报告正文 Main Body of Proposal

参照以下提纲撰写，要求内容翔实、清晰，层次分明，标题突出。

The proposal shall be written in accordance with the following outline, with informative content, clear structure, and prominent titles.

请勿删除或改动下述提纲标题及括号中的文字。

Please do not delete or change the title of the outline and the words in brackets.

（一）主要学术成绩（建议不超过 4000 字）

Major academic achievements (no more than 4000 words)

着重阐述所取得研究成果的创新性、科学价值及本人贡献等。

In this part, you shall focus on the innovativeness and scientific value of the research results, and your personal contribution.

本人在 Comm. Math. Phys.，JHEP 等国际一流期刊发表和接收了 17 篇文章。被 ICM45 分钟报告人、Whitehead 奖得主、英国约克大学教授 Nazarov 和澳大利亚科学院院士、悉尼大学教授 Molev 等国际顶尖数学家多次引用。担任 Compos. Math.，Comm. Math. Phys.，Sel. Math. New Ser.，J. Ec. Polytech. - Math.，IMRN 等多个国际期刊审稿人。

1、Twisted Yangian 的 Drinfeld 实现

Yangians 最早出现在数学物理中，是在 80 年代 Faddeev 及其学派关于量子反散射方法的研究中。更一般的 Yangians 是由 Drinfeld 在 1985 年引进用来给 Yang-Baxter 方程提供有理函数解的、非常重要的一类量子群。它们在数学物理和表示论有着非常广泛的应用。Twisted Yangians 是 Yangians 的一类重要的余理想子代数。不同于 Yangians 是用 Dynkin 图来分类的，twisted Yangians 是用对称对或者 Satake 图来分类的。它们（AI 和 AII 型）最先是由 Olshanski 在 1990 年通过 R-matrix 和 Cherednik 的 reflection 方程来引进的。另外，twisted Yangians 有到 BCD 型李代数的赋值同态，因此 twisted Yangians 比 BCD 型 Yangians 与 BCD 型李代数的表示论的联系更加紧密。

Yangians 和仿射量子群的 Drinfeld（新）实现是由 Drinfeld 在 1988 年引进的。Drinfeld 实现对于引进 q-特征，研究仿射量子群的表示论，以及引进 shifted Yangians 至关重要。因为李代数可以看作是对角型的对称对，因此可以认为对称对是李代数的推广，进一步 twisted Yangians 是 Yangians 的推广。因此，一个非常自然且重要的问题就是 twisted Yangians 是不是也有 Drinfeld 实现。**这是一个长期悬而未决的公开问题**，甚至在卢明教授和王伟强教授给出仿射 $\imath$ 量子群的 Drinfeld 实现之前，人们可能认为这样的 Drinfeld 实现并不存在。

申请人与弗吉尼亚大学的王伟强教授，香港大学的张伟南博士（arXiv:2308.12254）通过 R-matrix 实现做高斯分解的方法**首次得到了分裂型 A 型（即 AI 型）twisted Yangians 的 Drinfeld 实现**。这份工作开启了**发现 twisted Yangians 的 Drinfeld 实现的大门**。在后续的工作中（arXiv:2406.05067，arXiv:2408.06981），申请者与王伟强教授，张伟南博士对仿射 $\imath$ 量子群的 Drinfeld 实现做退化，从而**得到了所有分裂型和拟分裂 ADE 型** twisted Yangians 的 Drinfeld 实现。我们的创新点在于这两种方法独立却又互补。一方面高斯分解帮助我们确定如何在仿射 $\imath$ 量子群那边选取合适的参数做退化。另一方面通过退化仿射 $\imath$ 量子群的 Serre 关系式，我们得到 twisted Yangians 的 Serre 关系式，而这个 Serre 关系式单独从高斯分解是很难得出一个简单而又优美的公式。

Twisted Yangians 的 Drinfeld 实现将提供一系列的应用，比如研究 Twisted Yangians 表示论的 q-特征理论，引进 shifted twisted Yangians 并研究其与几何中 Slodowy 切片、有限 W 代数、仿射 Grassmannian 切片的联系。比如 Topley 教授和其学生 Tappeiner 最近利用我们的 twisted Yangians 的 Drinfeld 实现研究典型李代数的 Slodowy 切片，从而极大地推广了 Topley 教授在 2023 年发表在《Invent. Math.》的结果。

