微積分

Yuki M.

October 4, 2017

目次

第 1 章　はじめに 1

1.1 微積分とは? 1

1.2 講義の内容 1

1.3 到達目標 2

1.4 評価基準 3

1.5 日程と進め方 3

第 2 章　初等関数 5

2.1 関数とは 5

2.2 代数関数 10

参考文献 11

第 1 章 はじめに

この資料は，微積分学の講義のための参考資料です．自分の備忘録も兼ねているのでやや冗長な表現もあるやもしれません．筆者もまだまだ勉強中であるため，理解が追いつかず根本的に誤解している箇所があるかと思います．ぜひとも，「ここの文章はおかしいのではないか？」等のご指摘をお待ちしております．また，誤字・脱字，および論理的な誤りがあればご一報ください．

1.1 微積分とは?

微積分は線形代数と並び現代数学の基礎として，大学など高等教育機関において広く学ばれている教養科目である．また，線形代数と同様に，自然科学・工学をはじめとした応用科学・社会科学など幅広い分野で応用されている計算ツールである．

そもそも微積分とは，簡単に言ってしまえば「変化」を捉えるための数学である．世の中の物理量（例えば，物体の速度や温度など）のほとんどは，位置や時間の変化に伴って変化する．その変化の度合いが，微かな変化の中にどれぐらいであったのかを，捉える数学が「微分」であり，変化の度合いの積み重ねから異なる位置・時間における物理量を予測する数学が「積分」である．

1.2 講義の内容

この講義においては，まず始めに表 1.1 に示すような初等関数を学ぶ．これは「変化」を捉える数学である「微積分」を学ぶ上で，大きな寄り道に思えるかもしれない．実際のところ「微分」「積分」の概念を理解することと，初等関数を理解することは，全く別の話である．しかし，これらの初等関数は，様々な現象を数式にモデル化する上で使用されるものであり，実用上において微積分と初等関数は切っても切れない関係にあることを理解してほしいため，まず始めに取り上げるものとする．

次に，微積分を学ぶ上で核となる「変化」を明確に記述するために極限と呼ばれる概念を取り上げる．つまり，微分とは「微かな変化」を捉えるための数学のことであったが，「“微かな” 変化」とは一体どのようなものなのか，微小量と呼ばれる考え方を導入し，微

表 1.1: 初等関数

	例
代数関数	$x^2 + x - 2$
指数関数	2^x
対数関数	$\log_2 x$
三角関数	$\sin x, \cos x, \tan x$
逆三角関数	$\arcsin x, \arccos x, \arctan x$

分が持つ本質的な意味を探っていく．

その後，定積分と呼ばれる微小量の積み重ねによって表される計量が，微分の逆演算としての不定積分を用いて計算した結果と等しくなる微分積分学の基本定理について取り上げ，積分が表す 2 通りの意味を理解し，先人たちが築き上げた大きな金字塔を追体験していく．

またこの講義では，微分・積分の概念の意味を理解すると同時に，初等関数の基本的な微分・積分の計算を行っていく．具体的には，様々な初等関数のグラフの概形や極値，様々な図形の面積・体積を求めるといった問題を想定している．

その上で，実用上欠かすことができない微分方程式や級数について触れ，もし時間があれば，多変数の微分・積分の初歩的概念について取り上げることとする．

1.3　到達目標

この講義では，以下に示す項目を達成することを目的とする．

(1) 微積分が持つ本質的な意味をつかむ．
(2) 微積分に関する基本的な計算ができるようになる．
(3) 微積分の知識を使い，初等関数のグラフの概形や基本的な図形の計量が求められるようになる．
(4) 単純な微分方程式が解けるようになる．
(*5) 各定理の主張が理解でき，その証明が追えるようになる．

(1)（2）については，受講者全員に達成してほしい目標として設定した．(3)（4）については，講義全体を通して身につけて欲しい計算力に関する目標である．(*5）については，高度な目的となるため，深くは言及しないが，論理的な思考力を身につけるため，ぜひチャレンジして欲しい目標である．

