数值分析课程作业 第一章

康豪

2023 年 9 月 7 日

题目 1. 分析单精度计算 $fl(9.4) - fl(9) - fl(0.4)$ 的结果，并进行计算机实践.

解答.

1. 推导过程：单精度具有 1 位符号，8 位指数，23 位小数，故超过位数的数字将被截断，并按照舍入规则进行舍入. 下面根据计算机存储单精度数据的方式及舍入规则推导 $fl(9.4) - fl(9) - fl(0.4)$ 的计算结果.

$fl(9.4) = (1001.\overline{0110})_2 = (1.001\overline{0110} \times 2^3) = 1.00101100110011001100110 \times 2^3$

由于 $fl(9.4)$ 末尾为 0，故直接舍去后续位数. 这将导致误差

$$-(0.\overline{0110} \times 2^{-23} \times 2^3) = -0.4 \times 2^{-20}$$

$fl(9) = 1001$，不需截断.

$$fl(0.4) = (0.\overline{0110})_2 = (1.\overline{1001} \times 2^{-2}) = 1.10011001100110011001100 \times 2^{-2}$$

$fl(0.4)$ 末尾为 1，且后续位数上不全为 0，故要舍去后续位数后进 1 位，即变为：

$$fl(0.4) = (0.\overline{0110})_2 = (1.\overline{1001} \times 2^{-2}) = 1.10011001100110011001101 \times 2^{-2}$$

这将导致误差

$$-\overline{0.1100}\times 2^{-23}\times 2^{-2}+2^{-23}\times 2^{-2} = -\overline{0.0110}\times 2^{-24}+2^{-25} = -0.8\times 2^{-25}+\times 2^{-25} = 0.2\times 2^{-25}$$

故最终导致的误差为:

$$-0.4 \times 2^{-20} - 0.2 * \times 2^{-25} = -13 \times 2^{-25}$$

2. 编程实现：

```python
import numpy as np
ans1 = np.float32(9.4) - np.float32(9) - np.float32(0.4)
# Python 中保存数据默认双精度，np.float32 方法将数据以单精度形式保存
ans2 = -13 * math.pow(2, -25)
print(" 计算结果为：%.12e" % ans1)
print(" 理论结果为：%.12e" % ans2)
```

3. 结果展示：

```
########################第一题##########################
计算结果为：-3.874301910400e-07
理论结果为：-3.874301910400e-07
```

图 1: 问题一 Python 编程结果截图

题目 1 结果分析. 理论分析结果与编程计算结果完全一致. 由于存在截断误差，计算机的计算结果无法实现完全准确，单精度计算 $fl(9.4) - fl(9) - fl(0.4)$ 的结果与实际上的 0 小了 10^7 数量级.

题目 2. 设计高效的多项式算法 $P(x) = 1 + 2x^3 + 3x^7 + 4x^{11} + 5x^{15}$. 计算机编程比较直接算法与优化算法的计算时间 (采用双精度计算，$x = 2$,$x = 2.222222$ 分别循环 10^7 次)

解答.

1. 推导过程直接计算多项式，采用形式

$$1 + 2 * x^3 + 3 * x^7 + 4 * x^{11} + 5 * x^{15}$$

为优化计算方法，将多项式等价变换为下列形式

$$((((5 \times x^4 + 4) \times x^4) + 3) \times x^4 + 2) \times x^3 + 1$$

2. 编程实现：

```
import time
turns = 10 ** 7  # 循环次数
a1 = 2
a2 = 2.222222

x = a1
t1 = time.time()
for i in range(turns):
    # 直接计算
    ans = 1 + 2 * x ** 3 + 3 * x ** 7 + 4 * x ** 11 + 5 * x ** 15
t2 = time.time()

t3 = time.time()
for i in range(turns):
    # 优化算法后
    ans = ((((5 * x ** 4 + 4) * x ** 4) + 3) * x ** 4 + 2) * x ** 3 + 1
t4 = time.time()
print("x=2, 直接计算多项式所需总时间为: ", t2 - t1)
print("x=2, 优化算法后计算多项式所需总时间为: ", t4 - t3)

x = a2
t1 = time.time()
for i in range(turns):
    # 直接计算
    ans = 1 + 2 * x ** 3 + 3 * x ** 7 + 4 * x ** 11 + 5 * x ** 15
t2 = time.time()

t3 = time.time()
for i in range(turns):
    # 优化算法后
    ans = ((((5 * x ** 4 + 4) * x ** 4) + 3) * x ** 4 + 2) * x ** 3 + 1
t4 = time.time()
```

```python
print("x=2.222222, 直接计算多项式所需总时间为: ", t2 - t1)
print("x=2.222222, 优化算法后计算多项式所需总时间为: ", t4 - t3)
```

