[极限 2](#_Toc510536364)

[导数与微分 5](#_Toc510536365)

[导数应用 8](#_Toc510536366)

[积分 11](#_Toc510536367)

[定积分 13](#_Toc510536368)

[精确定义 17](#_Toc510536369)

[定积分应用 18](#_Toc510536370)

[微积分问题 20](#_Toc510536371)

[无穷级数 21](#_Toc510536372)

[空间解析几何 22](#_Toc510536373)

## 极限

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 定义 |  | 存在的某邻域，|f(x)-A|<f(ε)，要求f(ε)可取任意小，如：  ε∈(0,+∞),f(ε)=ε、 ε是正整数,f(ε)=1/ε …… | | | | | | |
| 右极限：存在的某右邻域，|f(x)-A|<f(ε)，要求f(ε)可取任意小  左极限：存在的某左邻域，|f(x)-A|<f(ε)，要求f(ε)可取任意小 | | | | | | |
| 夹逼定理：存在的某去心邻域，g(x)≤f(x)≤h(x) ，且==A | | | | | | |
| =∞时：某领域(-∞,M)∪(N,+∞)，右邻域(N,+∞)，左邻域(-∞,M) | | | | | | |
| {}的任意子数列均收敛于A，如： | | | | | | |
| 海涅定理：=A⇒对任何以为极限的数列{} （），极限=A | | | | | | |
|  | 存在的某邻域，|f(x,y)-A|<f(ε)，要求f(ε)可取任意小， | | | | | | |
| f(x,y)在点(,)的去心邻域有定义，点(x,y)沿任意路径趋向于(,)时，f(x,y)均趋向于A | | | | | | |
| 证明二重极限不存在：  1.创建路径函数y=φ(x)，要求  2.y=φ(x)代入f(x,y)，得B=  3.证明极限B不存在，或创建两个路径函数，得到的B不相同  4.常用路径函数：y=kx | | | | | | |
| 性质 | 唯一性 | | 极限值只有一个 | | | | |
| 局部有界性 | | 存在的某邻域，f(x)单调有界（递增有上界，或，递减有下界） | | | | |
| 局部保号性 | | 存在的某邻域，f(x)与A正负性相同 | | | | |
| 运算定理 | | lim u(x)±v(x) | | lim u(x)、lim v(x) 都不存在，那么 lim u(x)+v(x) 与 lim u(x)-v(x)，两者，都不存在，或其一存在另一不存在，总之不可能两者都存在 | | |
| lim u(x)·v(x) | | lim u(x)、lim v(x) 都存在，那么 lim u(x)·v(x) 必存在且等于两个极限之积，除了这种情形，其他情形下，lim u(x)·v(x)的存在性不能确定 | | |
| 连续  间断 | f(x)在x=连续 | 的某邻域，f(x)有定义，=  的某邻域，f(x,y)有定义，= | | | | | | |
| x=左连续：x=，某左邻域有定义，  x=右连续：x=，某右邻域有定义， | | | | | | |
| 可导 ⇒ 连续  某去心邻域可导 ⇒ ()= ⇒ 在连续 | | | | | | |
| 和v(x)在连续，两函数四则运算结果函数在处也连续 | | | | | | |
| f(x)在x=a连续，g(x)在x=b连续，g(b)=a，则复合函数f(g(x))在x=b处连续 | | | | | | |
| f(x)在[a,b]连续 |  | (1)f(x)在(a,b)任一点都连续  (2)f(x)在x=a处右连续  (3)f(x)在x=b处左连续 | | | | | |
|  | 有界性定理 | | | | f(x)在[a,b]有界 | |
| 最值定理 | | | | f(x)在[a,b]有最大值和最小值 | |
| 介值定理 | | | | 若m≤μ≤M，m/M是[a,b]上的最小/大值，则：至少存在一点ξ∈[a,b]，f(ξ)=μ | |
| 零点定理 | | | | 若f(a)f(b)<0，则至少存在一点， | |
| 平均值定理 | | | | 若，则至少存在一点ξ∈[]，f(ξ)= | |
| 间断点 |  | | | 求间断点时，一般要写出函数表达式  如果是分段函数，那么将每一段的函数表达式写出来  一般f(x)在x=某去心邻域有定义时才会讨论x=是否是f(x)的间断点 | | | |
| 第一类间断点  左右极限都存在 | | |  | | | 可去间断点 |
|  | | | 跳跃间断点 |
| 第二类间断点  左右极限不都存在 | | | ={+∞ , -∞} | | | 无穷间断点 |
| =不确定值 | | | 振荡间断点 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 无穷大  无穷小 | =0：f(x)为 x→ 时的无穷小  =∞：f(x)为 x→ 时的无穷大  f(x)和g(x)都是 x→时的无穷小  的邻域内，(x)(x)变化率(趋近于的速度)不同 做极限运算：  A=0：αx(x)的高阶无穷小，α(x)=o(β(x))，αx)变化率大于β(x)  A=∞：αx)是β(x)的低阶无穷小，αx)变化率小于β(x)  A=c≠0：αx)与β(x)同阶无穷小，αx)变化率等于β(x)  A=1：αx)与β(x)等价无穷小  =c≠0：αx)是β(x)的k阶无穷小  (x^  x^n  o(x^m ) （k≠0） | | | | |
| 计算 | 准备  工作 | 趋向 | | 极限式中1/x代替x，然后改变趋向：x→∞ 变为x→0， x→-∞ 变为x→， x→+∞变为x→ | |
| 幂指函数 | |  | |
| 化为单分式 | | 分式的加减：通分；根式有理化；正切=正弦/余弦 | |
| 分部计算 | | 极限式划分为多个部分，分别计算每个部分的极限值，带入极限式，计算得到终值，前提是各部分极限都存在 | |
| 变换 | 洛必达  法则 | 使用条件：  要求一定是 或 型的极限  f(x)和g(x)在的去心邻域内可导  如果不满足条件，不能由此推出极限不存在 | | |
| 替换  等价  无穷小 | 将极限式中的乘除因子，替换成它的等价无穷小  常用公式（x→0）：  sinx~tanx~arcsinx~arccosx~x  cosx~1 、 x~1-  ~x+1 、 ~xlna+1 、 ln(1+x)~x  ~1+ax 、 +~(m>n>0) | | |
| 泰勒  展开 |  | |  |
|  | | 、【分别】或【对其中之一】或【其中之一的部分】进行泰勒展开，展开至：两者的最低次幂项的系数相等 |
| 利用  级数  收敛 | 对于极限，证明级数收敛，那么， | | | |
| 数列  极限 |  | | (1)列出与的关系式 | |
|  | | ， | |
| 夹逼准则 | | 对n的低次加减项进行放大和缩小  起主要作用的n最高次方项保不变 | |
| 积分和式 | |  | |
| 数学归纳法 | |  | |
| 凑导数 | 设在处的导数存在 | | | |
| 二重极限 | 利用极限的性质 消去分母中极限为零的因子，通常采用有理化，等价无穷小代换等  转化为一元函数极限，利用一元函数求极限方法求解  无穷小量与有界变量之积为无穷小量 | | | |
|  |  | | | | |
|  |  | | | | |

