

## Hilfsmittel

GeoGebra, Paint, Rekursion-Skript (IMO-Training)

## Lösung zu Aufgabe 1

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion über  $n$ .

**Induktionsanfang:** Sei  $n = 1$ . Es gilt  $\frac{2^{(3^1)} + 1}{3^{1+1}} = \frac{8 + 1}{9} = 1$ .

**Induktionsannahme:** Es sei die Behauptung für  $n$  bereits bewiesen, es gelte also  $2^{(3^n)} + 1$  ist durch  $3^{n+1}$  teilbar.

**Induktionsschritt:** Unter Verwendung der Induktionsannahme zeigen wir nun die Behauptung für  $n + 1$ . Zu zeigen ist also, dass  $2^{(3^{n+1})} + 1$  durch  $3^{(n+1)+1} = 3^{n+1} \cdot 3$  teilbar ist.

$$\begin{aligned}
 & 2^{(3^{n+1})} + 1 \\
 &= 2^{(3^n \cdot 3)} + 1 \\
 &= 2^{(3^n)} \cdot 2^{(3^n)} \cdot 2^{(3^n)} + 1 \\
 &= 2^{(3^n)} \cdot 2^{(3^n)} \cdot (2^{(3^n)} + 1 - 1) + 1 \\
 &= 2^{(3^n)} \cdot 2^{(3^n)} \cdot (2^{(3^n)} + 1) - 2^{(3^n)} \cdot 2^{(3^n)} + 1 \\
 &= 2^{(3^n)} \cdot 2^{(3^n)} \cdot (2^{(3^n)} + 1) - 2^{(3^n)} \cdot (2^{(3^n)} + 1 - 1) + 1 \\
 &= 2^{(3^n)} \cdot 2^{(3^n)} \cdot (2^{(3^n)} + 1) - 2^{(3^n)} \cdot (2^{(3^n)} + 1) + (2^{(3^n)} + 1) \\
 &= (2^{(3^n)} + 1) \cdot [2^{(3^n)} \cdot 2^{(3^n)} - 2^{(3^n)} + 1] \\
 &= (2^{(3^n)} + 1) \cdot [2^{(3^n)} \cdot (2^{(3^n)} + 1 - 1) - 2^{(3^n)} + 1] \\
 &= (2^{(3^n)} + 1) \cdot [2^{(3^n)} \cdot (2^{(3^n)} + 1) - 2^{(3^n)} - 2^{(3^n)} + 1] \\
 &= (2^{(3^n)} + 1) \cdot [2^{(3^n)} \cdot (2^{(3^n)} + 1) - 2^{(3^n)} - 2^{(3^n)} + 1 + (2^{(3^n)} - 2^{(3^n)})] \\
 &= (2^{(3^n)} + 1) \cdot [2^{(3^n)} \cdot (2^{(3^n)} + 1) - (3 \cdot 2^{(3^n)}) + (2^{(3^n)} + 1)]
 \end{aligned}$$

ist durch  $3^{n+1} \cdot 3$  teilbar, da der erste Faktor nach Induktionsannahme durch  $3^{n+1}$  teilbar ist und die Einzelenden Summanden, in der jeweiligen Klammer des zweiten Faktors durch drei teilbar sind, da nach Induktionsannahme  $2^{(3^n)} + 1$  durch  $3^{n+1}$  teilbar ist, insbesondere also durch drei.

□

## Lösung zu Aufgabe 2

Als erstes rechnen wir aus, welche Werte  $x_n$  für  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$  annehmen kann.

Für  $n = 1$  erhalten wir

$$\left(\binom{1}{1-1} - 3^{1-1}\right) \cdot x_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \cdot x_1 = 0.$$

Somit kann  $x_1$  jeden reellen Wert für alle  $n \in \mathbb{N}$  annehmen.

Für  $n = 2$  erhalten wir

$$\left(\binom{2}{1-1} - 3^{2-1}\right) \cdot x_1 + \left(\binom{2}{2-1} - 3^{2-2}\right) \cdot x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x_1 + x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 2x_1 \text{ für } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Auch hier gilt, dass  $x_2$  einen reellen Wert mit der notwendigen Bedingung  $x_2 = 2x_1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  annehmen kann.

Für  $n = 3$  erhalten wir

$$\left(\binom{3}{1-1} - 3^{3-1}\right) \cdot x_1 + \left(\binom{3}{2-1} - 3^{3-2}\right) \cdot x_2 + \left(\binom{3}{3-1} - 3^{3-3}\right) \cdot x_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -8x_1 + 0 \cdot x_2 + 2x_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_3 = 4x_1 \text{ für } x_1, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Die obere Gleichung gilt für alle natürlichen Zahlen  $n$ .

Für  $n = 4$  gilt

$$\left(\binom{4}{1-1} - 3^{4-1}\right) \cdot x_1 + \left(\binom{4}{2-1} - 3^{4-2}\right) \cdot x_2 + \left(\binom{4}{3-1} - 3^{4-3}\right) \cdot x_3$$

$$+ \left(\binom{4}{4-1} - 3^{4-4}\right) \cdot x_4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -26x_1 + (-5x_2) + 3x_3 + 3x_4 = 0.$$

Nun setzen wir, die eben ausgerechneten Bedingungen von  $x_2$  und  $x_3$  in die Gleichung ein, dann folgt

$$-26x_1 + (-5 \cdot (2x_1)) + 3 \cdot (4x_1) + 3x_4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -24x_1 + 3x_4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_4 = 8x_1 \text{ für } x_1, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Auch hier gilt letzteres für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Wir können offensichtlich ein Muster erkennen und zwar gilt für  $x_i$  mit  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$  folgendes:  $x_i = 2^{i-1} \cdot x_1 \quad \forall x_i \in \mathbb{R}$ . Demnach würde die einzige Folge (was wir später beweisen werden) der reellen Zahlen, die die für alle positiven ganzen Zahlen  $n$  die Gleichung  $a_{n,1} \cdot x_1 + a_{n,2} \cdot x_2 + \dots + a_{n,n} \cdot x_n = 0$  erfüllt, wie folgt aussehen  $(x_1, 2x_1, 4x_1, 8x_1, \dots)$ . Den Beweis dieser Behauptung führen wir mittels vollständiger Induktion über  $n$  durch.

