报告正文 Main Body of Proposal

参照以下提纲撰写，要求内容翔实、清晰，层次分明，标题突出。

The proposal shall be written in accordance with the following outline, with informative content, clear structure, and prominent titles.

请勿删除或改动下述提纲标题及括号中的文字。

Please do not delete or change the title of the outline and the words in brackets.

（一）主要学术成绩（建议不超过 4000 字）

Major academic achievements (no more than 4000 words)

着重阐述所取得研究成果的创新性、科学价值及本人贡献等。

In this part, you shall focus on the innovativeness and scientific value of the research results, and your personal contribution.

申请人的研究方向是量子群表示论和量子可积系统，主要集中在研究 Yangians 和仿射量子群及它们的余理想子代数—twisted Yangians 和仿射 $\imath$ 量子群—在几何与可积系统系统中的应用。申请人在 Comm. Math. Phys.，JHEP 等国际一流期刊发表和接收了 17 篇文章，曾担任 Compos. Math.，Comm. Math. Phys.，IMRN 等多个国际期刊审稿人。

1、Twisted Yangian 的 Drinfeld 实现

Yangians 最早出现在数学物理中，是在 80 年代国际著名数学物理学家 Faddeev 及其学派关于量子反散射方法的研究中。更一般的 Yangians 是由菲尔茨奖、沃尔夫奖得主 Drinfeld 在 1985 年引进用来给 Yang-Baxter 方程提供有理函数解的、非常重要的一类量子群。它们在几何、数学物理、表示论有着非常广泛的应用。Twisted Yangians 是 Yangians 的一类重要的余理想子代数。不同于 Yangians 是用 Dynkin 图来分类的，twisted Yangians 是用对称对或者 Satake 图来分类的。它们（AI 和 AII 型）最先是由 Olshanski 在 1990 年通过 R-matrix 和 Cherednik 的 reflection 方程来引进的。另外，twisted Yangians 有到 BCD 型李代数的赋值同态，因此 twisted Yangians 比 BCD 型 Yangians 与 BCD 型李代数的表示论的联系更加紧密。

Yangians 和仿射量子群的 Drinfeld（新）实现是由 Drinfeld 在 1988 年引进的。Drinfeld 实现对于引进 q-特征，研究仿射量子群的表示论，以及引进 shifted Yangians 至关重要。因为李代数可以看作是对角型的对称对，因此可以认为对称对是李代数的推广，进一步 twisted Yangians 是 Yangians 的推广。因此，一个非常自然且重要的问题就是 twisted Yangians 是不是也有 Drinfeld 实现。**这是一个长期悬而未决的公开问题**，甚至在卢明教授和王伟强教授给出仿射 $\imath$ 量子群的 Drinfeld 实现之前，人们可能认为这样的 Drinfeld 实现并不存在。

申请人与王伟强教授，张伟楠博士对仿射 $\imath$ 量子群的 Drinfeld 实现做退化，从而**得到了所有分裂型和拟分裂 ADE 型 twisted Yangians 的 Drinfeld 实现**。我们的创新点在于做退化的方法和我们在预印本的另一种高斯分解法独立却又互补。一方面高斯分解帮助我们确定如何在仿射 $\imath$ 量子群那边选取合适的参数做退化。另一方面通过退化仿射 $\imath$ 量子群的 Serre 关系式，我们得到 twisted Yangians 的 Serre 关系式，而这个 Serre 关系式单独从高斯分解是很难得出一个简单而又优美的公式。另外，我们通过对生成函数形式的关系式做退化而不是生成元，从而得出了更为复杂的 BCF 型 Serre 关系式。在证明仿射 $\imath$ 量子群的退化同构于 twisted Yangians 的过程中，我们还证明了 twisted Yangians 的 PBW 定理。这进一步说明了 twisted Yangians 是 twisted 流李代数的泛包络代数的平坦形变，保证了我们引进的 twisted Yangians 是合理的。这一工作发表在《Comm. Math. Phys.》。

Twisted Yangians 的 Drinfeld 实现将提供一系列的应用，比如研究 twisted Yangians 表示论的 q-特征理论，引进 shifted twisted Yangians 并研究其与几何中 Slodowy 切片、有限 W 代数、仿射 Grassmannian 切片的联系。比如，Topley 教授和其学生 Tappeiner（arXiv: 2406.05492）最近利用我们的 twisted Yangians 的 Drinfeld 实现研究典型李代数的 Slodowy 切片，从而极大地推广了 Topley 教授在 2023 年发表在《Invent. Math.》的结果。

