泛函分析

电子科大 2023 级数院研究生课程笔记系列

作者：康豪

组织：SMS, UESTC

时间：Aug 28, 2023

版本：1.0

Flee as a bird to your mountain. ——Psalms

目录

前言

泛函分析是分析学的一个重要分支，是应用数学的有力工具。这门课程被设计的初衷就包括了希望选修这门课程的学生可以通过这门课程尽可能了解到泛函分析的各个方向，因此课程内容覆盖范围较广。第一章对度量空间的定义和一些性质进行阐述，并将完备性的概念直接引出，帮助读者建立起对泛函分析研究对象之一的无限维线性空间的理解。第二章通过建立线性、赋予范数，将一般的度量空间进一步推进至赋范线性空间，在完备时就得到 Banach 空间。

课程讲义中还包括的一些对泛函分析理论的简单应用，一方面可以启发读者的阅读灵感，帮助读者在理论学习和科学研究之间搭起桥梁; 另一方面在于减轻读者的阅读压力，一本全是理论的数学讲义总是让人难以顺畅阅读下去的。由于笔记作者的研究方向仅涉及对泛函分析部分理论的应用，故未将全部定理的证明在笔记中罗列，仅记录了一些经典或重要的证明过程。

讲义的修订版已经与出版社签订合同出版，目前尚未公开，公开之后欢迎大家购买阅读。本笔记是由作者根据教学内容及未完成修订的课程讲义综合编写，其中可能存在谬误，欢迎批评指正！

笔记的 LaTeX 模板来自 *ElegantLatex* 团队编写的作品 *elegantbook*，该系列风格优雅、功能齐全，被各类讲义、笔记编著者广泛采纳，实为佳作。

封面图片为船底座大星云，图片来自 NASA 官网。

第 1 章 度量空间

1.1 度量空间

1.1.1 度量空间的定义

定义 1.1 (度量空间的定义)

定义 1.2 (度量空间中的收敛)

定理 1.1

定理 1.2

定义 1.3 (有界集)

定义 1.4 (邻域)

定义 1.5 (连续映射和同胚映射)

1.1.2 完备性

定义 1.6 (完备性)

定义 1.7 (完备度量空间)

命题 1.1

命题 1.2

命题 1.3

$L^p(a,b)$ 是完备的.

命题 1.4

$L^\infty(a,b)$ 是完备的.

定义 1.8 (度量空间的完备化)

引理 1.1 (闭球套定理)

♡

引理 1.2

♡

1.2 度量空间中的开集和闭集

定义 1.9 (开集)

♣

定理 1.3

♡

定义 1.10 (极限点)

♣

定理 1.4

♡

推论 1.1

♡

定理 1.5

♡

定理 1.6

♡

定理 1.7

♡

1.3 纲与 Baire 纲定理

定义 1.11 (无处稠密)

♣

定义 1.12 (第一纲集和第二纲集)

♣

命题 1.5

♠

定理 1.8 (Baire 纲定理,1899)

♡

推论 1.2

♡

1.4 可分的度量空间

定义 1.13 (稠密)

♣

命题 1.6

♠

定理 1.9

♡

1.5 列紧性和紧性

定义 1.14 (列紧和紧)

♣

命题 1.7

♠

定义 1.15 (有限 ϵ 网)

♣

定理 1.10

♡

推论 1.3

列紧的度量空间是可分的.

♡

定理 1.11

♡

命题 1.8

♠

定理 1.12

♡

命题 1.9

♠

命题 1.10

♠

1.6 Arzela-Ascoli 定理

定义 1.16 (等度连续性)

♣

定理 1.13 (Arzela-Ascoli, 1889)

♡

定义 1.17 (Holder 连续和 Lipschitz 连续)

♣

定理 1.14 (peano)

♡

1.7 Banach 压缩映象原理

定义 1.18 (不动点)

♣

定义 1.19 (压缩映射)

♣

定理 1.15 (Banach 压缩映象原理)

♡

定理 1.16

♡

定理 1.17 (Picard, 1893)

♡

定理 1.18

♡

定理 1.19

♡

第 1 章 练习

1. 试证明 $C^\alpha[a,b]$ 是可分的完备度量空间.
2. 试证明 $C^\alpha([a,b])$ 中的任何有界集 A 在 $C([a,b])$ 中是列紧的.

第 2 章 Banach 空间

2.1 Banach 空间的定义及重要例子

2.1.1 线性空间

定义 2.1 (线性空间)

设 X 是一非空集合, 如果在集合 X 中定义加法运算, 即对 $x, y \in X$ 都对应 X 中一个元素 z(记为 $z = x+y$); 对 $\alpha \in \mathbb{F}$ 和 $x \in X$ 都对应 X 中的一个元素 u(记为 $u = \alpha x$), 且满足:

1. $x + y = y + x$;
2. $x + y + z = x + y + z$;
3. 集合 X 中存在零元, 记为 0, 对每个 $x \in X, x + 0 = x$, 且零元唯一;
4. 对仍给 $x \in X$, 都存在 X 中唯一元素, 用 $-x$ 表示, 使得 $x + (-x) = 0$;
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
7. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
8. X 中存在单位元, 记为 1, 对每个 $x \in X$ 有 $1x = x$, 且单位元唯一.

