[矩阵 2](#_Toc510448307)

[矩阵性质 8](#_Toc510448308)

[矩阵关系 9](#_Toc510448309)

[运算 10](#_Toc510448310)

[线性表示 12](#_Toc510448311)

[线性方程组 13](#_Toc510448312)

[矩阵变换 14](#_Toc510448313)

[秩 15](#_Toc510448314)

## 矩阵

|  |  |
| --- | --- |
| 排列 | 排列：n个数有n! 种排列，  标准次序排列：自然数从小到大排列 |
| 逆序数 | 逆序：排列中，某一对元素先后次序和标准次序不同，构成一个逆序；  逆序数τ：一个排列中逆序的总数目  奇排列：逆序数为奇数；偶排列：逆序数为偶数；  计算逆序数：每一个元素，与前面的元素一一比较得该元素的逆序数，所有元素逆序数统加 |
| 排列项  表达式 | 排列项表达式：计算数表中不同行不同列的n个数的乘积，再乘以  确定行号，不确定列号，排列项表达式的一般式：  是一个排列，显然一个n行的 |
| 对换 | 对换：排列中，两个元素对调，其余的元素不动  相邻对换：相邻两个元素对换  任意两个元素对换，排列改变奇偶性  奇排列，对换成标准排列，对换次数为奇数，  偶排列，对换成标准排列，对换次数为偶数； |
| 行列式 | n阶数列1,2…n ，共有n!个排列，  n阶数表有n!个排列项表达式，这n!个排列项表达式的代数和就是这个数表的n阶行列式  n阶方阵A的行列式 ：detA 或 |A|，行列式是一个数值(可正可负)  对换：行列式的两行(列) 的位置，行列式变号  数乘：λ|A| = |A|的某一行(列)所有元素同乘λ  相加：|A|和|B|除第i行(或j列)，其余全部相等，|A|+|B|=第i行(或j列)元素对应相加减，其余不变  一阶顺序主子式：  二阶顺序主子式：  三阶顺序主子式： |
| 余子式 | 余子式：n阶行列式所在的行和列去掉后留下来的n-1阶行列式  代数余子式： |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 行阶梯  矩阵 |  | 对于任何非零矩阵，总可以经过有限次初等行变换把它变为行阶梯矩阵，注意不能使用初等列变换！ |
| 行最简形  矩阵 |  | 对于任何非零矩阵，总可以经过有限次初等行变换把它变为行最简形矩阵，注意不能使用初等列变换！  行阶梯矩阵继续进行初等行变换：所有非零行的首非零元变为1，所有首非零元所在的列其他元素全变为0  一个非零矩阵的行最简形矩阵是唯一确定的； |
| 标准形  矩阵 |  | 行最简形矩阵继续进行初等变换，得到的矩阵左上角是一个单位矩阵，其余全为零，称为标准形矩阵：  左为标准形矩阵的一般式，一个标准形矩阵可以由m、n、r三个数完全确定，  其中r是左上角的单位矩阵的阶数，也是对应的行阶梯矩阵中非零行的行数  对于任何非零矩阵，总可以经过有限次初等行变换把它变为标准形矩阵； |
| 计算 | = | = |
| = | = |
| = | = |
| = |  |

如对于一个3×4矩阵：A= ，分块方法：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 分块矩阵 | 矩阵A的子块 |
| 一般 |  | = ，= ，= ，= ， |
|  |  | = ，= ，， ， ， |
| 按列 |  | = ，= ，= ，= ， |
| 按行 |  | = ，= ，= |
| 分块对角  矩阵 | 设A为n阶方阵，若A的分块矩阵，只有在对角线上有非零子块，  不在对角线上的子块都是零矩阵，且对角线上的子块都是方阵，  如： ，那么称这个矩阵是分块对角矩阵 | |
| 分块矩阵乘法 | (1)A和B满足可相乘的条件  (2)两个矩阵采用如下的分块方法得到：  A= ，B= ，AB= ， | |

