高等概率论

电子科大 2023 级数院研究生课程笔记系列

作者：康豪

组织：SMS, UESTC

时间：Sept 1, 2023

版本：1.0

我有三种幸福：诗歌、王位、太阳。——海子

目录

前言

高等概率论参考教材为钟开莱教授所著的 **Course in Probability**, 本笔记是由作者根据教学内容编写。

笔记的 LaTeX 模板来自 *ElegantLatex* 团队编写的作品 *elegantbook*，该系列风格优雅、功能齐全，被各类讲义、笔记编著者广泛采纳，实为佳作。

封面图片为船底座大星云，由韦伯望远镜拍摄，图片来自 NASA 官网。

第 1 章 分布函数

1.1 单调函数

1.2 分布函数

定义 1.1 (分布函数的定义)

设 F 的定义域为 $(-\infty, \infty)$，满足条件:

1. 实值增函数,
2. 右连续,
3. $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$.

则称 F 是一个分布函数，简记为’d.f.’.

♣

定理 1.1

设

$$F_c(x) = F(x) - F_d(x)$$

，则 F_c 是正的、递增的连续函数.

♡

1.3 绝对连续分布和奇异分布

第 1 章 练习

1.

第 2 章 测度论

2.1 集类

概率是从集合到数的映射，要对概率进行公理化刻画，首先应该研究其定义域，也就是集合的一些基本性质. 但在概率研究中并不关心集合本身的定义，而更关心集合之间的相互运算，故本节从集合的基本运算开始，研究集合，与集合的集合 (即集族) 的性质和运算规律.

设 Ω 是一抽象空间，即是由被称为点并一般用 ω 来表示的元素所组成的一个非空集合. 集合之间常见的运算关系和记号如下所示，

并	$E \cup F, \bigcup_n E_n$
交	$E \cap F, \bigcap_n E_n$
补	$E^{\mathfrak{c}} = \Omega \backslash E$
差	$E \backslash F = E \cap F$
对称差	$E \Delta F = (E \backslash F) \cup (F \backslash E)$
单点集	$\{\omega\}$
包含	$E \subset F, F \supset E$(不排除$E = F$ 的情况) $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}, \mathscr{B} \supset \mathscr{A}$(不排除$\mathscr{A} = \mathscr{B}$的情况)
属于	$\omega \in E, E \in \mathscr{A}$
空集	$\emptyset$

Ω 的自己的一个非空类 $\mathscr{A}$ 可以具有某些" 封闭" 性质，下面列举 10 条封闭性质.

1. $E \in \mathscr{A} \Rightarrow E^c \in \mathscr{A}$. 补封闭
2. $E_1 \in \mathscr{A}, E_2 \in \mathscr{A} \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \mathscr{A}$. 并封闭
3. $E_1 \in \mathscr{A}, E_2 \in \mathscr{A} \Rightarrow E_1 \cap E_2 \in \mathscr{A}$. 交封闭
4. $\forall n \geqslant 2: E_j \in \mathscr{A}, 1 \leqslant j \leqslant n \Rightarrow_{j=1}^{n} E_j \in \mathscr{A}$. 有限并封闭
5. $\forall n \geqslant 2; E_i \in \mathscr{A}, 1 < j \leqslant n \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n} E_j \in \mathscr{A}$. 有限交封闭
6. $E_j \in \mathscr{A}; E_j \subset E_{j+1}, 1 \leqslant j < \infty \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathscr{A}$. 单增并封闭
7. $E_j \in \mathscr{A}; E_j \supset E_{j+1}, 1 \ll j < \infty \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathscr{A}$. 单降交封闭
8. $E_j \in \mathscr{A}, 1 \leqslant j < \infty \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathscr{A}$. 可列并封闭
9. $E_j \in \mathscr{A}, 1 \leqslant j < \infty \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathscr{A}$. 可列交封闭
10. $E_1 \in \mathscr{A}, E_2 \in \mathscr{A}, E_1 \subset E_2 \Rightarrow E_2 \backslash E_1 \in \mathscr{A}$. 差封闭

根据集合论的知识，在 (1) 补封闭的条件下，由 De Morgan 律 (2) 并封闭和 (3) 交封闭等价；(6) 单增并封闭和 (7) 单降交封闭等价；(8) 可列并和 (9) 可列交等价.

