全国卷概率计算的八种方法

1．枚举法

例 1．（2022 新高考 1 卷）从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数，则这 2 个数互质的概率为

A．$\frac{1}{6}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{2}{3}$

解析：总事件数共 $C_7^2=\frac{7\times6}{2}=21$，第一个数取 2 时，第二个数可以是 $3,5,7$；

第一个数取 3 时，第二个数可以是 $4,5,7,8$；第一个数取 4 时，第二个数可以是 $5,7$；

第一个数取 5 时，第二个数可以是 $6,7,8$；第一个数取 6 时，第二个数可以是 7；

第一个数取 7 时，第二个数可以是 8；所以 $P=\frac{3+4+2+3+1+1}{21}=\frac{14}{21}=\frac{2}{3}$．

例 2（2020 全国 1 卷）.甲、乙、丙三位同学进行羽毛球比赛，约定赛制如下：累计负两场者被淘汰；比赛前抽签决定首先比赛的两人，另一人轮空；每场比赛的胜者与轮空者进行下一场比赛，负者下一场轮空，直至有一人被淘汰；当一人被淘汰后，剩余的两人继续比赛，直至其中一人被淘汰，另一人最终获胜，比赛结束.经抽签，甲、乙首先比赛，丙轮空.设每场比赛双方获胜的概率都为 $\frac{1}{2}$，

（1）求甲连胜四场的概率；

（2）求需要进行第五场比赛的概率；

（3）求丙最终获胜的概率.

解析：（1）记事件 M：甲连胜四场，则 $P(M)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$；

（2）记事件 A 为甲输，事件 B 为乙输，事件 C 为丙输，则四局内结束比赛的概率为

$P'=P(ABAB)+P(ACAC)+P(BCBC)+P(BABA)=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$，所以，需要进行第五场比赛的概率为 $P=1-P'=\frac{3}{4}$.

（3）①四场比赛丙获胜，丙在前四场获胜的概率为 $(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$

②由下表可知：五场比赛丙获胜，$P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$，$P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$，

$P(D)=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$，

$\therefore$ 丙五场比赛丙获胜的概率为 $P(B)+P(C)+p(D)=\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{5}{16}$

由于①②互斥，$\therefore$ 丙最终获胜的概率为 $\frac{1}{8}+\frac{5}{16}=\frac{7}{16}$.

丙的	1	2	3	4	5	事件
参赛	轮空	胜	胜	败	胜	B
情况	轮空	胜	败	轮空	胜	C
	轮空	败	轮空	胜	胜	D

注：第二问在处理时直接列举情况较复杂，此时可以采取正难则反的技巧.第三问则可直接枚举出各种可能结果，这是我们在计算复杂事件时一个重要的技巧.

2. 排列组合与古典概型

例 1.（2022 全国甲卷） 从正方体的8个顶点中任选 4 个，则这 4 个点在同一平面上的概率为______.

解析：总的选法是 C_8^4，四点共面的有 6 个表面与 6 个对角面，共计 12 个，则 $P=\frac{12}{C_8^4}=\frac{6}{35}$.

例 2.（2021 全国甲卷） 将 4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行，则 2 个 0 不相邻的概率为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{4}{5}$

解析：将 4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行，可利用插空法，4 个 1 产生 5 个空，若 2 个 0 相邻，则有 $C_5^1=5$ 种排法，若 2 个 0 不相邻，则有 $C_5^2=10$ 种排法，所以 2 个 0 不相邻的概率为 $\frac{10}{5+10}=\frac{2}{3}$. 故选：C.

例 3.（2022 全国乙卷） 从甲、乙等 5 名同学中随机选 3 名参加社区服务工作，则甲、乙都入选的概率为 ________.

解析：由题意，从甲、乙等 5 名学生中随机选出 3 人，基本事件总数 $C_5^3=10$，甲，乙被选中，则从剩下的 3 人中选一人，包含的基本事件的个数 $C_3^1=3$，根据古典概型及其概率的计算公式，甲、乙都入选的概率 $P=\frac{C_3^1}{C_5^3}=\frac{3}{10}$. 故答案为：$\frac{3}{10}$.

