微積分

Yuki M.

December 30, 2017

目次

第 1 章 はじめに

この資料は，微積分学の講義のための参考資料です．自分の備忘録も兼ねているのでやや冗長な表現もあるやもしれません．筆者もまだまだ勉強中であるため，理解が追いつかず根本的に誤解している箇所があるかと思います．ぜひとも，「ここの文章はおかしいのではないか？」等のご指摘をお待ちしております．また，誤字・脱字，および論理的な誤りがあればご一報ください．

この資料の作成にあたって，押さえるべき内容を示唆して頂いた某氏，また理工学系ではない学生に対する数学の教授法に関して議論して頂いた某氏，および資料の校正を手伝って頂いた某氏など，多くの方に協力して頂き，執筆に至りました．ここに深く感謝申し上げます．

1.1 微積分とは?

微積分は線形代数と並び現代数学の基礎として，大学など高等教育機関において広く学ばれている教養科目である．また，線形代数と同様に，自然科学・工学をはじめとした応用科学・社会科学など幅広い分野で応用されている計算ツールである．

そもそも微積分とは，簡単に言ってしまえば「変化」を捉えるための数学である．世の中の物理量（例えば，物体の速度や温度など）のほとんどは，位置や時間の変化に伴って変化する．その変化の度合いが，微かな変化の中にどれぐらいであったのかを，捉える数学が「微分」であり，変化の度合いの積み重ねから異なる位置・時間における物理量を予測する数学が「積分」である．

1.2 講義の内容

この講義においては，まず始めに表 1.1 に示すような初等関数を学ぶ．これは「変化」を捉える数学である「微積分」を学ぶ上で，大きな寄り道に思えるかもしれない．実際のところ「微分」「積分」の概念を理解することと，初等関数を理解することは，全く別の話である．しかし，これらの初等関数は，様々な現象を数式にモデル化する上で使用されるものであり，実用上において微積分と初等関数は切っても切れない関係にあることを理

解してほしいため，まず始めに取り上げるものとする．

表 1.1: 初等関数

	例
代数関数	$x^2 + x - 2$
指数関数	2^x
対数関数	$\log_2 x$
三角関数	$\sin x, \cos x, \tan x$
逆三角関数	$\arcsin x, \arccos x, \arctan x$

次に，微積分を学ぶ上で核となる「変化」を明確に記述するために極限と呼ばれる概念を取り上げる．つまり，微分とは「微かな変化」を捉えるための数学のことであったが，「“微かな” 変化」とは一体どのようなものなのか，微小量と呼ばれる考え方を導入し，微分が持つ本質的な意味を探っていく．

その後，定積分と呼ばれる微小量の積み重ねによって表される計量が，微分の逆演算としての不定積分を用いて計算した結果と等しくなる微分積分学の基本定理について取り上げ，積分が表す 2 通りの意味を理解し，先人たちが築き上げた大きな金字塔を追体験していく．

またこの講義では，微分・積分の概念の意味を理解すると同時に，初等関数の基本的な微分・積分の計算を行っていく．具体的には，様々な初等関数のグラフの概形や極値，様々な図形の面積・体積を求めるといった問題を想定している．

その上で，実用上欠かすことができない微分方程式や級数について触れ，もし時間があれば，多変数の微分・積分の初歩的概念について取り上げることとする．

1.3　到達目標

この講義では，以下に示す項目を達成することを目的とする．

(1) 微積分が持つ本質的な意味をつかむ．
(2) 微積分に関する基本的な計算ができるようになる．
(3) 微積分の知識を使い，初等関数のグラフの概形や基本的な図形の計量が求められるようになる．
(4) 単純な微分方程式が解けるようになる．
(*5) 各定理の主張が理解でき，その証明が追えるようになる．

(1)（2）については，受講者全員に達成してほしい目標として設定した．(3)（4）につ

いては，講義全体を通して身につけて欲しい計算力に関する目標である．（*5）については，高度な目的となるため，深くは言及しないが，論理的な思考力を身につけるため，ぜひチャレンジして欲しい目標である．

1.4 評価基準

表 1.2 にこの講義の評価基準を示す．この内，筆記試験については，中間試験を実施するかどうか履修人数が確定したタイミングで話し合いたいと考えている．また，実施する場合は，中間試験と期末試験の割合の比率についても同様に話し合いたい．

表 1.2: 評価項目とその割合

評価項目	割合
講義への出席	30％
毎回の課題	30％
筆記試験	40％

1.5 日程と進め方

表 1.3 にこの講義の日程を示す．原則として毎週水曜日と金曜日の 6 限 (17:40 – 19:10) に講義を行う．進め方としては，1 コマをさらに 2 つに分割して，45 分間を 1 つのブロックとし，新しい概念の説明と，それに付随する演習問題の解説を当てる予定である．毎回の課題については，小テストにするか宿題形式にするか現時点（2017/9/28）では決定していない．宿題形式の場合は，別途 Web サービスを通して提出という形を取っていきたい．

また，仮に中間試験を行うとすれば，11 月下旬を想定している．

表 1.3: 講義の日程とテーマ

日付	内容
10/04	
10/06	初等関数の復習
10/11	
10/13	
10/18	極限と導関数
10/20	
10/25	
10/27	初等関数の微分
11/01	
11/08	
11/10	高階導関数
11/15	
11/17	初等関数のグラフの概形と極大値・極小値
11/24	
11/29	定積分と原始関数
12/01	
12/06	
12/08	初等関数の積分
12/13	
12/15	
12/20	図形の面積・体積と広義積分
12/22	
12/27	微分方程式
01/05	
01/10	級数
01/12	
01/17	偏微分
01/19	
01/24	重積分
01/26	

第 2 章

初等関数

この章では，中学校・高等学校で学んだ**関数**について改めて定義を確かめ，その例である初等関数を個別に紹介する．

2.1　関数とは

数学における関数とは，ある集合から別の集合への対応関係を示したものである．イメージとして図 2.1 のようなブラックボックス（中身が分からない箱）を思い浮かべるとよい．ここでは，改めて用語を定義し，数学における関数を形作っていきたい．

図 2.1: 関数のイメージ

定義 2.1 (集合)

集合とは，ある対象（それは数であっても関数であっても，あるいは果物などであってもよい）を集めたものである．集合を構成する 1 つ 1 つの対象を**元**あるいは**要素**と呼ぶ．このとき，要素の順序や重複は気にしないものとする．また，対象が集合の要素であるかどうか真偽が決定できるように定義されなければならない．とくに，対象 a が集合 A の要素であるとき $a \in A$ と表記し，要素でないとき $a \notin A$ と表記する．

注意. $a \in A$ の読み方としては，「a は A の要素である」以外にも「a は A に属している」「A は a を要素として持つ」などがある．

例. $\{1,2,3\}$ や $\{$りんご, ばなな, みかん$\}$ は，集合の例である．このように具体的な要素を列挙することを，**外延**（がいえん）記法という．また，$\{x \mid x$ は 10 以下の正の偶数$\}$ も集合の例である．このように集合に属する要素が満たすべき条件を明示することを，**内包**（ないほう）記法という．

例. $\{1,1,3\}$ と $\{1,3,1\}$ と $\{1,3\}$ は，同一の集合である．そのため，通常は，最も少ない要素数になるように，特定の順序に従って表記される．

例. 数の集合について，一般的に使われている記号を表 2.1 に示す．これら数の集合のように，要素数が無限になる集合もあり，ほとんどの場合，内包記法によって表記される．

表 2.1: 数の集合に用いられる記号

$\mathbb{N}$	自然数全体の集合
$\mathbb{Z}$	整数全体の集合
$\mathbb{Q}$	有理数全体の集合
$\mathbb{R}$	実数全体の集合
$\mathbb{C}$	複素数全体の集合

定義 2.2 (空集合)

集合において，要素が 1 つもない空っぽな集合を考えることができる．これを**空集合**といい，$\emptyset$ と表記する．

定義 2.3 (部分集合)

集合 X が，集合 S の**部分集合**であるとは，X の要素が全て S に属することである．このとき $X \subseteq S$ と表記する．

注意. $X \subseteq S$ の読み方としては，「X は S の部分集合である」以外にも「X は S に含まれる」「S は X を包含する」などがある．また，X が S の部分集合でない場合には，$X \not\subseteq S$ と表記される．

例. $\{1,2,3\}$ は，自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ の部分集合である．また，$\mathbb{N}$ は，整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ の部分集合である．

例. 集合 S について，空集合 $\emptyset$ と自分自身 S は，常に部分集合である．

複数の集合を用いて，新しい集合を作ることができる．ここでは，代表的なものを定義する．

定義 2.4 (和集合)

和集合 $A \cup B$ とは，集合 A と集合 B に属する要素を集めた集合のことである．

定義 2.5 (共通部分)

共通部分 $A \cap B$ とは，集合 A と集合 B に同時に属する要素を集めた集合のことである．

注意. $\cup$ は「または」と読み，$\cap$ は「かつ」と読む．

例. 集合 $A = \{1,2,3,4,5\}$ と集合 $B = \{3,4,5,6,7\}$ に対し，和集合 $A \cup B$ は $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ であり，共通部分 $A \cap B$ は $\{3,4,5\}$ である．

定義 2.6 (差集合)

差集合 $A \setminus B$ とは，集合 A に属する要素のうち，集合 B に属していない要素を集めた集合のことである．

例. 集合 $A = \{1,2,3,4,5\}$ と集合 $B = \{3,4,5,6,7\}$ に対し，差集合 $A \setminus B$ は $\{1,2\}$ である．整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ と集合 $\{0\}$ に対し，差集合 $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ は $\left\{ x \mid x \text{ は正の整数または負の整数} \right\}$ である．

ここまで定義した集合について，図示したものが図 2.2 である．

図 2.2: 集合の図示

定義 2.7 (順序組)

順序組とは，ある対象を集めたものである．このとき，集合とは違い，要素の順序や重複に意味があるものとする．

例． $(1,2)$ や $(\spadesuit, \mathrm{K})$ は，順序組の例である．このような 2 つの要素から成る順序組を**順序対**と呼ぶ．また，$(1,2)$ と $(2,1)$ は，異なる順序組であり，$(1,1,3)$ と $(1,3)$ も異なる順序組である．

定義 2.8 (直積集合)

直積集合 $A \times B$ とは，集合 A に属する要素と，集合 B に属する要素から，新たに順序対を作り，それら全てを要素とする集合のことである．このとき，$A \times B$ の要素である順序対 (a,b) は，直積集合の表記通りの順序を保たなければならない．つまり，$a \in A, b \in B$ である．

例． 集合 $A = \{1,2,3\}$ と集合 $B = \{\heartsuit, \diamondsuit\}$ に対し，直積集合 $A \times B$ は $\{(1,\heartsuit),(1,\diamondsuit),(2,\heartsuit),(2,\diamondsuit),(3,\heartsuit),(3,\diamondsuit)\}$ である．$(\heartsuit, 1)$ など順序を逆にしたものは，$A \times B$ の要素ではない．

この直積集合を用いて，2 つの集合間に二項関係を築くことができる．

定義 2.9 (二項関係)

集合 A, B 間の**二項関係** R とは，直積集合 $A \times B$ の部分集合である．このとき，R の要素である順序対 (a,b) を，aRb と表記することもある．また，集合 A を**始集合**と呼び，集合 B を**終集合**と呼ぶ．