命题 2.1

在 (1) 补封闭的条件下，(2) 并封闭和 (3) 交封闭等价

证明 由德摩根律可得.

此外，又由归纳法，(2) 并封闭可以推出 (4) 有限并封闭，(3) 交封闭可以推出 (5) 有限交封闭.

命题 2.2

(2) 并封闭可以推出 (4) 有限并封闭，(3) 交封闭可以推出 (5) 有限交封闭.

证明 (证明待补充)

并且，(8) 可列并封闭蕴含 (2) 并封闭 (从第三个集合开始取为空集) 和 (6) 单增并封闭 (将所有集合排序，使集合序列单增)，(9) 可列交封闭蕴含 (3) 交封闭 (从第三个集合开始取为空集) 和 (7) 单降交封闭 (将所有集合排序，使集合序列单降).

命题 2.3

(8) 可列并封闭蕴含 (2) 并封闭 (从第三个集合开始取为空集) 和 (6) 单增并封闭 (将所有集合排序，使集合序列单增)，(9) 可列交封闭蕴含 (3) 交封闭 (从第三个集合开始取为空集) 和 (7) 单降交封闭 (将所有集合排序，使集合序列单降).

证明 (证明待补充)

所以，只需有 (1) 补封闭和 (8) 可列并封闭，便可推出 (1)-(9) 的 9 条封闭性质.

命题 2.4

所以，只需有 (1) 补封闭和 (8) 可列并封闭，便可推出 (1)-(9) 的 9 条封闭性质.

证明 (证明待补充)

(关系图待补充)

定义 2.1 (域、单调类和 Borel 域)

设 $\mathscr{F}$ 是 Ω 的子集的一个非空类，当且仅当

- (1) 补封闭和 (2) 并封闭成立时，$\mathscr{F}$ 被称为域;
- (6) 单增并封闭和 (7) 单降交封闭成立时，$\mathscr{F}$ 被称为单调类 (M.C.);
- (1) 补封闭和 (8) 可列并封闭成立时，$\mathscr{F}$ 被称为 Borel 域 (B.F.);

注 Borel 域要求 (1) 补封闭和 (8) 可列并封闭成立，事实上，根据前面的命题2.4，此时 Borel 域已经满足除差封闭外的全部封闭性质.

由于 Borel 域要求满足可列并封闭的性质，直接讨论 Borel 域比较麻烦，所以在实际问题中希望先考虑简单的情形，将对 Borel 域的讨论进行简化. 下面的定理给出了一个重要的结论，可以将 Borel 域简化为单调类进行讨论.

定理 2.1

一个域是 Borel 域 (B.F.) 的充要条件是它也是一个单调类 (M.C.)

证明 必要性显然 (可列并蕴含单增并)；下面说明充分性.

欲证充分性

注 注意定理中的条件为是**一个域**是 Borel 域的充要条件是**这个域**也是单调类. 其中，非空集类是 Borel 域则其必然也是一个域 (可列并封闭蕴含并封闭)，但某一单调类并不一定是一个域，即单调类并不一定满足 (1) 补封闭和 (2) 并封闭这两条性质. 单调类必须也是一个域才能根据上述定理判定其也为 Borel 域. 在实际证明中要注意证明某单调类确为一个域，即证明其对 (1) 补封闭和 (2) 并封闭成立后才能使用上述定理的结论.

下面介绍关于 Borel 域的一些概念和性质.

定义 2.2 (全 Borel 域和平凡 Borel 域)

Ω 的所有子集的类 $\mathscr{S}$ 是一 Borel 域, 称为全 Borel 域; 两个集$\varnothing$，Ω 的类是一 Borel 域, 称为平凡 Borel 域.

性质 设 A 是任一指标集, 且对每个 $\alpha in A$，$\mathscr{F}_\alpha$ 是一 Borel 域 (或单调类), 则所有这些 Borel 域 (或单调类) 的交, 即属于所有的 $\mathscr{F}_\alpha$ 的集所成的类也是一个 Borel 域 (或单调类).