3. 概率公式

主要有加法公式和乘法公式：

1.如果事件 A 与事件 B 互斥，那么 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

2.如果事件 A 与事件 B 互为对立事件，那么 $P(B)=1-P(A)$，$P(A)=1-P(B)$

3.对任意两个事件 A 与 B，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$ 成立，则称事件 A 与事件 B 相互独立，简称为独立.

（1）事件 A 与 B 是相互独立的，那么 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也是否相互独立.

（2）相互独立事件同时发生的概率：$P(AB)=P(A)P(B)$.

4.计算技巧：

（1）善于引入变量表示事件：可用“字母+变量角标”的形式表示事件“第几局胜利”，例如：A_i 表示“第 i 局比赛胜利”，则 $\overline{A_i}$ 表示“第 i 局比赛失败”.

（2）理解事件中常见词语的含义：

A,B 中至少有一个发生的事件为 $A\cup B$；A,B 都发生的事件为 AB；A,B 都不发生的事件为 $\overline{A}\,\overline{B}$；$A,B$ 恰有一个发生的事件为 $A\overline{B}\cup\overline{A}B$；$A,B$ 至多一个发生的事件为 $A\overline{B}\cup\overline{A}B\cup\overline{A}\,\overline{B}$.

善于“正难则反”求概率：若所求事件含情况较多，可以考虑求对立事件的概率，再用 $P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)$ 解出所求事件概率.

例 1.（2019 年全国 1 卷）甲、乙两队进行篮球决赛，采取七场四胜制（当一队赢得四场胜利时，该队获胜，决赛结束）. 根据前期比赛成绩，甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”. 设甲队主场取胜的概率为 0.6，客场取胜的概率为 0.5，且各场比赛结果相互独立，则甲队以 4∶1 获胜的概率是____________.

解析：前四场中有一场客场输，第五场赢时，甲队以 $4:1$ 获胜的概率是

$0.6^3\times0.5\times0.5\times2=0.108$,

前四场中有一场主场输，第五场赢时，甲队以 $4:1$ 获胜的概率是

$0.4\times0.6^2\times0.5^2\times2=0.072$,

综上所述，甲队以 $4:1$ 获胜的概率是 $q=0.108+0.072=0.18$.

例 2.（2022 全国甲卷）甲、乙两个学校进行体育比赛，比赛共设三个项目，每个项目胜方得 10 分，负方得 0 分，没有平局.三个项目比赛结束后，总得分高的学校获得冠军.已知甲学校在三个项目中获胜的概率分别为 0.5,0.4,0.8，各项目的比赛结果相互独立.

（1）求甲学校获得冠军的概率；

（2）用 X 表示乙学校的总得分，求 X 的分布列与期望.

解析：（1）记甲学校获得冠军为事件 A，

则 $P(A)=0.5\times0.4\times$（1-0.8）+0.5×（1-0.4）×0.8+（1-0.5）×0.4×0.8+0.5×0.4×0.8=0.6

甲学校获得冠军的概率是 0.6.

（2）X 的可能取值为 0,10,20,30，则 $P(X=0)=0.5\times0.4\times0.8=0.16$

$P(X=10)=0.5\times0.4\times(1-0.8)+0.5\times(1-0.4)\times0.8+(1-0.5)\times0.4\times0.8=0.44$

$P(X=20)=0.5\times(1-0.4)\times(1-0.8)+(1-0.5)\times(1-0.4)\times0.8+(1-0.5)\times0.4\times(1-0.8)=0.34$

$P(X=30)=(1-0.5)\times(1-0.4)\times(1-0.8)=0.06$

X 的期望值为 $E(X)=0\times0.16+10\times0.44+20\times0.34+30\times0.06=13$.