**Induktionsanfang:** Sei  $n = 1$ . Es gilt

$$\left(\binom{1}{1-1} - 3^{1-1}\right) \cdot (2^{1-1} \cdot x_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \cdot x_1 = 0 \text{ für } x_1 \in \mathbb{R}.$$

**Induktionsannahme:** Es sei die Behauptung für  $n$  bereits bewiesen, es gelte also

$$\sum_{i=1}^n a_{n,i} \cdot x_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_{n,i} \cdot (2^{i-1} \cdot x_1) = 0 \text{ (nach unserer Behauptung)}$$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot \sum_{i=1}^n a_{n,i} \cdot 2^{i-1} = 0 \text{ für } x_1 \in \mathbb{R}.$$

Für  $x_1 \neq 0$  gilt nach Division durch  $x_1$

$$\sum_{i=1}^n a_{n,i} \cdot 2^{i-1} = 0.$$

Da  $a_{n,i} = \binom{n}{i-1} - 3^{n-i}$  gilt, erhalten wir nach Einsetzen für  $a_{n,i}$  folgendes:

$$\sum_{i=1}^n \left(\binom{n}{i-1} - 3^{n-i}\right) \cdot 2^{i-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n-1} \left(\binom{n}{i} - 3^{n-(i+1)}\right) \cdot 2^i = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot 2^i\right) - \left(\sum_{i=0}^{n-1} 3^{n-(i+1)} \cdot 2^i\right) = 0.$$

Dies ist nun unsere Induktionsannahme für  $x_1 \neq 0$ .

**Induktionsschritt:** Unter Verwendung der Induktionsannahme zeigen wir nun die Behauptung für  $n + 1$ , wir zeigen also, dass

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{n+1,i} \cdot x_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n+1} a_{n+1,i} \cdot (2^{i-1} \cdot x_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot \sum_{i=1}^{n+1} a_{n+1,i} \cdot 2^{i-1} = 0 \text{ gilt.}$$

Offensichtlich stimmt die Gleichung für  $x_1 = 0$ , folglich müssen wir sie noch für  $x_1 \neq 0$  zeigen. Wenn wir die Gleichung durch  $x_1$  dividieren, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{n+1,i} \cdot 2^{i-1} = 0.$$

Da  $a_{n+1,i} = \binom{n+1}{i-1} - 3^{(n+1)-i}$  ist, gilt

$$\sum_{i=1}^{n+1} \left(\binom{n+1}{i-1} - 3^{(n+1)-i}\right) \cdot 2^{i-1} = 0. (*)$$

Bevor wir die Richtigkeit bzw. Gültigkeit der Gleichung  $(*)$  beweisen, stellen wir zwei Regeln für das Rechnen mit dem Binomialkoeffizienten vor bzw. auf.

*Rechenregeln:*

Für alle positiven ganzen Zahlen  $n, k$  mit  $n \geq k$  gilt:

(i)

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Beweis zu (i):

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-(k-1))!} + \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{n! \cdot k}{(k-1)! \cdot (n-k+1)! \cdot k} + \frac{n! \cdot ((n-k)+1)}{k! \cdot (n-k)! \cdot ((n-k)+1)} \\ &= \frac{n! \cdot (k + (n-k+1))}{k! \cdot (n-k+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k! \cdot ((n+1)-k)!} = \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

(ii) Ist  $k$  eine negative ganze Zahl, so definieren wir  $\binom{n}{k} = 0$ .

Zudem wird für den Beweis der Richtigkeit der Gleichung (\*) der binomische Lehrsatz für natürliche Exponenten benötigt, der wie folgt definiert ist: Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  und für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt die Gleichung:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{(n-k)} y^k \quad (iii);$$

Nun formen wir die linke Seite der Gleichung (\*) solange um, bis ihre Richtigkeit klar wird.

Wobei bei (4) die Eigenschaft (i) benutzt wurde; bei (7) unsere Definition (ii) angewandt wurde; bei (9) die Induktionsannahme verwendet wurde und der binomische Lehrsatz (iii) genutzt wurde.

$$\sum_{i=1}^{n+1} \left( \binom{n+1}{i-1} - 3^{(n+1)-i} \right) \cdot 2^{i-1} \quad (1)$$

$$= \sum_{i=0}^n \left( \binom{n+1}{i} - 3^{(n+1)-(i+1)} \right) \cdot 2^i \quad (2)$$

$$= \left( \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} \cdot 2^i \right) - \left( \sum_{i=0}^n 3^{n-i} \cdot 2^i \right) \quad (3)$$

$$= \left( \sum_{i=0}^n \left( \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right) \cdot 2^i \right) - \left( 3^n + \sum_{i=1}^n 3^{n-i} \cdot 2^i \right) \quad (4)$$

$$= \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i-1} \cdot 2^i \right) + \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot 2^i \right) - \left( 3^n + \sum_{i=0}^{n-1} 3^{n-(i+1)} \cdot 2^{(i+1)} \right) \quad (5)$$

$$= \left( \sum_{i=-1}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot 2^{i+1} \right) + \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot 2^i \right) - \left( 3^n + 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 3^{n-(i+1)} \cdot 2^i \right) \quad (6)$$

$$= \left( 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot 2^i \right) + \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot 2^i \right) - \left( 3^n + 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 3^{n-(i+1)} \cdot 2^i \right) \quad (7)$$

$$= 2 \cdot \left( \left( \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot 2^i \right) - \left( \sum_{i=0}^{n-1} 3^{n-(i+1)} \cdot 2^i \right) \right) + \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot 1^{(n-i)} \cdot 2^i \right) - 3^n \quad (8)$$

$$= 2 \cdot 0 + (1+2)^n - 3^n \quad (9)$$

$$= 0 \quad (10)$$

Somit haben wir die Gültigkeit unserer Behauptung gezeigt, doch zu zeigen ist noch, dass es die einzige Folge ist. Dies können wir durch bloßes Begründen zeigen.