2、仿射 $\imath$ 量子群的 R-matrix 和 Drinfeld 实现

仿射量子群通常有三种常用的实现方式，即 Drinfeld-Jimbo、Drinfeld、和 R-matrix 实现。不同的实现方式有不同的优势，有些实现方式在研究特定问题如可积系统的对称性、表示论、或与几何之间的联系比其他实现方式更方便。比如说 Drinfeld 实现是研究仿射量子群的表示论主要工具，它能用来定义 q-特征，统一地给有限维不可约表示进行分类，定义截断 shifted 仿射量子群（包括 Yangians）并研究其与仿射 Grassmannian 切片（或更进一步与 K-理论版本的 Coulomb 分支）的联系等。另一方面，Drinfeld-Jimbo 和 R-matrix 实现相比 Drinfeld 实现能更好地描述仿射量子群的 Hopf 代数结构，特别是它们的余积（coproduct）。因此**找到仿射量子群不同实现方式的之间的直接同构与联系是非常重要且有用的工作**。这一系列工作由 Beck，Ding-Frenkel，Damiani，Jing-Liu-Molev 等教授完成。在此方面最近的推广还包括胡乃红教授与合作者关于双参数仿射量子群之间的同构，和张红莲教授与合作者关于正交辛量子仿射代数之间的同构等。

Twisted q-Yangians 是 Molev-Ragoucy-Sorba 通过类似 Olshanski 教授的方法用 R-matrix 实现构造的 A 型仿射量子群的余理想子代数。它们对应的对称对（或 Satake 图）是 AI 和 AII 型，最近景乃桓教授和张健教授研究了它们的 Sklyanin 余子式之间的一系列重要的等式。更一般的仿射 $\imath$ 量子群，作为仿射量子群的余理想子代数，是由 Kolb 教授 [Adv. Math. 2014] 通过 Drinfeld-Jimbo 实现推广 Letzter 教授对于有限型量子对称对而引进的。并且 Kolb 教授证明了 AI 和 AII 型仿射 $\imath$ 量子群分别同构于对应的 twisted q-Yangians 并给出 Drinfeld-Jimbo

实现和 R-matrix 实现的生成元之间的对应。最近，卢明教授和王伟强教授 [Adv. Math. 2021] 通过仿射 $\imath$ 量子群的辫子群作用构造了一系列新的生成元从而得到了分裂 ADE 型仿射 $\imath$ 量子群的 Drinfeld 实现，推广前面 Beck 和 Damiani 的工作。这一工作被张伟南博士推广到了分裂 BCFG 型。另外，卢明教授，王伟强教授和张伟南博士进一步推广到了拟分裂 ADE 型。他们的这些工作完成了仿射 $\imath$ 量子群的 Drinfeld-Jimbo 实现和 Drinfeld 实现之间详细的同构与联系。但是，仿射 $\imath$ 量子群的 R-matrix 实现和 Drinfeld 实现之间的同构仍是缺失的。

申请人通过结合 Ding-Frenkel 早期关于 A 型仿射量子群的工作和最近与王伟强教授和张伟南博士关于 twisted Yangians 的工作，**给出了仿射 $\imath$ 量子群（AI 型）的 R-matrix 实现和 Drinfeld 实现的同构并给出了生成元之间的对应**。PBW??? 这一工作将为未来构造其他类型仿射 $\imath$ 量子群的 R-matrix 和 Drinfeld 实现的同构提供指导意见。该结果发表在《Int. Math. Res. Not.》。

3、超 Yangians 的表示论及 Jacobi-Trudi 等式

超对称是现代理论物理非常重要的一个理论框架，而超代数是描述超对称的数学框架。这里超代数是一个 $\mathbb{Z}_2$-分次代数，可以分解为奇、偶两部分。超 Yangians 是由 ICM45 分钟报告人 Nazarov 教授引入的，关于 Yangians 的自然推广，它们在表示论和里数学物理非常重要，有着非常广泛的应用。例如，国立中山大学的彭勇宁教授用超 Yangians 及其子代数 Shifted 超 Yangians 来刻画有限 W 超代数的显式实现；Nazarov 教授利用它的量子超行列式来得到线性李超代数的 Capelli 等式；超 Yangians 也是描述超 XXX 自旋链的对称性的主要数学工具。因此，研究超 Yangians 的代数结构及其表示论是数学物理和表示论的重要问题。