4. 利用对称性

例 1．中学阶段，数学中的“对称性”不仅体现在平面几何、立体几何、解析几何和函数图象中，还体现在概率问题中．例如，甲乙两人进行比赛，若甲每场比赛获胜概率均为$\frac{1}{2}$，且每场比赛结果相互独立，则由对称性可知，在 5 场比赛后，甲获胜次数不低于 3 场的概率为$\frac{1}{2}$．现甲乙两人分别进行独立重复试验，每人抛掷一枚质地均匀的硬币．

（1）若两人各抛掷 3 次，求抛掷结果中甲正面朝上次数大于乙正面朝上次数的概率；

（2）若甲抛掷$(n+1)$次，乙抛掷 n 次，$n\in\mathbf{N}^*$，求抛掷结果中甲正面朝上次数大于乙正面朝上次数的概率．

解析：（1）设甲正面朝上次数等于乙正面朝上次数的概率 p_1，

$P_1=\frac{C_3^0\cdot C_3^0+C_3^1\cdot C_3^1+C_3^2\cdot C_3^2+C_3^3\cdot C_3^3}{2^3\times2^3}=\frac{5}{16}$，由对称性可知则甲正面朝上次数大于乙正面朝上次数的概率和甲正面朝上次数小于乙正面朝上次数的概率相等，故$P=\frac{1-P_1}{2}=\frac{11}{32}$；

（2）可以先考虑甲乙各抛赛 n 次的情形，

①如果出现甲正面朝上次数等于乙正面朝上次数，将该情形概率设为p_1，则第$n+1$次甲必须再抛掷出证明朝上，才能使得最终甲正面朝上次数大于乙正面朝上次数；

②如果出现甲正面朝上次数小于乙正面朝上次数，则第$n+1$次无论结果如何，甲正面朝上次数仍然不大于乙正面朝上次数，将该情形概率设为p_2；

③如果出现甲正面朝上次数大于乙正面朝上次数，则第$n+1$次无论结果如何，甲正面朝上次数仍然大于乙正面朝上次数，将该情形概率设为p_3，由对称性可知$p_2=p_3$，

故$P_n=\frac{1}{2}p_1+p_3$，而由$\begin{cases}p_2=p_3\\p_1+p_2+p_3=1\end{cases}$，

可得$P_n=\frac{1}{2}p_1+p_3=\frac{p_1+2p_3}{2}=\frac{p_1+p_2+p_3}{2}=\frac{1}{2}$.

5. 三个分布

一．二项分布

1．n重伯努利试验的概念

只包含两个可能结果的试验叫做伯努利试验，将一个伯努利试验独立地重复进行n次所组成的随机试验称为n重伯努利试验.

2．n重伯努利试验具有如下共同特征

（1）同一个伯努利试验重复做n次；

（2）各次试验的结果相互独立.

3．二项分布

一般地，在n重伯努利试验中，设每次试验中事件A发生的概率为$p(0<p<1)$，用X表示事件A发生的次数，则X的分布列为：$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,2,\cdots n$，如果随机变量$X$的分布列具有上式的形式，则称随机变量$X$服从二项分布，记作

$X\sim B(n,p)$

4．一般地，可以证明：如果$X\sim B(n,p)$，那么$EX=np,DX=np(1-p)$.

二．超几何分布

超几何分布模型是一种不放回抽样，一般地，假设一批产品共有N件，其中有M件次品，从N件产品中随机抽取n件(不放回)，用X表示抽取的n件产品中的次品数，则X的分布列为$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$，$k=m$，$m+1$，$m+2$，…，$r$.