例． 集合 $A = \{1,2,3,4,5\}$ と集合 $B = \{3,4,5,6,7\}$ に対し，aRb を a は b を割り切る関係とする．このとき，関係 R は，

$$\{(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5)\}$$

である．

また，集合 A, B 間の二項関係 R について，一定の条件を満たすことで，性質が定義される．

定義 2.10 (一意性)

R は単射（左一意的）である．$\Leftrightarrow$ 集合 B の要素 b に対し，aRb が存在するならば，
a は一意的に決定できる．

R は関数的（右一意的）である．$\Leftrightarrow$ 集合 A の要素 a に対し，aRb が存在するならば，
b は一意的に決定できる．

R は一対一である．$\Leftrightarrow$ R は左一意的かつ右一意的である．

定義 2.11 (全域性)

R は全域的（左全域的）である．$\Leftrightarrow$ 集合 A の要素 a に対し，集合 B の要素 b が存在して，
二項関係 R は aRb を要素として持つ．

R は全射（右全域的）である．$\Leftrightarrow$ 集合 B の要素 b に対し，集合 A の要素 a が存在して，
二項関係 R は aRb を要素として持つ．

R は対応である．$\Leftrightarrow$ R は左全域的かつ右全域的である．

定義 2.12 (写像および全単射)

R は写像（一意対応）である．$\Leftrightarrow$ R は関数的（右一意的）かつ全域的（左全域的）である．

R は全単射（双射）である．$\Leftrightarrow$ R は単射かつ全射である．

定義 2.10 と定義 2.11 の一部を図示したものが，図 2.3 である．

図 2.3: 定義 2.10 と定義 2.11 の図示

定義 2.12 における写像の定義を言い換えたものが，定義 2.13 である．

定義 2.13 (写像)

写像 f とは，始集合 A と終集合 B との間の関係 R であり，始集合の要素 a について，一意的に aRb が決定できるものである．

定義 2.14 (関数)

関数 f とは，終集合が数の集合であるような写像のことである．

注意． 写像あるいは関数 f は，始集合 A と終集合 B を伴って $f : A \to B$ と表記される．また，始集合のことを**始域**と呼び $\operatorname{dom} f$ と表記する．同様に，終集合のことを**終域**と呼び $\operatorname{cod} f$ と表記する．これは，誤解を恐れずに言うならば方言のようなものである（発展するに当たって歴史的背景が異なる分野において，同じ意味を表す異なる単語があることは不思議ではない）．

注意． 写像あるいは関数 f について，特に要素の関係を強調する場合には，$f : a \mapsto b$ と表記される．f は関係であるため，要素として順序対 (a, b) を持つ．これを，afb と表記しても良いが，一般的に $f(a) = b$ と表記する．この a に対して，b が f によって指定されることを，「a が f によって b に写される」といい，b のことを a における f の**値**と呼ぶ．

例． 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; a \mapsto a^2$ について，始域と終域はともに実数全体の集合 $\mathbb{R}$ である．また，2 における f の値は，4 である．つまり，$f(2) = 4$ である．

定義 2.15 (像)

写像あるいは関数 f について，その**像** $\operatorname{Im} f$ とは，始域の要素に対する f の値を集めた集合のことである．像は，終域の部分集合である．

注意． 意味合いが似てるものに，値域と呼ばれる語句があるが，ほとんどの場合，像と同じ意味である．また，定義域と呼ばれる語句は，本来，始域の部分集合であるが，写像の場合は，始域と定義域は等しいので，ほとんど同一視されている．

例． 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; a \mapsto a^2$ について，像 $\operatorname{Im} f$ は，正の実数全体の集合 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ である．

2.2　代数関数

代数関数とは，関数の中でも特に，始域の要素 a と終域の要素 b とを結びつける二項関係が，ある**代数式**（多項式や有理式，無理式の総称）によって定義される関数のことを指す．代数式の例を，表 2.2 に示す．ここで，x は，単なる記号であり，これを**不定元**と呼ぶ．

表 2.2: 代数式

				例
代数式	有理式	多項式	定数式	3
			一次式	$2x+1$
			二次式	$3x^2+x+2$
			n 次式	$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad (a_n \neq 0)$
		分数式		$6/x, (2x+1)/(3x^2+x+2)$
	無理式			$\sqrt{x}, x^{2/3}$

この節では，まず，多項式の因数定理を学ぶ．因数定理は，高次の多項式を，低次の多項式の積へと分解するために必要な因数を教えてくれる定理である．これから先，代数関数の積分を計算する際に，使用する定理なので，いくつかの計算練習も行う．また，方程式や不等式について復習し．グラフとの関係について取り上げる．

定義 2.16 (代入)

代数式 $P\langle x\rangle$ に対し，不定元 x を，異なる不定元あるいは集合 S の要素 a に置き換えることを**代入**と呼ぶ．a を代入することによって得られる $P\langle a\rangle$ のことを，a において**評価**した値，あるいは**式の値**と呼ぶ．

定義 2.17 (根)

$P\langle x\rangle$ を多項式とする．$P\langle x\rangle$ に代入したとき，式の値が 0 となるような a のことを，多項式の**根**と呼ぶ．

例． 二次式の根を求める方法の 1 つに，因数分解を利用する方法がある．代表的な二次式の因数分解の公式に

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x-\alpha)(x-\beta)$$

があり，このように因数分解できる場合，根は α, β である．

例. 二次式 x^2-5x+6 は，$(x-2)(x-3)$ と因数分解できるため，この二次式の根は，$2,3$ である．また，二次式 x^2+2x+1 は，$(x+1)^2$ と因数分解できる．これは，$(x+1)(x+1)$ をまとめて表記したものであるため，x^2+2x+1 の根は，$-1,-1$ である．ただし，いくつかの根のうち等しい値がある場合，それらは等しい値ごとにまとめて書くため，この場合は -1 (**重根**) と表記される．

定理 2.18 (因数定理)

多項式 $P\langle x\rangle$ の根の 1 つを a と置く．このとき，$P\langle x\rangle$ は $(x-a)$ を因数に持ち，$P\langle x\rangle=(x-a)Q\langle x\rangle$ と表現することができる．ここで $Q\langle x\rangle$ は，$P\langle x\rangle$ の次数より 1 つ低い次数を持つ多項式である．

注意. この定理の主張は，ある多項式 $P\langle x\rangle$ について，a を代入したとき，式の値 $P\langle a\rangle$ が 0 になるならば，$P\langle x\rangle$ は $(x-a)$ で割り切れる，ということである．手計算の際には，$0,1,-1$ など小さい値から順に代入していき，式の値が 0 になった数を使って，多項式の割り算を行うという手順を踏むことになる．

例. 多項式 $P\langle x\rangle=x^3+x^2-x-1$ は，$x=1$ を代入すると，$P\langle 1\rangle=0$ となる．つまり，この多項式の根の 1 つが 1 であることが分かる．よって，多項式 $P\langle x\rangle$ は，$(x-1)$ を因数に持つため，これで割ることができ，$P\langle x\rangle=(x-1)(x^2+2x+1)$ となる．したがって，多項式 $P\langle x\rangle$ を因数分解すると，$(x-1)(x+1)^2$ となり，$P\langle x\rangle$ の根は，$1,-1$ (重根) であることが分かる．

定理 2.19

$a_i\quad(0\le i\le n)$ は，整数であり，特に，a_n,a_0 は 0 でない整数とする．多項式 $P\langle x\rangle$ を，$P\langle x\rangle=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ とおく．このとき，$P\langle x\rangle$ の根が，有理数 r であるならば，

$$r=\frac{a_0\ \text{の約数}}{a_n\ \text{の約数}}$$

と書くことができる．

注意. この定理は，整数係数の多項式を，因数定理を用いて因数分解する場合に有効である．言い換えれば，多項式の根となり得る候補を絞るための定理であるため，候補全てが根とならなかった場合，その多項式は，無理数根か，複素数根しか取らないことが分かる．

定理 2.20 (アイゼンシュタインの既約判定定理)

$a_i \quad (0 \leq i \leq n)$ は，整数であり，特に，a_n, a_0 は 0 でない整数とする．多項式 $P\langle x\rangle$ を，$P\langle x\rangle = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ とおく．ある素数 p が存在し，以下の条件を満たすならば，有理数係数の範囲で因数分解したとき，$P\langle x\rangle$ は，k 次式以上の多項式を因数に持つ．

- a_0 は，p の倍数だが，p^2 の倍数でない．
- $a_i \quad (1 \leq i \leq k-1)$ は，全て p の倍数である．
- a_k は，p の倍数でない．

特に，$k = n$ の場合，$P\langle x\rangle$ は，それ以上有理数係数の範囲で因数分解できない既約な多項式である．

注意. この定理は，十分条件であるため，有理数係数の範囲で既約な多項式だからといって，条件を満たすような素数 p があるとは限らない．例えば，$x^2 + 5x + 2$ は，有理数係数の範囲で既約であるが，条件を満たすような素数は存在しない．

例. 多項式 $x^2 + 2x + 6$ について，$p = 2$ とする．$a_0 = 6$ は，p の倍数かつ p^2 の倍数でない．$a_1 = 2$ は，p の倍数である．$a_2 = 1$ は，p の倍数でない．よって，アイゼンシュタインの既約判定定理より，この多項式は，有理数係数の範囲で既約である．

定義 2.21 (恒等式)

$P\langle x\rangle, Q\langle x\rangle$ を代数式とする．集合 S における，すべての要素 a に対して，$P\langle a\rangle = Q\langle a\rangle$ が成り立つとき，これを**恒等式**と呼ぶ．

定義 2.22 (方程式)

$P\langle x\rangle, Q\langle x\rangle$ を代数式とする．集合 S における，ある要素 a に対して，$P\langle a\rangle = Q\langle a\rangle$ が成り立つかどうか真偽が決定できるとき，これを**方程式**と呼ぶ．また，等号が成り立つような a のことを**解**と呼ぶ．

定義 2.23 (不等式)

$P\langle x\rangle, Q\langle x\rangle$ を代数式とする．また演算 $\star$ を $<, \leq, >, \geq$ のいずれかと決める．集合 S における，ある要素 a に対して，$P\langle a\rangle \star Q\langle a\rangle$ が成り立つかどうか真偽が決定できるとき，これを**不等式**と呼ぶ．また，不等号が成り立つような a のことを**解**と呼ぶ．

注意. 方程式や不等式は，解が複数あることがほとんどである．そのため，すべての解を要素として持つ集合を**解集合**と呼び，解集合を求めることを，方程式あるいは不等式を**解**

く，という[*2]．また，解集合のことを，そのまま解と呼ぶこともある．

定義 2.24 (閉区間・開区間)

ある実数 a, b について（ただし $a \leq b$），**閉区間** $[a, b]$ とは，$\{\, x \mid a \leq x \leq b \,\}$ となる集合のことである．また，**開区間** (a, b) とは，$\{\, x \mid a < x < b \,\}$ となる集合のことである．不等号の組み合わせによって，$[a, b) = \{\, x \mid a \leq x < b \,\}$ と $(a, b] = \{\, x \mid a < x \leq b \,\}$ も定義される[*3]．