申请人与导师 Mukhin 教授系统地研究了超 Yangian $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 的表示理论。我们的结果包括引入超 Yangians 的 skew 表示（取决于 skew Young 图）及计算它们的 q-特征，从而进一步证明了 skew 表示的 q-特征满足 Jacobi-Trudi 等式。通过对泛 R-matrix 特定到这个 Jacobi-Trudi 等式，我们证明了对应 skew Young 图的传递矩阵（transfer matrices，数学物理里非常重要的一类哈密顿算子）也满足 Jacobi-Trudi 等式。这一结果给出了超对称情形的 Cherednik-Bazhanov-Reshetikhin（CBR）公式在代数层面的证明。CBR 公式在研究超 XXX 自旋链的传递矩阵的谱问题中被物理学家广泛应用，但是我们的结果**给出了其严格的数学证明并提供了组合与表示论背景**。Molev 教授和 Ragoucy 教授证明了量子 Berezinian（超行列式），可以看做是传递矩阵的生成函数。通过使用 Jacobi-Trudi 等式，我们将量子 Berezinian 写成了一个 $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2^{-1}$ 的形式，其中 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$ 分别是 m 和 n 阶的类似量子行列式的微分算子。这在超对称情形是一个新的现象。

同时，我们构造了超 Yangian $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 的 Drinfeld 函子，从而建立了超 Yangians 的 Schur-Weyl 对偶。Schur-Weyl 对偶表明（超）Yangians 的模范畴和退化仿射 Hecke 代数的模范畴是等价的。此外，Drinfeld 函子是正则的，且将退化仿射 Hecke 代数的单模映到（超）Yangians

的零模或单模。这样，我们可以**将一些在 Yangians 里的关于不可约性和 Grothendieck 环里的等式等结果系统地推广到超 Yangians 情形**。特别地，我们得到了超 Yangians 的广义 T–系统（差分 Hirota 方程），这是另一个在数学物理里非常有用的等式。该结果发表在《Int. Math. Res. Not.》。

4、QQ 关系式和 Bethe 向量的特征值

在研究量子可积系统中，一个非常重要的问题是找到一系列可交换的传递矩阵 $\mathcal{T}_W(u)$（或 Bethe 代数，即这些传递矩阵的系数生成的 Yangians 的交换子代数）作用在一个量子群的（通常为有限维不可约）表示 V 的特征值与对应的特征向量。这里 W 是量子群的一个有限维表示，而传递矩阵 $\mathcal{T}_W(u)$ 可以通过从泛 R-matrix 特定到表示 W 再取迹得到。这个将数学物理的自旋链推广到了研究量子群的表示论的方法叫做量子反散射方法。最简单的传递矩阵对应自然表示，它可以写成 $\mathrm{tr}\big(\mathrm{T}(u)\big)$，其中 $\mathrm{T}(u)$ 是 Yangian 在 RTT 实现的生成矩阵。为区分术语，我们把最简单的传递矩阵简称为标准传递矩阵，而将更复杂的称之为高阶传递矩阵。在理论物理中，有一个非常系统方法来解决传递矩阵的谱问题，叫做 Bethe ansatz。Bethe ansatz 是由诺贝尔奖得主 Hans Bethe 在 1931 年提出来解决 Heisenberg 链的谱问题的一种方法，而用这一方法来解决 Heisenberg 链的严格数学证明是由杨振宁与合作者在 1966 年完成。

Bethe ansatz 的方法是假设一个特殊的关于一些变量（Bethe 变量）的有理函数向量，然后计算发现当这些变量满足 Bethe 方程时，此向量正好是标准传递矩阵的特征向量。因此，如果我们能够找到 Bethe 方程的解，那么我们就能得到一个特征向量。Bethe 方程是一系列的有分母的代数方程，因此求解这些方程并不平凡，另外求解 Bethe 方程可能遗漏特殊的奇异解。不同于直接求解 Bethe 方程，我们引入一些新的关于 u 的多项式，这些多项式的根正好是某些 Bethe 变量。这里分配 Bethe 变量到多项式的规则取决于对应李代数的根系。申请人和导师 Mukhin 教授对超 XXX 自旋链及其 Bethe 解进了了系统地研究。我们发现，在非退化情形，求解 Bethe 方程等价于求解一系列关于这些多项式的 Wronskian 方程。在非超对称情形，这些 Wronskian 方程通常被称为 QQ 系统，其中的 Q 对应 Baxter 的 Q 算子，满足著名的 Baxter 的 TQ 关系。当 Bethe 方程满足时，这些多项式代表 Q 算子在对应的 Bethe 向量的特征值。通过 QQ 系统，我们引入了 Bethe 方程的 reproduction procedure（数学物理中的 Bäcklund 变换）。这个 reproduction procedure 与 Weyl 群密切相关，并且能将一个 Bethe 解变成另一个 Bethe 解。给定一个 Bethe 解，我们引进了一个有理差分算子和 population。这里 population 是所有从这个给定的 Bethe 解通过不断重复 reproduction procedure 得到的 Bethe 解的集合。我们证明了 population 作为一个簇同构于超旗簇，并且同一个 population 里的不同 Bethe 解对应同一个有理查分算子的不同的完全线性分解。因此可以认为是**超 XXX 自旋链的一种几何 Langlands 对应**。我们的结果**给出了 QQ 系统和 Bäcklund 变换的严格的数学定义**并推广了 E. Frenkel 教授和 Mukhin-Varchenko 教授的结果到超对称情形。这一结果

