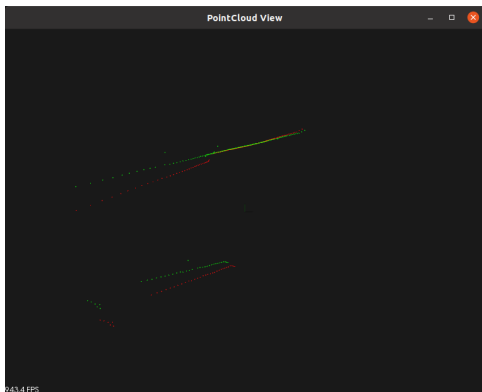


1. See LaserUndistortion_ws
运行结果:



$$2. \quad X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

$$u_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad u_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\begin{aligned}
 E(R, t) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|x_i - Ry_i - t\|^2 \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|x_i - Ry_i - t - u_x + Ru_x + u_x - Ru_x\|^2 \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|x_i - u_x - R(y_i - u_y) + (u_x - Ru_y - t)\|^2 \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|x_i - u_x - R(y_i - u_y)\|^2 + \|u_x - Ru_y - t\|^2 + \\
 &\quad 2(x_i - u_x - R(y_i - u_y))^T (u_x - Ru_y - t) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|x_i - u_x - R(y_i - u_y)\|^2 + \|u_x - Ru_y - t\|^2 \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n 2(x_i - u_x - R(y_i - u_y))^T (u_x - Ru_y - t) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|x_i - u_x - R(y_i - u_y)\|^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|u_x - Ru_y - t\|^2 \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\bar{E}_1(R, t)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\bar{E}_2(R, t)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_1(R, t) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \| \underbrace{x_i' - u_x}_{x_i'} - R(\underbrace{y_i' - u_y}_{y_i'}) \|^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \| x_i' - R y_i' \|^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i'^T x_i' + y_i'^T R^T R y_i' - 2 x_i'^T R y_i') \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i'^T x_i' + y_i'^T y_i' - 2 \underbrace{x_i'^T R y_i'}_{f(R, t)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{argmin}_R E_1(R, t) &= \operatorname{argmax}_R f(R, t) \\
&= \operatorname{argmax}_R \sum_{i=1}^n x_i'^T R y_i'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n x_i'^T R y_i' &= \sum_{i=1}^n \operatorname{trace}(x_i'^T R y_i') \quad x_i'^T R y_i' \text{ is a scalar} \\
&= \sum_{i=1}^n \operatorname{trace}(R y_i' x_i'^T) \quad \operatorname{trace}(AB) = \operatorname{trace}(BA) \\
&= \operatorname{trace}\left(\sum_{i=1}^n R y_i' x_i'^T\right) \\
&= \operatorname{trace}(R H) \quad \text{where } H = \sum_{i=1}^n y_i' x_i'^T \\
&= \operatorname{trace}(V U^T V \Sigma V^T) \\
&\quad \text{where } \operatorname{SVD}(H) = V \Sigma V^T \text{ and } R = V U^T \\
&= \operatorname{trace}(V \Sigma^{\frac{1}{2}} \Sigma^{\frac{1}{2}} V^T) \\
&= \operatorname{trace}\left((V \Sigma^{\frac{1}{2}})(V \Sigma^{\frac{1}{2}})^T\right) \geq \operatorname{trace}(B(V \Sigma^{\frac{1}{2}})(V \Sigma^{\frac{1}{2}})^T) \\
&\quad \text{for arbitrary orthogonal matrix } B
\end{aligned}$$

Thus $R = V U^T$

$$\begin{aligned}
\bar{E}_2(R, t) = 0 &\Rightarrow \|u_x - R u_y - t\|^2 = 0 \\
&\quad u_x - R u_y - t = 0 \\
&\quad t = u_x - R u_y
\end{aligned}$$

3. 激光发射头通过光路经过反射镜照射到物体上，接着激光反射回再次经过反射镜被检测装置检测到，当反射镜旋转时，就可以测到该平面的物体的距离信息。这里有两种方式测量距离，分别为飞行时间法（TOF）和波形相位差法。

TOF可以直接获得激光发射的时间和接收到激光的时间差 Δt ，通过公式 $d = \Delta t \cdot c / (n \cdot 2)$ （ r 为距离, c 为光速, n 为光空气中的折射率）来得到距离。相位差法首先需要通过公式 $\Delta t = \Delta \phi / (2 \cdot \pi \cdot f_m)$ （ $\Delta \phi$ 为测量所得, f_m 为已知的调制频率）来获取时间差，接着代入飞行时间法的公式中即可获取距离值。

4. (1) IMU可以直接测量角速度和线加速度，具有较高的角速度测量精度，但线加速度测量精度较差，所以使用IMU矫正旋转畸变较好，但平移畸变无法很好的去除。

(2) 使用IMU进行矫正，去除部分畸变，认为误差线形分布。使用ICP匹配，将匹配结果作为真值，得到误差值，将误差均摊到每一个点上，重新对激光点位置修正，再进行ICP迭代，直到收敛为止。