在前面已经讲到：若A = P BP^(-1) ，那么A^k = ) ，A的多项式：Φ(A) =B

那么特别的：

若雨可逆矩阵P 使得AP =Λ，Λ为对角矩阵，即A相似于对角矩阵Λ，那么：

= ，Φ(A) =

而对于对角矩阵Λ，有：

= ，Φ(Λ) =

由此可以方便地计算A的多项式Φ(A)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 方阵 |  | 行数与列数相等，用 表示  称为n阶矩阵 或 n阶方阵， |
| 行矩阵 |  | 只有一行的矩阵，又称为行向量 |
| 列矩阵 |  | 只有一列的矩阵，又称为列向量 |
| 零矩阵 | 0 | 元素都是零的矩阵 |
| 单位矩阵 | E | 对角线上的元素都是1的对角矩阵称，E=diag()  任意矩阵A：AE=EA=A |
| 纯量阵 |  | 纯量阵=λE = diag()  任意矩阵A：AλE=λA |
| 对角矩阵  （主对角矩阵）  （对角阵） |  | Λ=diag()  副对角线以外的元素都是0 |
| 副对角矩阵 |  |  |
| 三角矩阵 |  | 上三角矩阵：主对角线以下全为0  下三角矩阵：主对角线以上全为0 |
| 角矩阵 |  |  |
| 奇异矩阵 |  | 对于方阵A，如果|A|=0，那么A称为奇异矩阵 |
| 非奇异矩阵 |  | 对于方阵A，如果|A|不等于0，那么A称为非奇异矩阵 |
| 同型矩阵 |  | 两个矩阵行数相同，列数相同 |
| 相等矩阵 |  | 两个矩阵行数相同，列数相同，并且对应元素相等 |
| 满秩矩阵  （可逆矩阵） |  | 如果矩阵的秩等于该矩阵的列数，这样的矩阵称为列满秩矩阵；  如果一个列满秩矩阵同时也是方阵，那么这个列满秩矩阵就是满秩矩阵，也就是可逆矩阵 |
| 降秩矩阵  （不可逆矩阵） |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 对称矩阵 | 正对称：=A  反对称：=-A | |
| 正交矩阵 | A的列向量都是单位向量，且两两正交  A的行向量都是单位向量，且两两正交  A的n个列(行)向量构成的向量空间的一个标准正交基 | |
| 正定矩阵 | 所有特征值均为正数  各阶顺序主子式均大于0  A和E合同，即A=C 【C可逆】 | |
| 负定矩阵 | 赫尔维茨定理：  奇数阶主子式均小于0  偶数阶主子式均大于0 | |
| 二次型 | 对称矩阵  A=  = | f()  =Ay =+ |
| 标准形 | 对角矩阵  B= | f()  =By  =  正惯性指数：正平方项的个数  负惯性指数：负平方项的个数  二次型的标准型不唯一，但正负惯性指数是确定的 |
| 规范形 | 对角矩阵  C= | f()  =Cy  =  系数 只在1、-1、0 三个数中取值：=1【>0】，=-1【<0】，=0【=0】二次型的规范型是唯一的，即所有标准型都对应同一个规范型 |

## 矩阵性质

|  |  |
| --- | --- |
| 相似对角化 | 1.对称矩阵必能相似对角化  2.若A的n个特征值互不相等，则A能相似对角化  3.A的每个k重特征值，对应有k个线性无关特征向量，则A能~~  4.以上按顺序判断下来，都不满足，则A不能相似对角化 |

## 矩阵关系

|  |  |
| --- | --- |
| 等价 | PAQ=B [P、Q是可逆矩阵]  r(A)=r(B)  A可经过有限次初等变换，得到B  kA与kB等价 与等价  与等价  与等价 |
| 相似 | AP =B【P是可逆矩阵】 【P称为相似变换矩阵，它不是唯一的】  A和B都能相似对角化，且特征值相同  kA±gE与kB±gE相似  与相似  与相似  与相似  |A|=|B| |
| 合同 | AP =B【P是可逆矩阵】【P称为合同变换矩阵，它不是唯一的】  有相同的正特征值个数和负特征值个数 |