发表在《J. Phys. A: Math. Theor.》。我们进一步将类似结果推广到了正交辛李超代数（包括 BCD 型）的 Gaudin 模型，对应的有理差分算子变成了伪微分算子。特别地，我们的结果给出了 D 型非超对称的结果，。这一工作发表在《Ann. Henri Poincaré 》。

我们猜想上述引进的有理差分算子在展开成差分算子的级数之后，其系数是（包括高阶）传递矩阵作用在此 Bethe 向量的特征值。相比在 Mukhin-Tarasov-Varchenko 的非超对称的结果，主要的不同在于此级数是无限的，因此更为复杂。申请人另辟蹊径，巧妙地将问题转化为类似于非超对称的情形，从而证明了这一猜想。申请人进一步通过取超 Yangian 的相伴分次代数，证明了在超 Gaudin 模型（XXX 自旋链的退化情形）中类似的猜想。这一结果发表在《J. High Energy Phys.》。

5、Bethe 代数与其几何应用

量子可积系统的 Bethe 代数是一个由一系列作用在该系统的相空间的可交换的线性算子生成的可交换代数。比方说在 XXX 自旋链情形，Bethe 代数是由所有传递矩阵的系数生成的 Yangian 的交换子代数。这是一个有可数个代数独立的生成元的交换代数。而 Gaudin 模型，作为 XXX 自旋链的退化情形，其 Bethe 代数是 $\mathrm{U}(\mathfrak{g}[z])$ 的一个可交换子代数。通常我们考虑 Bethe 代数在相空间的上的线性算子代数里的像。在前面，我们讨论了在可积系统里，一个核心问题（Bethe 代数的谱问题）是找到 Bethe 代数的公共特征值和公共特征向量。因此，如果我们能准确地描述 Bethe 代数对解决这一问题非常重要。特别地，一个非常有意思的问题是将 Bethe 代数表示为一个合适的概型上的函数代数。这样的表示可以认为是几何 Langlands 对应的一个例子。

Bethe 代数的谱问题和几何中的 Schubert 分析息息相关。事实上在研究 A 型 Gaudin 模型中，Mukhin-Tarsov-Varchenko 发现当 Bethe 代数作用在 $\mathfrak{gl}_N[z]$ 的赋值模的张量积的重数空间（multiplicity space）时，它对应的概型同构于一些 Grassmannian 里 Schubert 簇（取决于对应的赋值模）的交集，并且 Bethe 代数的作用同构于其余正则表示。从而解决了 Bethe 代数的谱问题，并得出 Bethe 代数在赋值参数全为实数的时候是可同时对角化并具有单谱（特征值无重根）。利于它们与 Schubert 簇的关系，Mukhin-Tarsov-Varchenko 证明了 Shapiro-Shapiro 猜想和对应 Schubert 簇交集的横截性 [Ann. Math. 09, JAMS 09]。进一步利用 Gaudin 模型和 Grassmannian 的关系，Mukhin-Tarasov 给出了 Grassmannian 里 Schubert 分析里实解的个数的下界 [Acta Math. 14]。**基于 Gaudin 模型在 Grassmannian 的 Schubert 分析的重要性，很自然的问题是研究其他型的 Gaudin 模型的谱问题及其在代数几何的应用。** Feigin-Frenkel-Rybnikov 和 Rybnikov 证明了当 Bethe 代数作用在重数空间上，存在一个循环向量，从而保证当 Bethe 代数可对角化时其谱必须是单的。申请人在他们的工作上进一步证明了，Bethe 代数作用重数空间上，是一个 Frobenius 代数，并且该作用同时同构于 Bethe 代数的像的正则表示和余正则表示。这些性质被申请人总结为可积系统的**完美可积性**。作为推

