머신러닝/딥러닝을 위한

수치미분

- 미분 • 체인룰-

미분 – derivative

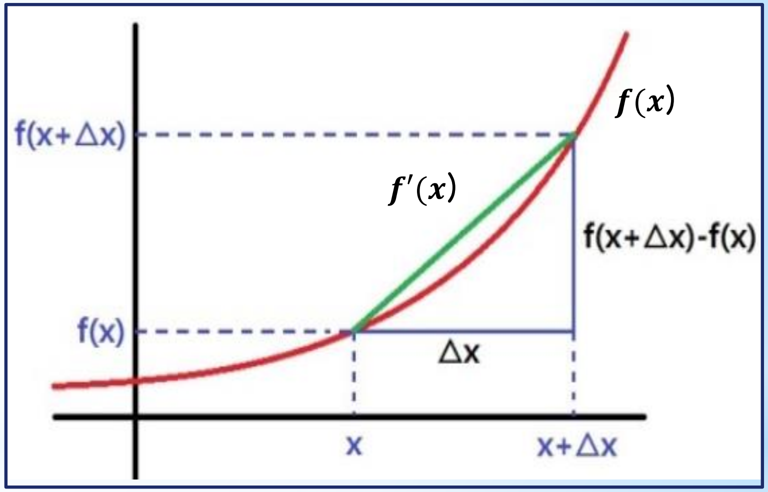
미분을 왜 하는가 ?

미분으로 얻을 수 있는 인사이트 ?

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

f(x) 를 미분하라

접선의 기울기 ?   순간 변화율 ?



미분 – derivative

- 머신러닝 / 딥러닝에서 자주 사용되는 함수의 미분

$f(x)$ = 상수 $\Rightarrow$ $f'(x) = 0$

$f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = nax^{n-1}$

$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = e^{-x} \Rightarrow f'(x) = -e^{-x}$

[예 1] $f(x) = 3x^2 + e^x + 7 \Rightarrow f'(x) = 6x + e^x$

[예 2] $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

참고

$\frac{1}{x} = x^{-1}$

수치미분 1차 버전 – numerical derivative

- 수치미분은 수학공식을 쓰지 않고 C / 파이썬 등을 이용하여, 주어진 입력 값이 미세하게 변할 때 함수 값 f 는 얼마나 변하는지를 계산하는 해주는 것을 지칭

① 미분 하려는 함수 f(x) 정의

② 극한(lim) 개념을 구현하기 위해 Δx 는 작은 값으로 설정

③ 분자 / 분모 구현

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

- 수치미분 구현 (1차 버전)

① f는 미분 하려는 함수. 외부에서 def, lambda 등으로 정의됨

x 는 미분 값을 알고자 하는 입력 값, 즉 미세하게 변하는 입력 값

```
def numerical_derivative(f, x):

    delta_x = 1e-4

    return (f(x+delta_x) - f(x-delta_x)) / (2*delta_x)
```

② lim 에 해당되는 작은 값

③ 분자 / 분모

수치미분 1차 버전 – numerical derivative

[예제 1] 함수 $f(x) = x^2$ 에서 미분계수 $f'(3.0)$ 을 구하기. 즉, x=3.0 에서 값이 미세하게 변할 때, 함수 f 는 얼마나 변하는지 계산하라는 의미

$f'(3.0)$ 계산 과정 (참고: $f'(x) = 2\,x$)

$$f'(3.0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3.0+\Delta x) - f(3.0-\Delta x)}{2\Delta x}$$

Δx 는 10^{-4} 대입

$$= \frac{f(3.0+1e^{-4}) - f(3.0-1e^{-4})}{2 * 1e^{-4}}$$

$f(x) = x^2$

$$= \frac{(3.0+1e^{-4})^2 - (3.0-1e^{-4})^2}{2 * 1e^{-4}}$$

result

$$f'(3.0) = 6.0$$

```python
def func1(x):

    return x**2
```

```python
f = lambda x : func1(x)
```

```python
# 수치미분 함수 1차 버전
def numerical_derivative(f, x):

    delta_x = 1e-4

    return ( f(x+delta_x) - (f(x-delta_x)) ) / (2*delta_x)
```

```python
ret1 = numerical_derivative(f, 3.0)

print(ret1)

ret2 = numerical_derivative(func1, 3.0)

print(ret2)
```

```
6.000000000012662
6.000000000012662
```