Für  $n = z$  (wobei  $z$  eine natürliche Zahl ist) gilt die Gleichung  $a_{z,1} \cdot x_1 + a_{z,2} \cdot x_2 + \dots + a_{z,z} \cdot x_z = 0$ . Der Koeffizient der Variable  $x_z$  ist  $\binom{z}{z-1} - 3^{z-z} = \binom{z}{1} - 3^0 = (z-1)$ . Wie wir erkennen können ist der Koeffizient von  $x_z$  gleich Null, wenn  $n = z = 1$  gilt. Für  $n = z = 1$  erhalten wir, wie wir es schon oben gezeigt haben,  $0 \cdot x_1 = 0$ , womit  $x_1$  jeden reellen Wert für alle  $n \in \mathbb{N}$  annehmen kann.

Für  $n = z \neq 1$  beliebig ist der Koeffizient der Variable  $x_z$  ungleich Null, also können wir die Gleichung nach  $x_z$  auflösen. Die Gleichung ist dann äquivalent zu  $x_z = \frac{-(a_{z,1} \cdot x_1 + a_{z,2} \cdot x_2 + \dots + a_{z,z-1} \cdot x_{z-1})}{(z-1)}$ .

Wenn wir uns die Gleichung für  $n = 4$  wieder anschauen, können wir sehen, dass wir die vorherigen ausgerechneten Bedingungen von  $x_2$  und  $x_3$  in die Gleichung eingesetzt haben, sodass nur noch die beiden Variablen  $x_1$  und  $x_4$  mit den jeweiligen Koeffizienten in der Gleichung über blieben. Da wir nach  $x_4$  auflösen konnten, hatten wir auf der linken Seite der Gleichung die isolierte Variable  $x_4$  und auf der rechten Seite die Variable  $x_1$  mit ihrem Koeffizienten.

Analog können wir das bei der Gleichung für  $n = 5$  machen, so erhalten wir auch die isolierte Variable  $x_5$  und die Variable  $x_1$  mit ihrem Koeffizienten. Wir können das Verfahren nicht nur bis zur Gleichung für  $n = 5$  anwenden, sondern für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 2$  (sofern man das Verfahren auf die Gleichung für die nächst darauffolgende natürliche Zahl anwendet), so erhalten wir nur diese **eine Bedingung** über  $x_z$ . Unmittelbar folgt daraus, dass es unsere bewiesene Behauptung ist:  $x_z = 2^{z-1} \cdot x_1$  für  $x_z \in \mathbb{R}$  und  $z \in \mathbb{N}$ .

Folglich ist  $(x_1, 2x_1, 4x_1, 8x_1, \dots)$  die einzige reelle Folge, die die Gleichung  $a_{n,1} \cdot x_1 + a_{n,2} \cdot x_2 + \dots + a_{n,n} \cdot x_n = 0$  erfüllt.

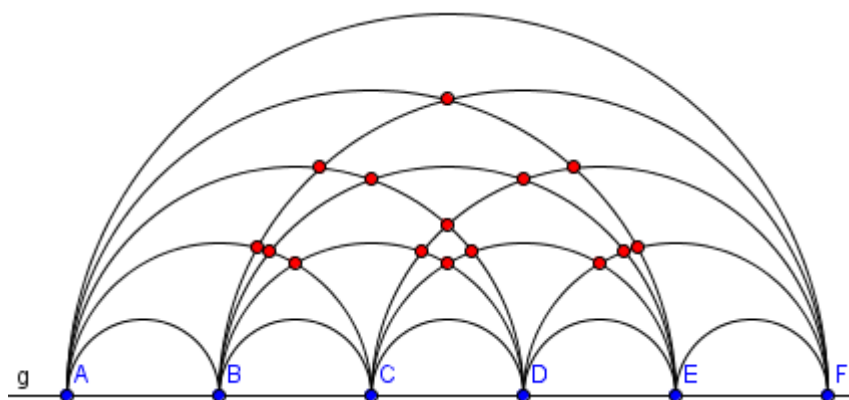
□

## Lösung zu Aufgabe 3

Das Problem der Aufgabenstellung teilen wir in mehrere kleinere Probleme auf, die wir lösen und zu einer Lösung des ursprünglichen Problems verbinden. Wir bestimmen also die maximale Anzahl von nicht auf  $g$  liegenden Schnittpunkten *jeden Einzelnen Halbkreises* in Abhängigkeit von  $n$  und addieren diese Ergebnisse zur eine Lösung des ursprünglichen Problems, wobei wir eine Bedingung zur Lösungsfindung aufstellen.

Nehmen wir als erstes an, dass sich sechs paarweise verschiedene Punkte auf der Gerade  $g$  befinden, die äquidistant angeordnet sind. Hinzu kommt, dass wir die Halbkreise über den Verbindungsstrecken je zweier dieser Punkte auf der selben Seite von  $g$  zeichnen. Des Weiteren markieren wir auch noch die Schnittpunkte, die nicht auf  $g$  liegen.

Hierzu eine Veranschaulichung:



Mit der Bezeichnung  $\widehat{XY}$  meinen wir den Halbkreis über der Verbindungsstrecke des Punktes  $X$  und des Punktes  $Y$ .

Vom Punkt  $X$  gehen  $Z$  Halbkreise (nach rechts) aus. Dies heißt, dass alle  $Z$  Punkte, die mit  $X$  einen Halbkreis bilden, rechts von  $X$  liegen.

Betrachten wir zunächst den Halbkreis über der Verbindungsstrecke vom Punkt  $B$  und  $D$ . Dieser Halbkreis hat drei Schnittpunkte, wie wir klar sehen können. Diese Schnittpunkte werden durch die Halbkreise, die vom Punkt  $C$  nach links und nach rechts ausgehen verursacht. Von  $C$  gehen zwei Halbkreise nach links aus und drei nach rechts aus.

**Im Folgenden betrachten wir nur die Halbkreise, die nach rechts ausgehen und deren Schnittpunkte.**

Nach unserer Bedingung würde  $\widehat{BD}$  nur zwei Schnittpunkte haben, da der andere Schnittpunkt schon zu  $\widehat{AC}$  gehört, wie man sich leicht überlegen kann. So vermeiden wir das Doppelte-Zählen der Schnittpunkte, da jeder Halbkreis, der nach links ausgeht von einem Punkt kommt, wo der Halbkreis nach rechts ausgeht.