论，我们得到 Bethe 代数的每个公共特征值只有一个约当块，即 **Bethe 代数的公共特征空间总是一维的**。注意在多个可交换算子作用下，循环作用并不能保证公共特征空间总是一维的。另外，在 ABC 型 Gaudin 模型，申请人与 Mukin 和 Varchenko 教授发现其对应 Bethe 向量与 Grassmannian 里的对偶空间有一一对应。我们进一步引进了 Grassmannian 的基于 A 型李代数的表示论的一个新分层。在 BC 型时，我们引进了 Grassmannian 的一个新子簇，对偶 Grassmannian，并给出其相应 BC 型李代数表示论的分层。这些工作发表在了《SIGMA》和《Pure Appl. Math. Q》（该卷为纪念国际著名数学家 Manin 教授 80 岁生日）上。

相比 Gaudin 模型，XXX 自旋链要复杂的多因而相对结果比较少，因为它们的对称是由量子群来刻画。更进一步，超对称的 XXX 自旋链相关的结果几乎为空白，特别是奇根的出现导致一些在对称情形不存在新特征与现象。申请人和 Mukhin 教授对有超 Yangian $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_{1|1})$ 对称的 XXX 自旋链做了非常系统地研究。这种情形有其特殊的重要意义，首先它足够简单但同时又因为它**包含了超对称的新特征与现象而足够复杂，可以给理论和猜想提供一个非常好的测试环境**。我们的主要结果是证明了该自旋链的完美可积性。更具体地，我们用生成元和关系式描述了 Bethe 代数作用在重数空间的像，从而证明了该像为 Frobenius 代数。进一步，我们证明了 Bethe 代数在上面的作用是循环地。我们进一步描述了 Bethe 代数作用的公共特征值，如何构造对应的特征向量，以及对应的约当块的大小。总之，我们给出了超 Yangian $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_{1|1})$ 对称的 XXX 自旋链的 **Bethe 代数谱问题一个完善的结果**。这一工作发表在《Comm. Math. Phys.》。

（二）全职回国（来华）后拟开展的研究工作（建议不超过 4000 字） The research work to be carried out after returning/coming to China full-time (no more than 4000 words)

主要阐述全职回国（来华）后主要研究方向和思路、预期目标、团队和科研条件的支撑情况。

In this part, you shall mainly expound the main research direction and ideas, expected goals, team and research conditions after returning/coming to China full-time.

我的主要研究为量子群与量子对称对的表示论和它们在几何与数学物理的应用。我将在已有研究课题的基础上，主要围绕一下几个方向进行更深入的研究。

1、Shifted twisted Yangians 和有限 W 代数

有限 W 代数是李理论里面一类非常重要重要的结合代数。他取决于 $(\mathfrak{g}, e)$，其中 $\mathfrak{g}$ 是一个有限单李代数而 e 是它的一个幂零元。有限 W 代数被广泛的应用于研究李代数的本原理想的分类和模表示。另外，有限 W 代数是 Slodowy 切片的量子化，因此他们也和辛几何密切相关。

尽管有限 W 代数具有诸多应用，但关于其显式实现（生成元和关系式）的研究进展较为缓慢。第一个重大进展是 Ragoucy 和 Sorba 的结果，他们证明了在 A 型并且幂零元有 N 个大小均为 ℓ 的约当块时，有限 W 代数同构与 A 型 Yangian $\mathrm{Y}(\mathfrak{gl}_N)$ 的层级为 ℓ 的截断。这份工作被 Brundan 和 Kleshchev 推广到了 A 型任意幂零元的情形。他们通过引进 shifted Yangians，一类 Yangian 的子代数，来证明 A 型有限 W 代数同构于 shifted Yangians 的截断。他们实现这一结果的主要工具是 Yangian 的抛物实现和 baby comultiplication。

一个非常自然的问题是，对于其他典型的有限 W 代数，有没有类似的结果？实际上，在泊松代数层次，Ragoucy 证明了在 BCD 型 Slodowy 切片可以通过 twisted Yangian 的截断来显示实现。这个结果最近被 Tappeiner 和 Topley 利用我们的 twisted Yangians 的 Drinfeld 实现推广到许多更一般的幂零元情形。但是，在量子层面，也就是有限 W 代数，只有部分结果被证明了，其中包括 De Sole-Kac-Valeri 和 Brown 的结果。

申请人打算与 Topley 教授和他的学生 Tappeiner,彭勇宁教授及王伟强教授推广 Brundan 和 Kleshchev 的结果到对应任意偶幂零元的 BCD 型有限 W 代数。也就是说，当 e 是任意一个偶幂零元（这里的偶对应定义 W 代数的分次）且 $\mathfrak{g}$ 是 BCD 型李代数时，有限 W 代数同构于 shifted twisted Yangians 的截断。这样，有限 W 代数就拥有了具体的生成元和关系式的实现方式。