证明 证明待补充

对于任给的非空集类 $\mathscr{C}$，存在一个包含它的一个最小的 Borel 域 (或域, 或单调类); 它正好就是包含的所有 Borel 域 (或域，或单调类) 的交, 易知，这种 Borel 域 (或域，或单调类) 至少存在一个，即上面提到的 $\mathscr{S}$. 这个最小的 Borel 域 (或域，或单调类) 也称为是由 $\mathscr{C}$ 产生的. 特别是，如果 $\mathscr{F}_0$ 是一个域，则存在包含 $\mathscr{F}_0$ 的一个最小的 Borel 域 (或单调类).

定理 2.2 (单调类定理)

设 $\mathscr{F}_0$ 是一个域，$\mathscr{G}$ 是包含 $\mathscr{F}_0$ 的最小单调类，$\mathscr{F}$ 是包含 $\mathscr{F}_0$ 的最小 Borel 域，则 $\mathscr{F}=\mathscr{G}$. 也就是说，一个域 $\mathscr{F}_0$ 生成的最小 Borel 域和最小单调类相等.

证明 证明待补充，书上有

推论 2.1

设 $\mathscr{F}_0$ 是一个域，$\mathscr{F}$ 是一个包含 $\mathscr{F}_0$ 的最小 Borel 域，$\mathscr{C}$ 是包含 $\mathscr{F}_0$ 且具有封闭性质 (6) 单增并封闭和 (7) 单降交封闭的集类，则 $\mathscr{C}$ 包含 $\mathscr{F}$.

证明 因为 $\mathscr{C}$ 包含 $\mathscr{F}_0$ 且满足封闭性质 (6) 单增并封闭和 (7) 单降交封闭，故 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{F}_0$ 生成的一个单调类；由于 $\mathscr{F}$ 是一个包含 $\mathscr{F}_0$ 的最小 Borel 域，由定理2.2可知 $\mathscr{F}$ 也是包含 $\mathscr{F}_0$ 的最小单调类. 由最小性可知 $\mathscr{C}$ 包含 $\mathscr{F}$.

上面的定理是被称为单调类定理的类型之一. 它们是测度论最有用的工具之一，可用来把对于一个特殊的集类或函数类容易验证的关系拓展到一个更大的类上去.

2.2 概率测度及其分布函数

定义 2.3 (概率测度的定义)

设 Ω 是一空间，$\mathscr{F}$ 是 Ω 的子集的一个 Borel 域.$\mathscr{F}$ 上的概率测度 $\mathscr{P}(\cdot)$ 是以 $\mathscr{F}$ 为定义域且满足下列公理的数值集函数:

1. $\forall E\in\mathscr{F}, \mathscr{P}(E)\geqslant 0$;
2. 如果 $\{E_j\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中两两不交的集的一个可数类，那么
$$\mathscr{P}(\bigcup_j E_j)=\sum_j \mathscr{P}(E_j);$$
3. $\mathscr{P}(\Omega)=1$.

推论 2.2 (概率测度的性质)

1. $\mathscr{P}(E)\leqslant 1$;
2. $\mathscr{P}(\emptyset)=0$;
3. $\mathscr{P}(E^c)=1-\mathscr{P}(E)$;
4. $\mathscr{P}(E\cup F)+\mathscr{P}(E\cap F)=\mathscr{P}(E)+\mathscr{P}(F)$;
5. $E\subset F\Rightarrow \mathscr{P}(E)=\mathscr{P}(F)-\mathscr{P}(F\backslash E)\leqslant \mathscr{P}(F)$;
6. 单调性：$E_n\uparrow E$ 或$E_n\downarrow E \mathscr{P}(E_n)\to\mathscr{P}(E)$;
7. 布尔不等式：$\mathscr{P}(\bigcup_j E_j)\leqslant\sum_j \mathscr{P}(E_j)$.