Um die maximale Anzahl von nicht auf  $g$  liegenden Schnittpunkten eines Halbkreises (**Bedingung nicht vergessen!**) in Abhängigkeit von  $n$  zu bestimmen, müssen wir auf folgende zwei Punkte achten:

**Erster Punkt:** Wir müssen die Anzahl der Punkte, die zwischen einem Halbkreis sind (ohne die Punkte auf dem Halbkreis selbst) und auf  $g$  liegen betrachten.

**Zweiter Punkt:** Wir müssen die Anzahl der Punkte, die nach dem Halbkreis folgen und auf  $g$  liegen betrachten.

Mit diesen zwei Punkten können wir die maximale Anzahl von nicht auf  $g$  liegenden Schnittpunkten eines Halbkreises in Abhängigkeit von  $n$  bestimmen, indem wir die Anzahl der Punkte, die zwischen den Punkten des Halbkreises sind, mit der Anzahl der nach dem Halbkreis folgenden Punkten multiplizieren, da von jedem  $k$  Punkten (die Punkte zwischen dem Halbkreis)  $m$  Halbkreise (die Punkte hinter dem Halbkreis) ausgehen.

Hierzu zwei kleine Beispiel bezogen auf unsere obere Zeichnung:

1. Zwischen  $\widehat{AD}$  sind die zwei Punkte  $B$  und  $C$ , die auf  $g$  liegen. Nun betrachten wir, wie viele Punkte nach  $D$  folgen. Dies sind die zwei Punkte  $E$  und  $F$ . Also gehen jeweils zwei Halbkreise von  $B$  und  $C$  über  $D$  aus ( $\widehat{BE}$ ,  $\widehat{BF}$ ,  $\widehat{CE}$  und  $\widehat{CF}$ ), somit wird  $\widehat{AD}$  maximal vier Mal geschnitten (natürlich für  $n = 6$ ).

2. Zwischen  $\widehat{CE}$  ist der Punkt  $D$ , der auf  $g$  liegt. Nach  $E$  folgt ein weiterer Punkt  $F$ . Also geht ein Halbkreis von  $D$  über  $E$  aus ( $\widehat{DF}$ ), somit wird  $\widehat{CE}$  maximal ein Mal geschnitten (für  $n = 6$ ).

Nun betrachten wir  $n$  paarweise verschiedene Punkte auf  $g$ , die chronologisch mit  $A_1$  bis  $A_n$  bezeichnet werden. Diesbezüglich eine kleine Skizze zum Verständnis:

Nun bestimmen wir die maximale Anzahl der nicht auf  $g$  liegenden Schnittpunkte von allen Halbkreisen, die von  $A_1$  ausgehen.

$$\widehat{A_1 A_2} = 0 \cdot (n - 2) = 0 \cdot ((n - 2) - 0)$$

Die rechte Seite der Gleichung bezeichnet die maximale Anzahl der



Schnittpunkte des Halbkreises  $\widehat{A_1 A_2}$ . Die Null steht für die Anzahl der Punkte zwischen  $A_1$  und  $A_2$ , die auf  $g$  liegen und  $(n-2)$  beschreibt die Anzahl der Punkte, die nach  $A_2$  folgen. Führen wir dies fort erhalten wir:

$$\widehat{A_1 A_3} = 1 \cdot (n-3) = 1 \cdot ((n-2) - 1)$$

$$\widehat{A_1 A_4} = 2 \cdot (n-4) = 2 \cdot ((n-2) - 2)$$

$$\dots$$

$$\widehat{A_1 A_{n-1}} = (n-3) \cdot 1 = (n-3) \cdot ((n-2) - (n-3))$$

$$\widehat{A_1 A_n} = (n-2) \cdot 0 = (n-2) \cdot ((n-2) - (n-2))$$

Aufsummieren aller von nicht auf  $g$  liegenden Schnittpunkten, der Halbkreise  $\widehat{A_1 A_i}$  mit  $i \in \{2, 3, \dots, n\}$  ergibt:

$$\sum_{k=0}^{n-2} k \cdot ((n-2) - k)$$

Jetzt betrachten wir nur noch die Punkte  $A_2$  bis  $A_n$ , wie es hier in der Skizze gezeigt wird:

Führen wir das Gleiche Prinzip wie oben weiter, doch nun gehen alle Halbkreise vom Punkt  $A_2$  aus.

$$\widehat{A_2 A_3} = 0 \cdot (n-3) = 0 \cdot ((n-3) - 0)$$

$$\widehat{A_2 A_4} = 1 \cdot (n-4) = 1 \cdot ((n-3) - 1)$$

$$\dots$$

$$\widehat{A_2 A_{n-1}} = (n-4) \cdot 1 = (n-4) \cdot ((n-3) - (n-4))$$

$$\widehat{A_2 A_n} = (n-3) \cdot 0 = (n-3) \cdot ((n-3) - (n-3))$$

Aufsummieren aller von nicht auf  $g$  liegenden Schnittpunkten, die auf den Halbkreisen, die von  $A_2$  ausgehen, sind, liefert:

$$\sum_{k=0}^{n-3} k \cdot ((n-3) - k)$$

Rücken wir vor bis zum Punkt  $A_{n-2}$ .

$$\widehat{A_{n-2} A_{n-1}} = 0 \cdot 1 = 0 \cdot (1 - 0)$$

$$\widehat{A_{n-2} A_n} = 1 \cdot 0 = 1 \cdot (1 - 1)$$

Aufsummieren aller von nicht auf  $g$  liegenden Schnittpunkten, die auf den Halbkreisen, die von  $A_{n-2}$  ausgehen, sind, ergibt:

$$\sum_{k=0}^1 k \cdot (1 - k)$$

Kommen wir zum letzten Punkt von dem Halbkreise ausgehen (da nach  $A_n$  kein Punkt folgt) und zwar der Punkt  $A_{n-1}$ .