注意． (a, b) と書かれている場合，文脈から開区間なのか順序対なのか判断する必要がある．また，閉区間・開区間については，数直線上に描くことができ，図 2.4 のようになる．特に，ある実数 c よりも小さい数の集合を，$(-\infty, c)$ と表記したり，ある実数 c 以上の数の集合を $[c, \infty)$ と表記したりする．

図 2.4: 閉区間と開区間の図示

[*2] 当然，解が存在しない場合も考えられ，その場合の解集合は，空集合 $\emptyset$ である．

[*3] $[a, b)$ を右半開区間，$(a, b]$ を左半開区間と呼び，両者をまとめて半開区間と呼ぶ．また，開区間・半開区間・閉区間をまとめて，区間と呼ぶ．

定義 2.25 (多項式関数のグラフ)

ある多項式 $P\langle X\rangle$ が与えられているとき，関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; x\mapsto P\langle x\rangle$ の**グラフ**とは，f の要素である順序対 $(x, P\langle x\rangle)$ を，xy 平面上の点として描いたものである．このとき x は，始域 $\mathbb{R}$ の全ての要素となり得るので，**変数**あるいは未知数と呼ばれる．通常は，x における f の値を y と置き，$y=f(x)$ と表記する．x における f の値は，$P\langle x\rangle$ であるため，これを用いて $y=P\langle x\rangle$ や $f(x)=P\langle x\rangle$ と表記することもある．

注意. 多項式 $P\langle x\rangle$ と多項式関数 $f(x)$ の違いは，単なる記号である x か，何らかの要素を取り得る変数としての x かの違いである．そのため，定義 2.25 では，単なる記号であることを強調するため，多項式の不定元に X を用いた．

例. 多項式 $x-2$ と $2x-3$ について，$x=1$ を代入すると，お互いの式の値が -1 となり等しくなる．つまり，方程式 $x-2=2x-3$ の解は，$x=1$ である[*3]．これは，一次関数 $y=x-2$ と $y=2x-3$ の交点 $(1,-1)$ に対応する．

例. 方程式 $x^2-5x+6=x-2$ の解は, $x=2,4$ である[*3]．これは, 二次関数 $y=x^2-5x+6$ と一次関数 $y=x-2$ の交点 $(2,0),(4,2)$ に対応する．

例. 不等式 $x^2-5x+6\leq x-2$ の解は, $2\leq x\leq 4$ である．これは, 二次関数 $y=x^2-5x+6$ よりも一次関数 $y=x-2$ のほうが大きくなるか等しくなる x の区間が，$[2,4]$ であることに対応する．同様に，不等式 $x^2-5x+6>x-2$ の解は，$x<2,\ 4<x$ である．これは，二次関数 $y=x^2-5x+6$ よりも一次関数 $y=x-2$ のほうが小さくなる x の区間が，$(-\infty,2)\cup(4,\infty)$ であることに対応する．

ここまでの例について，図示したものが図 2.5 である．

図 2.5: 方程式の解，不等式の解とグラフとの関係の図示

[*3] 解集合という意味での解であれば $x=\{1\}$ あるいは $x=\{2,4\}$ と書かなければならない．ここでは，等号が成り立つ要素としての解であり，$x=2,4$ と書いてある場合は，「解は，2 または 4」と読む．

ここまでで，二次関数のグラフと，二次方程式あるいは二次不等式の解との関係を見てきた．グラフを図示することにより，代数的な解と，幾何的な交点の x 座標が同一視できることが分かる．このように，グラフの図示，つまり関数の可視化は，関数の気持ちを理解する上でかかせないポイントであるため，ここでは，二次関数のグラフを描く際に使われる平方完成という手法を紹介する．平方完成は，二次関数のグラフを描くためだけではなく，代数関数の積分においても重要な役割を果たす計算手法である．

定義 2.26 (平方完成)

二次式 $ax^2 + bx + c$ について，$a(x-p)^2 + q$ の形に変形することを**平方完成**と呼ぶ．

アルゴリズム

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c && (1)\\
&= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right\} + c && (2)\\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c && (3)\\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} && (4)
\end{aligned}
$$

各計算ステップは，以下の通りである．

(1) $ax^2 + bx$ について a でくくる．
(2) $x^2 + \frac{b}{a}x$ を変形する．ここでは，$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ を展開することによって，$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$ となるので，余分な $\frac{b^2}{4a^2}$ を引くことによって，$x^2 + \frac{b}{a}x$ を作っている．
(3) a を $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ と $-\frac{b^2}{4a^2}$ に，分配する．
(4) $-\frac{b^2}{4a}$ と c を通分する．

結果として

$$
\begin{cases}
p = -\dfrac{b}{2a}\\
q = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}
\end{cases}
$$

を得る．

注意． 二次関数 $y = f(x) = a(x-p)^2 + q$ は，$x = p$ のとき，a の符号によって，最大値あるいは最小値として $y = q$ をとる．この，二次関数の最大値あるいは最小値を決める点 (p, q) を，**頂点**と呼ぶ．

例. 二次式 x^2-5x+6 は, $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ と平方完成できるため, 二次関数 $f(x)=x^2-5x+6$ は，頂点 $\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{4}\right)$ を通るグラフである．また，この関数の像 $\operatorname{Im} f$ は，区間 $\left[-\frac{1}{4},\infty\right)$ である．

定義 2.27 (グラフの平行移動)

多項式関数 $f(x)$ が与えられているとき，新たに多項式関数 $g(x)=f(x-p)+q$ を作ることができる．このとき，$g(x)$ のグラフは，$f(x)$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ動かしたものであり，これをグラフの**平行移動**という．

例. 関数 $f(x)=x^2$ とすると，関数 $g(x)=x^2-5x+6$ は，$g(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=f\left(x-\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{4}$ と書くことができる．したがって，$g(x)=x^2-5x+6$ のグラフは，$f(x)=x^2$ のグラフを，x 軸方向に $\frac{5}{2}$，y 軸方向に $-\frac{1}{4}$ だけ動かしたものである．

ここまでの例について，図示したものが図 2.6 である．

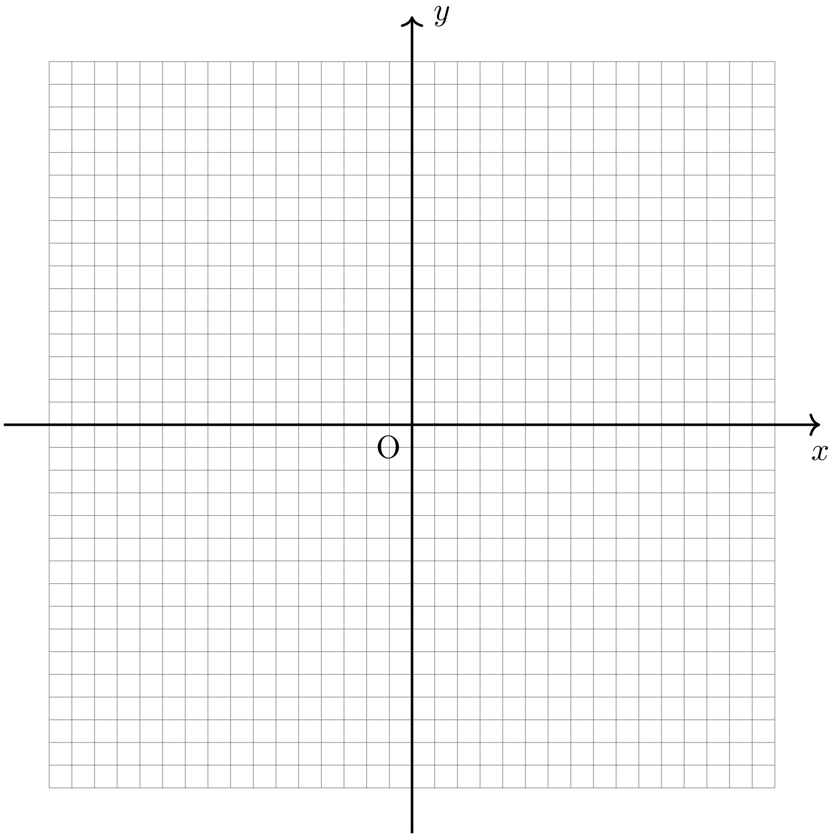


図 2.6: 二次関数のグラフの図示

定義 2.28 (分数関数のグラフ)

ある多項式 $P\langle X\rangle, Q\langle X\rangle$ が与えられているとき，分数式 $R\langle X\rangle$ は，$R\langle X\rangle = P\langle X\rangle/Q\langle X\rangle$ と表現することができる．関数 $f:\mathbb{R}\setminus\{\,a \mid a$ は $Q\langle X\rangle$ の根$\,\}\to\mathbb{R}; x\mapsto R\langle x\rangle$ のグラフとは，f の要素である順序対 $(x, R\langle x\rangle)$ を，xy 平面上の点として描いたものである．

例. 分数関数 $f(x) = (x-2)/(x^2-6x+8)$ は，$x = 2, 4$ において値が定義されない．しかし，$x^2-6x+8 = (x-2)(x-4)$ と因数分解することにより，分数式 $(x-2)/(x^2-6x+8)$ と分数式 $1/(x-4)$ は，$\mathbb{R}\setminus\{\,2,4\,\}$ において，恒等式となる．ここで，分数関数 $g(x) = 1/(x-4)$ は，集合 $\mathbb{R}\setminus\{\,4\,\}$ において定義されているため，$f(2) = g(2) = -1/2$ と値を定義することによって，分数関数 $f(x)$ と $g(x)$ は，同一視できる．

注意. 計算上，分数関数を考える場合，値を再定義するという回りくどいことは，ほとんど行われない．すでに見たように，分母を因数分解することによって，多項式の約分を行うことができるため，それ以上約分できない既約な分数式で表現される分数関数の形に変形し，計算を行っていく．

定義 2.29 (無理関数のグラフ)

ある無理式 $P\langle X\rangle$ が与えられているとき，関数

$$f:\{\,x \mid \text{各項の値が実数になる } x \text{ の区間の共通部分}\,\}\to\mathbb{R}; x\mapsto P\langle x\rangle$$

のグラフとは，f の要素である順序対 $(x, P\langle x\rangle)$ を，xy 平面上の点として描いたものである．

例. 無理関数 $f(x) = \sqrt{x}$ は，区間 $[0,\infty)$ において，実数の値をとる．また，無理関数 $g(x) = \sqrt{x-2}-1$ は，区間 $[2,\infty)$ において，実数の値をとる．実数値関数において，根号内は負数にしない，ということに気をつけて，区間を選ぶ必要がある．