证明

1. $\mathscr{P}(E))=1-\mathscr{P}(E^c)\leq 1$;
2. $\mathscr{P}(\emptyset)=1-\mathscr{P}(\Omega)=0$;
3. $\mathscr{P}(E^c\cup E)=1\Leftrightarrow \mathscr{P}(E^c)+\mathscr{P}(E)=1$;

命题 2.5 (连续性公理)

$E_n\downarrow\varnothing\Rightarrow\mathscr{P}(E_n)\to 0$

定理 2.3

有限可加性公理与连续性公理总合起来等价于可数可加性公理.

例题 2.1

例题 2.2

例题 2.3 设 $\mathscr{R}^1=(-\infty,\infty)$，$\mathscr{C}$ 为形如 $(a,b]$ 的区间类，其中

引理 2.1

$\mathscr{B}^1$ 上的每个概率测度通过如下的对应确定一分布函数：

$$\forall x\in\mathscr{R}^1 : \mu((-\infty,x])=F(x).$$

♡

定理 2.4

每一个分布函数 F 通过 (5) 中给出的任一个关系或通过 (4) 确定 $\mathscr{B}^1$ 上的一个概率测度. ♡

定理 2.5

设 $\mathscr{F}$ 是由域 $\mathscr{F}_0$ 所产生的 Borel 域，μ 和 v 是定义在 $\mathscr{F}$ 上的两个测度. 如果 μ 和 v 在 $\mathscr{F}_0$ 上 $\sigma-$ 有限，且对每个 $E\in\mathscr{F}_0$ 有 $\mu(E)=v(E)$，则对每个 $E\in\mathscr{F}$，同样的等式成立，即 $\mu=v$ ♡

推论 2.3

设 μ 与 v 是 $\mathscr{B}^1$ 上的两个测度，它们在 $(a,b],(a,b),[a,b),[a,b],(-\infty,b],(-\infty,b),[a,\infty)$ 八种类型之一的所有区间上一致，或者仅在其端点在给定稠集中的所有这种区间上一致，则它们在 $\mathscr{B}^1$ 上一致. ♡

证明 证明见习题 5.

定理 2.6

对于 $\mathscr{B}^1$ 上给定的概率测度 μ，存在唯一的一个分布函数 F 满足 (4). 反之，对于给定的分布函数 F，存在唯一的概率测度满足 (4) 或 (5) 中的任一个关系. ♡

定义 2.4 (完备概率空间)

概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{P})$ 称为是完备的，如果 $\mathscr{F}$ 中使得 $\mathscr{P}(F)=0$ 的集的任何自己也属于 $\mathscr{F}$. ♣

定理 2.7

对于给定的概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{P})$，存在一个完备概率空间 $(\Omega,\overline{\mathscr{F}},\overline{\mathscr{P}})$，使得 $\mathscr{F}\subset\overline{\mathscr{F}}$ 且在 $\mathscr{F}$ 上 $\mathscr{P}=\overline{\mathscr{P}}$ ♡

第 2 章 练习

1. $(\bigcup_j A_j)\backslash(\bigcup_j B_j) \subset \bigcup_j (A_j\backslash B_j)$.$(\bigcap_j A_j)\backslash(\bigcap_j B_j) \subset \bigcup_j (A_j\backslash B_j)$. 何时成立?

解

(a). $\bigcap_j B_j^c = B_j^c$ 时成立;

(b). $\bigcap_j A_j = A_j$ 时成立.

2. 用示性函数证明对称差的以下性质，注:$I_{A\Delta B} = I_A + I_B, (mod \quad 2)$

(a). $(A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C)$,

(b). $(A \vartriangle B) \vartriangle (B \vartriangle C) = A \vartriangle C$,

(c). $(A \vartriangle B) \vartriangle (C \vartriangle D) = (A \vartriangle C) \vartriangle (B \vartriangle D)$,

(d). $A \vartriangle B = C \Leftrightarrow A = B \vartriangle C$,

(e). $A \vartriangle B = C \vartriangle D \Leftrightarrow A \vartriangle C = B \vartriangle D$.