## 导数与微分

|  |  |
| --- | --- |
| 几何意义 | 在处的导数，就是的函数曲线在点处的切线的斜率k，k= |
| 导数与连续 | 可导一定连续，但连续不一定可导  的导数不一定是连续函数  如果不连续，其间断点一定是第二类间断点(振荡间断点) |
| 多元函数 | 连续不一定可偏导，可偏导不一定连续  不一定在该点可微，  f(x,y)在点(,某一邻域内有定义，f(x,y,z)在点(域内有定义 |
| 微分 | Δx：在处的增量  Δy：Δy=f(+Δx)-f()  ΔA=()Δx  Δy=ΔA+Δa  如果()是常数，即函数在处是线性的(直线)，那么Δy=A  但一般，函数在处是曲线(非线性)，即Δy≠A，Δy的表示可能很复杂  于是将Δy分成线性部分ΔA和非线性部分o(Δx)，o(Δx)=0  ΔA+Δa=ΔA=()Δx=()dx  微分与导数同在 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 求导 | 公式 | 幂指函数 | | =0 (k是常数) | | |  | |  | |
| 对数函数 | |  | | |  | |  | |
| 三角函数 | |  | | |  | |  | |
| 运算 | | 前提：  和都存在 | | |  | |  | |
| 定义法 | 存在的某邻域，f(x)连续，= | | | | | | | | |
| 微分法 |  | | | | | | | | |
| 泰勒  展开 | (1)选取合适的点：已知导数信息最多，包括隐含的导数信息如极值点等，一般试着把有利于代征式子化简来选取，往往取端点、中间点等  (2)抽象展开，f(x)=  (3)比较(1)和(2) 的系数 | | | | | | | | |
| 特殊  函数 | 参数函数  y=y(t)，x=x(t) | | |  | | |  | | |
| 复合函数f[(x)] | | |  | | | | | |
| 反函数x=φ(y) | | | 反函数存在定理：y=f(x)可导且≠0， | | | | | |
| 隐函数F(x,y)=0 | | | 函数y=f(x)由方程F(x,y)=0确定，方程的等号两边求导，得：=g(x,y)，()=g[f()] | | | | | |
| 变限积分 | | |  |  | | | | |
|  | 不能直接分离 | | | | |
| 偏导 | 计算 | 定义法 | 在 对x的偏导数 | | |  | | | | |
| 在 对z的偏导数 | | |  | | | | |
| 直接计算 | ，把y看做常数，做关于x的求导计算  ，把x看做常数，做关于y的求导计算 | | | | | | | |
| 高阶偏导 |  | | | |  | | | 如果，和在()，都连续，那么， |
|  |  | | | | | | | |
| 特殊  函数 | 复合函数  f(x,y,z)=F[u,v,w] | | 无论对哪个未知量求偏导，无论几阶偏导，得到的导函数具有与原函数相同的结构：  =φ[u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z)]； =μ[u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z)] | | | | | | |
| 隐函数  F(x,y,z)=0 | | 【函数z=(x,y)】由【方程F(x,y,z)=0】确定，方程的等号两边对x求偏导，得：  =g(x,y,z)  (,,)=g(,,) | | | | | | |
| 隐函数存在定理：  方程F(x,y,z)=0：在点的某邻域，唯一确定一个连续且具有连续导数的函数z=f(x,y)   * F(x,y,z)在点的某一邻域内具有连续偏导数 * F=0 * 【关键】 | | | | | | |
| 方向  导数 | f(x,y,z)在，沿=(a,b,c)，的方向导数： | | | | | | | | |
| 梯度 | 梯度：gradu()=  梯度是一个向量，函数在，沿梯度的方向导数，最大， | | | | | | | | |
| 全微分 |  | | | | | | | | |