ここまでの例について，図示したものが図 2.7 である．

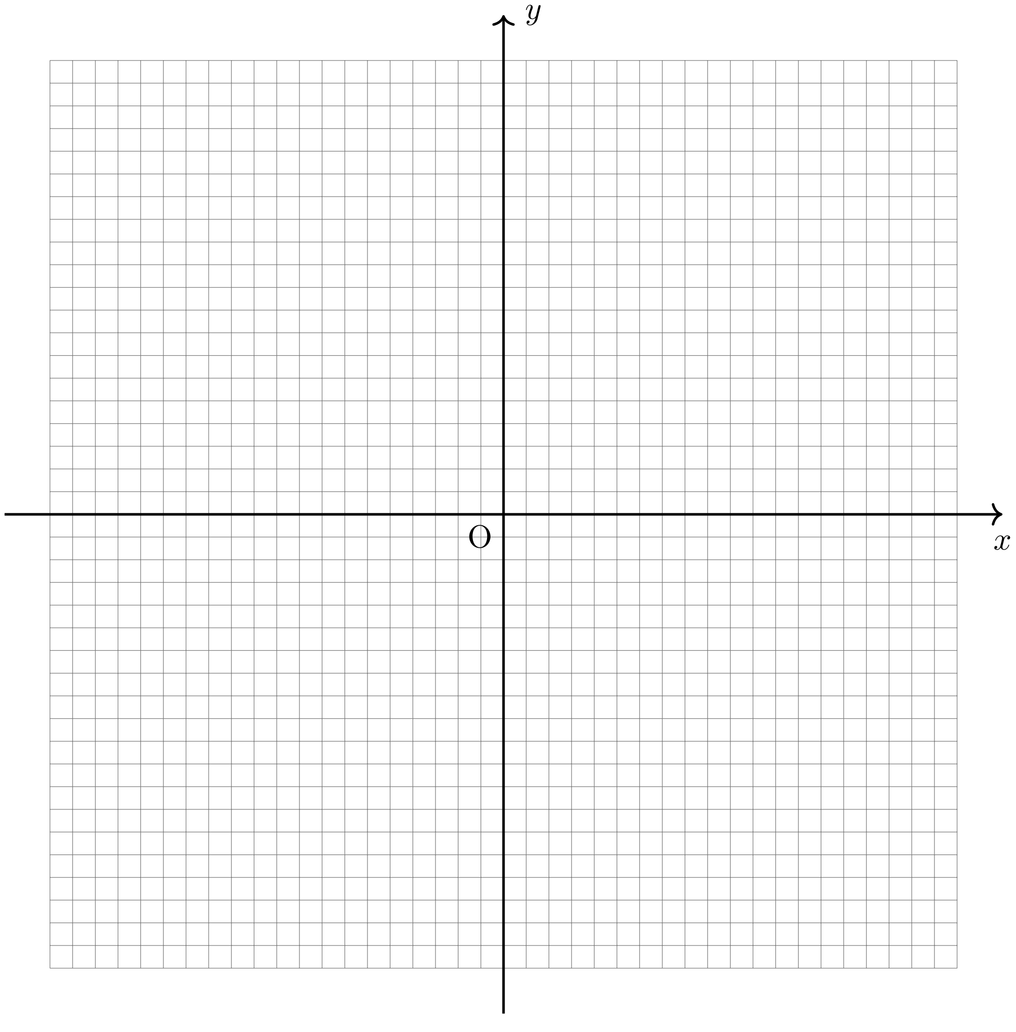


図 2.7: 代数関数のグラフの図示

2.3　指数関数

多項式関数は，x を変数，n をパラメータとして，$f(x) = x^n$ という形を取っていた．このとき，x を**底**，n を**指数**と呼ぶ．つまり，多項式関数は，指数をパラメータとして先に決め，底を変数として，ある集合の中の要素を取り得るよう定めたもの，と考えることができる．

指数関数は，この多項式関数における変数とパラメータの役割を交換し，底をパラメータとして先に決め，指数を変数として，ある集合の中の要素を取り得るよう定める．つまり，a を底，x を指数として，$f(x) = a^x$ を考える．この関数の性質を考える上で，基本となる考え方が，自然数においての指数法則である．指数法則が成り立つ範囲を実数の範囲まで拡張したとき，特定の数の集合を一対一の関係で結びつける写像が存在する．それこそが，指数関数であることを，この節では見ていく．

定義 2.30 (自然数における指数法則)

a, b を 0 を除いた実数，n, m を自然数（ただし，$n > m$）とする．このとき，

1. $a^n a^m = a^{n+m}$
2. $a^n / a^m = a^{n-m}$
3. $(a^n)^m = a^{nm} = (a^m)^n$
4. $(ab)^n = a^n b^n$

が成り立ち，このことを，指数法則と呼ぶ．

例． $2^2 \cdot 2^3$ は，$(2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2)$ であるため，2^5 となる．つまり，$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$ である．$2^3/2^2$ は，$(2 \cdot 2 \cdot 2)/(2 \cdot 2)$ であるため，2^1 となる．つまり，$2^3/2^2 = 2^{3-2} = 2^1$ である．$\left(2^2\right)^3$ は，$(2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2)$ であるため，2^6 となる．つまり，$\left(2^2\right)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$ である．

定義 2.30 において，$n > m$ を仮定した．しかし，m を自然数として，$a^0 = 1$，$a^{-m} = 1/a^m$ と定義することによって，指数法則は，整数の範囲まで拡張される．

定義 2.31 (整数における指数法則)

a, b を 0 を除いた実数，n, m を整数とする．このとき，

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $(a^n)^m = a^{nm} = (a^m)^n$
3. $(ab)^n = a^n b^n$

が成り立ち，このことを，指数法則と呼ぶ．

また，n を整数，m を自然数として，$r = n/m$ となる有理数を考える．このとき，a を正の実数とし，$a^r = a^{n/m} = (\sqrt[m]{a})^n$ と定義すれば，指数法則は，有理数の範囲まで拡張される[*1]．また，実数 x は，$r < x < s$ という不等式が成り立つように有理数 r, s を選んで表すことができる．r, s は，x に有理数の範囲でいくらでも近づけていけるため，a を正の実数とすれば，a^x の値を，a^r, a^s を用いて評価できる．このとき，指数法則は，実数の範囲まで拡張され，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ と，正の実数全体の集合 $\mathbb{R}_{>0}$ を一対一の関係で結びつける[*2]．この関係を，a を底とする指数関数と呼ぶ．

定義 2.32 (実数における指数法則)

a, b を正の実数，x, y を実数とする．このとき，

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$
3. $(ab)^x = a^x b^x$

が成り立ち，このことを，指数法則と呼ぶ．

定義 2.33 (指数関数)

1 を除いた正の実数 a が与えられているとき，関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto a^x$ のことを，a を底とする**指数関数**と呼ぶ．x における f の値が，a^x であるため，これを用いて $y = a^x$ や $f(x) = a^x$ と表記される．

注意. 指数関数 $f(x) = a^x$ の像 $\mathrm{Im}\, f$ は，正の実数全体の集合 $\mathbb{R}_{>0}$ である．

[*1] 指数の取り得る範囲は拡張されるが，代わりに，底の取り得る範囲は縮小する．このような場合，基本的に変数の取り得る範囲を拡張することが優先される．

[*2] この関係は，全域的であるため，写像である．さらに，終域が数の集合であるため，関数でもある．直積集合 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の部分集合である関係 R が，指数法則が成り立つ写像として定義されていく味わい深さを感じ取って貰えれば幸いである．

例. $a > 1$，$0 < a < 1$ の場合における指数関数のグラフを示したものが，図 2.8 である．$a > 1$ の例として，$y = 2^x$ を，$0 < a < 1$ の例として，$y = 0.5^x$ を選んだ．

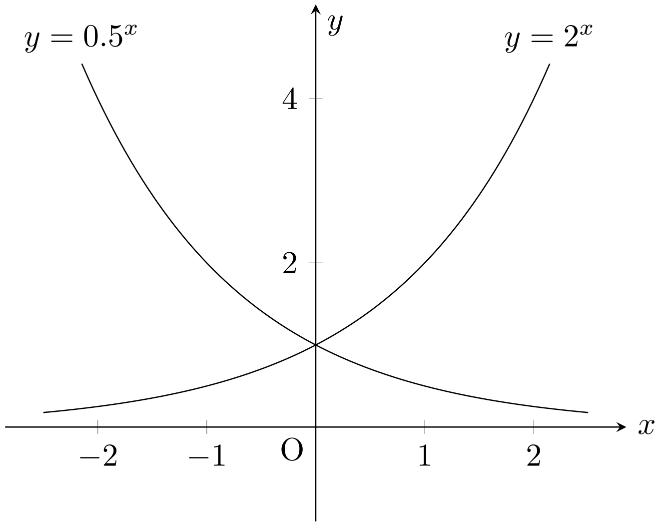


図 2.8: 指数関数のグラフの図示

定義 2.34 (単調関数)

実数の部分集合である開区間 (a, b) で定義されている関数 $f(x)$ について，一定の条件を満たすことで，性質が定義される．ここで，s, t は，(a, b) に属する実数とする．

$f(x)$ は，(a, b) で**単調増加**である．$\Leftrightarrow$ $s < t$ ならば，$f(s) < f(t)$ である．
$f(x)$ は，(a, b) で**単調非減少**である．$\Leftrightarrow$ $s < t$ ならば，$f(s) \leq f(t)$ である．
$f(x)$ は，(a, b) で**単調減少**である．$\Leftrightarrow$ $s < t$ ならば，$f(s) > f(t)$ である．
$f(x)$ は，(a, b) で**単調非増加**である．$\Leftrightarrow$ $s < t$ ならば，$f(s) \geq f(t)$ である．

注意.「単調増加」のことを，「狭義単調増加」と呼び，「単調非減少」のことを「広義単調増加」と呼ぶこともある．同様に，「単調減少」のことを，「狭義単調減少」と呼び，「単調非増加」のことを「広義単調減少」と呼ぶこともある．

例. 指数関数 $y = a^x$ は，$a > 1$ のとき，単調増加であり，$0 < a < 1$ のとき，単調減少である．

2.4　対数関数

指数関数 $y = a^x$ では，x を変数とし，それに伴って変化する値である y を求めた．この節では，y を変数とし，それに伴って変化する x を求めるための新しい関数を定義する．そのために，定義 2.9 で学んだ関係の概念に付随する，逆関係を導入する．その後，写像や関数に対応する逆写像，逆関数を定義し，指数関数の逆関数として，対数関数を定義することにする．

定義 2.35 (逆関係)

集合 A, B 間の二項関係 R における**逆関係** R^{-1} とは，

$$R^{-1} = \{\, (b, a) \mid (a, b) \in R \,\}$$

と定義される集合のことである．

定義 2.36 (逆写像・逆関数)

写像あるいは関数 f について，f は二項関係とみなせるため，その逆関係 f^{-1} が定まる．この f^{-1} が，写像あるいは関数の定義を満たした場合，f^{-1} を，f の**逆写像**あるいは**逆関数**と呼ぶ．

定理 2.37

関係 R が，一対一ならば，逆関係 R^{-1} も，一対一である．

定理 2.38

写像 f が，全単射ならば，逆写像 f^{-1} が存在し，f^{-1} も全単射である．

注意. このとき，$\operatorname{dom} f = \operatorname{cod} f^{-1}$ であり，$\operatorname{cod} f = \operatorname{dom} f^{-1}$ である．つまり，写像 $f : A \to B$ に対して，逆写像 $f^{-1} : B \to A$ である．

定理 2.39

写像あるいは関数 f が，単射であるとき，写像あるいは関数 $g : \operatorname{dom} f \to \operatorname{Im} f$ は，全単射である．

