 많다.

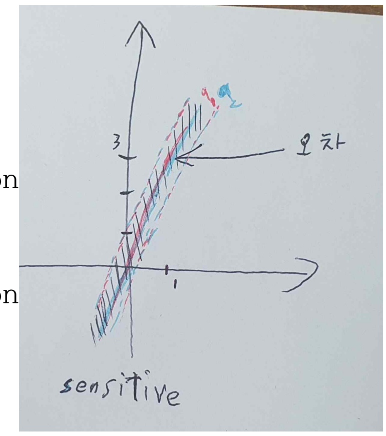
4. (Matlab Problem) 아래 행렬의 condition number를 2-norm을 사용하여 구하시오.



(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ = 1.2010e+17 (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ = 1.5012e+17 © $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6.01 \end{bmatrix}$ = 5.0120e+03

(a)와 (b)는 singular이므로 condition number가 ∞이지만 Matlab을 사용하면 '행렬이 특이 행렬에 가깝거나 준특이 행렬(badly scaled)일 수 있습니다. 결과값이 부정확할 수 있습니다'라는 경고 메시지와 함께 다른 값이 출력된다.

5. (Handwriting Problem) 위의 2번 문제에서 sensitive한 행렬과 insensitive한 행렬을 구분하고 행렬의 column 벡터를 사용하여 그 이유를 설명하시오.



sensitive한 행렬 : $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

이유 : 행렬 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$의 column 벡터는 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$로 동일한 벡터를 가지고 condition number가 크므로 오차가 발생 시 sensitive하다.

행렬 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$의 column 벡터는 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$로 동일한 벡터를 가지고 condition number가 크므로 오차가 발생 시 sensitive하다.

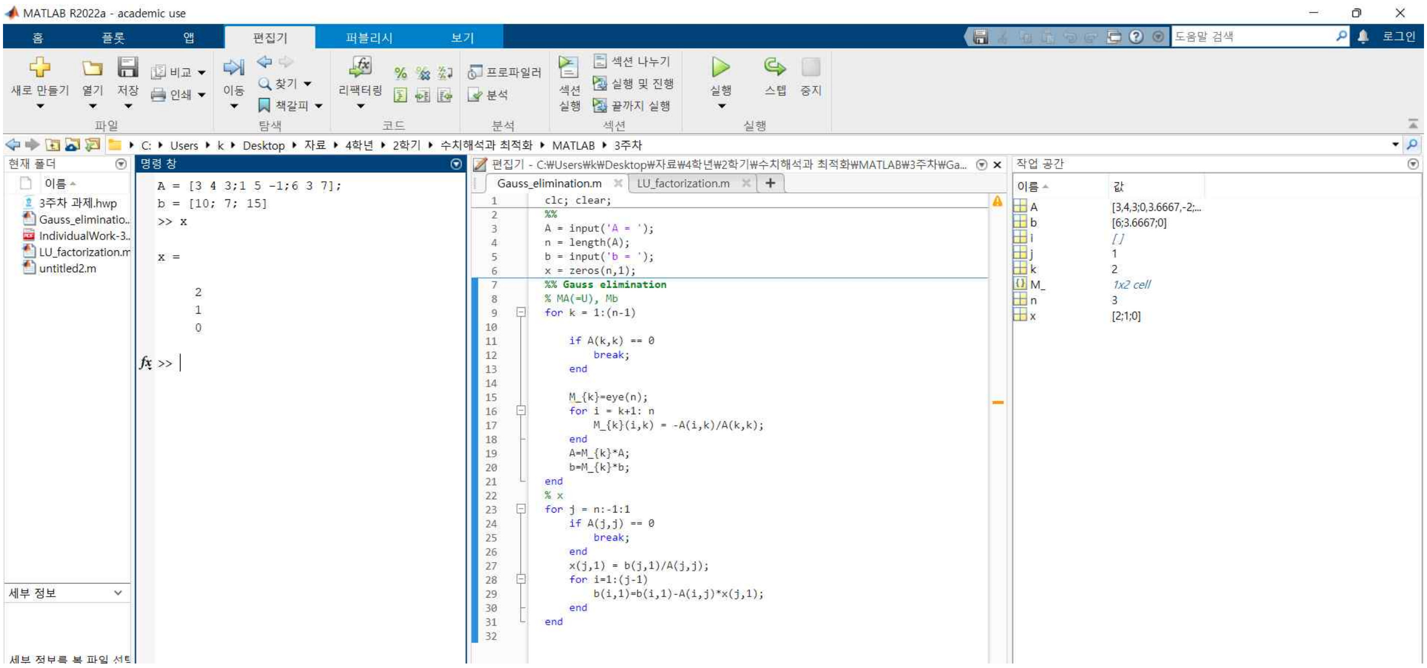
insensitive한 행렬 : $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6.01 \end{bmatrix}$