## 导数应用

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 函数图像 | 点 | 驻点 | * + 一元函数：=0   + 二元函数：=0，=0 | |
| 拐点 | * 1. 的左、右去心邻域，(x)反号   2. 不要求存在，但如果存在，则=0 | |
| 点关系 | 拐点一定是驻点，极值点不一定是驻点  驻点不一定是极值点 | |
| 凹凸性 | 凹 | * + 任意x∈I，(x)≥0   + 任意、∈I，恒有< | |
| 凸 | * + 任意x∈I，(x)≤0   + 任意、∈I，恒有> | |
| 有界性 | 、均为有界函数，  或  那么也是有界函数 | | |
| 在区域Ω内有最大值，那么在区域Ω上有界  在区域Ω内有最小值，那么在区域Ω下有界 | | |
| 在[a,b]上连续，那么在[a,b]有界 | | |
| 单调性 | 单调增：对任意 单调减：对任意x∈I， | | |
| 奇偶性 | 是偶函数⇔是奇函数  是奇函数是偶函数 | | |
| 周期性 | 是T周期函数是T周期函数 | | |
| 极值点 | 一元函数 | 处连续  去心邻域， f(x)>f()：极大值，去心邻域， f(x)<f()：极小值 | | |
| * 1. 处连续   2. 左去心邻域 >0，右去心邻域 <0：极大值   左去心邻域 <0，右去心邻域 >0：极小值   * 1. 不要求存在，但如果存在，则必然 | | |
| * 1. 处二阶可导   2. =0，<0：极大值   =0，>0：极小值 | | |
| 多元函数 | 非条件极值  函数：f(x,y) | | 1. 在处连续 2. 在去心邻域内，f(x,y)<f，极大值   在去心邻域内，f(x,y)>f，极小值 |
|  |
| 条件极值  函数：u=f(x,y,z)  条件： | | 化为非条件极值  由，解得y=y(x)，z=z(x)，带入函数  求u=u(x)的极值 |
| 拉格朗日乘数法   1. 拉格朗日函数：F(x,y,z,λ,μ)=f(x,y,z)+λα(x,y,z)+μβ(x,y,z) 2. 解上述方程组得到条件极值点 |
| 最值 | 一元函数 | 开区间(a,b) | | (1)求出所有驻点、不可导点的函数值  (2)用(1)中的所有点将[a,b]分割成若干子区间，分别讨论各个子区间的增减性  (3)求单侧极限 |
| 闭区间[a,b] | | (1)求出所有驻点、不可导点的函数值  (2)求出端点的函数值f(a)和f(b)  (3)比较(1)、(2)中求得的所有函数值，其中最大的是最大值，最小的是最小值 |
| 多元函数 | D是闭区间  求出f(x,y)在D内，所有极值点  求出f(x,y)在D边界，所有条件极值点  比较 | | |
| 平面几何 | 渐近线 | 1. ：有水平渐近线，y=b 2. ：有水平渐近线，y=c 3. 找到所有间断点，，有铅直渐近线x= 4. ，，有斜渐近线，y=ax+b 5. ，，有斜渐近线，y=ax+b | | |
| 曲率圆 | * 切向量斜率： * 法向量斜率：-1/   点处的曲率圆：  >0：a>，b>  <0：a<，b< | | |
|  |  | | | |