수치미분 1차 버전 – numerical derivative

[예제 2] 함수 $f(x) = 3xe^x$ 를 미분한 함수를 $f'(x)$ 라고 할 경우, x=2.0 에서의 미분 값 $f'(2.0)$ 을 구하는 수치미분 코드를 구현하시오

수학공식 검증

$f(x) = 3xe^x$ 미분

⬇

$$f'(x) = 3e^x + 3xe^x$$

⬇ $x = 2.0$ 대입

$$f'(2.0) = 3e^2 + 3 \bullet 2.0e^2$$

⬇

```
print('3*exp(2.0)+3*2.0*exp(2.0) = ', 3*np.exp(2.0) + 3*2.0*np.exp(2.0))
```

```
3*exp(2.0)+3*2.0*exp(2.0) =  66.50150489037586
```

편미분 – partial derivative

- 편미분은 입력변수가 하나 이상인 다변수 함수에서, 미분하고자 하는 변수 하나를 제외한 나머지 변수들은 상수로 취급하고, 해당 변수를 미분하는 것

  예를들어 *f(x,y)* 를 변수 *x* 에 대해 편미분 하는 경우 다음과 같이 나타냄 --> $\boxed{\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}}$

[예1] $f(x,y) = 2x + 3xy + y^3$, 변수 *x* 에 대하여 편미분

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(2x+3xy+y^3)}{\partial x} = 2 + 3y$$

[예2] $f(x,y) = 2x + 3xy + y^3$, 변수 y 에 대하여 편미분

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(2x+3xy+y^3)}{\partial y} = 3x + 3y^2$$

[예3] 체중 함수가 '체중(야식, 운동)' 처럼 야식/운동에 영향을 받는 2변수 함수라고 가정할 경우, 편미분을 이용하면 각 변수 변화에 따른 체중 변화량을 구할 수 있음

현재 먹는 야식의 양에서 조금 변화를 줄 경우 체중은 얼마나 변하는가 ? ➡ $\dfrac{\partial 체중}{\partial 야식}$

현재 하고 있는 운동량에 조금 변화를 줄 경우 체중은 얼마나 변하는가 ? ➡ $\dfrac{\partial 체중}{\partial 운동}$

연쇄법칙 – chain rule

- 합성함수란 여러 함수로 구성된 함수로서, 이러한 합성함수를 미분하려면 '합성함수를 구성하는 각 함수의 미분의 곱'으로 나타내는 chain rule(연쇄법칙) 이용

[합성함수 예1]	$f(x) = e^{3x^2}$	⇒	함수 e^t , 함수 $t = 3x^2$	조합
[합성함수 예2]	$f(x) = e^{-x}$	⇒	함수 e^t , 함수 $t = -x$	조합

- $f(x) = e^{3x^2}$ 을 chain rule로 미분하는 경우, $t = 3x^2$ 으로 놓으면 $f(x) = e^t$

chain rule 적용(약분 개념)

t = 3x² 대입

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\cancel{\partial t}}\frac{\cancel{\partial t}}{\partial x} = \frac{\partial (e^t)}{\partial t}\frac{\partial (3x^2)}{\partial x} = (e^t)(6x) = (e^{3x^2})(6x) = 6xe^{3x^2}$$

- $f(x) = e^{-x}$ 을 chain rule로 미분하는 경우, $t = -x$ 으로 놓으면 $f(x) = e^t$

chain rule 적용(약분 개념)

t = −x 대입

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\cancel{\partial t}}\frac{\cancel{\partial t}}{\partial x} = \frac{\partial (e^t)}{\partial t}\frac{\partial (-x)}{\partial x} = (e^t)(-1) = (e^{-x})(-1) = -e^{-x}$$

미분 예제

[예제 3] 다음의 함수를 미분하시오

$$f(x, y) = xy + 3e^{-x} + y^2$$

$$f(x, y) = 3x\ln y + ye^{x^2} + 5$$

$$f(x_1, x_2) = -\sum_{i=1}^{2} 3yx_i$$

[예제 4] 다음의 함수 f(x) 를 미분한 함수가 f'(x) 라고 할 때, f'(x) 는 f(x) 의 다항식으로 나타남을 증명하시오

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$