## 运算

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 行列式 | |
| 分块三角/对角矩阵 |  | |
| A = |  | |
| A = |  | |
|  |  | |
|  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 行列式 | 初等变换，将矩阵化为三角矩阵，行列式不变 | | | | | | | | | | | |
| |A| =|A\*| | | | | | | | | | | | |
| |A|=任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和  按i行展开：|A|= ，i∈[1,n]  按j列展开：|A|= ，j∈[1,n]  某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于0  + +……+ = 0 （i≠j）  + +……+ = 0 （i≠j）  迭代：设|A|=，将行列式展开得 | | | | | | | | | | | |
| 特征值：n阶矩阵A 的，n个特征值：，|A|= | | | | | | | | | | | |
| |kA|=|A|  |AB|=|BA|=|A||B| = | | | | ||=|A|  =  ||= | | | A和B等价或相似：|A|=|B| | | | | |
| 范德蒙行列式 | | | | = | | | | | | | |
| 分块矩阵 | | | |  | | | | | | 是的阶数 | |
| 三角/对角矩阵 | | | |  | | | | | |  | |
|  | | | | ||= – | | | | | | | |
| ||=++––– | | | | | | | |
| |零矩阵|=0 ，注：|A|=0⇏A=0 | | | | | | | |
| 幂 | 只有方阵才有幂  = A A ……A  【r(A)=1】  =P【A与B相似】  =++AB+ BA  数学归纳法  (=ABAB……AB  =  diag() | | | | | | | | | | | |
| 转置 | 把矩阵A的行换成同序数的列  若α和β都是n维列向量，那么：  和β是两个秩为1的矩阵  ==迹[]=迹[] | | | | | | |  | | | | |
| 伴随 | 方法一：  各元的余子式  各元的代数余子式  各元的代数余子式按转置顺序填入矩阵  得到原矩阵的伴随矩阵   \*= | | | | | | | AA\*=A\*A=|A|E  A | | | | |
| 方法二：  A\* = |A| | | | | | | |
|  | | | | | | | |  | | --- | | = | | =  m、n是A和B的阶数 | | | | | |
| 逆 | 方法一：  令AX=E，X的各个元素设为未知数  做乘法运算求出X，得 | | | | | | | =  (   |  | | --- | | = | | = | | = | | | | | |
| 方法二 | | | | | | |
| 方法三  构造矩阵[A E]，初等行变换得[E B]， =B  构造矩阵[A C]，初等行变换得[E B]， =B | | | | | | |
| 特征值  特征向量 | 特征值 | | Aα=λα  m×n阶矩阵：必有n个特征值：（包含相同值）  r=n：A的n个特征值全不为零  r<n：0至少是n-r重特征值 | | | | | | | | | |
| 特征向量 | | 特征值带入方程组：(A—E)x=0  方程解向量：的特征向量  m×n阶矩阵：线性无关的特征向量的个数≤n  k重特征值：对应的线性无关的特征向量的个数≤k  不同特征值，对应的特征向量线性无关， | | | | | | | | | |
| ±gE |  | |  | |  |  | | 等价  B=PAQ | 相似  B=AP | | 合同  B=AP |
| kλ±g |  | | λ | |  |  | |  | λ | |  |
| α | α | | α | | α | α | |  | α | |  |
|  | 迹：行列式：|A|=，如果|A|=0，特征值：0 | | | | | | | | | | | |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 对角矩阵 | 分块对角矩阵 | 单位矩阵 | 矩阵各行元素之和为K |  |
| 特征值 |  |  | 1 | K | 1、0、00 |
| 特征向量 |  |  |  |  |  |

属于不同特征值的特征向量正交  
k重特征值，对应k个线性无关的特征向量

## 线性表示

向量组：A=[,…]、B=[,…]

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 线性  表示 | B由A线性表示：B=AX  []=[]  =[⋯]=+⋯+=A  =[⋯]=+⋯+= | | B中每个向量都能由向量组A线性表示  B中每个向量对应一个表示向量  ：解向量  X=[]：解矩阵  m=1时，解矩阵是一个列向量 |
| 表示  条件 | B能够由A线性表示  即存在解矩阵X=[]，使得B=AX ，  即任意，使得=A  就是求解n个线性方程组A= | | |
| 对于Ax=β  r(A)<r(A,β)时无解，r(A)=r(A,β)时有解  有解时，r(A)=n表示式唯一 ，r(A)<n表示式无限多  由此可得表示条件：r(A,B)=r(A)  若向量组A和B能互相线性表示，向量组A与B等价：  【r(A,B)=r(A)，r(B,A)=r(B)】  r(A)=n时，X= | | |
| 向量组的相关性 | 线性相关 | 令=0，得不全为零的数：  r(A)＜n | |
| 线性无关 | 令=0，得：=0  r(A)＝n | |
| 极大线性无关组 | 1.是向量组的一个部分组，其所包含的向量线性无关  2.含有向量个数=r(A)  3.对向量组进行初等行变换，化为行最简形矩阵(不改变原向量组的相关性)  4.从该最简形矩阵中选出r个向量，它们对应的原向量组的向量构成的向量组  5.向量组的极大线性无关组并不唯一  6.向量组中任意一个向量，都能由极大线性无关组线性表示  7.只含零向量的向量组：没有最大无关组，  8.线性无关的向量组：最大无关组就是它自身 | | |

向量空间

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 向量空间M | 子空间 | 基A、B | 自然基 | 标准正交基 | 维数 | β在基A中的向量坐标 | A到B的过渡矩阵 |
| 向量组M | 部分组 | 极大线性  无关组A、B | 基  单位化 | 基  正交化，单位化 | 秩 | Ax=β ，解向量 | AX=B，解矩阵 |