解

(a). $LHS = (I_A + I_B) + I_C = I_A + (I_B + I_C) = RHS$

(b). $LHS = (I_A + I_B) + (I_C + I_D) = I_A + I_B + I_B + I_C = I_A + I_C = RHS$

(c). $LHS = (I_A + I_B) + (I_C + I_D) = (I_A + I_C) + (I_B + I_D) = RHS$

(d). $(I_A + I_B) = I_C \Leftrightarrow I_A + I_B + I + B = I_B + I_C \Leftrightarrow I_A = I_B + I_C$

(e). $I_A + I_B = I_C + I_D \Leftrightarrow I_A + I_B + I_B + I_C = I_B + I_C + I_C + I_D \Leftrightarrow I_A + I_C = I_B + I_D$

3. 对于任何可数无限集 Ω，它的有限子集及其补集的类构成一域 $\mathscr{F}$. 在 $\mathscr{F}$ 上定义 $\mathscr{P}(E)$ 如下：如果 E 有限，则令 $\mathscr{P}(E) = 0$；如果 E 无限，则令 $\mathscr{P}(E) = 1$，则 $\mathscr{P}$ 有限可加但不可数可加.

解 设有可列个集合的类 $\{E_j\}, j = 1, 2, , , \ldots$，满足 E_1 为无限集，其余集合为有限集，且 $E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$. 下面证明有限可加性. 从 $\{E_i\}$ 中任选 n 个集合，若包含 E_1，那么 $\bigcup_{j=1}^n E_j$ 为一无限集，故有 $\mathscr{P}(\bigcup_{j=1}^n E_j) = \sum_{j=1}^n \mathscr{P}(E_j) = 1$; 若不包含 E_1，则有 $\mathscr{P}(\bigcup_{j=1}^n E_j) = \sum_{j=1}^n \mathscr{P}(E_j) = 0$. 这就说明有限可加性成立.

下面说明可列可加性不成立. 从可数个集合的类中取出所有有限集合 $E_j, j = 2, 3, \ldots$，那么 $\bigcup_j E_j$ 为一无限集合，根据题设有 $\mathscr{P}(\bigcup_j E_j) = 1$，但 $\sum_j \mathscr{P}(E_j) = 0$，有限可加性不成立.

4. 设 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{R}^1$ 的两两互不相交的子集 $\{E_j, j \geq 1\}$ 的可数类，$\mathscr{F}$ 是由 $\mathscr{C}$ 产生的 Borel 域. 确定在 $\mathscr{F}$ 上的最一般的概率测度，并证明所得出的概率空间与例 1 中所讨论的概率空间同构.

解 $\mathscr{C}$ 生成的 Borel 域中的元素可表为 E_j 及 $\bigcup_{j=1}^\infty E_j = E_0$ 的可数并，因此只需确定 E_j 上的概率测度. 任取 $P_j \geq 0, \sum_{j=0}^\infty = 1$，定义 $\mathscr{P}(E_j) = p_j, j \geq 1$.$\mathscr{P}(E_0) = p_0$(直接将 $\mathscr{P}$ 扩展到 $\mathscr{F}$ 上). 定义 $T : \mathscr{F} \to 2^\Omega$ 如下：

$$T(E_j) = w_{j+1}, j \geq 0, \quad T(\bigcup_{j\in I} E_j) = \bigcup_{j\in I} w_{j+1},$$

则 T 为一同构映射.

5. 证明推论2.3: 设 μ 和 v 是 $\mathscr{B}^1$ 上的两个测度，它们在 $(a, b], (a, b), [a, b), [a, b], (-\infty, b], (-\infty, b), [a, \infty), (a, \infty)$ 的 8 种类型之一的所有区间上一致，或者仅在其端点在给定稠集 D 中的所有这种区间上一致，则它们在 $\mathscr{B}^1$ 上一致.

解 任取 8 种区间之一，记为 E, 由题设有 $\mu(E) = v(E)$. 令 $\mathscr{B}_0$ 为 E 生成的域，那么有

$$\mu(\mathscr{B}_0) = \mu(\cup_{j=1}^n (E_j)) = \sum_{i=1}^n \mu(E_j) = \sum_{i=1}^n v(E_j) = v(\cup_{j=1}^n E_j),$$

于是有 μ 和 v 在域 $\mathscr{B}_0$ 上一致，那么由定理 2.2.3，μ 和 v 在 Borel 域 $\mathscr{B}_1$ 上一致.