$$\widehat{A_{n-1} A_n} = 0 \cdot 0$$

$$= \sum_{k=0}^0 k \cdot (0 - k)$$

Bevor wir die maximale Anzahl von nicht auf  $g$  liegenden Schnittpunkten in Abhängigkeit von  $n$  bestimmen, ziehen wir die allbekannten Tatsachen heran, dass man die Summe der Quadrate respektive der Kuben von 1 bis  $n$  mit folgenden Formeln ausrechnen kann:

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}; \quad \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2;$$

Ferner gilt mit der Gaußschen Summenformel

$$\sum_{k=0}^n k \cdot n = (0 + 1 + 2 + \dots + n) \cdot n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot n = \frac{n^2 \cdot (n+1)}{2}.$$

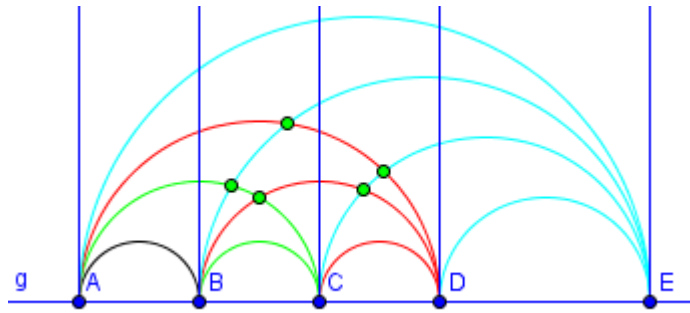
Indem wir jetzt die maximale Anzahl an Schnittpunkten aller Halbkreise addieren erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=0}^{n-2} k \cdot ((n-2) - k)\right) + \left(\sum_{k=0}^{n-3} k \cdot ((n-3) - k)\right) + \dots + \left(\sum_{k=0}^1 k \cdot (1 - k)\right) + \\ & \left(\sum_{k=0}^0 k \cdot (0 - k)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{k=0}^i k \cdot (i - k) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n-2} \sum_{k=0}^i k \cdot i\right) - \left(\sum_{i=0}^{n-2} \sum_{k=0}^i k^2\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{k^2 \cdot (k+1)}{2}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k^2 \cdot (k+1)}{2} - \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{3 \cdot k^2 \cdot (k+1) - k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k \cdot (k+1) \cdot (3k - (2k+1))}{6} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k \cdot (k+1) \cdot (k-1)}{6} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k \cdot (k^2 - 1)}{6} \\ &= \frac{\left(\sum_{k=0}^{n-2} k^3\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-2} k\right)}{6} \\ &= \frac{\left(\frac{(n-2) \cdot (n-1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(n-2) \cdot (n-1)}{2}\right)}{6} \\ &= \frac{\left(\frac{(n-2) \cdot (n-1)}{2}\right) \cdot \left(\frac{(n-2) \cdot (n-1)}{2} - 1\right)}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left( \frac{(n-2) \cdot (n-1)}{2} \right) \cdot \left( \frac{(n^2 - 3n)}{2} \right) \\
 &= \frac{6}{24} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3);
 \end{aligned}$$

Somit gibt diese Formel die maximale Anzahl von nicht auf  $g$  liegenden Schnittpunkten in Abhängigkeit von  $n$  an, wobei  $n \geq 2$  die Anzahl der Punkte auf der Geraden  $g$  ist.

Zu zeigen ist noch, dass eine Konstellation existiert, die die maximale Anzahl an Schnittpunkten annimmt. Hierzu betrachten wir die folgende Abbildung:



Die Bedingung von vorhin bleibt bestehen.

Mit  $\perp_X$  meinen wir die Orthogonale auf  $g$  und auf dem Punkt  $X$ . Zu sehen sind fünf verschiedene Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  und  $E$  auf der Geraden  $g$ ; die Halbkreise, die jeweils von einem Punkt ausgehen; die Schnittpunkte der Halbkreise und die Orthogonalen, auf den Punkten auf  $g$ .

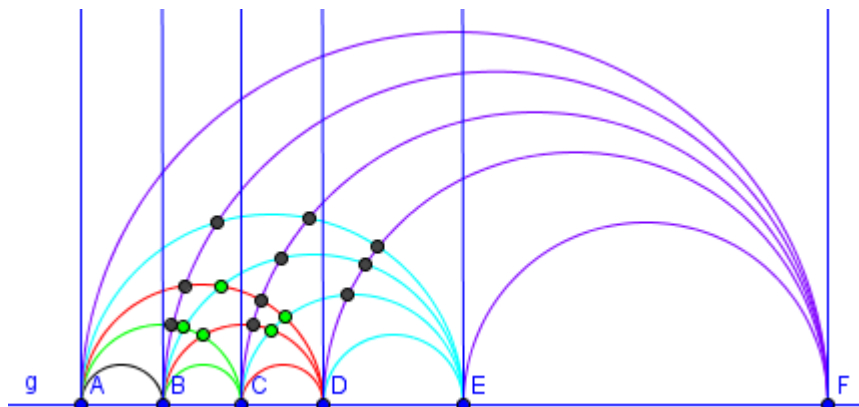
Seien  $X$  und  $Y$  zwei beliebige aufeinanderfolgende Punkte auf  $g$ , wobei  $Y$  rechts von  $X$  liegt. Wir versuchen nun geschickt die Schnittpunkte der Halbkreise, welche vom Punkt  $X$  ausgehen, in die Fläche zwischen  $\perp_X$  und  $\perp_Y$  zu bringen. Schnittpunkte mit dieser Eigenschaft nennen wir *zulässig*.

In der Abbildung ist dies erfüllt, denn die Schnittpunkte der Halbkreise, welche von  $B$  ausgehen, liegen zwischen  $\perp_B$  und  $\perp_C$ . Die Schnittpunkte der Halbkreise, welche von  $C$  ausgehen, liegen zwischen  $\perp_C$  und  $\perp_D$ .

Nach unserer Formel ist die maximale Anzahl an Schnittpunkten für  $n = 5$  fünf. Also hat unsere Abbildung für  $n = 5$  das Maximum erreicht. Nun zeigen wir, dass wir der Reihe nach jedes Mal das Maximum an Schnittpunkten erreichen können, wenn wir der

Reihe nach einen neuen Punkt hinzufügen, der so auf  $g$  angeordnet wird, dass die neuen Schnittpunkte *zulässig* werden.