我们其中一份工作（arXiv:2406.05067）已被《Comm. Math. Phys.》接受，得到了两位审稿人的高度评价：“**addresses an important problem** in the representation theory of affine quantum symmetric pairs that will help **bring the theories of twisted Yangians and affine ıquantum groups to a level playing field**”，“**was an important open problem for many years** which has been **resolved in the present paper in many cases**”。

2、仿射 $\imath$ 量子群的 R-matrix 和 Drinfeld 实现

仿射量子群通常有三种常用的实现方式，即 Drinfeld-Jimbo、Drinfeld、和 R-matrix 实现。不同的实现方式有不同的优势，有些实现方式在研究特定问题如可积系统的对称性、表示论、或与几何之间的联系比其他实现方式更方便。比如说 Drinfeld 实现是研究仿射量子群的表示论主要工具，它能用来定义 q-特征，统一地给有限维不可约表示进行分类，定义截断 shifted 仿射量子群（包括 Yangians）并研究其与仿射 Grassmannian 切片（或更进一步与 K-理论版本的 Coulomb 分支）的联系等。另一方面，Drinfeld-Jimbo 和 R-matrix 实现相比 Drinfeld 实现能更好地描述仿射量子群的 Hopf 代数结构，特别是它们的余积（coproduct）。因此**找到仿射量子群不同实现方式的之间的直接同构与联系是非常重要且有用的工作**。这一系列工作由 Beck，Ding-Frenkel，Damiani，Jing-Liu-Molev 等教授完成。

Twisted q-Yangians 是 Molev-Ragoucy-Sorba 通过类似 Olshanski 的方法用 R-matrix 实现构造的 A 型仿射量子群的余理想子代数。他们对应的对称对（或 Satake 图）是 AI 和 AII 型。更一般的仿射 $\imath$ 量子群，作为仿射量子群的余理想子代数，是由 Kolb 教授 [Adv. Math. 2014] 通过 Drinfeld-Jimbo 实现推广 Letzter 教授对于有限型量子对称对而引进的。并且 Kolb 教授证明了 AI 和 AII 型仿射 $\imath$ 量子群分别同构于对应的 twisted q-Yangians 并给出 Drinfeld-Jimbo 实现

和 R-matrix 实现的生成元之间的对应。最近，卢明教授和王伟强教授 [Adv. Math. 2021] 通过仿射 $\imath$ 量子群的辫子群作用构造了一系列新的生成元从而得到了分裂 ADE 型仿射 $\imath$ 量子群的 Drinfeld 实现，推广前面 Beck 和 Damiani 的工作。这一工作被张伟南博士推广到了分裂 BCFG 型。另外，卢明教授，王伟强教授和张伟南博士进一步推广到了拟分裂 ADE 型。他们的这些工作完成了仿射 $\imath$ 量子群的 Drinfeld-Jimbo 实现和 Drinfeld 实现之间详细的同构与联系。但是，仿射 $\imath$ 量子群的 R-matrix 实现和 Drinfeld 实现之间的同构仍是缺失的。

申请人通过结合 Ding-Frenkel 早期关于 A 型仿射量子群的工作和最近与王伟强教授和张伟南博士关于 twisted Yangians 的工作，**首次给出了仿射 $\imath$ 量子群（AI 型）的 R-matrix 实现和 Drinfeld 实现的同构并给出了生成元之间的对应**，填补了这一空白。这一工作将为未来构造其他类型仿射 $\imath$ 量子群的 R-matrix 和 Drinfeld 实现的同构提供指导意见。该结果发表在《Int. Math. Res. Not.》，并得到了审稿人的好评“**presents crucial and important results**”“I **strongly recommend** it for publication in IMRN”。