6. 利用 2.1 节练习中的练习题 1 容易证明 $\overline{\mathscr{F}} = \{E \subset \Omega{:}E \vartriangle F \in \mathscr{N} \quad \text{for some } F \in \mathscr{F}\}$. 是一 Borel 域.

解 欲证 $\overline{\mathscr{F}}$ 是 Borel 域，则证集合 $\overline{\mathscr{F}}$ 对余运算和可列并运算封闭.

下面说明集合 $\overline{\mathscr{F}}$ 对余运算封闭. 设对 $\forall E_j \in \overline{\mathscr{F}}$，存在 $F \in \mathscr{F}$ 有 $E_j \in \Omega, E_j \triangle F \in \mathcal{N}$. 由于

$$(E_j^c \triangle F^c) = (E_j^c - F^c) \cup (F^c - E_j^c = (F - E_j) \cup (E_j - F) = E_j \triangle F \in \mathcal{N}.$$

即集合对余运算封闭.

下面说明集合 $\overline{\mathscr{F}}$ 对可列并运算封闭. 设有 $E_j \in \overline{\mathscr{F}}, j = 1, 2, \ldots$，则存在 $F_j \in \mathscr{F}$ 使得 $E_j \triangle F_j \in \mathcal{N}$，即 $(E_j - F_j) \cup F_j - E_j) \in \mathcal{N}$. 考虑

$$(\bigcup_j E_j - \bigcup_j F_j) \cup (\bigcup_j F_j - \bigcup_j E_j) \subset (\bigcup_j (E_j - F_j)) \cup (\bigcup_j (F_j - E_j)) = \bigcup_j ((E_j - F_j) \cup (F_j - E_j)) \in \mathcal{N}$$

即有 $\cup_j E_j \subset \overline{\mathscr{F}}$. 故 $\overline{\mathscr{F}}$ 对可列并运算封闭. 这就推出 $\overline{\mathscr{F}}$ 是一 Borel 域.

7. $\mathscr{B}^1$ 上的任何测度 μ 的原子是一个使得 $\mu(x) > 0$ 的单点集.$\sigma-$ 有限测度的原子的个数是可数的. 对于每个 x 我们有

$$\mu(\{x\}) = F(x) - F(x-).$$

解 设 μ 为有限测度，考虑递减集列 $\{x - \frac{1}{n}, x]\}$，$\mu((x - \frac{1}{n}, x]) = F(x) - F(x - \frac{1}{n})$. 由测度的上连续性，令 $n \to \infty$ 得 $\mu(x) = F(x) - F(x-)$. 若 x 是 μ 的原子，则也为分布函数 F 的跳跃点，故可数. 下面设 μ 是 σ 有限的，设 $\{E_n\} \uparrow \mathbb{R}$，$\mu$ 在每个 E_n 上有限. 定义有限测度 $\mu(A \cap E_n)$，则 $lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$. 因此由 $\mu_n(x) = F_n(x) - F_n(x-)$, 可得 $\mu(x) = F(x) - F(x-)$. 若 x 为 μ 的原子，则必为某 μ_n 的原子，故可数.

8. 设 f 对 $\mathscr{F}$ 可测，Z 包含在零集中，定义

$$\tilde{f} = \begin{cases} f & \text{on} Z^c, \\ K & \text{on} Z, \end{cases}$$

其中 K 是常数，如果 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{P})$ 是完备的，则 $\tilde{f}$ 对于 $\mathscr{F}$ 可测. 证明如果 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{P})$ 不完备，则结论可能不成立.

解 若 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{P})$ 不完备，则存在集合 E 不含于 $\mathscr{F}$ 中. 那么

$$\forall \epsilon > 0, E = \{x \in \mathscr{F}, \tilde{f}(x) > K - \epsilon\} \supset Z$$

但 E 不可测，故结论不成立.