指数関数 $f(x) = a^x$ は，単射であるため，定理 2.39 より，関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}; x \mapsto a^x$ は，全単射となる．このとき，定理 2.38 より，逆写像 $g^{-1} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ が存在する．この逆写像は，終域が数の集合であるため，逆関数でもある．

定義 2.40 (対数関数)

a を 1 を除いた正の実数とする．関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}; x \mapsto y = a^x$ について，逆関数 $f^{-1} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}; y \mapsto x$ を，a を底とする**対数関数**と呼ぶ．このとき，y における f^{-1} の値を $x = \log_a y$ と表記する．

注意． 逆関数のままでは，扱いにくいため，素直に関数 $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}; x \mapsto \log_a x$ と書かれることが多い．これは，対数関数の定義中で出てくる文字を置き換えただけである．

注意． 平たく言えば，対数関数とは,「底 a を何乗したら x になるのか」を考えるための関数である．すなわち，$2^3 = 8$ であるため，$\log_2 8 = 3$ である．

注意． 定義より明らかに，$\log_a a^x = x$ であり，$a^{\log_a y} = y$ である．すなわち，

$$\log_a a = \log_a a^1 = 1$$
$$\log_a 1 = \log_a a^0 = 0$$

となる．

注意． 対数関数 $y = \log_a x$ は，$a > 1$ のとき，単調増加であり，$0 < a < 1$ のとき，単調減少である．

定理 2.41

指数法則から，以下に示す対数関数の各種性質が導かれる．ここで，a, b は 1 を除いた正の実数，x, y は正の実数，r は実数とする．

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a x^r = r \log_a x$
4. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

図 2.9 に，$a > 1$，$0 < a < 1$ の場合における対数関数のグラフを示す．$a > 1$ の例として，$y = \log_2 x$ を，$0 < a < 1$ の例として，$y = \log_{1/2} x$ を選んだ．また，図 2.10 に，指数関数 $y = 2^x$ のグラフと対数関数 $y = \log_2 x$ のグラフを示した．一般的に，ある関数 f のグラフとその逆関数 f^{-1} のグラフは，直線 $y = x$ に関して対称となる．

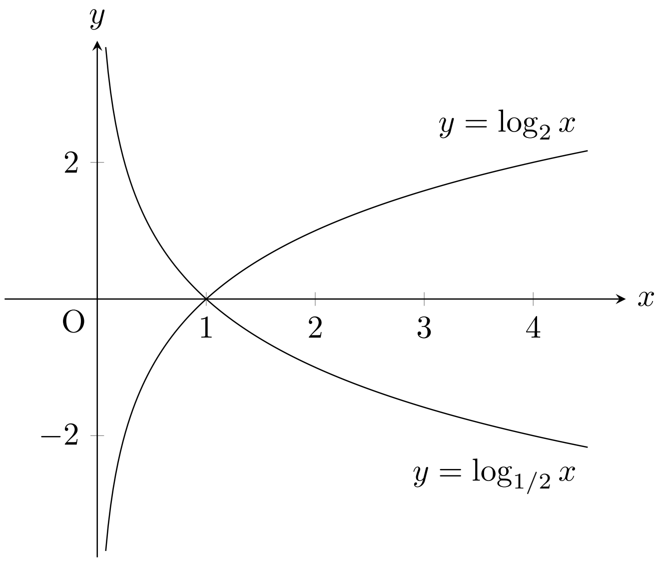


図 2.9: 対数関数のグラフの図示

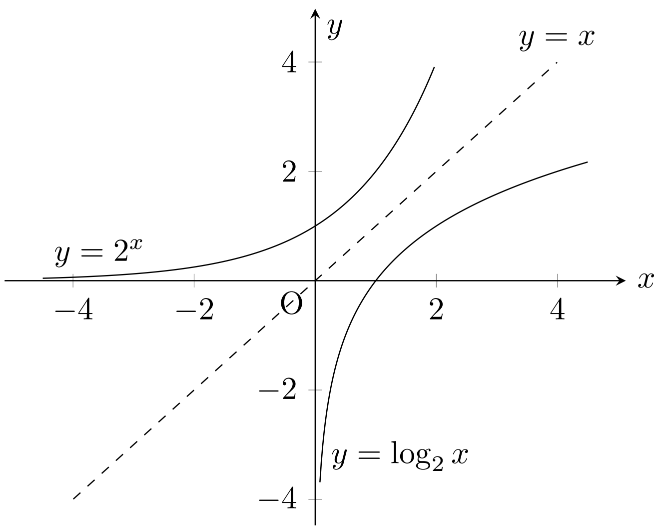


図 2.10: 指数関数と対数関数のグラフの図示

2.5　三角関数

自然現象をはじめとする様々な現象を観察すると，おおまかに比例関係・指数増加・周期変化の組み合わせであることが確認できる．つまり，とある現象をモデル化する（数式で記述する）ためには，それら一つ一つに数式を対応させなければならない．例えば，比例関係は代数関数 $f(x) = ax + b$ と，指数増加は指数関数 $f(x) = Ca^x$ と，それぞれ対応づけることができる．この節では，周期変化を記述するための関数として，三角関数を定義し，その性質を見ていく．

定義 2.42 (周期関数)

関数 f の始域の要素 T に対して，常に $f(x) = f(x + T)$ が成り立つとき，関数 f は**周期的**であるといい，f を**周期関数**と呼ぶ．また，関数を周期的にするような T のうち，絶対値が最小かつ正のものを**周期**と呼ぶ．

定義 2.43 (単位円)

関係 $R = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$ のグラフを，**単位円**と呼ぶ．

定義 2.44 (動径)

ある半直線 OA が与えられているとき，半直線 OA を，点 O を中心に θ だけ回転させた半直線 OP のことを**動径**と呼ぶ．また，半直線 OA のことを**始線**と呼ぶ．

注意. θ が正のとき，反時計回りに回転し，θ が負のとき，時計回りに回転するものと定義する．

注意. 円と x 軸との交点のうち，x 座標が正のものを点 A として，原点 O から伸びる半直線 OA を始線とするとき，円と動径の交点が点 P である．

定義 2.45 (弧度法)

動径 OP と単位円周上の点 $\mathrm{A} = (1, 0)$ が与えられているとき，弧 AP の長さが 1 になるような動径の角度 θ を $1\,\mathrm{rad}$ と定義する．この角度の決め方を，弧度法という．弧度法に対して，円周一周分の角度を 360° と定義する方法を，度数法という．

例. $360^\circ = 2\pi\,\mathrm{rad}$ である．

定義 2.46 (三角関数)

単位円周上の点 A $= (1,0)$ を用いて始線 OA を定める．このとき，角度 θ を決めることによって，単位円と動径の交点 P の座標は一意的に決定できる．また，動径の定義より，角度の変化に伴う座標の変化は周期的になる．ここで，角度 θ と点 P の x 座標の関係 $\theta \mapsto x$，角度 θ と点 P の y 座標の関係 $\theta \mapsto y$ は，それぞれ写像の定義を満たす．そのため，$x = f(\theta) = \cos(\theta)$，$y = g(\theta) = \sin(\theta)$ と定義すると，写像 f, g は，周期 2π の周期関数 $f, g : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ となる．

また，動径 OP と直線 $x = 1$ との交点を T とすると，点 T の y 座標は，すべての実数を取り得る．この関係 $\theta \mapsto y$ も写像の定義を満たすため，$y = h(\theta) = \tan(\theta)$ と定義すると，写像 h は，周期 π の周期関数 $h : \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ となる．

図 2.11 は，三角関数の定義を図示したものである．

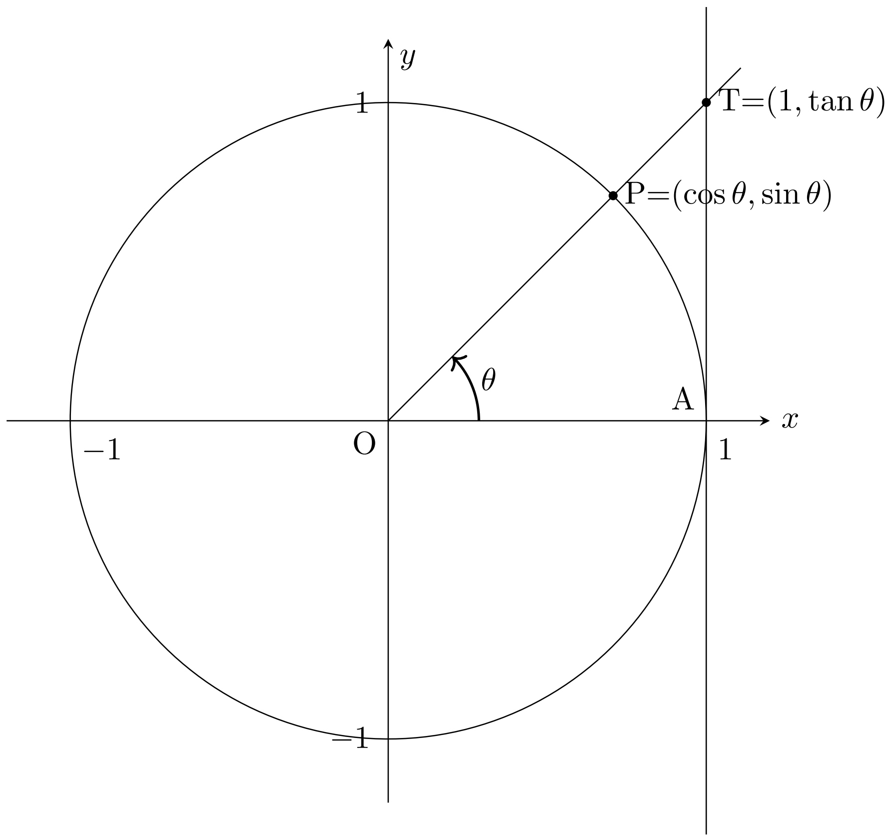


図 2.11: 三角関数の定義

注意. 括弧の中身が複雑でない場合，$\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ のように括弧が省略されて書かれることが多い．

注意. 円と動径の交点 P の座標を (x, y)，線分 OP の長さを r とすると，

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\csc\theta = \frac{r}{y} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

のように x, y, r の組み合わせ 6 種類を考えることができる．これらは，定義 2.46 の別な形であり，これら 6 つの関数のことを**三角関数**と呼ぶ．

例. xy 平面の，原点から見て右上・左上・左下・右下の領域を，それぞれ第一象限・第二象限・第三象限・第四象限と呼ぶ．定義より，三角関数の値がとる符号は，動径がどの象限に入るかによって定まり，それを図示したものが，図 2.12 である．

図 2.12: 三角関数の値の符号

例. 特徴的な三角関数の値を表 2.3 に示す．他の角度における三角関数の値は，動径がどの象限にあるのか，表に載っている角度とどのような関係にあるのか，などいくつかの条件をもとに考えるとよい．

表 2.3: 三角関数の代表値

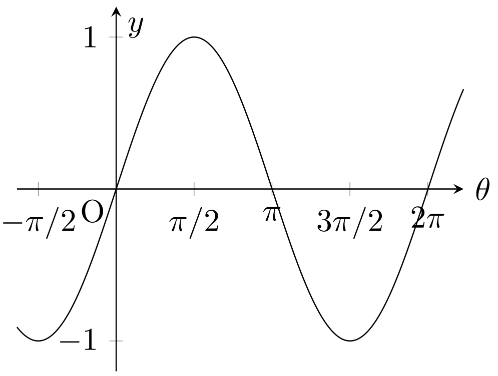
θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\theta$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0
$\tan\theta$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