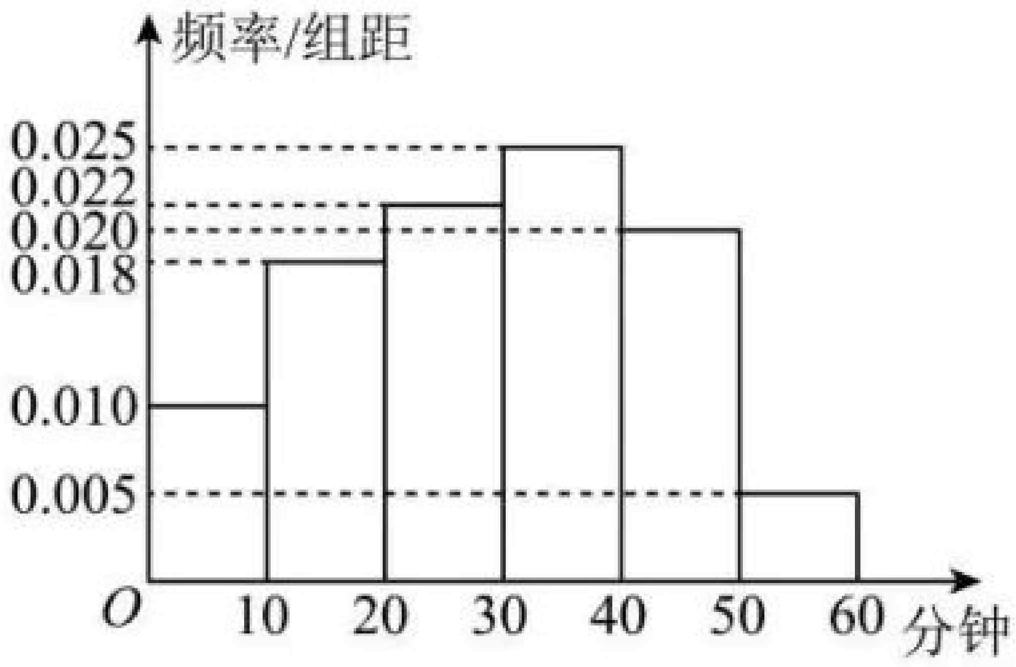
其中n，N，$M\in N^*$，$M\le N$，$n\le N$，$m=\max\{0，n-N+M\}$，$r=\min\{n，M\}$．如果随机变量X的分布列具有上式的形式，那么称随机变量X服从超几何分布.

2．超几何分布的期望

$E(X)=\frac{nM}{N}=np$(p为N件产品的次品率).

例1．电视传媒公司为了解某地区电视观众对某类体育节目的收视情况，随机抽取了100名

观众进行调查．如图是根据调查结果绘制的观众日均收看该体育节目时间的频率分布直方图：将日均收看该体育节目时间不低于40分钟的观众称为“体育迷”．将上述调查所得到的频率视为概率．



（1）现在从该地区大量电视观众中，采用随机抽样方法每次抽取1名观众，抽取3次，记被抽取的3名观众中的“体育迷”人数为X．若每次抽取的结果是相互独立的，求X的分布列及数学期望．

（2）用分层抽样的方法从这100名“体育迷”中抽取8名观众，再从抽取的抽取8名观众中随机抽取3名，Y表示抽取的是“体育迷”的人数，求Y的分布列．

解析：（1）“体育迷”对应的频率为：$(0.02+0.005)\times 10=0.25=\dfrac{1}{4}$，

用频率估计概率，可知从该地区大量电视观众中，随机抽取1名观众，该观众是“体育迷”的概率为$\dfrac{1}{4}$，则$X\sim B\left(3,\dfrac{1}{4}\right)$；

$\because X$所有可能的取值为$0,1,2,3$，

$\therefore P(X=0)=C_3^0\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{27}{64}$；$P(X=1)=C_3^1\times\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{27}{64}$；$P(X=2)=C_3^2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{64}$；

$P(X=3)=C_3^3\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^3=\dfrac{1}{64}$；

$\therefore X$的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{27}{64}$	$\dfrac{27}{64}$	$\dfrac{9}{64}$	$\dfrac{1}{64}$

数学期望$E(X)=3\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$．

（2）根据分层抽样原则知：抽取的8人中，有“体育迷”$8\times\dfrac{1}{4}=2$人，非“体育迷”体育迷

$8\times\frac{3}{4}=6$人，则Y所有可能的取值为$0,1,2$，

$\because P(Y=0)=\frac{C_6^3}{C_8^3}=\frac{20}{56}=\frac{5}{14}$；$P(Y=1)=\frac{C_6^2C_2^1}{C_8^3}=\frac{30}{56}=\frac{15}{28}$；$P(Y=2)=\frac{C_6^1C_2^2}{C_8^3}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$；

$\therefore Y$的分布列为：

Y	0	1	2
P	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

例 2.（2021 新高考 2 卷）某物理量的测量结果服从正态分布$N\left(10,\sigma^2\right)$，下列结论中不正确的是（　　）

A. σ越小，该物理量在一次测量中在$(9.9,10.1)$的概率越大

B. σ越小，该物理量在一次测量中大于 10 的概率为 0.5

C. σ越小，该物理量在一次测量中小于 9.99 与大于 10.01 的概率相等

D. σ越小，该物理量在一次测量中落在$(9.9,10.2)$与落在$(10,10.3)$的概率相等

解析：对于 A，σ^2为数据的方差，所以σ越小，数据在$\mu=10$附近越集中，所以测量结果落在$\left(9.9,10.1\right)$内的概率越大，故 A 正确；