## 积分

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 定义  F(x)=  x∈I | 存在性 | 函数在积分区间内有界，且只有有限个间断点  I内连续→不定积分必定存在  I内不连续→不定积分存在性不确定  I内有跳跃间断点→不定积分必定不存在 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 性质 | F(x)可导，且=f(x)  原函数不是唯一的，F(x)= | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 奇偶性 | 若f(x)是偶函数，则有且仅有一个原函数：F(x)=，是奇函数  若f(x)是奇函数，则一切原函数F(x)=，都是偶函数 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 不定积分  定积分 | 如果f(x)在[a,b]上连续，那么，=F(x)=，这是f(x)在区间[a,b]内的一个原函数(不定积分) 如果f(x)在[a,b]上可积，那么，F(x)= 可导，且=f(x) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 不定积分 | 技巧 | 分部积分法 | | | | | = =f(x)·x- | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | 先求出  ==- | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 拆分 | | | | |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 凑微分 | | | | |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 分式 |  |  | | | | |  | |  | | | | | | | |  | | | | | | | | |  | |
| x=tant |  | | | | | x=sint | |  | | | | | | | |  | | | | | | | | |  | |
|  | |  | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | |  | | | | |
| ln|x+a| | |  | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | |  | | | | |
| ，α(x)是x的有理多项式 | | | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | | |
| 、 | | | | | | | | | | | | | t=，dx=d(-b)，k是m、n最小公倍数 | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | | |
| 三角函数 | tanx | | | cotx | | | | | | |  | | | | | | |  | | | |  | | | | | |
| ln|cosx| | | | ln|sinx| | | | | | | |  | | | | | | |  | | | |  | | | | | |
|  | | |  | | | | | | |  | | | |  | | | |  |  | | | |  | |  | |
|  | | |  | | | | | | | tanx | | | | -cotx | | | |  |  | | | |  | |  | |
|  | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 万能公式 | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | ln|sinx+Bcosx|+C | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | + | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 指数函数 |  | | | |  | | | | |  | | | | | |  | | | | |  | | | | dx | |  |
| +C | | | |  | | | | | -2arctan | | | | | |  | | | | |  | | | |  | |  |
| ，是只含有的有理分式 换元法 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | | | | |
| 对数函数 | 换元法，lnx=t，dx=dt | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

## 定积分

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 准备工作 | 画图：  积分区域 | 查看对称性：  区域关于y轴对称(区域方程x→-x，方程不变)：  区域关于x轴对称(区域方程y→-y，方程不变)：  区域关于原点对称(区域方程x→-x，y→-y，方程不变)：  区域关于y=x对称(区域方程对调x和y，方程不变)：  区域关于x=a对称(区域方程，方程不变)：  选择合适的坐标系：根据积分图像转换  选择合适的积分次序：先积简单的 | |
| 积分函数转化 | 函数拆分 | =  == |
| 周期性  f(x)是T周期函数 | ==  若，则一切原函数F(x)=，都是T周期函数  若，则一切原函数都不是T周期函数 |
| 化简积分函数 | 使用积分区域方程，进行代换，代入积分函数，化简积分函数  如积分区域，则 |
| 幂三角函数 |  |
| 几何法：  画出积分函数的图像 |  | |
|  |  |  |
|  |  |
| 幂三角函数 |  |
| 已知 |  |
|  |
|  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 坐标轴 | 计算 | a≤x≤b：=F(b)-F(a) | | | | | | | | | | | |
| 公式 |  | | | | | | | =1 | | | | |
| 特殊  积分 | 变限积分 | | φ(x)=、 ψ(x)=  f(x)在[a,b]可积：ψ(x)在[a,b]连续  f(x)在[a,b]连续：ψ(x)在[a,b]可导  c∈[a,b]是函数f(x)的第一类间断点：ψ(x)在x=c不可导 | | | | | | | | | |
| 求导 | x仅出现在  积分上下限 | | | | | (x)=f[β(x)](x)-f[α(x)](x)  (x)=f(β(x))(x) | | | |
| φ(x)= | | | | | 可分离 | | | = |
| 换元法 | | | 去除被积函数中的x变量 |
| 奇点 | | 在反常积分中，使函数无定义的点 | | | | | | | | | |
| 无穷区间  反常积分 | | =F(+∞)-F(a)  =F(b)-F(-∞)  =F(+∞)-F(-∞) | | | | | | | | | |
| 无界函数  反常积分 | | a、b、c∈(a,b)，是的唯一奇点：  =-+- | | | | | | | | | |
| 平面曲线 | 无方向：，注意可以使用直角坐标系或极坐标系 | | | | | L：x=x(t)，y=y(t) ，a≤t≤b | | | | | | | | |
| 封闭曲线，方向：逆时针： | | | | |  | | | | | | | | |
| 非封闭曲线： | | | | | 变更路径 | | | | | | 要求新路径与原路径所在区域内， 或 存在原函数的全微分：dF(x)=P(x,y)dx+Q(x,y) | | |
| 补线 | | | | | | -是封闭曲线， | | |
| 直接法 | | | | | | ，x=x(t)、y=y(t)，t∈[α,β]，α对应有向曲线的起点，β对应有向曲线的终点 | | |
| 空间曲线L | P(x,y,z)，Q(x,y,z)，R(x,y,z)在区域内连续，且具有一阶连续偏导数 | | | | | | | | | | | | |
| 无方向 | | 利用原曲线方程，消去z，得到曲线在某个XoY平面上的投影曲线方程  写出该平面投影曲线的参数方程：x=x(t)、y=y(t)，t∈[α,β]  代入原曲线方程，得到另一个参数方程：z=z(t)  注意可以使用直角坐标系或求坐标系 | | | | | | | | | | |
| 封闭曲线 | | 围成空间有向曲面Σ，方向：与Σ的法向量成右手系 | | | | | | | | | | |
| 非封闭曲线 | | x=x(t)、y=y(t)、z=z(t)，t∈[α,β] | | | | | | | | | | |
| 平面区域D | D投影到x轴，得到x轴上线段：[]  D投影到y轴，得到x轴上线段：[] | | | | | |  | | | | | | |
| x=f(t)  y=g(t) | | | | | |  | | | | | | |
| 边界曲线方程使用参数方程  ，，，，a≤t≤b， | | | | | |  | | | | | | |
| 二维极坐标系  θ：与x轴正向的夹角，0≤θ≤2π（） | | | | | |  | | | | | | |
| 空间曲面 | 空间曲面Σ：  无方向 曲面方程：φ(x,y,z)=0 → z=z(x,y)，要求z=z(x,y)是单值函数  若不是单值函数，则更换投影平面或拆分积分曲面 | | | | | | ：Σ在XOY平面的投影 | | | | | | |
| 封闭曲面Σ：  方向：外侧【内侧→外侧】  曲面内，P，Q，R连续，且具有一阶连续偏导数 | | | | | |  | | | | | | |
| 封闭曲面Σ：  方向：外侧【内侧→外侧】  曲面内，包含奇点 | | | | | |  | | | | | | |
| 非封闭曲面Σ | | | | | | 补面法 | | | | ，其中 是封闭曲面并且满足高斯公式的条件，是简单的曲面， | | |
| 直接法 | | | | 【根据曲面方程消去x，法向量方向与x轴正向夹角，为锐角时，取“+”，否则取“-”】 | | |
| 空间几何体Ω | Ω投影到xOy平面，得到xOy平面上的区域  Ω投影到z轴，得到z轴上的线段： | | | | | | |  | | | | | |
| θ：与x轴正向的夹角，（）  ：与**z轴正向**的夹角，（） | | | | | | |  | | | | | |