1.4　評価基準

表 1.2 にこの講義の評価基準を示す．この内，筆記試験については，中間試験を実施するかどうか履修人数が確定したタイミングで話し合いたいと考えている．また，実施する場合は，中間試験と期末試験の割合の比率についても同様に話し合いたい．

表 1.2: 評価項目とその割合

評価項目	割合
講義への出席	30％
毎回の課題	30％
筆記試験	40％

1.5　日程と進め方

表 1.3 にこの講義の日程を示す．原則として毎週水曜日と金曜日の 6 限 (17:40 – 19:10) に講義を行う．進め方としては，1 コマをさらに 2 つに分割して，45 分間を 1 つのブロックとし，新しい概念の説明と，それに付随する演習問題の解説を当てる予定である．毎回の課題については，小テストにするか宿題形式にするか現時点（2017/9/28）では決定していない．宿題形式の場合は，別途 Web サービスを通して提出という形を取っていきたい．

また，仮に中間試験を行うとすれば，11 月下旬を想定している．

表 1.3: 講義の日程とテーマ

日付	内容
10/04 10/06 10/11 10/13	初等関数の復習
10/18 10/20	極限と導関数
10/25 10/27 11/01 11/08	初等関数の微分
11/10 11/15	高階導関数
11/17 11/24	初等関数のグラフの概形と極大値・極小値
11/29 12/01	定積分と原始関数
12/06 12/08 12/13 12/15	初等関数の積分
12/20 12/22	図形の面積・体積と広義積分
12/27 01/05	微分方程式
01/10 01/12	級数
01/17 01/19	偏微分
01/24 01/26	重積分

第 2 章

初等関数

この章では，中学校・高等学校で学んだ**関数**について改めて定義を確かめ，その例である初等関数を個別に紹介する．

2.1 関数とは

数学における関数とは，ある集合から別の集合への対応関係を示したものである．イメージとして図 2.1 のようなブラックボックス（中身が分からない箱）を思い浮かべるとよい．ここでは，改めて用語を定義し，数学における関数を形作っていきたい．

図 2.1: 関数のイメージ

定義 2.1 (集合)

集合とは，ある対象（それは数であっても関数であっても，あるいは果物などであってもよい）を集めたものである．集合を構成する *1* つ *1* つの対象を**元**あるいは**要素**と呼ぶ．このとき，要素の順序や重複は気にしないものとする．また，対象が集合の要素であるかどうか真偽が決定できるように定義されなければならない．とくに，対象 a が集合 A の要素であるとき $a \in A$ と表記し，要素でないとき $a \notin A$ と表記する．

注意. $a \in A$ の読み方としては，「a は A の要素である」以外にも「a は A に属している」「A は a を要素として持つ」などがある．

例. $\{1,2,3\}$ や $\{$ りんご, ばなな, みかん $\}$ は，集合の例である．このように具体的な要素を列挙することを，**外延**記法という．また，$\{x \mid x$ は 10 以下の正の偶数$\}$ も集合の例である．このように集合に属する要素が満たすべき条件を明示することを，**内包**記法という．

例. $\{1,1,3\}$ と $\{1,3,1\}$ と $\{1,3\}$ は，同一の集合である．そのため，通常は，最も少ない要素数になるように，特定の順序に従って表記される．

例. 数の集合について，一般的に使われている記号を表 2.1 に示す．これら数の集合のように，要素数が無限になる集合もあり，ほとんどの場合，内包記法によって表記される．

表 2.1: 数の集合に用いられる記号

$\mathbb{N}$	自然数全体の集合
$\mathbb{Z}$	整数全体の集合
$\mathbb{Q}$	有理数全体の集合
$\mathbb{R}$	実数全体の集合
$\mathbb{C}$	複素数全体の集合

定義 2.2 (空集合)

