高等概率论

电子科大 2023 级数院研究生课程笔记系列

作者：康豪

组织：SMS, UESTC

时间：Sept 1, 2023

版本：1.0

我有三种幸福：诗歌、王位、太阳。——海子

目录

前言

高等概率论参考教材为钟开莱教授所著的 **Course in Probability**, 本笔记是由作者根据教学内容编写。

笔记的 LaTeX 模板来自 *ElegantLatex* 团队编写的作品 *elegantbook*，该系列风格优雅、功能齐全，被各类讲义、笔记编著者广泛采纳，实为佳作。

封面图片为船底座大星云，由韦伯望远镜拍摄，图片来自 NASA 官网。

第 1 章 分布函数

1.1 单调函数

1.2 分布函数

1.3 绝对连续分布和奇异分布

第 1 章 练习

1.

第 2 章 测度论

2.1 集类

概率是从集合到数的映射，要对概率进行公理化刻画，首先应该研究其定义域，也就是集合的一些基本性质. 但在概率研究中并不关心集合本身的定义，而更关心集合之间的相互运算，故本节从集合的基本运算开始，研究集合，与集合的集合 (即集族) 的性质和运算规律.

设 Ω 是一抽象空间，即是由被称为点并一般用 ω 来表示的元素所组成的一个非空集合. 集合之间常见的运算关系和记号如下所示，

并	$E \cup F, \bigcup_n E_n$
交	$E \cap F, \bigcap_n E_n$
补	$E^c = \Omega \backslash E$
差	$E \backslash F = E \cap F$
对称差	$E \Delta F = (E \backslash F) \cup (F \backslash E)$
单点集	$\{\omega\}$
包含	$E \subset F, F \supset E$(不排除$E = F$ 的情况) $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}, \mathscr{B} \supset \mathscr{A}$(不排除$\mathscr{A} = \mathscr{B}$的情况)
属于	$\omega \in E, E \in \mathscr{A}$
空集	$\emptyset$

Ω 的自己的一个非空类 $\mathscr{A}$ 可以具有某些" 封闭" 性质，下面列举 10 条封闭性质.

1. 补封闭
2. 并封闭
3. 交封闭
4. 有限并封闭
5. 有限交封闭
6. 单增并封闭
7. 单降交封闭
8. 可列并封闭
9. 可列交封闭
10. 差封闭

根据集合论的知识，在 (1) 补封闭的条件下，由 De Morgan 律 (2) 并封闭和 (3) 交封闭等价；(6) 单增并封闭和 (7) 单降交封闭等价；(8) 可列并和 (9) 可列交等价.

命题 2.1

在 (1) 补封闭的条件下，(2) 并封闭和 (3) 交封闭等价

证明 (证明待补充)

此外，又由归纳法，(2) 并封闭可以推出 (4) 有限并封闭，(3) 交封闭可以推出 (5) 有限交封闭.

命题 2.2

(2) 并封闭可以推出 (4) 有限并封闭，(3) 交封闭可以推出 (5) 有限交封闭.

证明 (证明待补充)

并且，(8) 可列并封闭蕴含 (2) 并封闭 (从第三个集合开始取为空集) 和 (6) 单增并封闭 (将所有集合排序，使集合序列单增)，(9) 可列交封闭蕴含 (3) 交封闭 (从第三个集合开始取为空集) 和 (7) 单降交封闭 (将所有集合排序，使集合序列单降).

命题 2.3

(8) 可列并封闭蕴含 (2) 并封闭 (从第三个集合开始取为空集) 和 (6) 单增并封闭 (将所有集合排序，使集合序列单增)，(9) 可列交封闭蕴含 (3) 交封闭 (从第三个集合开始取为空集) 和 (7) 单降交封闭 (将所有集合排序，使集合序列单降).

证明 (证明待补充)

所以，只需有 (1) 补封闭和 (8) 可列并封闭，便可推出 (1)-(9) 的 9 条封闭性质.

命题 2.4

所以，只需有 (1) 补封闭和 (8) 可列并封闭，便可推出 (1)-(9) 的 9 条封闭性质.

证明 (证明待补充)

(关系图待补充)

定义 2.1 (域、单调类和 Borel 域)

设 $\mathscr{F}$ 是 Ω 的子集的一个非空类，当且仅当

- (1) 补封闭和 (2) 并封闭成立时，$\mathscr{F}$ 被称为域;
- (6) 单增并封闭和 (7) 单降交封闭成立时，$\mathscr{F}$ 被称为单调类 (M.C.);
- (1) 补封闭和 (8) 可列并封闭成立时，$\mathscr{F}$ 被称为 Borel 域 (B.F.);

注 Borel 域要求 (1) 补封闭和 (8) 可列并封闭成立，事实上，根据前面的命题2.4，此时 Borel 域已经满足除差封闭外的全部封闭性质.