定理 2.47 (三角関数の相互関係)

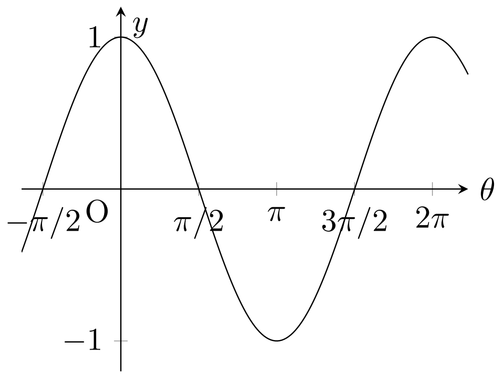
三角関数の定義より，以下の相互関係が導かれる．

1. $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
2. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
3. $\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta$

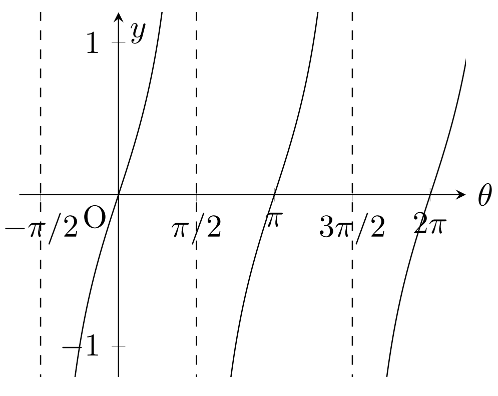
三角関数のグラフを，図 2.13 に示す．



(a) $\sin\theta$ のグラフ



(b) $\cos\theta$ のグラフ



(c) $\tan\theta$ のグラフ

図 2.13: 三角関数のグラフ

定義 2.48 (偶関数)
関数 f について，常に $f(-x) = f(x)$ が成り立つとき，関数 f を**偶関数**と呼ぶ．このとき，グラフは y 軸に関して対称となる．

定義 2.49 (奇関数)
関数 f について，常に $f(-x) = -f(x)$ が成り立つとき，関数 f を**奇関数**と呼ぶ．このとき，グラフは原点に関して対称となる．

例. 関数 $f(\theta) = \cos\theta$ は，偶関数である．関数 $f(\theta) = \sin\theta$，$f(\theta) = \tan\theta$ は，奇関数である．

定理 2.50 (加法定理)
実数 α, β について，以下の等式が成り立つ．

1. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
2. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

例. 三角関数の加法定理を第一象限内で図示したものが，図 2.14 である．

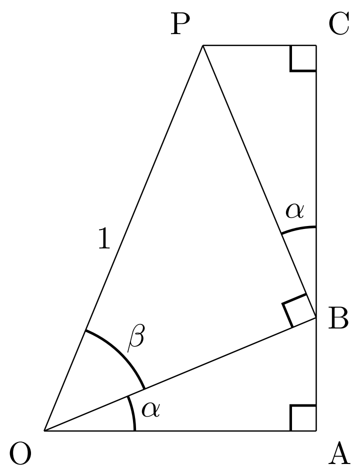


図 2.14: 加法定理の幾何学的意味

例. 例えば，$105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$ であるため，

$$
\begin{aligned}
\sin 105^\circ &= \sin\left(60^\circ + 45^\circ\right) \\
&= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}
$$

と計算することができる．

2.6　逆三角関数

この節では，三角関数の逆関数として，逆三角関数を定義する．そもそも三角関数は，周期関数であるため，単射ではなく，逆関数を作ることができない．そのため，0 を含むような 1 周期を始域とする制限された三角関数を考えることで，単射とすることができ，逆三角関数を定義することができるようになる．

定義 2.51 (逆三角関数)

制限された三角関数を，

$$\begin{aligned} \sin &: [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1] \\ \cos &: [0, \pi] \to [-1, 1] \\ \tan &: (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

とする．このとき．それぞれの逆三角関数を，

$$\begin{aligned} \arcsin &: [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2] \\ \arccos &: [-1, 1] \to [0, \pi] \\ \arctan &: \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2) \end{aligned}$$

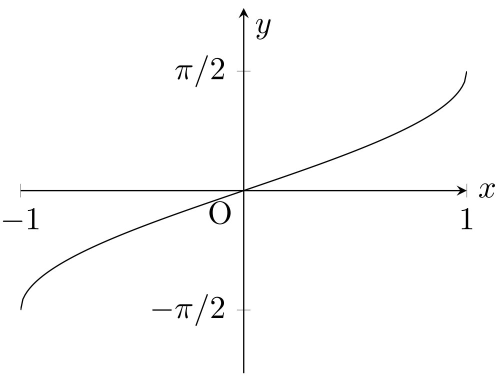
と定義する．

注意． 逆三角関数 $\arcsin, \arccos, \arctan$ のことを，$\sin^{-1}, \cos^{-1}, \tan^{-1}$ と表記することもある．この表記は，x^{-1} のような逆数としての -1 との混乱を生む可能性があるため，この文書では使わない．

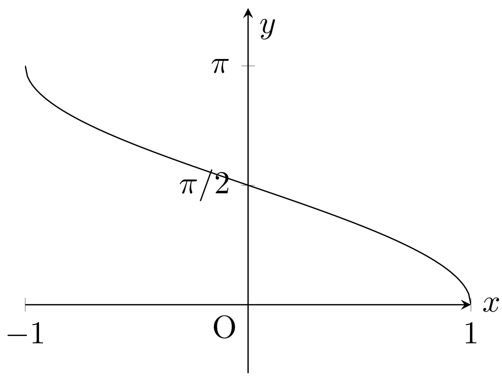
例． $\sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ より，$\arcsin(1/\sqrt{2}) = \pi/4$ である．

例． 指数関数・対数関数と同様に，逆関数の関係にあるため，$\sin(\arcsin(x)) = x$ である．

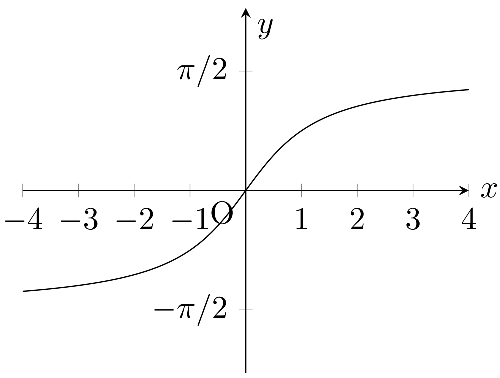
逆三角関数のグラフを，図 2.15 に示す．$f(x) = \arcsin x$ と $f(x) = \arctan x$ は，単調増加であり，$f(x) = \arccos x$ は，単調減少である．



(a) $\arcsin x$ のグラフ



(b) $\arccos x$ のグラフ



(c) $\arctan x$ のグラフ

図 2.15: 逆三角関数のグラフ

第 3 章

微分

この章では，微分に関する諸概念を定義したあと，初等関数の微分について触れる．その後，ライプニッツの公式など，微分における重要な事例を観察し，初等関数のグラフの概形が書けるよう計算練習を行う．

また，この章では断りがない限り，関数の始域と終域を，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合に限定して考えるものとする．

3.1　微分とは

第 1 章において，微分とは「微かな変化」を捉えるための数学である，ということに触れた．ここでいう「微かな変化」とは，関数 f について，変数 x の微小な変化に対する，関数の値 $f(x)$ の変化の具合のことである．とりわけ，注目したいことがらは，変数 x の変化に対して，どのぐらい急激に，あるいは緩慢に，関数の値 $f(x)$ が変化しているか，であり，すなわち，それぞれの変化量の比をとった変化率を考えたいということになる．また，「“微かな” 変化」と記述されているように，変数 x の変化量は，できる限り小さく，最終的には 0 に限りなく近い微小な量としたい．しかしながら，変数 x の変化量を 0 とすることは，分母が 0 になることと同義であり，数学的に許可されない演算である．

そのため，ここで重要となってくるのは，関数 f について，定義されていない点付近における挙動である．例えば，関数 $f(x) = 1/x$ や関数 $g(x) = \tan x$ について，f は点 $x = 0$ において，g は点 $x = \pi/2$ において，それぞれ定義されることがなかった．では，それらの定義されなかった点へと “近づいていった” 場合，どのような挙動を示すのだろうか．この “近づいていった” 場合の挙動を調べるのが，「極限を取る」という概念であり，数学的な操作である．

「極限を取る」という操作が許された場合，関数 f の変化率における，変数 x の変化量を 0 へと近づけていくことが同時に許される．特に，ある点 $x = a$ における関数 f の変化率について，変数 x の変化量を 0 へと限りなく近づけた値は，微分係数と呼ばれ，その点における接線の傾きと等しくなる．この微分係数を求めることこそが，微分における第一の目的であり，そこから派生するように，関数が定義されている区間に対して微分係

数を関係づけるような新しい写像（導関数）を見つける，導関数の性質を深く調べる，といった新しい興味・関心が生まれた．

この節では，まず極限について定義し，その後，微分係数と導関数を定義する．また，極限に関連する概念として，関数における連続性という性質を定義する．連続かどうか，という性質は，微分にまつわる先人たちが残した定理において，非常に重要な前提となるため，ここで取り上げることにする．

定義 3.1 (極限)

関数 f について，ある実数 a に向かって，x が減少するように近づいていったとき，関数 f の値がどのようになるか調べることを，**右極限**を取る，という．同様に，ある実数 a に向かって，x が増加するように近づいていったとき，関数 f の値がどのようになるか調べることを，**左極限**を取る，という．

このとき，ある実数 b になる場合，右（左）極限は，**収束**する，といい，収束しない場合，右（左）極限は，**発散**する，という．特に，発散する場合において，関数 f の値が正のまま，どんな正の数よりも絶対値が大きくなる場合，正の無限大 ∞ に**発散**する，といい，f の値が負のまま，どんな負の数よりも絶対値が大きくなる場合，負の無限大 $-\infty$ に**発散**する，という．また，∞ にも $-\infty$ にも発散しない場合，**振動**する，という．

右極限・左極限を取る操作のことを，それぞれ，

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \qquad\qquad \lim_{x \to a^-} f(x)$$

と表記する．収束・発散によらず，右（左）極限を取った結果を，単に右（左）極限と呼ぶことがある．一般に，右極限と左極限が一致する場合，これを**極限**といい，

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

と表記する[*1]．また，極限が収束する場合，その収束する値を，**極限値**あるいは単に極限と呼ぶことがある[*1]．

[*1] この定義から分かることは，“極限” の存在と，“極限値” の存在（極限の収束・発散，言い換えれば，極限が有限の値であるか，無限大であるか）は，別の話であるということである．極限に由来する定義・定理が出てきた場合（e.g. 微分係数），どちらの存在を条件としているのか，“極限” という用語を注意深く観察し，文脈から判断しなければならない．これは，「極限を取る」という操作の結果と，極限値に対して，“極限” という用語を割り当てたことに由来する．