集合において，要素が *1* つもない空っぽな集合を考えることができる．これを**空集合**といい，$\emptyset$ と表記する．

定義 2.3 (部分集合)

集合 X が，集合 S の**部分集合**であるとは，X の要素が全て S に属することである．このとき $X \subseteq S$ と表記する．

注意. $X \subseteq S$ の読み方としては，「X は S の部分集合である」以外にも「X は S に含まれる」「S は X を包含する」などがある．また，X が S の部分集合でない場合には，$X \not\subseteq S$ と表記される．

例. $\{1,2,3\}$ は，自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ の部分集合である．また，$\mathbb{N}$ は，整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ の部分集合である．

例. 集合 S について，空集合 $\emptyset$ と自分自身 S は，常に部分集合である．

複数の集合を用いて，新しい集合を作ることができる．ここでは，代表的なものを定義する．

定義 2.4 (和集合)

和集合 $A \cup B$ とは，集合 A と集合 B に属する要素を集めた集合のことである．

定義 2.5 (共通部分)

共通部分 $A \cap B$ とは，集合 A と集合 B に<u>同時に</u>属する要素を集めた集合のことである．

注意. $\cup$ は「または」と読み，$\cap$ は「かつ」と読む．

例. 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ と集合 $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ に対し，和集合 $A \cup B$ は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ であり，共通部分 $A \cap B$ は $\{3, 4, 5\}$ である．

定義 2.6 (差集合)

差集合 $A \setminus B$ とは，集合 A に属する要素のうち，集合 B に属していない要素を集めた集合のことである．

例. 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ と集合 $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ に対し，差集合 $A \setminus B$ は $\{1, 2\}$ である．整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ と集合 $\{0\}$ に対し，差集合 $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ は $\big\{ x \mid x \text{ は正の整数または負の整数} \big\}$ である．

ここまで定義した集合について，図示したものが図 2.2 である．

図 2.2: 集合の図示

定義 2.7 (順序組)

順序組とは，ある対象を集めたものである．このとき，集合とは違い，要素の順序や重複に意味があるものとする．

例. $(1,2)$ や $(\spadesuit, \mathrm{K})$ は，順序組の例である．このような 2 つの要素から成る順序組を**順序対**と呼ぶ．また，$(1,2)$ と $(2,1)$ は，異なる順序組であり，$(1,1,3)$ と $(1,3)$ も異なる順序組である．

定義 2.8 (直積集合)

直積集合 $A \times B$ とは，集合 A に属する要素と，集合 B に属する要素から，新たに順序対を作り，それら全てを要素とする集合のことである．このとき，$A \times B$ の要素である順序対 (a,b) は，直積集合の表記通りの順序を保たなければならない．つまり，$a \in A, b \in B$ である．

例. 集合 $A = \{1,2,3\}$ と集合 $B = \{\heartsuit, \diamondsuit\}$ に対し，直積集合 $A \times B$ は $\{(1,\heartsuit),(1,\diamondsuit),(2,\heartsuit),(2,\diamondsuit),(3,\heartsuit),(3,\diamondsuit)\}$ である．$(\heartsuit,1)$ など順序を逆にしたものは，$A \times B$ の要素ではない．

この直積集合を用いて，2 つの集合間に二項関係を築くことができる．

定義 2.9 (二項関係)

集合 A, B 間の**二項関係** R とは，直積集合 $A \times B$ の部分集合である．このとき，R の要素である順序対 (a,b) を，aRb と表記することもある．また，集合 A を**始集合**と呼び，集合 B を**終集合**と呼ぶ．

例. 集合 $A = \{1,2,3,4,5\}$ と集合 $B = \{3,4,5,6,7\}$ に対し，aRb を a は b を割り切る関係とする．このとき，関係 R は，

$$\{(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5)\}$$

である．

また，集合 A, B 間の二項関係 R について，一定の条件を満たすことで，性質が定義される．

定義 2.10 (一意性)

R は単射（左一意的）である. $\Leftrightarrow$ 集合 B の要素 b に対し，aRb が存在するならば，
a は一意的に決定できる.
R は関数的（右一意的）である. $\Leftrightarrow$ 集合 A の要素 a に対し，aRb が存在するならば，
b は一意的に決定できる.
R は一対一である. $\Leftrightarrow$ R は左一意的かつ右一意的である.