3. 结果展示:

```
########################第二题########################
x=2,直接计算多项式所需总时间为: 9.640822887420654
x=2,优化算法后计算多项式所需总时间为: 9.418365955352783
x=2.222222,直接计算多项式所需总时间为: 7.12360405921936
x=2.222222,优化算法后计算多项式所需总时间为: 6.976006746292114
```

图 2: 问题二 Python 编程结果截图

题目 2 结果分析. 直接计算多项式需要 $(1+2)+(1+6)+(1+10)+(1+14)=36$ 次乘法. 将多项式等价变换形式后，每次计算多项式仅需 $(1+3)+(1+3)+(1+3)+(1+2)=15$ 次乘法. 观察程序运行结果，发现优化算法后计算多项式的时间相较为优化时明显减少.

题目 3. 推导计算 $I_n=\int_0^1 x^n e^x dx$，用正向和逆向推导计算 $I_0 \sim I_{20}$，比较分析两种迭代的误差和稳定性.

解答.

1. 推导过程:

$I_n=\int_0^1 x^n e^x dx=\int_0^1 x^n de^x = x^n de^x|_0^1 - n\int_0^1 e^x x^{n-1}dx = e - nI_{n-1}$

故正向迭代公式为:

$$I_n = e - nI_{n-1},$$

反向迭代公式为:

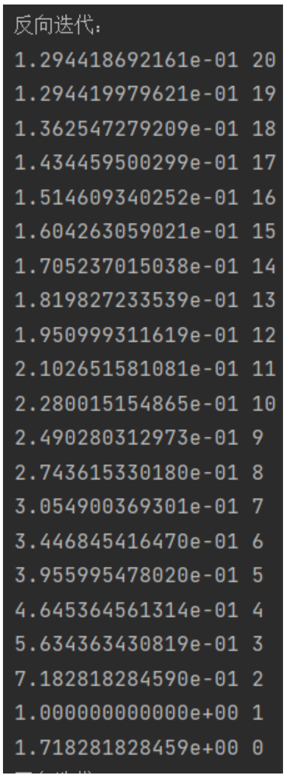
$$I_{n-1}=\frac{1}{n}(e-I_n).$$

2. 编程实现:

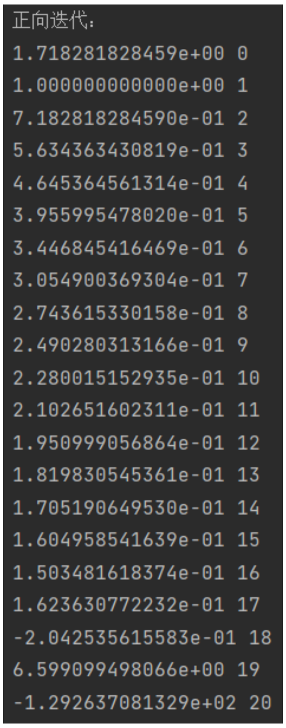
```python
import numpy as np
print('反向迭代：')
I = 2.7 * 0.5 ** 20 # 初值估计，约为 0
I = np.zeros((22, 1))
I[21] = 2.7 * 0.5 ** 20
for i in range(21, 0, -1):
    I[i - 1] = (1 / i) * (np.e - I[i])
    print("%.12e" % I[i - 1], i - 1)

print('正向迭代：')
I = np.e - 1
for i in range(1, 22):
    print("%.12e" % I, i - 1)
    I = np.e - i * I
```

3. 结果展示：



(a) 反向迭代



(b) 正向迭代

图 3: 问题三 Python 编程结果截图

题目 3 结果分析.

在该问题中，反向迭代显然更加稳定. 考察正向迭代公式

$$I_n = e - nI_{n-1},$$

假设迭代初值存在误差 ϵ，那么在每次迭代中，误差将被放大 $-n$ 倍. 在计算结果中，正向迭代从 I_{18} 开始出现震荡情况，且每两次相邻迭代异号，I_{19} 迭代结果约为 6.599，I_{20} 迭代结果约为-129，大概是第 19 次迭代的 -20 倍，符合分析结果.