对于 B，由正态分布密度曲线的对称性可知该物理量一次测量大于 10 的概率为0.5，故 B 正确；

对于 C，由正态分布密度曲线的对称性可知该物理量一次测量结果大于10.01的概率与小于9.99的概率相等，故 C 正确；

对于 D，因为该物理量一次测量结果落在$\left(9.9,10.0\right)$的概率与落在$\left(10.2,10.3\right)$的概率不同，所以一次测量结果落在$\left(9.9,10.2\right)$的概率与落在$\left(10,10.3\right)$的概率不同，故 D 错误.

故选：D.

例 3.（2022 新高考 2 卷）. 已知随机变量X服从正态分布$N(2,\sigma^2)$，且$P(2<X\leqslant 2.5)=0.36$，则$P(X>2.5)=$______.

解析：由题意可知，$P(X>2)=0.5$，故$P(X>2.5)=P(X>2)-P(2<X\leqslant 2.5)=0.14$.

6.极大似然估计

一．基本原理

已知函数：$p(x/\theta)$输入有两个：x表示某一个具体的数据；θ表示模型的参数，如果θ是已知确定的，x是变量，这个函数叫做概率函数，它描述对于不同的样本点x，其出现概率是多少.如果x是已知确定的，θ是变量，这个函数叫做似然函数，它描述对于不同的模型参数，出现x这个样本点的概率是多少.

极大似然估计，通俗理解来说，就是利用已知的样本结果信息，反推最具有可能（最大概率）导致这些样本结果出现的模型参数值.

换句话说，极大似然估计提供了一种给定观察数据来评估模型参数的方法，即："模型已定，参数未知".

二．典例分析

例 1（2018 年全国 1 卷）．某工厂的某种产品成箱包装，每箱 200 件，每一箱产品在交付用户之前要对产品作检验，如检验出不合格品，则更换为合格品．检验时，先从这箱产品中任取 20 件作检验，再根据检验结果决定是否对余下的所有产品作检验，设每件产品为不合格品的概率都为$p(0<p<1)$，且各件产品是否为不合格品相互独立.

（1）记 20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为$f(p)$,求$f(p)$的最大值点p_0；

（2）现对一箱产品检验了 20 件，结果恰有 2 件不合格品，以（1）中确定的p_0作为p的值．已知每件产品的检验费用为 2 元，若有不合格品进入用户手中，则工厂要对每件不合格品支付 25 元的赔偿费用.

（i）若不对该箱余下的产品作检验，这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为X，求EX；

（ii）以检验费用与赔偿费用和的期望值为决策依据，是否该对这箱余下的所有产品作检验？

解析：（1）20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为$f\left(p\right)=\mathrm{C}_{20}^{2}p^{2}\left(1-p\right)^{18}$.

因此$f'\left(p\right)=\mathrm{C}_{20}^{2}\left[2p\left(1-p\right)^{18}-18p^{2}\left(1-p\right)^{17}\right]=2\mathrm{C}_{20}^{2}p\left(1-p\right)^{17}\left(1-10p\right)$.

令$f'\left(p\right)=0$，得$p=0.1$.当$p\in\left(0,0.1\right)$时，$f'\left(p\right)>0$；当$p\in\left(0.1,1\right)$时，$f'\left(p\right)<0$.

所以$f\left(p\right)$的最大值点为$p_0=0.1$；

（2）由（1）知，$p=0.1$.（i）令Y表示余下的180件产品中的不合格品件数，依题意知

$Y \sim B(180,0.1)$，$X=20\times2+25Y$，即 $X=40+25Y$.

所以 $EX=E(40+25Y)=40+25EY=490$.

（ii）如果对余下的产品作检验，则这一箱产品所需要的检验费为 400 元.

由于 $EX>400$，故应该对余下的产品作检验.

点评：第一问中，$X\sim B(20,p)$，二项分布中参数 p 未知，所以我们需要利用似然方法找到 p，即利用 $f(p)$ 最大.