Nun fügen wir der Abbildung einen neuen Punkt  $F$  hinzu. Der Punkt soll rechts von  $E$  liegen. Es entstehen neue Halbkreise, mit neuen Schnittpunkte (siehe Abbildung).



Sei  $X$  ein beliebig gewählter vorheriger Punkt auf  $g$  und sei  $Z$  der neue und letzte Punkt auf  $g$ , in diesem Fall  $F$ . Wir verschieben  $F$  so, dass die neuen Schnittpunkte *zulässig* werden. Dies gelingt, da der Bogen von  $X$  zu  $Z$  immer steiler wird, wenn die Distanz zwischen den beiden Punkten größer wird. Also verschieben sich die Schnittpunkte der Halbkreise, welche von  $X$  ausgehen immer weiter nach links, maximal bis zur Orthogonale, welche auf  $X$  liegt. Nun sind alle Schnittpunkte *zulässig*.

Jetzt beweisen wir, dass es keine drei Halbkreise gibt, die sich in einem Punkt schneiden:

Halbkreise, die von einem Punkt ausgehen, können sich nicht schneiden, wie man sich leicht überlegt. Dementsprechend schneiden sich die Halbkreise, die vom neuen und letzten Punkt  $Z$  (in diesem Fall  $F$ ) nach links ausgehen nicht.

Es bleibt noch die Möglichkeit, dass sich ein neuer Halbkreis  $\widehat{XZ}$  mit zwei vorherigen Halbkreisen in einem Punkt schneidet.

Sei  $Y$  der erste rechts liegende Punkt von  $X$ .

Da alle Schnittpunkte des Halbkreises  $\widehat{XZ}$  *zulässig* sind, liegen die Schnittpunkte zwischen  $\perp_X$  und  $\perp_Y$ . Also müsste  $\widehat{XZ}$  einen Schnittpunkt zwischen  $\perp_X$  und  $\perp_Y$  schneiden. Doch die Schnittpunkte zwischen  $\perp_X$  und  $\perp_Y$  werden durch zwei Halbkreise verursacht, von dem einer von  $X$  ausgeht (sonst wären es keine *zulässigen*

Schnittpunkte). Also kann es nicht sein, dass  $\widehat{XZ}$  einen Schnittpunkt zwischen  $\perp_X$  und  $\perp_Y$  schneidet, denn einer der Halbkreis geht von  $X$  aus und da wir wissen, dass sich zwei Halbkreise, die von einem Punkt ausgehen nicht schneiden können wird das Maximum an Schnittpunkten für  $n = 6$  erreicht. Analog gilt dies der Reihe nach für alle natürlichen Zahlen  $n$ , da  $X$  beliebig gewählt wurde.

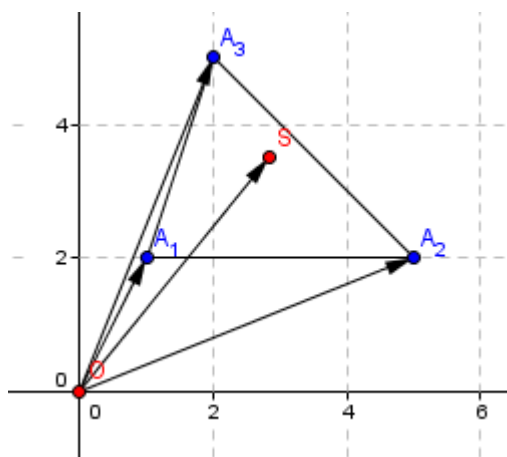
□

## Lösung zu Aufgabe 4

### a) Bemerkung:

Mit  $i$  meinen wir die imaginäre Zahl  $i = \sqrt{-1}$ .

Gegeben ist ein beliebiges Dreieck  $A_1A_2A_3$ , welches in einem kartesischen Koordinatensystem liege. Der Ursprung wird mit  $O$  bezeichnet; jeder Punkt  $P$  in der Ebene wird durch den Vektor  $\overrightarrow{OP}$  beschrieben. Zur Abkürzung setzen wir  $\overrightarrow{OP} = \vec{P}$ .



Da die Folge der Schwerpunkte rekursiv definiert ist, können wir eine explizite Formel zur Berechnung des  $n$ -ten Schwerpunktes finden. Dies gelingt durch das charakteristische Polynom, denn die Nullstellen führen zu den Fundamentallösungen. Nach mühsamen Rechnen erhalten wir die Formel:

$$\vec{A}_n = \vec{A} + \vec{B} \cdot \left(\frac{-1+i\sqrt{2}}{3}\right)^n + \vec{C} \cdot \left(\frac{-1-i\sqrt{2}}{3}\right)^n \text{ mit } n \geq 1 \text{ und}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{6}\vec{A}_1 + \frac{1}{3}\vec{A}_2 + \frac{1}{2}\vec{A}_3 ;$$

$$\vec{B} = \vec{A}_3 \cdot \left(\frac{5-i\sqrt{2}}{4}\right) - \vec{A}_2 \cdot \left(\frac{8-7i\sqrt{2}}{12}\right) - \vec{A}_1 \cdot \left(\frac{7+4i\sqrt{2}}{12}\right) ;$$

$$\vec{C} = \vec{A}_3 \cdot \left(\frac{5+i\sqrt{2}}{4}\right) - \vec{A}_2 \cdot \left(\frac{8+7i\sqrt{2}}{12}\right) - \vec{A}_1 \cdot \left(\frac{7-4i\sqrt{2}}{12}\right) ;$$

Diese Formel werden wir nun mit der vollständigen Induktion über  $n$  beweisen.

Wir ziehen die Tatsache heran, dass man den Schwerpunkt  $S$  eines Dreiecks  $ABC$  mit der Formel  $S = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$  ausrechnen kann.