推广 Brundan 和 Kleshchev 的结果到 BCD 型并不是简单的平行的推广。实际上 Brundan 的学生 Brown 花了很大一部分时间来实现这个推广，但是很不幸的是，他的结果只能应用到幂零元的约当块都是同样大小的情形。即使是两个约当块的偶幂零元，这个结果也是 Brown 正在进行的工作。我们将采用新的几何方法，利用 Losev 的重要结果—Slodowy 切片的过滤量子化的唯一性—来完成这一结果。这样我们将问题极大地简化到了他们的半经典极限层面。当然我们还是需要另外的两个工具：抛物实现和 baby comultiplication。

2、Shifted twisted Yangians 和仿射 Grassmannian 切片

仿射 Grassmannian 在几何表示论里是非常重要的一个几何结构。比如在几何 Satake 对应中，仿射 Grassmannian 切片对应其 Langlands 对偶的最高权不可约表示的全空间。它们在数学物理中也非常重要。比如 Bezrukavnikov-Finkelberg-Mirkovic 计算了仿射 Grassmannian 的等变 Borel-Moore 同调的代数结构，从而为 Braverman-Finkelberg-Nakajima（BFN）后续严格数学定义 Coulomb 分支提供了雏形。Coulomb 分支是数学物理的一个概念，在 BFN 的严格数学定义后，它们给辛消解提供了一些列的重要例子。人们猜测 Coulomb 分支与同理论的 Higgs 分支组成三维镜像对称对。举例来说，如果考虑箭图的规范理论，Higgs 分支对应 Nakajima 簇而 Coulomb 分支对应仿射 Grassmannian 切片。在 BFN 的工作中，他们和 Kamnitzer-Kodera-Webster-Weekes 证明了截断 shifted Yangian 量子化 Coulomb 分支。

A 型 Shifted Yangians（其 shift 对应支配权）最先是由 Brundan-Kleshchev 通过 A 型

Yangians 的抛物实现引进的。这类 shifted Yangians 在后面通过 Yangians 的 Drinfeld 实现被 BFN 及合作者推广到了所有有限型，其中的 shifted 对应的权可以是任意的。进一步，shifted Yangians 拥有一些列非常特殊的表示叫做 Gerasimov-Kharchev-Lebedev-Oblezin（GKLO）表示，从而其在表示里的像被定义为截断 shifted Yangians。在上述讨论中，shifted Yangians 和其截断给仿射 Grassmannian 和其切片提供了量子化，因此是一类重要的代数。

作为 Yangians 的 $\imath$ 推广，twisted Yangians 也拥有 Drinfeld 实现从而可以定义 shifted twisted Yangians。申请人打算和合作者考虑 shifted twisted Yangians 和仿射 Grassmannian 切片的关系，从而进一步探索其与 Coulomb 分支的联系。我们的思路是，twisted Yangians 对应对称对，是和其李代数上的对合是密切相关的。我们猜测通过在仿射 Grassmannian 切片上选取合适的对合再考虑此对合的固定轨迹，该固定轨迹应拥有泊松代数结构。我们将引入分裂及拟分裂 ADE 型 shifted twisted Yangians 并构造 shifted twisted Yangians 的 GKLO 表示，从而定义截断 shifted twisted Yangians。我们将证明 shifted twisted Yangians 将量子化仿射 Grassmannian 切片在该对合的固定轨迹。

3、Twisted Yangians 的极小实现及不同实现之间的同构

仿射量子群和 Yangians 的极小实现是一个非常有用的工具，这里的极小实现是 Drinfeld 实现的简化版本。不同于 Drinfeld 实现考虑所有次的生成元，极小实现只考虑 Drinfeld 实现中的零次和一次生成元及其对应关系。通过这些生成元来构造其他高次生成元并验证这些高次元满足对应的关系式。因为其含有更少的生成元与关系式，所以极小实现能方便地用来验证关系式，从而判断一个关于仿射量子群的映射是不是代数同态。这个发现，被景乃桓教授、张红莲教授与合作者用来证明 twisted 仿射量子群、量子仿射代数 AB 型超代数的 Drinfeld 和 Drinfeld-Jimbo 实现之间的同构。另外一个重要的应用是 Guay-Nakajima-Wendlandt 将 Yangians 的极小实现推广到了 Kac-Moody 型的 Yangians，并基于此构造了 Kac-Moody 型的 Yangians 的余积。