3、超 Yangians 的表示论及 Jacobi-Trudi 等式

超对称是现代理论物理非常重要的一个理论框架，而超代数是描述超对称的数学框架。这里超代数是一个 $\mathbb{Z}_2$-分次代数，可以分解为奇、偶两部分。超 Yangians 是由 ICM45 分钟报告人 Nazarov 教授引入的，关于 Yangians 的自然推广，它们在表示论和里数学物理非常重要，有着非常广泛的应用。例如，国立中山大学的彭勇宁教授用超 Yangians 及其子代数 Shifted 超 Yangians 来刻画有限 W 超代数的显式实现；Nazarov 教授利用它的量子超行列式来得到线性李超代数的 Capelli 等式；超 Yangians 也是描述超 XXX 自旋链的对称性的主要数学工具。因此，研究超 Yangians 的代数结构及其表示论是数学物理和表示论的重要问题。

申请人与导师 Evgeny Mukhin 教授系统地研究了超 Yangian $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 的表示理论。我们的结果包括引入超 Yangians 的 skew 表示（取决于 skew Young 图）及计算它们的 q-特征，从而进一步证明了 skew 表示的 q-特征满足 Jacobi-Trudi 等式。通过对泛 R-matrix 特定到这个 Jacobi-Trudi 等式，我们证明了对应 skew Young 图的传递矩阵（transfer matrices，数学物理里非常重要的一类哈密顿算子）也满足 Jacobi-Trudi 等式。这一结果给出了超对称情形的 Cherednik-Bazhanov-Reshetikhin （CBR）公式在代数层面的证明。CBR 公式在研究超 XXX 自旋链的传递矩阵的谱问题中被物理学家广泛应用，但是我们的结果**首次给出了其严格的数学证明**。Molev 教授和 Ragoucy 教授证明了量子 Berezinian（超行列式），可以看做是传递矩阵的生成函数。通过使用 Jacobi-Trudi 等式，我们将量子 Berezinian 写成了一个 $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2^{-1}$ 的形式，其中 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$ 分别是 m 和 n 阶的类似量子行列式的微分算子。这在超对称情形是一个新的现象。

同时，我们构造了超 Yangian $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 的 Drinfeld 函子，从而建立了超 Yangians 的 Schur-Weyl 对偶。Schur-Weyl 对偶表明（超）Yangians 的模范畴和退化仿射 Hecke 代数的模范畴是等价的。此外，Drinfeld 函子是正则的，且将退化仿射 Hecke 代数的单模映到（超）Yangians 的零模或单模。这样，我们可以**将一些在 Yangians 里的关于不可约性和 Grothendieck 环里的等**

式等结果系统地推广到超 Yangians 情形。特别地，我们得到了超 Yangians 的广义 T–系统（也叫做差分 Hirota 方程），这是另一个在数学物理里非常有用的等式。

该结果发表在《Int. Math. Res. Not.》，并得到了审稿人的好评“The main result (Theorem 5.12) is certainly **interesting and beautiful**”“it is also **novel and not an obvious generalization** of a known result for $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_m)$”。

4、Bethe ansatz 的完备性

在研究量子可积系统中，一个非常重要的问题是找到传递矩阵（或 Bethe 代数，即传递矩阵的系数生成的 Yangians 的子代数）的特征值与对应的特征向量。

5、QQ 关系式和 Bethe 向量的特征值

这一工作发表在《J. High Energy Phys.》。

（二）全职回国（来华）后拟开展的研究工作（建议不超过 4000 字）The research work to be carried out after returning/coming to China full-time(no more than 4000 words)

主要阐述全职回国（来华）后主要研究方向和思路、预期目标、团队和科研条件的支撑情况。

In this part, you shall mainly expound the main research direction and ideas, expected goals, team and research conditions after returning/coming to China full-time.

1、Shifted twisted Yangians 和有限 W 代数

有限 W 代数是李理论里面一类非常重要重要的结合代数。他取决于 $(\mathfrak{g}, e)$，其中 $\mathfrak{g}$ 是一个有限单李代数而 e 是它的一个幂零元。有限 W 代数被广泛的应用于研究李代数的本原理想的分类和模表示。另外，有限 W 代数是 Slodowy 切片的量子化，因此他们也和辛几何密切相关。