由于 Borel 域要求满足可列并封闭的性质，直接讨论 Borel 域比较麻烦，所以在实际问题中希望先考虑简单的情形，将对 Borel 域的讨论进行简化. 下面的定理给出了一个重要的结论，可以将 Borel 域简化为单调类进行讨论.

定理 2.1

一个域是 Borel 域 (B.F.) 的充要条件是它也是一个单调类 (M.C.)

证明 证明待补充，书上有

注 注意定理中的条件为是**一个域**是 Borel 域的充要条件是**这个域**也是单调类. 其中，非空集类是 Borel 域则其必然也是一个域 (可列并封闭蕴含并封闭)，但某一单调类并不一定是一个域，即单调类并不一定满足 (1) 补封闭和 (2) 并封闭这两条性质. 单调类必须也是一个域才能根据上述定理判定其也为 Borel 域. 在实际证明中要注意证明某单调类确为一个域，即证明其对 (1) 补封闭和 (2) 并封闭成立后才能使用上述定理的结论.

下面介绍关于 Borel 域的一些概念和性质.

定义 2.2 (全 Borel 域和平凡 Borel 域)

Ω 的所有子集的类 $\mathscr{S}$ 是一 Borel 域, 称为全 Borel 域; 两个集$\varnothing$，Ω 的类是一 Borel 域, 称为平凡 Borel 域.

性质 设 A 是任一指标集，且对每个 $\alpha in A$，$\mathscr{F}_\alpha$ 是一 Borel 域 (或单调类), 则所有这些 Borel 域 (或单调类) 的交，即属于所有的 $\mathscr{F}_\alpha$ 的集所成的类也是一个 Borel 域 (或单调类).

证明 证明待补充

对于任给的非空集类 $\mathscr{C}$，存在一个包含它的一个最小的 Borel 域 (或域, 或单调类); 它正好就是包含的所有 Borel 域 (或域，或单调类) 的交, 易知，这种 Borel 域 (或域，或单调类) 至少存在一个，即上面提到的 $\mathscr{S}$. 这个最小的 Borel 域 (或域，或单调类) 也称为是由 $\mathscr{C}$ 产生的. 特别是，如果 $\mathscr{F}_0$ 是一个域，则存在包含 $\mathscr{F}_0$ 的一个最小的 Borel 域 (或单调类).

定理 2.2 (单调类定理)

设 $\mathscr{F}_0$ 是一个域，$\mathscr{G}$ 是包含 $\mathscr{F}_0$ 的最小单调类，$\mathscr{F}$ 是包含 $\mathscr{F}_0$ 的最小 Borel 域，则 $\mathscr{F}=\mathscr{G}$. 也就是说，一个域 $\mathscr{F}_0$ 生成的最小 Borel 域和最小单调类相等. ♡

证明 证明待补充，书上有

推论 2.1

设 $\mathscr{F}_0$ 是一个域，$\mathscr{F}$ 是一个包含 $\mathscr{F}_0$ 的最小 Borel 域，$\mathscr{C}$ 是包含 $\mathscr{F}_0$ 且具有封闭性质 (6) 单增并封闭和 (7) 单降交封闭的集类，则 $\mathscr{C}$ 包含 $\mathscr{F}$. ♡

证明 因为 $\mathscr{C}$ 包含 $\mathscr{F}_0$ 且满足封闭性质 (6) 单增并封闭和 (7) 单降交封闭，故 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{F}_0$ 生成的一个单调类；由于 $\mathscr{F}$ 是一个包含 $\mathscr{F}_0$ 的最小 Borel 域，由定理2.2可知 $\mathscr{F}$ 也是包含 $\mathscr{F}_0$ 的最小单调类. 由最小性可知 $\mathscr{C}$ 包含 $\mathscr{F}$

上面的定理是被称为单调类定理的类型之一. 它们是测度论最有用的工具之一，可用来把对于一个特殊的集类或函数类容易验证的关系拓展到一个更大的类上去. 已经知道这种定理的很多变种, 见下面的练习题 10，11 与 12.

2.2 概率测度及其分布函数

定理 2.3

有限可加性公理与连续性公理总合起来等价于可数可加性公理. ♡

例题 2.1

例题 2.2

第 3 章 随机变量 期望值 独立性

附录 A