注意. 右極限・左極限は，右側極限・左側極限と呼ばれることもある．また，数式での表現も複数あり，

$$\lim_{x\to a^+} f(x), \quad \lim_{x\downarrow a}, \quad \lim_{x\searrow a}, \quad \lim_{x\to a+0}$$

は，すべて右極限を表し，

$$\lim_{x\to a^-} f(x), \quad \lim_{x\uparrow a}, \quad \lim_{x\nearrow a}, \quad \lim_{x\to a-0}$$

は，すべて左極限を表す．

注意. また，極限を考える場合，関数の振る舞いとして，x の絶対値が十分に大きくなった場合，どうなるのか知りたいという場面がある．そのような振る舞いを記述するため，x の符号を正のまま，どんな正の数よりも絶対値が大きくなるように増加させていったとき，関数 f の値がどのようになるか調べることを，（正の無限大へ近づけていったときの）極限を取る，という．また，x の符号を負のまま，どんな負の数よりも絶対値が大きくなるように減少させていったとき，関数 f の値がどのようになるか調べることを，（負の無限大へ近づけていったときの）極限を取る，という．

正の無限大・負の無限大への極限を取る操作のことを，それぞれ

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

と表記し，その結果を，**極限**と呼ぶ．収束・発散の考え方は，ある実数に向かって x を近づけていったときの極限と同様である．

注意. 極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ が，ある実数 b に収束する場合，$x \to a$ のとき $f(x) \to b$ である，ということもある．特に，正の無限大に発散する場合は，$x \to a$ のとき $f(x) \to \infty$ である，といい，こちらの表記法で書かれる場合も多い．また，正の無限大への極限を考えた場合に，ある実数 b に収束することを，$x \to \infty$ のとき $f(x) \to b$ である，ということもできる．負の無限大に発散する場合，負の無限大への極限を考えた場合も同様である．

例. 関数 $f(x) = 1/x$ について,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

である．関数 $g(x) = \tan x$ について,

$$\lim_{x \to \pi/2^+} \tan x = -\infty \qquad \lim_{x \to \pi/2^-} \tan x = \infty$$

である．関数 $h(x) = |x|$ について,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} |x| &= \lim_{x \to 0^+} x \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} |x| &= \lim_{x \to 0^-} (-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるため,

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0$$

である．

例. 指数関数 $f(x) = a^x$ について，$a > 1$ のとき,

$$\lim_{x \to \infty} a^x = \infty \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

であり，$0 < a < 1$ のとき,

$$\lim_{x \to \infty} a^x = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = \infty$$

である．対数関数 $g(x) = \log_a x$ について，$a > 1$ のとき,

$$\lim_{x \to \infty} \log_a x = \infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$$

であり，$0 < a < 1$ のとき,

$$\lim_{x \to \infty} \log_a x = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \log_a x = \infty$$

である．三角関数について，正の無限大・負の無限大への極限を取る操作を行った場合,
極限値は存在しない（振動する）.

定理 3.2 (極限の性質)

$\alpha = \lim_{x \to a} f(x)$，$\beta = \lim_{x \to a} g(x)$，実数 k が与えられているとき，以下の性質を満たす.

1. $\lim_{x \to a} kf(x) = k\alpha$
2. $\lim_{x \to a} f(x) \pm g(x) = \alpha \pm \beta$
3. $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$
4. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$

注意. 特に，1 番目と 2 番目の性質は，**線型性**と呼ばれ，数学においてたびたび登場する重要な概念である.

例.

定理 3.3 (極限の性質)

$l < a < u$ とし，点 $x = a$ を除いた区間 (l, u) において定義された関数 f, g, h が与えられているとき，以下の性質を満たす．ここで，$\alpha = \lim_{x \to a} f(x)$，$\beta = \lim_{x \to a} g(x)$ とする．

5. $(l, u) \setminus \{ a \}$ において，$f(x) \leq g(x)$ を満たすならば，$\alpha \leq \beta$

6. $(l, u) \setminus \{ a \}$ において, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ を満たし, $\alpha = \beta$ ならば, $\lim_{x \to a} h(x) = \alpha$

注意． 6 番目の性質を，**はさみうちの原理**と呼ぶ．

例． 極限 $\lim_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$ を調べる．$-1 \leq \sin \dfrac{1}{x} \leq 1$ より，

$$0 \leq \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$$
$$0 \leq |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$
$$0 \leq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

となる．ここで，$\lim_{x \to 0} |x| = 0$ であるため，はさみうちの原理より，

$$\lim_{x \to 0} \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = 0$$

となる．よって，

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

である．

定義 3.4 (連続)

関数 f について，ある実数 a への極限が，関数の値 $f(a)$ と一致するとき，関数 f は，点 $x=a$ で**連続**である，という．同様に，開区間 (a,b) や閉区間 $[a,b]$ における全ての点で連続であるとき，関数 f は，区間 (a,b)（または，$[a,b]$）で**連続**である，という．

注意. 極限と関数の値が一致しない場合，**不連続**であるという．区間においては，不連続な点が 1 つでも存在すれば，その区間において不連続である．

注意. 関数 f について，ある実数 a への右極限が，関数の値 $f(a)$ と一致するとき，関数 f は，点 $x=a$ で**右連続**である，という．同様に，ある実数 a への左極限が，関数の値 $f(a)$ と一致するとき，関数 f は，点 $x=a$ で**左連続**である，という．つまり，右連続かつ左連続であるとき，連続であるといえる．

例. 次のような 4 つの関数を考える．それぞれのグラフを図示したものが，図 3.1 である．

$$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = \begin{cases} x & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

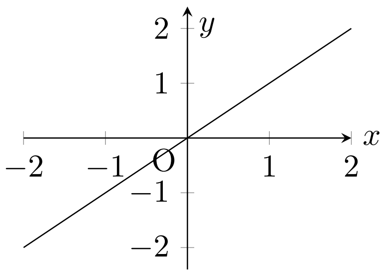
$$f_3(x) = \begin{cases} x+1 & (x \geq 0) \\ x-1 & (x < 0) \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} x+1 & (x > 0) \\ x-1 & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$f_5(x) = \begin{cases} x+1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ x-1 & (x < 0) \end{cases}$$

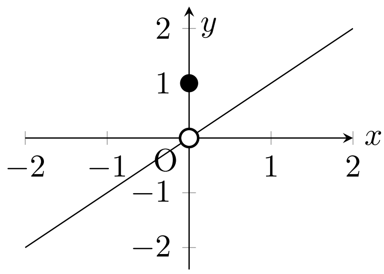
点 $x=0$ における，それぞれの関数の極限値を考える．f_1, f_2 について，点 $x=0$ での極限は 0 である．ここで，$f_1(0)=0$，$f_2(0)=1$ であるため，f_1 は $x=0$ で連続であるが，f_2 は不連続である．また，f_3, f_4, f_5 について，点 $x=0$ での右極限は 1 であり，左極限は -1 である．ここで，$f_2(0)=1$，$f_3(0)=-1$，$f_4(0)=0$ であるため，表 3.1 に示すような連続性が得られる．

表 3.1: 関数の連続性

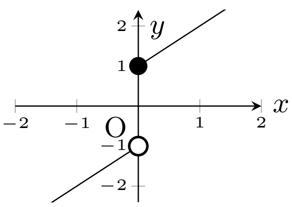
	右連続	左連続	連続
f_3	✓	✗	✗
f_4	✗	✓	✗
f_5	✗	✗	✗



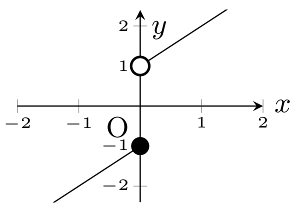
(a) $f_1(x)$ のグラフ



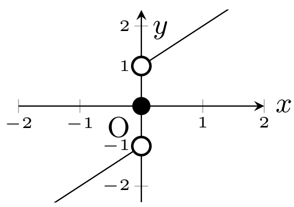
(b) $f_2(x)$ のグラフ



(c) $f_3(x)$ のグラフ



(d) $f_4(x)$ のグラフ



(e) $f_5(x)$ のグラフ

図 3.1: 連続な関数と不連続な関数の例

定義 3.5 (平均変化率)

関数 f について，ある点 $x=a$ から Δx だけ離れた点 $x=a+\Delta x$ との間における，関数の値の差の比のことを，**平均変化率**といい，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

と表記する．Δx，Δy をそれぞれ x の**増分**，y の増分と呼ぶ．

例. 関数 $f(x)=x^2$ について，点 $x=1$ における平均変化率を，増分 Δx をパラメータにしてまとめたものが，表 3.2 である．

表 3.2: $f(x)=x^2$ について，$x=1$ における平均変化率の表

Δx	0.5	1	2	3
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	2.5	3	4	5

また，平均変化率は，点 $(x,f(x))$ と点 $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ との間を通る直線の傾きを表している指標である．実際に，点 $x=1$ と増分 $\Delta x=1,2$ を例に，2 点間の直線を加えたものが，図 3.2 である．

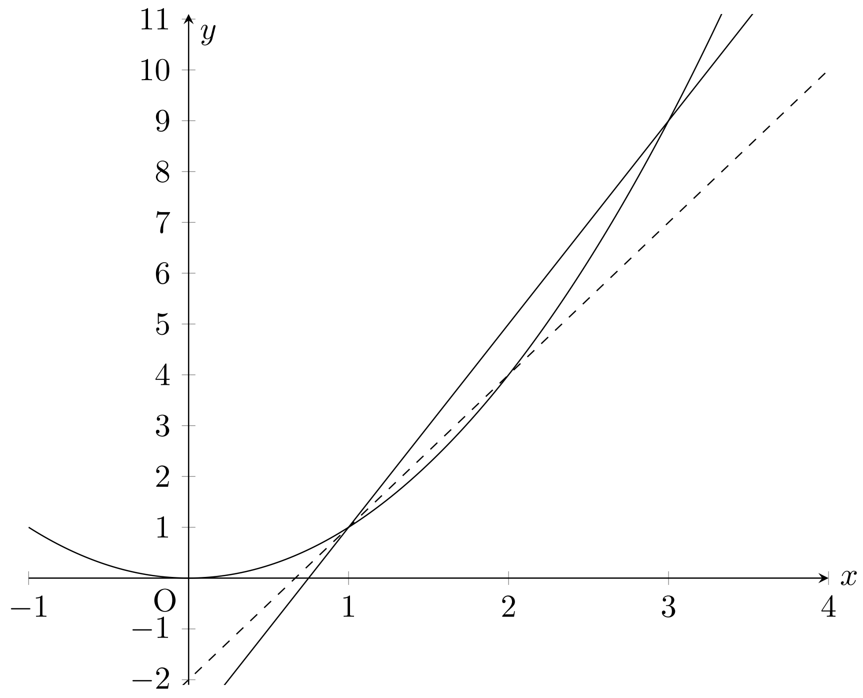


図 3.2: $f(x)=x^2$ における平均変化率に関するグラフ

定義 3.6 (微分係数)

関数 f について，ある点 $x=a$ における平均変化率 $\Delta y/\Delta x$ を考える．この平均変化率について，Δx を 0 へと向かわせる極限を取ったとき，極限が収束するならば，その極限値を，点 $x=a$ における**微分係数**と呼び，$f'(a)$ と表記する．