则称 $(X, +, \cdot)$ 为复 ($\mathbb{F}$ 为复数域) 或实 ($\mathbb{F}$ 为实数域) 的线性空间, 通常又称为向量空间, 其中的元素常称为向量或点.

♣

定义 2.2 (线性子空间)

设 X_1 是 X 的一个非空子集, 如果对任给 $x, y \in X_1$ 与 $\alpha \in \mathbb{F}$, 都有 $x + y, \alpha x \in X_1$, 则称 X_1 是 X 的一个线性子空间.

♣

定义 2.3 (线性相关和线性无关)

设 $\{x_k\}_{n=1}^n \subset X$, 如果存在不全为零的数 $\{\alpha_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{F}$ 使得 $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$, 则称 $\{x_k\}_{n=1}^n \subset X$ 是线性相关的. 否则, 则称 $\{x_k\}_{n=1}^n \subset X$ 是线性无关的. 如果一个无穷的向量集合 S 的每个有限子集都是线性无关的, 则称其是线性无关的; 否则称其为线性相关的.

♣

定义 2.4 (线性空间的维数)

♣

定义 2.5 (线性空间的基)

♣

定义 2.6 (直和)

♣

定理 2.1

设 X_1, X_2 是 X 的线性子空间, 则 $X = X_1 \oplus X_2$ 当且仅当对仍给 $x \in X$, 存在唯一的 $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ 使得

$$x = x_1 + x_2$$

♡

定理 2.2

若 $X = X_1 \oplus X_2$ 则

$$\dim X = \dim X_1 + \dim X_2$$

证明 若 X_1 和 X_2 有一个是无穷维的，则 X 也是无穷维的，结论自然成立. 故不妨设 X_1 和 X_2 都是有限维的.

2.1.2 半范数和范数

定义 2.7 (半范数)

设 X 是线性空间，若函数 $p : X \to \mathbb{R}$ 满足：

1. (次可加性)$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in X$
2. $p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in X$

则称 p 为 X 上的半范数.

命题 2.1

定义 2.8 (凸集、平衡和吸收)

- 设 $M \subset X$. 如果当 $x, y \in M, 0 \leq \alpha \leq 1$ 时，有 $\alpha x + (1-\alpha) y \in M$，则称 M 是凸的；
- 如果 $x \in M|\alpha| \leq 1$ 时，有 $\alpha x \in M$，则称 M 是平衡的；
- 如果对任何 $x \in X$，存在 $\epsilon_x > 0$，使得当 $0 < |\alpha| \leq \epsilon_x$ 时，有 $\alpha x \in M$，则称 M 是吸收的.

定义 2.9 (Minkowski 泛函)

设 M 是线性空间 X 中的平衡且吸收的凸子集，定义由 M 诱导出的 Minkouski 泛函映射 $p_M : X \to [0, +\infty)$ 如下：

Minkowski 泛函是研究凸集的有效且重要的工具.

定理 2.3

设 M 是线性空间 X 中的吸收且平衡的凸子集，则由 M 诱导出的 Minkowski 泛函 $p_M(\cdot)$ 是 X 上的半范数.

2.1.3 赋范线性空间和 Banach 空间

定义 2.10 (范数)

注

定义 2.11 (赋范线性空间)

定义 2.12 (依范数收敛)

定理 2.4

推论 2.1

♡

定义 2.13 (Banach 空间)

♣

注

引理 2.1

♡

引理 2.2 (Holder 不等式)

♡

引理 2.3 (Minkowski 不等式)

♡

2.1.4 有限维赋范线性空间与 Riesz 定理

定理 2.5

♡

定义 2.14 (范数等价)

♣

推论 2.2

♡

推论 2.3

♡

推论 2.4

♡

推论 2.5

♡

推论 2.6

♡

定理 2.6 (Ries 引理)

♡

推论 2.7

♡

2.2 有界线性算子和有界线性泛函

定义 2.15 (有界线性算子和有界线性泛函)

设 X,Y 是赋范线性空间，D 是 X 的线性子空间. 若 $A:D\to Y$ 满足下列性质

1. A 是线性的，即对 $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{F},x,y\in D$ 有

$$A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay;$$

2. 存在 $M > 0$，使得当 $x \in D$ 时，有

$$\|Ax\| \leq M\|x\|;$$

则称其为有界线性算子，称 D 为 A 的定义域，有时记为 $\mathcal{D}(A)$. 而称 $A(D) = \{Ax | x \in D\}$ 为 A 的值域，记为 $\mathcal{R}(A)$. 特别的，当 $Y = \mathbf{F}$ 时称 (有界) 线性算子为 (有界) 线性泛函. ♣

注

定理 2.7

♡

定义 2.16 (等价范数)

♣

命题 2.2

♠

定义 2.17 (等价映射)

♣

定理 2.8

♡

2.3 开映射定理

定理 2.9 (开映射定理)

♡

2.4 有界线性算子的逆算子

引理 2.4

♡

引理 2.5

♡

命题 2.3

♠

命题 2.4

♠

2.5 闭图像定理和共鸣定理

2.6 Hahn-Banach 定理

2.7 Hahn-Banach 定理的应用

2.8 Banach 空间的级数

2.9 Korovkin 定理