Nekaj o invariantnih podprostorih

Beno Učakar

Naj bosta V_1 in V_2 vektorska prostora ter $L\colon V_1 \times V_2 \to V_1 \times V_2$ linearna preslikava na zunanji direktni vsoti prostorov V_1 in V_2. Potem lahko na narave način definiramo linearni preslikavi $L_1\colon V_1 \to V_1$ in $L_2\colon V_2 \to L_V$, da velja $L(x_1, x_2) = (Lx_1, Lx_2)$. Kaj pa, če gledamo notranjo direktno vsoto? Tu bomo naleteli na pojem invariantnega podprostora.

Definicija 1. Vektorski podprostor U je invarianten podprostor linearne preslikave L, če velja $L(U) \subseteq U$

Vidimo torej, da če je prostor U invarianten, bo obnašanje preslikave L nekako ostalo znotraj prostora U. Na primer, če je $v \in V$ lastni vektor preslikave L za lastno vrednost λ, je prostor $U = \mathrm{Lin}\{v\}$ invarianten podprostor linearne preslikave L.

Reducirajoči podprostori

Naj bo sedaj prostor V notranja direktna vsota podprostorov U_1 in U_2, torej $V = U_1 \oplus U_2$. Potem lahko vsak vektor $x \in V$ na enoličen način zapišemo kot $x = x_1 + x_2$, kjer je $x_1 \in U_1$ in $x_2 \in U_2$. Če sta oba podprostora U_1 in U_2 še invariantna podprostora preslikave L, ju skupaj imenujemo reducirajoča podprostora. Definirajmo linearni preslikavi

$$L_1 = L_{U_1}\colon U_1 \to U_1 \quad \text{in} \quad L_2 = L_{U_2}\colon U_2 \to U_2.$$

Ker sta prostora U_1 in U_2 oba invariantna za preslikavo L, sta preslikavi L_1 in L_2 dobro definirani. Za poljuben vektor $x \in V$ lahko potem zapišemo

$$Lx = L(x_1 + x_2) = Lx_1 + Lx_2 = L_1x_1 + L_2x_2 = (L_1 \oplus L_2)(x_1 + x_2) = \\ = (L_1 \oplus L_2)x, \quad (1)$$

torej velja $L = L_1 \oplus L_2$. Če preslikavo L zapišemo matrično glede na razcep $V = U_1 \oplus U_2$, vidimo, da je

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix}$$

torej smo preslikavo L bločno diagonalizirali.

Za nadaljnje branje priporočamo učbenik Sheldona Axlerja, Linear Algebra Done Right [1].

Literatura

[1] Sheldon Jay Axler. *Linear Algebra Done Right.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 1997.