在前面与合作者的工作中，申请人通过对仿射 $\imath$ 量子群的做退化给出来所有分裂型与拟分裂 ADE 型 twisted Yangians 的表示。一个开放性的问题就是这样构造的 twisted Yangians 是不是对应 Yangians 的余理想子代数，如果是，那么能不能描述它们在余积下的作用。这两个者是息息相关的，前者需要考虑如何将 twisted Yangians 嵌入到 Yangians 里并且计算后者来验证得到。后者的一个简洁扼要的答案对研究 twisted Yangians 的表示至关重要。申请人打算与合作者通过构造 twisted Yangians 的极小实现来解决这两个问题。另外，申请人还打算利用 twisted Yangians 的极小实现来证明 twisted Yangians 的 Drinfeld 实现与 R-matrix 实现、Drinfeld 的 $\mathcal{J}$-实现之间的同构。而 R-matrix 实现与 Drinfeld 的 $\mathcal{J}$-实现相对简单，因为很容易构造一个从 Drinfeld 的 $\mathcal{J}$-实现到 R-matrix 实现的代数同态。验证其为满射只需要计算对应的像能生成整个代数。至于验证其为单射，考虑到它们都是 Yangians 的子代数，我们

可以利用 Yangians 的 PBW 定理来完成。

4、XXX 自旋链的 Bethe 代数谱问题

相比 Gaudin 模型，关于 XXX 自旋链的 Bethe 代数谱问题的非常少。其主要原因在于，XXX 自旋链的代数使用 Yangians 来描述的，它们的表示论要比 Kac-Moody 李代数的表示论复杂得多。在当对应相空间为一些赋值自然表示的不可约张量积时，Mukhin-Tarasov-Varchenko 证明了 Bethe 代数作用在上面有一个循环向量,且 Bethe 代数的像是一个 Frobenius 代数，从而解决这种特殊情形时的 Bethe 代数谱问题。在后续工作中，Gorbounov-Rimányi-Tarasov-Varchenko（GRTV）证明了此 Bethe 代数同构于偏旗簇的余切丛的等变上同调代数。

另一方面，麻省理工的 Maulik 教授和菲尔茨奖得主 Okounkov 教授描述了 A 型 Yangian 在 A 型 Nakajima 簇的局部化的等变上同调环，其中 Bethe 代数的一些元素的在其上的作用对应与某些上同调类的量子乘积。因此他们猜想，其对应的量子上同调环应对应 Bethe 代数作用在一些赋值基本（对应 Young 图为一列）表示的不可约张量积时。在这些表示都是自然表示时，GRTV 利用 Bethe 代数的具体描述从而验证了这一猜想。

申请人打算与 Mukhin 教授、Tarasov 教授将 XXX 自旋链的 Bethe 代数作用在赋值基本表示的不可约张量积的谱问题。我们打算（1）证明 Bethe 代数在其上的作用是循环的并且 Bethe 代数是 Frobenius 代数，（2）从而进一步给出 Bethe 代数用生成元和关系式的实现。我们的思路分为两部分，第一部分是应用 Yangians 的表示论，特别是应用 R-matrix 的 fusion 积；第二部分我们将使用 QQ 系统，考虑其对应的差分算子的解空间的特性，这个解空间是由多项式组成，并且在赋值参数处有特殊的性质。更具体地，m 此时的 Bethe 代数应对应某个离散 Wronski 映射的纤维上的函数代数。

5、有边界的 Gaudin 模型

在前面的讨论中，Gaudin 模型与 Grassmannian 有着紧密的联系，从而被用来解决一系列与 Grassmannian 里的重要问题。而这里的 Gaudin 模型是对应无边界（或者是周期边界）的量子可积系统。在著名数学物理学家 Sklyanin 的工作中，他揭示了如何利用反射方程来构造一系列的带边界条件的可积系统。在起初的数学物理文献里，Gaudin 模型一般是通过取对应的 XXX 自旋链的退化来得到的，从而继续被研究。但是这一方法需要对对应的李代数的型做分类讨论，这是因为不同型的量子群其对应的最基本的 R-matrix（Yang-Baxter 方程的解）通常差距很大，因此很难用一个统一的方式来刻画。对应地，在有边界的量子可积系统里，这样的问题更为严重，因为它们是用 Satake 图或者对称对来分类，比 Dynkin 图的种类要多的多。

Gaudin 模型是由 Gaudin 统一规划地通过李代数的 Casimir 元来引入的。通过 Casimir 元，Gaudin 定义了二阶 Gaudin 哈密顿算子并证明了这些算子可交换从而构成一个可积系统。MacKay 教授通过 Casimir 元与其对应李代数上的对合的来定义了对所有对称对的 twisted