定義 3.7 (微分可能)

関数 f について，ある点 $x=a$ における微分係数が存在するとき，関数 f は，点 $x=a$ で**微分可能**である，という．同様に，開区間 (a,b) や閉区間 $[a,b]$ における全ての点で微分可能であるとき，関数 f は，区間 (a,b)（または，$[a,b]$）で**微分可能**である，という．

注意. 微分係数は，平均変化率における極限を調べ，（もしあれば）その極限値で定義される．そのため，右極限・左極限を調べることによって，それぞれ**右微分係数** $f'_+(a)$ と**左微分係数** $f'_-(a)$ を定義することができる．また，**右微分可能・左微分可能**を，それぞれ右微分係数・左微分係数を用いて定義することができる．

注意.「関数 f は，点 $x=a$ において微分可能か？」という問いがあったとき，点 $x=a$ における平均変化率の Δx を 0 へと近づけるような極限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

を考え，それが収束するかどうかを調べればよい．もし，収束するならば微分可能であり，収束しない（極限値が存在しない，極限が発散する）のであれば微分不可能であるということがわかる．

注意. 定性的な話をすれば，ほとんどの場合，微分可能な関数とは，滑らかなグラフが描画されるような関数であり，微分不可能な関数とは，尖ったグラフが描画されるような関数である．これは，一筆書きできるような，線で繋がったグラフを持つような関数と，連続な関数との関連付けと類似したものである．

例. 関数 $f(x) = x$ について，点 $x = 0$ における微分係数を調べると，

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - 0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

であるため，関数 $f(x)$ は，$x = 0$ において微分可能である．

関数 $g(x) = |x|$ について，点 $x = 0$ における微分係数を調べる．

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - |0|}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \end{aligned}$$

ここで，右極限と左極限をそれぞれ調べると，

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^+} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^-} (-1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

となり，結果が一致しないため，極限値が存在しない．つまり，微分係数が存在しないため，関数 $g(x)$ は，$x = 0$ において微分不可能である．

例. 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & (x \geq 0) \\ -\sqrt{-x} & (x < 0) \end{cases}$$

と定義する．このとき，この関数のグラフは図 3.3 のようになり，点 $x = 0$ において連続である．そこで，点 $x = 0$ における微分可能性を調べる．

微分係数の定義より，

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

ここで，右極限と左極限をそれぞれ調べると，

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x \sqrt{\Delta x}} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} \\ &= \infty \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\sqrt{-\Delta x}}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta x}{\Delta x \sqrt{-\Delta x}} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{1}{\sqrt{-\Delta x}} \\ &= \infty \end{aligned}$$

となり，結果が一致するため，極限 $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x}$ は存在する．しかし，極限を取った結果，正の無限大へと発散することが分かったため，極限値は存在しない．つまり，微分係数が存在しないため，関数 $f(x)$ は，$x = 0$ において微分不可能である．

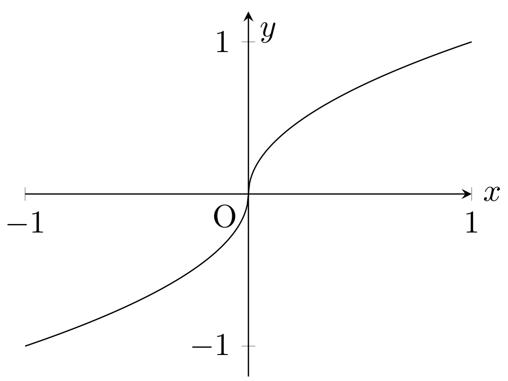


図 3.3: $f(x)$ のグラフ

定理 3.8

関数 f が微分可能であるとき，関数 f は連続である．

定義 3.9 (導関数)

区間 (a,b) において[*1]微分可能である関数 f について，その区間上の実数 c と微分係数 $f'(c)$ の関係 $c \mapsto f'(c)$ は，関数の定義を満たす．この新しく作られた関数は，もとの関数 f より導かれる関数であるため，**導関数**と呼ばれる．また，導関数を作る際に，微分係数が用いられるため，はじめて導関数を考える場合は，

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

を計算することが多い．

注意． 関数 f から，導関数 f' を求めることを，**微分**する，という．とりわけ，元となる関数の変数を強調する場合には，「関数 f を変数 x について微分する」「関数 f を変数 x に関して微分する」などという．また，導関数 f' のことを，単に関数 f の**微分**ということも多く，動詞としての微分と名詞としての微分に，注意する必要がある．特に，名詞としての微分については，f' 以外に，

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f, \quad \dot{f}, \quad Df$$

など様々な表記法が存在するため，それぞれが微分を表すということを知っておく必要がある．この文書中では，「(変数によらず) 関数 f の微分である」「関数 f から作られた導関数である」ということを強調するとき f' を，「関数 f を変数 x について微分している」ということを強調するとき $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ や $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)f$ を使用するものとする．

他にも，関数 $y = f(x)$ において，導関数の元となる微分係数は，ある点における平均変化率 $\Delta y/\Delta x$ の極限であるということから，導関数を変化量の比の極限と位置づけ，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad y'$$

などと表記することもある．

[*1] 閉区間 $[a,b]$ について，導関数を考えたければ，開区間の端点である a, b について，点 a が右微分可能か，点 b が左微分可能かどうかを確かめれば十分である．もし，端点が右（左）微分不可能であれば，元の関数は，開区間においてのみ導関数が存在することになる．

定義 3.10 (合成関数)

関数 f, g が与えられているとき，$\mathrm{Im}\, f \subseteq \mathrm{dom}\, g$ が成り立つならば，$\mathrm{dom}\, f$ の要素に対して，$\mathrm{Im}\, g$ の要素を関係づけるような新しい関数を作ることができる．この新しく作られた関数を，**合成関数**と呼び，$g \circ f$ と表記する．合成関数の変数を明示する場合は，$g(f(x))$ や $(g \circ f)(x)$ と表記される．

例. 関数 $f(x) = x^2 + 3$，$g(t) = \sin t$ について，

$$g(f(x)) = \sin(x^2 + 3)$$
$$f(g(t)) = \sin^2 t + 3$$

である．$g(f(x))$ においては，$g(t)$ の変数 t を $f(x)$ で置き換え，$f(g(t))$ においては，$f(x)$ の変数 x を $g(t)$ で置き換えた．

定理 3.11 (微分の性質)

区間 (a, b) において微分可能である関数 f, g と実数 k が与えられているとき，以下の性質を満たす．

1. $(kf)' = kf'$
2. $(f \pm g)' = f' \pm g'$
3. $(fg)' = f'g + fg'$
4. $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$

注意. 変数を明示して，定理 3.11 を書き直すと，以下のようになる．ここで，変数は x とする．

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(kf) = k\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$
2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \pm g) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \pm \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$
3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g + f\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$
4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g \circ f) = (\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \circ f)\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$

特に，4 番目の合成関数の微分に関する性質は，$y = g(x)$，$x = f(t)$ とおき，変化量の比の極限とみなすことにより，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

と表すことができる[*2]．また，実用上 $h(x) = g\left(f(x)\right)$ とおき，

$$h'(x) = \{g\left(f(x)\right)\}' = g'\left(f(x)\right) f'(x)$$

と表記することが多い．

定義 3.12 (C^n 級)

関数 f が，n 回微分可能で，その n 階導関数が連続であるとき，関数 f は C^n 級である，という．この関数の分類について，$\mathrm{C}^0 \supset \mathrm{C}^1 \cdots \mathrm{C}^\infty$ なる包含関係が成り立つ．

[*2] $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ は，t が微小に変化したとき y がどれだけ変化するかの比であり，それは，t の変化量と x の変化量の比の極限である $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ と，x の変化量と y の変化量の比の極限である $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ との積に等しいということを主張している．

3.2　初等関数の微分

この節では，第 2 章で学んだ初等関数について，導関数を求めていく．

3.2.1　代数関数の微分 I

定理 3.13

n を整数とする．このとき，$f(x) = x^n$ とすると，その導関数は，

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

となる．

証明: まず，n を自然数に限定する．

(1) $n = 1$ のとき，$f(x) = x$ として，その導関数は，

$$\begin{aligned} f'(x) = (x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x + \Delta x\right) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 1 \\ &= 1 \\ &= 1 \cdot x^0 = 1 \cdot x^{1-1} \end{aligned}$$

となるため，成り立つ．

(2) $n = k$ のとき，$f(x) = x^k$ として，

$$f'(x) = \left(x^k\right)' = kx^{k-1}$$

が成り立つと仮定する．

$n=k+1$ のとき，$f(x)=x^{k+1}$ として，その導関数は，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^{k+1}\right)' \\ &= \left(x^k \cdot x\right)' \\ &= \left(x^k\right)' \cdot x + x^k \cdot (x)' \\ &= kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 \\ &= kx^k + x^k \\ &= (k+1)x^k \\ &= (k+1)x^{(k+1)-1} \end{aligned}$$

となるため，成り立つ．

よって，数学的帰納法より，全ての自然数 n について，$(x^n)' = nx^{n-1}$ が成り立つ。

次に，合成関数の微分の性質を用いて，自然数の結果を負の整数へと拡張する．ここでは，n を自然数，m を負の整数，$f(x)=x^n$，$g(x)=1/x$ とする．$m=-n$ とおくと，

$$h(x) = x^m = x^{-n} = \frac{1}{x^n} = g\left(f(x)\right)$$

のような合成関数を考えることができる．このとき，その導関数は，

$$\begin{aligned} (x^m)' = h'(x) &= g'\left(f(x)\right) \cdot f'(x) \\ &= -\frac{1}{\left(x^n\right)^2} \cdot nx^{n-1} \\ &= -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} \\ &= -nx^{n-1}x^{-2n} \\ &= -nx^{-n-1} \\ &= mx^{m-1} \end{aligned}$$

となるため，負の整数においても成り立つ．また，$n=0$ のとき，$f(x)=x^0=1$ とすると，その導関数は 0 となるため，成り立つ．

以上より，全ての整数 n について，$(x^n)' = nx^{n-1}$ が成り立つことが示された．(Q.E.D.)

参考文献

[1] 斎藤毅, **微積分**. 東京大学出版会, 2013.

[2] 栗田稔, **新講　微積分学**. 学術図書出版社, 1971.

[3] 田島一郎, 渡部隆一, and 宮崎浩, **微分積分**. 培風館, 1978.

[4] 貴志一男, **微分積分学**. 新曜社, 1980.

[5] 尾康弘, **教養課程　微分積分**. 裳華房, 1988.

[6] 前野昌弘, **ヴィジュアルガイド物理数学** *1* **変数の微積分と常微分方程式**. 東京図書, 2016.

[7] S. Lipschutz, **離散数学　コンピュータサイエンスの基礎数学**. オーム社, 1995.

[8] 新井紀子, **数学は言葉**, ser. Math stories / 上野健爾, 新井紀子監修. 東京図書, 2009.

[9] 蟹江幸博, **数学の作法**. 近代科学社, 2016.

[10] 結城浩, **数学ガールの秘密ノート　微分を追いかけて**, ser. 数学ガール. SB クリエイティブ, 2015.

[11] ——, **数学ガールの秘密ノート　積分を見つめて**, ser. 数学ガール. SB クリエイティブ, 2017.