**Induktionsanfang:** Sei  $n = 1$ . Es gilt

$$\begin{aligned}
\vec{A}_1 &= \vec{A} + \vec{B} \cdot \left(\frac{-1+i\sqrt{2}}{3}\right) + \vec{C} \cdot \left(\frac{-1-i\sqrt{2}}{3}\right) \\
&= \vec{A} + \vec{A}_3 \cdot \left[\left(\frac{5-i\sqrt{2}}{4}\right) \cdot \left(\frac{-1+i\sqrt{2}}{3}\right) + \left(\frac{5+i\sqrt{2}}{4}\right) \cdot \left(\frac{-1-i\sqrt{2}}{3}\right)\right] \\
&\quad - \vec{A}_2 \cdot \left[\left(\frac{8-7i\sqrt{2}}{12}\right) \cdot \left(\frac{-1+i\sqrt{2}}{3}\right) + \left(\frac{8+7i\sqrt{2}}{12}\right) \cdot \left(\frac{-1-i\sqrt{2}}{3}\right)\right] \\
&\quad - \vec{A}_1 \cdot \left[\left(\frac{7+4i\sqrt{2}}{12}\right) \cdot \left(\frac{-1+i\sqrt{2}}{3}\right) + \left(\frac{7-4i\sqrt{2}}{12}\right) \cdot \left(\frac{-1-i\sqrt{2}}{3}\right)\right] \\
&= \vec{A} + \vec{A}_3 \cdot \left(\frac{2i\sqrt{2}-1}{4} - \frac{2i\sqrt{2}+1}{4}\right) - \vec{A}_2 \cdot \left(\frac{5i\sqrt{2}+2}{12} + \frac{2-5i\sqrt{2}}{12}\right) \\
&\quad - \vec{A}_1 \cdot \left(\frac{i\sqrt{2}-5}{12} - \frac{i\sqrt{2}+5}{12}\right) \\
&= \left(\frac{1}{6}\vec{A}_1 + \frac{1}{3}\vec{A}_2 + \frac{1}{2}\vec{A}_3\right) - \frac{1}{2}\vec{A}_3 - \frac{1}{3}\vec{A}_2 + \frac{5}{6}\vec{A}_1 \\
&= \vec{A}_1.
\end{aligned}$$

**Induktionsannahme:** Es sei die Behauptung für  $n$  bereits bewiesen (insbesondere für  $n-1$  und  $n-2$ ), es gelte also  $\vec{A}_n = \vec{A} + \vec{B} \cdot \left(\frac{-1+i\sqrt{2}}{3}\right)^n + \vec{C} \cdot \left(\frac{-1-i\sqrt{2}}{3}\right)^n$  mit  $n \geq 1$ .

**Induktionsschritt:** Unter Verwendung der Induktionsannahme zeigen wir nun die Behauptung für  $n+1$ . Zu zeigen ist also, dass

$$\begin{aligned}
\vec{A}_{n+1} &= \vec{A} + \vec{B} \cdot \left(\frac{-1+i\sqrt{2}}{3}\right)^{n+1} + \vec{C} \cdot \left(\frac{-1-i\sqrt{2}}{3}\right)^{n+1} \text{ gilt. Es gilt} \\
\vec{A}_{n+1} &= \frac{1}{3}\vec{A}_n + \frac{1}{3}\vec{A}_{n-1} + \frac{1}{3}\vec{A}_{n-2} \\
&= 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \left(\left(\frac{-1+i\sqrt{2}}{3}\right)^n + \left(\frac{-1+i\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{-1+i\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2}\right)\right) \\
&\quad + \vec{C} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \left(\left(\frac{-1-i\sqrt{2}}{3}\right)^n + \left(\frac{-1-i\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{-1-i\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2}\right)\right) \\
&= \vec{A} + \vec{B} \cdot \left(\frac{(-1+i\sqrt{2})^n + 3 \cdot (-1+i\sqrt{2})^{n-1} + 3^2 \cdot (-1+i\sqrt{2})^{n-2}}{3^{n+1}}\right) \\
&\quad + \vec{C} \cdot \left(\frac{(-1-i\sqrt{2})^n + 3 \cdot (-1-i\sqrt{2})^{n-1} + 3^2 \cdot (-1-i\sqrt{2})^{n-2}}{3^{n+1}}\right) \\
&= \vec{A} + \vec{B} \cdot \left(\frac{(-1+i\sqrt{2})^{n-2} \cdot ((-1+i\sqrt{2})^2 + 3 \cdot (-1+i\sqrt{2}) + 3^2)}{3^{n+1}}\right) \\
&\quad + \vec{C} \cdot \left(\frac{(-1-i\sqrt{2})^{n-2} \cdot ((-1-i\sqrt{2})^2 + 3 \cdot (-1-i\sqrt{2}) + 3^2)}{3^{n+1}}\right) \\
&= \vec{A} + \vec{B} \cdot \left(\frac{(-1+i\sqrt{2})^{n-2} \cdot (1-2i\sqrt{2}-2-3+3i\sqrt{2}+9)}{3^{n+1}}\right) \\
&\quad + \vec{C} \cdot \left(\frac{(-1-i\sqrt{2})^{n-2} \cdot (1+2i\sqrt{2}-2-3-3i\sqrt{2}+9)}{3^{n+1}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{A} + \vec{B} \cdot \left( \frac{(-1 + i\sqrt{2})^{n-2} \cdot (-1 + 3i\sqrt{2} + 6 - 2i\sqrt{2})}{3^{n+1}} \right) \\
&+ \vec{C} \cdot \left( \frac{(-1 - i\sqrt{2})^{n-2} \cdot (-1 - 3i\sqrt{2} + 6 + 2i\sqrt{2})}{3^{n+1}} \right) \\
&= \vec{A} + \vec{B} \cdot \left( \frac{(-1 + i\sqrt{2})^{n-2} \cdot (-1 + i\sqrt{2})^3}{3^{n+1}} \right) + \vec{C} \cdot \left( \frac{(-1 - i\sqrt{2})^{n-2} \cdot (-1 - i\sqrt{2})^3}{3^{n+1}} \right) \\
&= \vec{A} + \vec{B} \cdot \left( \frac{-1 + i\sqrt{2}}{3} \right)^{n+1} + \vec{C} \cdot \left( \frac{-1 - i\sqrt{2}}{3} \right)^{n+1}, \text{ wie gew\u00fcnscht.}
\end{aligned}$$