## 精确定义

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

## 定积分应用

|  |  |
| --- | --- |
| 弧长 |  |
| 面积 | 椭圆面积=πab  旋转曲面[y=y(x)，x∈[a,b]，绕x轴旋转一周]：S=2π  旋转曲面[x=x(t)，y=y(t)，t∈[α,β]，绕x轴旋转一周]：S=2π |
| 体积 | 【所有体积微元的总和】  【每一个面积微元，对应一个小竖条，所有小竖条的体积的总和】  【每一个弧微元，对应一个薄面，所有薄面的体积的总和】  旋转体[曲线y=)、y=) ，直线x=a 、x=b (a<b)围成的平面图形绕x轴旋转一周]：V=  旋转体[曲线y=)、y=) ，直线x=a 、x=b (a<b)围成的平面图形绕y轴旋转一周]：V= |
| 质量 | m= |
| 形心 |  |
| 质心/重心 |  |
| 转动惯量 | 几何体(点、线、面、体)关于直线（或点）的转动惯量  ，d是各个质量微元到直线或点的距离  ，，， |
| 散度 |  |
| 旋度 |  |
| 平均值 | f(x)在[a,b]上的平均值：y |
| 水压力 | 浸没在水中的垂直牵绊的一侧受到谁的压力  dx 是矩形条所受的压力，x是水深  )是矩形条的宽度，dx是矩形条的高度 |
| 引力 |  |
| 变力沿直线做功 | 力函数：F(x)(a≤x≤b)  物体沿x轴从点a移动到点b，F做的功W= |
| 抽水做功 | 容器中的水全部抽出所做的功  dW=ρgxA(x)dx 是位于x处厚度为dx，水晶截面积为A(x)的一层水被抽出所做的功 |

## 泰勒级数

|  |  |
| --- | --- |
| 佩亚诺余项展开式 |  |
| 麦克劳林展开式 | =0：带有佩亚诺余项的麦克劳林公式： f |
| 复合泰勒展开式 | 令带入泰勒展开式，仍然成立！ 如： |