例 2.（2023 届四省联考）一个池塘里的鱼的数目记为 N，从池塘里捞出 200 尾鱼，并给鱼作上标识，然后把鱼放回池塘里，过一小段时间后再从池塘里捞出 500 尾鱼， X **表示捞出的 500 尾鱼中有标识的鱼的数目.**

（1）若 $N=5000$**，求** X **的数学期望；**

（2）已知捞出的 500 尾鱼中 15 尾有标识，试给出 N 的估计值（以使得 $P(X=15)$ **最大的 N 的值作为 N 的估计值）.**

解析：（1）依题意 X 服从超几何分布，且 $N=5000, M=200, n=500$，

故 $E(X)=N\times\dfrac{M}{n}=500\times\dfrac{200}{5000}=20$.

（2）当 $N<685$ 时，$P(X=15)=0$，当 $N\ge685$ 时，$P(X=15)=\dfrac{C_{200}^{15}C_{N-200}^{485}}{C_N^{500}}$，

记 $a(N)=\dfrac{C_{200}^{15}C_{N-200}^{485}}{C_N^{500}}$，则 $\dfrac{a(N+1)}{a(N)}=\dfrac{C_{N+1-200}^{485}C_N^{500}}{C_{N+1}^{500}C_{N-200}^{485}}=\dfrac{(N+1-500)(N+1-200)}{(N+1)(N+1-200-485)}$

$=\dfrac{(N-499)(N-199)}{(N+1)(N-684)}=\dfrac{N^2-698N+499\times199}{N^2-683N-684}$. 由 $N^2-698N+499\times199>N^2-683N-684$，

当且仅当 $N<\dfrac{499\times199+684}{15}\approx6665.7$，则可知当 $685\le N\le6665$ 时，$a(N+1)>a(N)$；

当 $N\ge6666$ 时，$a(N+1)<a(N)$，故 $N=6666$ 时，$a(N)$ 最大，所以 N 的估计值为 6666.

7 条件概率与全概率公式

例 1、一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯（卫生习惯分为良好和不够良好两类）的关系，在已患该疾病的病例中随机调查了 100 例（称为病例组），同时在未患该疾病的人群中随机调查了 100 人（称为对照组），得到如下数据：

	不够良好	良好
病例组	40	60

对照组	10	90

（1）能否有 99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异？

（2）从该地的人群中任选一人，A 表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”，B 表示事件“选到的人患有该疾病”，$\dfrac{P(B|A)}{P(\overline{B}|A)}$ 与 $\dfrac{P(B|\overline{A})}{P(\overline{B}|\overline{A})}$ 的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标，记该指标为 R．

（i）证明：$R=\dfrac{P(A|B)}{P(\overline{A}|B)}\cdot\dfrac{P(\overline{A}|\overline{B})}{P(A|\overline{B})}$；

（ii）利用该调查数据，给出 $P(A|B)$，$P(A|\overline{B})$ 的估计值，并利用（i）的结果给出 R 的估计值．

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

解析：（1）假设患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯没有差异，

则 $K^2=\dfrac{200(40\times 90-60\times 10)^2}{50\times 150\times 100\times 100}=24>10.828$，

所以有 99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异；

（2）（i）$R=\dfrac{P(B|A)}{P(\overline{B}|A)}\cdot\dfrac{P(\overline{B}|\overline{A})}{P(B|\overline{A})}=\dfrac{\dfrac{P(AB)}{P(A)}}{\dfrac{P(A\overline{B})}{P(A)}}\cdot\dfrac{\dfrac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{A})}}{\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}}=\dfrac{P(AB)}{P(A\overline{B})}\cdot\dfrac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{A}B)}$

$=\dfrac{P(AB)}{P(\overline{A}B)}\cdot\dfrac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(A\overline{B})}=\dfrac{\dfrac{P(AB)}{P(B)}}{\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(B)}}\cdot\dfrac{\dfrac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B})}}{\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}}=\dfrac{P(A|B)}{P(\overline{A}|B)}\cdot\dfrac{P(\overline{A}|\overline{B})}{P(A|\overline{B})}$，得证；