向量空间是一个向量组，对于向量的加法及数乘两种运算封闭：若a∈V，b∈V，那么：a+b∈V、λa∈V、λb∈V

向量组A生成向量空间 L：L={x=++…+}， ∈R

|  |
| --- |
| 实对称矩阵，属于不同特征值的特征向量正交 |
| = = = =  由于 表示向量长度，相当于线段的长度  因此 = 说明经正交变换线段长度保持不变(从而三角形的形状保持不变)，这时正交变换的优良特性。 |

## 线性方程组

β=0，齐次，必有解(零解)，r(A)=n只有零解，r(A)<n有非零解(无限个)

β≠0，非齐次，r(A)<r(A,β)无解，r(A)=r(A,β)有解

有解时，r(A)=n唯一解，r(A)<n有无限多个解

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 简化 | 行最简形矩阵：增广矩阵[A,b]，初等行变换，注意不能使用初等列变换！  秩：r(A)=r(A,β)=R  方程组1：系数矩阵取最简形，构造齐次线性方程组，包含R个方程  方程组2：增广矩阵取最简形，构造非齐次线性方程组，包含R个方程  极大线性无关组：确定该最简形矩阵的极大线性无关组  极大线性无关组的选取不唯一 | | |
| 变量 | 系数矩阵的每一列对应一个变量，数目=n  主变量(R)：极大无关组中的向量对应的变量  自由变量(n-R):主变量以外的变量 | | |
| 基础解系 | 每次给一个自由变量赋值为1，其余自由变量赋值为0，  代入方程组1，得到一个解向量  赋值n-R次，得到n-R个基础解向量，构成一个向量组→基础解系  是齐次线性方程组的全体解向量，组成的向量组，的极大线性无关组 | | |
| 特解 | β=0齐次 | α=0 | |
| β≠0非齐次 | 所有自由变量=0，代入方程组2，得到一个特解α | |
| 通解 | α+ + +…… | | |
| 必解 | 若线性方程组有解，那么必有解： ，= ，……，=  ：系数矩阵A中的第i列元素用方程组右端的常数项代替，如：= ，=  克拉默法则的证明  克拉默法则可以看做是行列式的一个应用，而所给出的证明又可看做逆矩阵的一个应用。他解决的是方程个数与未知数个数相等并且系数行列式不等于零的线性方程组。所以它既是“使用二阶行列式求解方程组”的推广，又是“求解一般线性方程组”的一个特殊情形。 | | |
| 运算 | x= 和x=为Ax=0 的解  x=和x=为Ax=b 的解 | | x= + 是Ax=0的解 x=— 是Ax=0的解  A\*的列向量都是Ax=0的解【AA\* =A\*A= |A|=0】 |
|  | |  |
|  | 对方程组A的各个方程作线性运算所得到的一个方程就称为方程组A的一个线性组合  若方程组B的每个方程都是方程组A的线性组合，就称方程组B能由方程组A线性表示，这时方程组A的解一定是方程组B的解；  若方程组A与方程组B能互相线性表示，就成这两个方程组可互推，可互推的两个线性方程组一定同解 | | |
|  | 当方程组中有某个方程式其与方程的线性组合时，这个方程就是多余的，这时称这个方程组是线性相关的；  当方程组中没有多余方程，就称该方程组线性无关(或线性独立)  显然，方程组Ax=b 线性相关的充分必要条件是矩阵B=(A,b)的行向量组线性相关  向量组A：、…… ，构成矩阵A=(、……) ，向量组A线性相关，就是齐次线性方程组  ++……+=0 ，即Ax=0 有非零解。 | | |