이유 : 행렬 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6.01 \end{bmatrix}$의 column 벡터는 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 6.01 \end{bmatrix}$로 비슷하지만 동일하지 않은 벡터를 가지고 condition number($<10^4$)가 작으므로 insensitive하다.

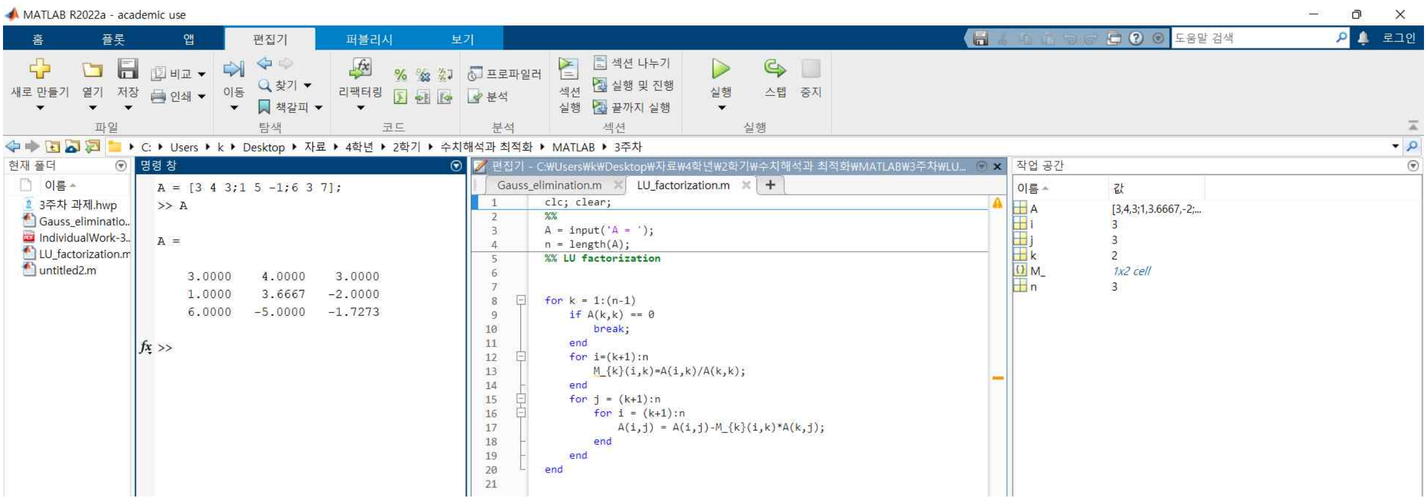
6. (Matlab Problem) 아래의 선형방정식 Ax = b를 Gauss elimination을 이용해서 풀고, 행렬 A를 LU factorization하시오.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \\ 6 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ 15 \end{bmatrix}$$

(1. Gauss elimination을 이용하여 값 구하기)



(2. LU factorization)



추가로 Gauss elimination할 때, 구한 M_1, M_2의 역함수인 L_1, L_2를 곱한 $L = \begin{bmatrix} 1.000 & 0 & 0 \\ 0.3333 & 1.000 & 0 \\ 2.000 & -1.3636 & 1.000 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 3.000 & 4.000 & 3.000 \\ 0 & 3.6667 & -2.000 \\ 0 & 0 & -1.7273 \end{bmatrix}$을 곱한 LU는 LU factorization알고리즘을 통해 구한 A의 값과 동일했다.