（ii）由调查数据可知 $P(A|B)=\dfrac{40}{100}=\dfrac{2}{5}$，$P(A|\overline{B})=\dfrac{10}{100}=\dfrac{1}{10}$，

则 $P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)=\dfrac{3}{5}$，$P(\overline{A}|\overline{B})=\dfrac{9}{10}$，所以 $R=\dfrac{\dfrac{2}{5}}{\dfrac{3}{5}}\cdot\dfrac{\dfrac{9}{10}}{\dfrac{1}{10}}=6$．

例 2.（2022 长沙新高考适应性考试）为了调动大家积极学习党的二十大精神，某市举办了党史知识的竞赛．初赛采用“两轮制”方式进行，要求每个单位派出两个小组，且每个小组都要参加两轮比赛，两轮比赛都通过的小组才具备参与决赛的资格．某单位派出甲、乙两

个小组参赛，在初赛中，若甲小组通过第一轮与第二轮比赛的概率分别是$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$，乙小组通过第一轮与第二轮比赛的概率分别是$\frac{3}{5}$，$\frac{2}{3}$，且各个小组所有轮次比赛的结果互不影响.

（1）若该单位获得决赛资格的小组个数为X，求X的数学期望；

（2）已知甲、乙两个小组都获得了决赛资格，决赛以抢答题形式进行．假设这两组在决赛中对每个问题回答正确的概率恰好是各自获得决赛资格的概率．若最后一道题被该单位的某小组抢到，且甲、乙两个小组抢到该题的可能性分别是45%，55%，该题如果被答对，计算恰好是甲小组答对的概率.

解析：（1）设甲乙通过两轮制的初赛分别为事件A_1,A_2则

$P(A_1)=\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{3}{5}\ P(A_2)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$，由题意可得，$X$的取值有$0,1,2$

$P(X=0)=\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{6}{25}$，$P(X=1)=\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{13}{25}$

$P(X=2)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$，所以$E(X)=0\times\frac{6}{25}+1\times\frac{13}{25}+2\times\frac{6}{25}=1$

（2）设B表示事件“该单位的某小组对最后一道题回答正确”，A_1表示事件“甲小组抢到最后一道题”，A_2表示事件“乙小组抢到最后一道题”，则有：

$P(A_1)=45\%=\frac{9}{20},P(A_2)=55\%=\frac{11}{20}$，$P(B\mid A_1)=\frac{3}{5},P(B\mid A_2)=\frac{2}{5}$

则$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)=\frac{49}{100}$(凌晨讲数学)

该题如果被答对，恰好是甲小组答对即为$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(B)}=\frac{27}{49}$

点评：本题第二问即考察了全概率公式与贝叶斯公式，后者虽然不做高考要求，但是可以看到，它实际就是条件概率的应用，完全可以现场依据具体情况得出.再举一道贝叶斯公式的例子

8. 概率递推与马尔科夫链

虽然贝叶斯公式不做要求，但是全概率公式已经是新高考考查内容了，利用全概率公式，我们既可以构造某些递推关系求解概率，还可以推导经典的一维随机游走模型，即：设数轴上一个点，它的位置只能位于整点处，在时刻$t=0$时，位于点$x=i(i\in N^{+})$，下一个时刻，它将以概率α或者β

（$\alpha\in(0,1),\alpha+\beta=1$）向左或者向右平移一个单位. 若记状态 $X_{t=i}$ 表示：在时刻 t 该点位于位置 $x=i(i\in N^{+})$，那么由全概率公式可得：

$$P(X_{t+1=i})=P(X_{t=i-1})\cdot P(X_{t+1=i}\mid X_{t=i-1})+P(X_{t=i+1})\cdot P(X_{t+1=i}\mid X_{t=i+1})$$

另一方面，由于 $P(X_{t+1=i}\mid X_{t=i-1})=\beta,P(X_{t+1=i}\mid X_{t=i+1})=\alpha$，代入上式可得：

$$P_i=\alpha\cdot P_{i+1}+\beta\cdot P_{i-1}.$$

进一步，我们假设在 $x=0$ 与 $x=m(m>0,m\in N^{+})$ 处各有一个吸收壁，当点到达吸收壁时被吸收，不再游走.于是，$P_0=0,P_m=1$.随机游走模型是一个典型的马尔科夫过程.