## 矩阵变换

|  |  |
| --- | --- |
| 初等~ | 对调两行(列)  数乘某一行(列)所有元素  某一行(列)所有元素的k倍加到另一行(列)对应的元素上去  初等矩阵：单位矩阵E经过一次初等变换  6种初等变换，对应6种初等矩阵  A初等行变换得B：单位矩阵E执行相同初等行变换得矩阵P，B=PA  A初等列变换得B：单位矩阵E执行相同初等列变换得矩阵Q，B=AQ |
| 相似~ | 求矩阵A的特征值和特征向量  变换矩阵P：特征向量，组成向量组  结果矩阵B：特征值，组成对角矩阵，顺序对应与P中特征向量  原矩阵A：A=PB  结果矩阵唯一，变换矩阵不唯一  对称矩阵存在正交单位矩阵Q，作为变换矩阵：AQ =B  求法是将P进行正交化，单位化 |
| 正交~ | 任意二次型A，总能经过正交变换x=Qy，化为标准形B  B=A=AQ  A与B相似，其中A是对称矩阵，B是对角矩阵 |
| 求矩阵A的特征值和特征向量  变换矩阵Q：特征向量，组成向量组，正交化，单位化  结果矩阵B：特征值，组成对角矩阵  原矩阵A：A=QB=QB |
|  | 配方法：  任意二次型f =Ax，总能经过线性变换，化为标准形B  提取所有含的项，得到  将看做常数，进行配方如：  =  =  相同的方法处理  含有的平方项:  把全部归并起来，进行配方，得到一个含的平方项  剩余的项中不含有  相同的方法处理剩余的项    含有的乘积项: |
| 正交化 | 向量组A：,……线性无关，  =，，…，  向量组B：,……由向量组A导出  (1)B是正交向量组  (2)B和A等价  (3)对任何k(1≤k≤r)，向量组,…… 与 ,…… 等价 |

## 秩

|  |  |
| --- | --- |
| 定义 | k阶子式：矩阵中取k行k列(k≤m，k≤n)，交叉的k×k个元素，不改变相对位置，构成的k阶行列式  m×n矩阵，k阶子式，数目：  最高阶非零子式：矩阵的 R阶子式，不等于0，,所有r+1阶子式(如果有的话)全等于0  R称为矩阵A的秩，记作r(A)=R |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 计算 | 初等变换：将矩阵化为行阶梯矩阵  r=该行阶梯矩阵，非零行的行数  r=矩阵的极大线性无关组，含有的向量的个数  r(A)≤m，r(A)≤n | | | | | | | |
| 算数运算 | 加减 | 数乘 | | | 乘法 | | | 幂 | |
| r(A±B)≤r(A)+r(B) | r(λA)=r(A) | | | r(AB)≤r(A)，r(AB)≤r(B)  r(A)+r(B)-n≤r(AB)  r(AB)=r(B)【r(A)=n】  r(A)+r(B)≤n【AB=0】 | | | =n 【r(A)=n】  <r(A) 【r(A)<n】 | |
| 矩阵运算 | 转置 | | | 伴随 | | | | 逆 | |
| = r(A)=  r()=1 | | | =n，【r(A)=n】 r=1，【】  =0，【】 | | | | A是有限个初等矩阵的乘积【r(A)=n】 | |
| 增减运算 | 扩展  增加k个向量 | | 部分  去除k个向量 | | | 延伸  增加k个维度 | 缩短  去除k个维度 | | |
| r(A,B)≤r(A)+r(B)  r(A,B)≥r(A)  r(A,B)≥r(B) | | r(C)=n-k 【r(A)=n】  r(A)-k≤r(C)≤n-k 【r(A)<n】 | | | r(C)=n 【r(A)=n】  r(A)≤r(C)≤n【r(A)<n】 | r(C)<n 【r(A)<n】 | | |
| 特征值  特征向量 | r(A)=非零特征值个数【A可相似对角化】  ,…是n个不同的特征值对应的特征向量【r(A)=n】 | | | | | | | | |
| 矩阵关系 | 若A和B等价或相似或合同，则r(A)=r(B) | | | | | | | | |
| 特殊矩阵 | 分块对角矩阵 | | | | | 对称矩阵 | | | |
| r=r(A)+r(B) | | | | | r(A)=非零特征值个数 | | | |

|  |  |
| --- | --- |
| r(A)=1 | A是一个数，或  A是列矩阵，或  A是行矩阵，或  A =列矩阵×行矩阵 |
| r(A)=r(A,b) | 向量b能由向量组A线性表示  ，【不全为零】  非齐次线性方程组Ax=b，有解 |
| r(A,b)=r(A)=n | 表示式唯一 |
| r(A,b)=r(A)<n | 表示式无限多 |
| r(A)<r(A,b) | 向量b不能由向量组A线性表示  非齐次线性方程组Ax=b，无解 |
| r(A,B)=r(A) |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | r(A)=n | r(A)<n |
| 逆矩阵 | A可逆 ，n | A不可逆 |
| 行列式 | |A|≠0 | |A|=0 |
| 特征值与特征向量 | A的n个特征值全不为零  是n个不同的特征值对应的特征向量 | 0是A的特征值  0至少是n-r重特征值 |
| 向量组 | A线性无关  =0【不全为零】 | A线性相关  =0【】 |
| 线性方程组 | Ax=0，只有零解 | Ax=0，除零解外，有非零解  基础解析含有n-r个向量 |