## 等式问题(零点问题)

|  |  |
| --- | --- |
| 先将ξ换成x，等式变为：H(x)=0，根据条件尽量画出可能的函数图像 | |
| 零点存在定理 | H(x) 在连续  H(a)H(b)<0 |
| 罗尔定理 | H(x) 在连续  构造函数φ(x)，(x)=H(x)·G(x)，G(x)≠0  在中找到函数值相等的两点，φ()=φ()  至少存在一点，使(ξ)=0   |  |  | | --- | --- | | (x)+g(x) | (x)+f(x)·g(x)+C·g(x) | | φ(x)=f(x)+ | φ(x)=[f(x)+C] | |
| 罗尔定理 | 在[a,b]连续  构造函数φ(x)，(x)=H(x)·G(x)，G(x)≠0  在[a,b]中寻找函数值相等的三点，  至少存在点∈()和∈()，使=0，=0  罗至少存在一点ξ∈，使=0   |  | | --- | | (x)+(x)g(x)+f(x)·(x)+C·(x) | | φ(x)=(x)+[f(x)+C]g(x) | |
| 拉格朗日中值定理 | 在[a,b]连续  在(a,b)可导  至少存在一点(a,b)，使(ξ)=，代入H(x) |
| 泰勒展开 | 将H(x)中的泰勒展开，再代入H(x)  在(a,b)有3阶的导数，那么：  其中，作为常数，不用管，关键是取一个合适的的值 |
| 积分中值定理 | 积分区域Λ大小为A ；积分函数  积分区域Λ大小为A ；积分函数在Λ内的最小值为m，最大值为M  )在闭区间[a,b]上连续 |
|  | |
| 实系数奇次多项式至少有一个实零点 多项式有重根的充要条件：  设p(x)为多项式，则是p(x)=0的r重根的充要条件是    若在题设中给出一个端点，例如a，函数值为零，即f(a)=0，同时在欲证方程中含有自然数m，n等，应在  (x)上下功夫  先找出零点，在证零点前后是单调 | |
|  | |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 柯西中值定理，存在ξ∈I： | 柯西中值定理，存在ξ∈I： |

## 不等式问题

**不等式变为：H(x)>0（<、≤、≥）**x∈I

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 求导 | 求导，利用单调性和有界性  得到H(x)在x∈I的最大值，证明  若的正负性不明朗，可以多次求导 | | |
| 柯西中值定理 | 那么任意ξ | | |
| 拉格朗日  中值定理 | 证明，x∈(a,b)时，(x)>A 那么，任意ξ∈I，(ξ)>A | | |
| 泰勒展开 | 将H(x)中的泰勒展开，再代入H(x)  在(a,b)有3阶的导数，那么：  其中，作为常数，不用管，  关键是取一个合适的的值，使得不等式成立 | | |
|  | 已知，，在内取 | | |
| f(x,y)>g(x,y)，x∈I，y∈J | 先将x看做变量，y看成常量，求证：F(x)>G(x)  在将y看做变量，x看成常量，求证：M(y)>N(y)  或对不等式进行变换，化为齐次式，u=u(x,y)，即求证：P(u)>Q(u) | | |
| 积分不等式 | > | 证明：当(x,y)∈D，f(x,y)＞g(x.y) | |
| > | 证明：包含 | |
|  | 设f(x)，g(x)在[a,b]上可积且平方可积，则  ≤ | |
|  | ≤ | |
|  | ≤ | |
| 保号性 | 积分区域Λ，积分函数，积分函数，  ≤≤ | |
| 经典不等式 | 设a,b为实数，则： | | 设，则：  (a、b>0)  (a、b>0) |
| x>0，y>0，p>0，q>0，1/p+1/q=1，则 | |  |
|  | |  |
| 【0<x<π/2 】  sinx<x 【x>0】  arctanx≤x≤arcsinx【0≤x≤1】 | | ≥x+1【任意x】  x－1≥lnx【x>0】  <ln(1+)<【x>0】 |

## 常微分方程

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| =f(x,y) | 变量可分离：=(x)(y) | | | | |  | | |
| 齐次方程，=f(u)，u=u(x,y) | | | | | 1. 变量分离 2. 有时需要构造齐次方程，使用换元法：   x=X+h，y=Y+k，dx=dX，dy=dY，代入原方程 | | |
| 线性方程：+p(x)y+q(x)=0 | | | | | 1. m= 2. t= 3. C是常数 4. y=t/n | | |
| 伯努利方程：+p(x)y+q(x)=0 | | | | | 1. ·+p(x)·+q(x)=0 2. 求得方程解f(z,x)，再将代入 | | |
| 全微分方程：P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 | | | | | 1. 凑出方程解：u(x,y)=C   du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy | | |
| =f(x,y,) | =f(x) | | | | =f(x,) | | =f(y,) | |
| =p，，代入 | | | | =p，，代入 | | =p，p，代入 | |
| +p+qy=f(x)  通解：y=Y(x)+ | 求方程  齐次解Y(x) | | | 特征方程：  -4q>0，两个不等实根：，Y(x)=  -4q=0，两个相等实根：λ， Y(x)=  -4q<0，共轭复根 ：α， Y(x)=(cosβx+sinβx) | | | | |
| 求方程  特解： | | |  | | | |  |
| 是x的n次多项式 | | | | k=0【α≠，α≠】，0个相等  k=1【α=，α≠】，1个相等  k=2【α=，α=】，2个相等  代入 求出多项式的系数 |
| 、是x的m、n次多项式，t=max(m,n) | | | | k=0【α±βi不是特征根】  k=1【α±βi是特征根】 |
|  | | | | ++qy=，特解：  ++qy=，特解：  = ± |
| 欧拉方程 | x>0 | t=lnx，代回，得到关于x的函数 | | | | | | |
| x<0 | ，同理 | | | | | | |
| f(x) | | | 齐次解Y(x)  特征方程：+++=0  单实根：C  k重实根：  单复根α±βi：  k重复根α±βi： | | | | | |
|  |  | | | | | | | |