Yangians。这种方式的优势在于，其中的李代数可以使任意的，而其对合也是，因此具体定义的 twisted Yangians 进取决于对称对的型。申请人打算和 Mukhin 教授打算通过类似的方式来引入具有边界的 Gaudin 模型并研究其上的 Bethe ansatz 方法。我们将采取 Schechtman-Varchenko 在 [Invent. Math. 91] 和 Feigin-Frenkel-Reshetikhin 在 [Comm. Math. Phys. 94] 类似的方法来得到权向量函数并证明当参数是 Bethe 方程的解时，则此权向量函数正好是二阶（或高阶）Gaudin 哈密顿算子的特征向量。在后续工作中，我们还打算考虑其 Bethe 代数的谱问题和在几何中的应用。

预期目标

学术研究方面，申请人希望回国后能完成上面几个拟研究课题，特别是关于有限 W 代数和仿射 Grassmannian 切片的部分。论文发表方面，申请人希望能在国际一流期刊上发表多篇论文。团队组建方面，申请人希望能培养 1–2 名博士后和若干名博士生，声请人希望能多组织一些学生讨论班以及开设相关的表示论与数学物理课程，培养一些学生对表示论及其应用的兴趣。同时，我希望能与国内的同事多交流讨论合作，尽可能的开展新的合作研究方向。学术交流方面，申请人也会与同事们积极组织学术研讨班和国内/国际学术会议，邀请专家们来讲述他们最新的研究进展，开拓我们的视野。申请人也会与国际专家 Varchenko 教授，王伟强教授，Mukhin 教授等人继续开展学术交流活动。

团队和科研条件的支撑情况

南方科技大学及深圳国际数学中心有非常不错的表示论和数学物理研究团队，有国际知名的专家和年轻学者。其中，Zelmanov 教授是菲尔茨奖得主，国际数学家大会一小时报告人，国际知名表示论专家；Futorny 教授是巴西科学院院士，国际数学家大会 45 分钟报告人，国际知名表示论专家；向子卿副教授是代数组合与表示论的专家；马梓铭副教授和邬龙挺助理教授是代数几何和数学物理的专家；冯致程助理教授是李群及其表示论专家。他们的研究内容都与我的研究课题紧密相连或者间接相关。我相信我的加入能更深化团队合作，壮大研究队伍。南方科技大学将提供给我非常不错的研究条件和支持。

（三）其他需要说明的情况 Other issues need to be addressed.

1. 申请人同年申请不同类型的国家自然科学基金项目情况（列明同年申请的其他项目的项目类型、项目名称信息，并说明与本项目之间的区别与联系；已收到自然科学基金委不予受理或不予资助决定的，无需列出）。

Proposals that the applicant has submitted for different types of NSFC programs in the same year (please list the types of programs and title of proposals submitted in the same year, and explain the differences and connections with this proposal;Proposals deemed ineligible or unfundable by the NSFC can be excluded).

无。

2. 申请人是否存在同年申请或者参与申请国家自然科学基金项目的单位不一致的情况（如存在上述情况，列明所涉及人员的姓名，申请或参与申请的其他项目的项目类型、项目名称、单位名称、上述人员在该项目中是申请人还是参与者，并说明单位不一致原因）。

Whether the applicant's host institution is inconsistent with the one indicated in other proposals that he or she submits or participates in applying in the same year (if there is any such inconsistency, please list the names of the personnel involved, the types of programs, titles of proposals, names of host institutions for other projects that you applied or participated in, whether the abovementioned personnel are the applicants or participants in the projects, and explain the reasons for the inconsistency).

无。

3. 申请人是否存在与正在承担的国家自然科学基金项目的单位不一致的情况（如存在上述情况，列明所涉及人员的姓名，正在承担项目的批准号、项目类型、项目名称、单位名称、起止年月，并说明单位不一致原因）。

Whether the applicant's host institution is inconsistent with the one indicated in the NSFC project that he/she is undertaking (if there is any such inconsistency, please list the name of the personnel involved, approval number, type of program, title of proposal, name of host institution, start and end dates of the undertaking project, and explain the reasons for the inconsistency).

无。

4. 申请人教育或工作经历若不连续请说明原因。

If there is any discontinuity in education or work experience, please explain the reason.

5. 同年以不同专业技术职务（职称）申请或参与申请科学基金项目的情况（应详细说明原因）。

Situation where the applicant applies for NSFC programs as PI or participant using different professional or academic titles in the same year (Please elaborate on the reasons).

无。

6. 其他。Others.

无。