第 3 章 随机变量 期望值 独立性

3.1 一般定义

定义 3.1 (随机变量的定义)

一个广义是指随机变量是一个函数 X，其中定义域是 Borel 域 $\mathscr{F}$ 中的一个集 Δ，值域包含在 $\mathscr{R}^* = [-\infty, \infty]$ 之中，使得对于 $\mathscr{B}^*$ 中的每个 B，有

$$\{\omega; X(\omega) \in B\} \in \Delta \cap \mathscr{F}, \tag{3.1}$$

其中 $\Delta \cap \mathscr{F}$ 是 $\mathscr{F}$ 在 Δ 上的迹. 一个复随机变量时一个定义在 $\mathscr{F}$ 中的一个集 Δ 上而在复平面中取值的函数，其实部和虚部都是实的有限值随机变量.

♣

定理 3.1

对于由 Ω 到 $\mathscr{R}^1$(或 $\mathscr{R}^*$) 的任何函数 (不必是随机变量)，逆映射具有下列性质:

1. $X^{-1}(A^c) = (X^{-1}(A))^c$,
2. $X^{-1}(\bigcup_\alpha A_\alpha) = \bigcup_\alpha X^{-1}(A_\alpha)$,
3. $X^{-1}(\bigcap_\alpha A_\alpha) = \bigcap_\alpha X^{-1}(A_\alpha)$.

其中 α 在任意一个指标集 (不一定可列) 中取值.

♡

证明 证明见习题 1

定理 3.2

当且仅当对每个实数 x，或对 $\mathscr{R}^1$ 中的一个稠子集中的每个实数 x，有

$$\{\omega; X(\omega) \leqslant x\} \in \mathscr{F}$$

时，X 是一个随机变量.

♡

证明

定理 3.3

概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}; \mathscr{P})$ 上的每一个随机变量根据如下的对应关系，引出一个概率空间 $(\mathscr{R}^1, \mathscr{B}^1, \mu)$

$$\forall B \in \mathscr{B}^1 : \mu(B) = \mathscr{P}\{X^{-1}(B)\} = \mathscr{P}\{X \in B\}. \tag{3.2}$$

♡

例题 3.1

例题 3.2

例题 3.3

定理 3.4

如果 X 是一个随机变量，f 是 $(\mathscr{R}^1, \mathscr{B}^1)$ 上的一个 Borel 可测函数，则 $f(X)$ 是一个随机变量.

♡

定理 3.5

如果 X, Y 是随机变量，f 是二元 Borel 可测函数，则 $f(X, Y)$ 是一个随机变量.

♡

推论 3.1

♡

定理 3.6

定义 3.2 (离散随机变量)

定义 3.3 (示性函数)

3.2 数学期望的性质

3.3 独立性

第 3 章 练习

1. 证明定理3.1

   解

   (a). $X^{-1}(B^c) = \{w, X(w) \in B^c\} = \{w, X(w) \notin B\} = \{w, w \notin X^{-1}(B)\} = \{w, w \in (X^{-1}(B))^c\} = X^{-1}(B)$

   (b). $X^{-1}(\bigcup_i B_i) = \{w, X(w) \in \bigcup_i B_i\} = \{X(w) \in B_i\} = \{x \in X^{-1}(B_i)\} = \{w \in \bigcup X^{-1}(B_i)\} = \bigcup_i X^{-1}(B_i)$

   (c). 用 (1) 和 (2)

2. $X^{-1}(\mathscr{B}^1)$ 为包含 $\{X^{-1}(-\infty, a]), a \in \mathscr{R}^1\}$ 的最小 Borel 域.

   解

3. 证明 $f(w) = w$ 与 $f(w) = 1 - w$ 同分布.

   解

4. 证明连续函数为可测函数.

   解 设 f 是定义在紧集 $[a, b]$ 上的连续函数，根据连续函数的性质，$\{x | x \in [a, b], c \leqslant f\}$ 也是紧集，而紧集是可测集，故 f 是可测函数.

5. 证明所有能表为不相交的乘积集的并的集构成一个域 $\mathscr{B}_0^2$

   解

附录 A