## 常数项级数的敛散性

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 正项级数  () | 极限判别法 | ，级数发散  ，级数发散  ，级数收敛  ，级数收敛，…  否则另谋他法 | | | | |
| 比值判别法 |  | | | | |
| 根值判别法 |  | | | | |
| 对数判别法 |  | | | | |
| 交错级数  () | 莱布尼茨判别法：满足以下两个条件，则级数收敛   1. =0 2. n充分大时，单调减   sin()=sin(nπ+-nπ)=sin(-nπ) | | | | | |
| 一般级数 | 定义法 | 1. 将级数直观展示： 2. 转化：增减有限个级数或同乘一个常数，敛散性不变    * ，敛散性不变    * ，敛散性不变 3. 存在则级数收敛，不存在则级数发散     级数收敛：=A， 级数发散：=∞  条件收敛：收敛，不收敛  绝对收敛：收敛 | | | | |
| 比较判别法 | 构造的高阶无穷小，证明收敛，则收敛  构造的低阶无穷小，证明发散，则发散  构造的同阶无穷小，同阶无穷小同敛散 | | | | |
| 参考级数 | |  |  |  |
| 收敛 | | |q|<1 | p>1 | p>1 |
| 发散 | | |q|≥1 | p≤1 | p≤1 |
| 泰勒展开 | 泰勒级数收敛于函数f(x)本身：  对一切满足不等式、  介于x和之间，是f(x)在处的泰勒公式的余项 | | | | |
| 敛散关系 |  | 收敛，那么 收敛 | | | |
|  | 若收敛，收敛，那么收敛   * 绝对收敛，绝对收敛，则绝对收敛 * 绝对收敛，条件收敛，则条件收敛 * 条件收敛，条件收敛，则条件收敛或绝对收敛   若收敛，发散，那么发散  若发散，发散，那么敛散性不确定 | | | |
|  |  | | | |
|  | 证明收敛，那么 收敛 | | | |
|  | 若收敛，敛散性不确定 | | | |
|  |  | | | |
|  |  | | | |
| 、  柯西乘积 | 绝对收敛，绝对收敛，则、的柯西乘积绝对收敛 柯西乘积：、……、() 和为sσ：+……()=sσ | | | |
|  |  | | | | |

|  |  |
| --- | --- |
| 函数项级数 | 数项级数的项是数值，数项级数是数值相加的结果，结果是一个数值  函数项级数的项是函数，函数项级数是函数相加的结果，结果是一个函数  令函数项级数的自变量x取一个确定的值，就可以得到一个数项级数： |

## 幂级数

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 收敛域 | 1. 收敛区间：(-r +r) 2. 单独讨论两个端点【x=±r】的敛散性：  * r=0：仅在x= 处收敛，可见x=必定是收敛点 * r=∞：收敛域是(-∞,+∞) * 收敛域内，级数绝对收敛 * 收敛域外，级数发散   ，，收敛半径相等  对级数逐项求导，收敛半径不变，收敛域可能缩小  对级数逐项积分，收敛半径不变，收敛域可能扩大  两个幂级数收敛半径分别为和，相加后得到的幂级数的收敛半径 | | | | |
| 展开式 |  | | | | |
|  |  | | | |
|  |  | | | |
|  |  | | | |
| sint |  | | | |
| tanx |  | | | |
| cotx |  | | | |
| arcsinx |  | | | |
| arccosx |  | | | |
|  |  | | | |
| 和函数 | S(x)= | | | | |
| 增减x | | |  | |
| 合并幂次项 | | | 【】 | |
| 移出多余乘数项 | | | 中只包含t，不包含n的乘数项 | |
| 化简 | | | * + 拆项：   + n±c 可直接计算 | |
| 匹配 | | | * + 增减的幂次，来匹配的化简结果，增减的部分移出 | |
| 求出级数的收敛域  若幂级数 和 的收敛半径分别是和，  S(x)在其收敛域I上连续，且如果幂级数在收敛区间的端点x=R（或-R）收敛，  则和函数在(-R,R]（或[-R,R)连续  对于先导后积的处理方法：  当a为中心点时，(a=0)收敛，(a=)收敛，所以下限通常取中心点  补项：为了凑成已知级数，在开头处不满足的补项，在后面减  使用f(x)代替t | | | | |
| 变换 |  | |  | | ∈ I |
|  | |  | |  |
|  | |  | |  |
|  | |  | | 逐项求导 |
|  | |  | | 逐项积分 |
|  | |  | |  |