进一步，若点在某个位置后有三种情况：向左平移一个单位，其概率为 a，原地不动，其概率为 b，向右平移一个单位，其概率为 c，那么根据全概率公式可得：

$$P_i=aP_{i-1}+bP_i+cP_{i+1}$$

有了这样的理论分析，下面我们看全概率公式及以为随机游走模型在 **2019** 年全国 **1** 卷中的应用.

例 1.（2019 全国 1 卷）. 为了治疗某种疾病，研制了甲、乙两种新药，希望知道哪种新药更有效，为此进行动物试验．试验方案如下：每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验．对于两只白鼠，随机选一只施以甲药，另一只施以乙药．一轮的治疗结果得出后，再安排下一轮试验．当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多 **4** 只时，就停止试验，并认为治愈只数多的药更有效．为了方便描述问题，约定：对于每轮试验，若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得 **1** 分，乙药得 -1 分；若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得 **1** 分，甲药得 -1 分；若都治愈或都未治愈则两种药均得 **0** 分．甲、乙两种药的治愈率分别记为 α 和 β，一轮试验中甲药的得分记为 X.

（1）求 X 的分布列；

（2）若甲药、乙药在试验开始时都赋予 **4** 分，$p_i(i=0,1,\cdots,8)$ 表示“甲药的累计得分为 i 时，最终认为甲药比乙药更有效”的概率，则 $p_0=0$，$p_8=1$，

$p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}\ (i=1,2,\cdots,7)$，其中 $a=P(X=-1)$，$b=P(X=0)$，

$c=P(X=1)$．假设 $\alpha=0.5$，$\beta=0.8$．

（i）证明：$\{p_{i+1}-p_i\}$ $(i=0,1,2,\cdots,7)$ 为等比数列；

（ii）求 p_4，并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性．

解析：（1）由题意可知 X 所有可能的取值为：-1，0，1

$\therefore P(X=-1)=(1-\alpha)\beta$；$P(X=0)=\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)$；$P(X=1)=\alpha(1-\beta)$

则 X 的分布列如下：

X	-1	0	1
P	$(1-\alpha)\beta$	$\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)$	$\alpha(1-\beta)$

（2）$\because \alpha=0.5$，$\beta=0.8$

$\therefore a=0.5\times0.8=0.4$，$b=0.5\times0.8+0.5\times0.2=0.5$，$c=0.5\times0.2=0.1$

（i）$\because p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}(i=1,2,\cdots,7)$

即 $p_i=0.4p_{i-1}+0.5p_i+0.1p_{i+1}(i=1,2,\cdots,7)$

整理可得：$5p_i=4p_{i-1}+p_{i+1}(i=1,2,\cdots,7)$ $\quad\therefore p_{i+1}-p_i=4(p_i-p_{i-1})(i=1,2,\cdots,7)$

$\therefore\{p_{i+1}-p_i\}$ $(i=0,1,2,\cdots,7)$ 是以 p_1-p_0 为首项，4 为公比的等比数列

（ii）由（i）知：$p_{i+1}-p_i=(p_1-p_0)\cdot4^i=p_1\cdot4^i$

$\therefore p_8-p_7=p_1\cdot4^7$，$p_7-p_6=p_1\cdot4^6$，……，$p_1-p_0=p_1\cdot4^0$

作和可得：$p_8-p_0=p_1\cdot(4^0+4^1+\cdots+4^7)=\dfrac{1-4^8}{1-4}p_1=\dfrac{4^8-1}{3}p_1=1$

$\therefore p_1=\dfrac{3}{4^8-1}$

$\therefore p_4=p_4-p_0=p_1\cdot(4^0+4^1+4^2+4^3)=\dfrac{1-4^4}{1-4}p_1=\dfrac{4^4-1}{3}\times\dfrac{3}{4^8-1}=\dfrac{1}{4^4+1}=\dfrac{1}{257}$

p_4 表示最终认为甲药更有效的.由计算结果可以看出，在甲药治愈率为 **0.5**，乙药治愈率为 **0.8** 时，认为甲药更有效的概率为 $p_4=\dfrac{1}{257}\approx0.0039$，此时得出错误结论的概率非常小，说明这种实验方案合理.