尽管有限 W 代数具有诸多应用，但关于其显式实现（生成元和关系式）的研究进展较为缓慢。第一个重大进展是 Ragoucy 和 Sorba 的结果，他们证明了在 A 型并且幂零元有 N 个大小均为 ℓ 的约当块时，有限 W 代数同构与 A 型 Yangian $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$ 的层级为 ℓ 的截断。这份工作被 Brundan 和 Kleshchev 推广到了 A 型任意幂零元的情形。他们通过引进 shifted Yangians，一类 Yangian 的子代数，来证明 A 型有限 W 代数同构于 shifted Yangians 的截断。他们实现这一结果的主要工具是 Yangian 的抛物实现和 baby comultiplication。

一个非常自然的问题是，对于其他典型的有限 W 代数，有没有类似的结果？实际上，在泊松代数层次，Ragoucy 证明了在 BCD 型 Slodowy 切片可以通过 twisted Yangian 的截断来显示实现。这个结果最近被 Tappeiner 和 Topley 利用我们的 twisted Yangians 的 Drinfeld 实现推广到许多更一般的幂零元情形。但是，在量子层面，也就是有限 W 代数，只有部分结果被证明了，其中包括 De Sole-Kac-Valeri 和 Brown 的结果。

申请人打算与 Topley 教授和他的学生 Tappeiner，彭勇宁教授及王伟强教授推广 Brundan 和 Kleshchev 的结果到对应**任意偶幂零元**的 BCD 型有限 W 代数。也就是说，当 e 是任意一个

偶幂零元（这里的偶对应定义 W 代数的分次）且 $\mathfrak{g}$ 是 BCD 型李代数时，有限 W 代数同构于 shifted twisted Yangians 的截断。这样，有限 W 代数就拥有了具体的生成元和关系式的实现方式。

主要思路：推广 Brundan 和 Kleshchev 的结果到 BCD 型并不是简单的平行的推广。实际上 Brundan 的学生 Brown 花了很大一部分时间来实现这个推广，但是很不幸的是，他的结果只能应用到幂零元的约当块都是同样大小的情形。即使是两个约当块的偶幂零元，这个结果也是 Brown 正在进行的工作。我们将采用新的几何方法，利用 Losev 的重要结果—Slodowy 切片的过滤量子化的唯一性—来完成这一结果。这样我们将问题极大地简化到了他们的半经典极限层面。当然我们还是需要另外的两个工具：抛物实现和 baby comultiplication。

2、Shifted twisted Yangian 和仿射 Grassmannian 切片

3、有边界的可积系统

主要思路：

（三）其他需要说明的情况 Other issues need to be addressed.

1. 申请人同年申请不同类型的国家自然科学基金项目情况（列明同年申请的其他项目的项目类型、项目名称信息，并说明与本项目之间的区别与联系）。

The applications of the applicant for different types of NSFC programs in the ame year (please list the types of programs and title of proposals submitted in the same year, and explain the difference and connection with this proposal).

无。

2. 申请人是否存在同年申请或者参与申请国家自然科学基金项目的单位不一致的情况（如存在上述情况，列明所涉及人员的姓名，申请或参与申请的其他项目的项目类型、项目名称、单位名称、上述人员在该项目中是申请人还是参与者，并说明单位不一致原因）。

Whether the applicant's host institution is inconsistent with the one indicated in other proposals that he or she submits or participates in applying in the same year (if there is any such inconsistency, please list the names of the personnel involved, the types of programs, titles of proposals, names of host institutions for other projects that you applied or participated in, whether the abovementioned personnel are the applicants or participants in the projects, and explain the reasons for the inconsistency).

无。

3. 申请人是否存在与正在承担的国家自然科学基金项目的单位不一致的情况（如存在上述情况，列明所涉及人员的姓名，正在承担项目的批准号、项目类型、项目名称、单位名称、起止年月，并说明单位不一致原因）。

Whether the applicant's host institution is inconsistent with the one indicated in the NSFC project that he/she is undertaking (if there is any such inconsistency, please list the name of the personnel involved, approval number, type of pro gram, title of proposal, name of host institution, start and end dates of the un dertaking project, and explain the reasons for the inconsistency).

无。

4. 申请人教育或工作经历若不连续请说明原因。

If there is any discontinuity in education or work experience, please explain the reason.

5. 其他。Others.

无。