## 傅里叶级数

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 狄利克  收敛定理 | f(x)是以2k为周期的可积函数，在[-k,k]上f(x)满足：  (1)连续或只有有限个第一类间断点  (2)至多只有有限个极值点  则f(x)的傅里叶级数处处收敛，其和函数S(x)  满足狄利克雷收敛定理的条件，才有傅里叶级数 | | | |
| 傅里叶  展开 | 周期函数f(x)  T=2k  展开为傅里叶级数 |  |  |  |
| f(x)在[0,]  展开为正弦级数 | 奇延拓：构建函数F(x)，满足：   1. 奇函数 2. T=2k 3. F(x)=f(x)，x∈[0,k] |  | x∈[0,k] |
| f(x)在[0,]  展开为余弦级数 | 偶延拓：构建偶函数F(x)，满足：   1. 偶函数 2. T=2k 3. F(x)=f(x)，x∈[0,k] |  | x∈[0,k] |

## 空间解析几何

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 向量 |  | A(,,)、B(,,) 构成向量 | | | | | |
| 模 | ， | | | | | |
| 方向角 | 轴、z轴正向的夹角：α、β、γ | | | | | |
|  |  | | | | | |
| 余弦表示 |  | | | | | |
| 点积/内积 |  | | | | | |
| 叉积/外积 | ，结果是一个向量  x、y、z轴正方向的单位向量  模：  方向：右手四指先，再过，大拇指指向  已知平面过两个向量：，该平面的法线： | | | | | |
| 混合积 |  | | | | | |
| 直线 | 方向向量：=(l,m,n)  过点：()，() | | | 点向式 |  | | |
| 参数式 | x=+lt，y=+mt，z=+nt | | |
| 两点式 |  | | |
| 不平行  两平面  交线 | =（） | | |
| 平面 | 法线：=(A,B,C)  过不共线的三点：(),(),()  过坐标轴上三点：(a,0,0)，(0,b,0)，(0,0,c) | | | | | | |
| 一般式 | Ax+By+Cz+D=0 | | | | | |
| 点法式 | A(x-)+B(y-)+C(z-)=0 | | | | | |
| 三点式 |  | | | | | |
| 截距式 |  | | | | | |
| 平面束 | 经过两平面的交线的所有平面： | | | | | |
| 空间  曲线 |  |  | | | | 切向量 | 投影曲线【xOy平面】 |
| 一般式 | 两曲面的交线  F(x,y,z)=0，G(x,y,z)=0 | | | | = | 将z消去，得到φ(x,y)=0，投影曲线： |
| 参数方程 | x=φ(t)，y=ψ(t)，z=ω(t) ； t∈[α,β] | | | | =() |  |
| 曲面 | 一般式：F(x,y,z)=0  处法向量：=(A,B,C)=  柱面：曲面上，任意一点的切平面，平行于，一条定直线 | | | | | | |
| 圆柱面 | |  | | | | |
| 椭圆柱面 | |  | | | | |
| 双曲柱面 | |  | | | | |
| 抛物柱面  y=a | |  | | | | |
| 椭球面 | |  | | | | |
| 单叶双曲面 | |  | | | | |
| 双叶双曲面 | |  | | | | |
| 椭圆抛物面 | |  | | | | |
| 双曲抛物面(马鞍面) | |  | | | | |
| 椭圆锥面 | |  | | | | |
|  | |  | | | | |
|  | |  | | | | |

旋转曲面

，

曲线绕直线旋转形成一个旋转曲面，曲线取一点M(a,b,c)，过M的纬圆上的任意一点N(x,y,z)

直线的方向向量：⊥：l(x-a)+m(y-b)+n(z-c)=0

直线的过点P：|PN|=|PM|：

F(a,b,c)=0

G(a,b,c)=0

消去a,b,c

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 距离公式 | 点到直线：()、【、P】 | |  |
| 点到平面：、Ax+By+Cz+D=0 | |  |
| 平行平面：Ax+By+Cz+D=0、Ax+By+Cz+E=0 | |  |
| 平行直线：【、】、【、】 | |  |
| 异面直线：【、】、【、】 | |  |
| 距离公式 | 直线间关系 |  | |
| 直线与平面 | L在π上的投影直线：过L且与π垂直的平面与π的交线 | |
| 平面间 |  | |