定義 2.11 (全域性)

R は全域的（左全域的）である. $\Leftrightarrow$ 集合 A の要素 a に対し，集合 B の要素 b が存在して，
二項関係 R は aRb を要素として持つ.
R は全射（右全域的）である. $\Leftrightarrow$ 集合 B の要素 b に対し，集合 A の要素 a が存在して，
二項関係 R は aRb を要素として持つ.
R は対応である. $\Leftrightarrow$ R は左全域的かつ右全域的である.

定義 2.12 (写像および全単射)

R は写像（一意対応）である. $\Leftrightarrow$ R は関数的（右一意的）かつ全域的（左全域的）である.
R は全単射（双射）である. $\Leftrightarrow$ R は単射かつ全射である.

定義 2.10 と定義 2.11 の一部を図示したものが，図 2.3 である.

図 2.3: 定義 2.10 と定義 2.11 の図示

定義 2.12 における写像の定義を言い換えたものが，定義 2.13 である．

定義 2.13 (写像)

写像 f とは，始集合 A と終集合 B との間の関係 R であり，始集合の要素 a について，一意的に aRb が決定できるものである．

定義 2.14 (関数)

関数 f とは，終集合が数の集合であるような写像のことである．

注意． 写像あるいは関数 f は，始集合 A と終集合 B を伴って $f : A \to B$ と表記される．また，始集合のことを**始域**と呼び $\mathrm{dom}\, f$ と表記する．同様に，終集合のことを**終域**と呼び $\mathrm{cod}\, f$ と表記する．これは，誤解を恐れずに言うならば方言のようなものである（発展するに当たって歴史的背景が異なる分野において，同じ意味を表す異なる単語があることは不思議ではない）．

注意． 写像あるいは関数 f について，特に要素の関係を強調する場合には，$f : a \mapsto b$ と表記される．f は関係であるため，要素として順序対 (a, b) を持つ．これを，afb と表記しても良いが，一般的に $f(a) = b$ と表記する．この a に対して，b が f によって指定されることを，「a が f によって b に写される」といい，b のことを a における f の**値**と呼ぶ．

例． 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^2$ について，始域と終域はともに実数全体の集合 $\mathbb{R}$ である．また，2 における f の値は，4 である．つまり，$f(2) = 4$ である．

定義 2.15 (像)

写像あるいは関数 f について，その**像** $\mathrm{Im}\, f$ とは，始域の要素に対する f の値を集めた集合のことである．像は，終域の部分集合である．

注意． 意味合いが似てるものに，値域と呼ばれる語句があるが，ほとんどの場合，像と同じ意味である．また，定義域と呼ばれる語句は，本来，始域の部分集合であるが，写像の場合は，始域と定義域は等しいので，ほとんど同一視されている．

例． 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^2$ について，像 $\mathrm{Im}\, f$ は，正の実数全体の集合 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ である．

2.2　代数関数

参考文献

[1] 斎藤毅, **微積分**. 東京大学出版会, 2013.

[2] 前野昌弘, **ヴィジュアルガイド物理数学 *1* 変数の微積分と常微分方程式**. 東京図書, 2016.

[3] 新井紀子, **数学は言葉**, ser. Math stories / 上野健爾, 新井紀子監修. 東京図書, 2009.

[4] 蟹江幸博, **数学の作法**. 近代科学社, 2016.

[5] 結城浩, **数学ガールの秘密ノート/微分を追いかけて**, ser. 数学ガール. SB クリエイティブ, 2015.

[6] ——, **数学ガールの秘密ノート/積分を見つめて**, ser. 数学ガール. SB クリエイティブ, 2017.