Nun lassen wir  $n$  gegen unendlich laufen. Bei der Formel

$$\vec{A}_n = \vec{A} + \vec{B} \cdot \left( \frac{-1 + i\sqrt{2}}{3} \right)^n + \vec{C} \cdot \left( \frac{-1 - i\sqrt{2}}{3} \right)^n$$

m\u00fcssen wir nur die beiden Faktoren mit dem Exponenten  $n$  betrachten. Sei  $s_n := \left( \frac{-1 \pm i\sqrt{2}}{3} \right)^n$ . Mit dem Betrag der Folge k\u00f6nnen wir den Grenzwert

$$\begin{aligned}
&\text{der Konvergenz bestimmen. Es gilt } |s_n| = \left| \left( \frac{-1 \pm i\sqrt{2}}{3} \right)^n \right| \\
&= \left| \left( \frac{-1 \pm i\sqrt{2}}{3} \right) \right|^n = \left( \sqrt{\left( \frac{-1}{3} \right)^2 + \left( \frac{\pm\sqrt{2}}{3} \right)^2} \right)^n = \frac{1}{(\sqrt{3})^n}.
\end{aligned}$$

Der Betrag der Folge  $s_n$  konvergiert gegen Null. Also konvergiert die Folge  $s_n$  gegen Null. Folglich konvergiert die Folge  $\vec{A}_n$  gegen  $\vec{A} + \vec{B} \cdot 0 + \vec{C} \cdot 0 = \vec{A}$ , also gegen einen Vektor. Wie wir wissen ist  $A_1A_2A_3$  das Anfangsdreieck. Da der Schwerpunkt immer im Inneren des Dreiecks ist (dies kann man leicht mit dem *Satz von Ceva* beweisen), ist auch das neuentstandene Dreieck im Inneren des vorherigen Dreiecks, dies wird unendlich Mal fortgesetzt. Das hei\u00dft, dass die neuentstandenen Dreiecke immer wieder im Inneren des vorherigen Dreiecks sind. Da der Punkt  $A$  der „unendliche“ Schwerpunkt ist, liegt er in allen Dreiecken. Nun m\u00fcssen wir noch zeigen, dass  $A$  der einzige Punkt ist, der in alle Dreiecken liegt. Dies gelingt durch einen Widerspruch. Wir nehmen also an, dass es mindestens zwei verschiedene Punkte gibt, die in allen Dreiecken liegen. Nun gibt es von jedem Punkt einen positiven Abstand zu  $A$ . Unter den Punkten existiert (mindestens) ein Punkt  $P$ , der den kleinsten positiven Abstand  $d > 0$  zu  $A$  hat. Da  $A$  und  $P$  in allen Dreiecken liegen, liegt auch die Strecke  $AP$  in allen Dreiecken. Nun liegt auf der H\u00e4lfte der Strecke  $AP$  ein Punkt  $Q$  mit dem Abstand  $\frac{d}{2}$  zu  $A$ . Es gilt  $0 < d/2 < d$ , dies f\u00fchrt zu einem Widerspruch zur Annahme, dass  $P$  den kleinsten positiven Abstand zu  $A$  hat und in allen Dreiecken liegt. Folglich ist  $A$  der einzige Punkt in allen Dreiecken, weswegen folgendes gilt:  $\vec{A} = \frac{1}{6}\vec{A}_1 + \frac{1}{3}\vec{A}_2 + \frac{1}{2}\vec{A}_3 = \vec{S}$ .



**b)** Gegeben ist ein Dreieck  $A_1A_2A_3$ , welches in einem kartesischen Koordinatensystem liege. O.B.d.A. wählen wir als Ursprung den Punkt  $A_1$  und die  $x$ -Achse legen wir durch  $A_1A_2$  (siehe Abbildung), dies können wir machen, da es sich hier um ein kartesisches Koordinatensystem handelt. Dies impliziert, dass sich die Seitenlängen (insbesondere die Streckenverhältnisse) und die Winkel des Dreiecks nicht durch Verschiebungen, Drehungen oder Spiegelungen ändern. Zwar erhalten wir keine explizite Formel um  $T$  mit beliebigen Dreiecks-Koordinaten zu bestimmen, doch dies ist auch nicht von Interesse.

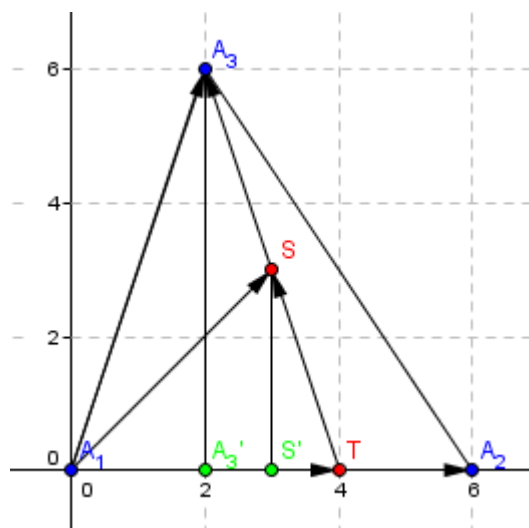
Jeder Punkt  $P$  in der Ebene wird durch den Vektor  $\overrightarrow{A_1P}$  beschrieben. Zur Abkürzung setzen wir  $\overrightarrow{A_1P} = \vec{P}$ .

Die Vektoren im System haben nun die folgenden Koordinaten  $\vec{A_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{A_2} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\vec{A_3} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$  mit  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ .

Aus der Lösung der Aufgabe 4a) wissen wir, dass folgendes gilt:

$$\vec{S} = \frac{1}{6}\vec{A_1} + \frac{1}{3}\vec{A_2} + \frac{1}{2}\vec{A_3} = \begin{pmatrix} (2x + 3y)/6 \\ z/2 \end{pmatrix}.$$

Ferner schneidet die Gerade  $SA_3$  die Gerade  $A_1A_2$ . Aus den vorliegenden Informationen können wir die  $x$ -Koordinate des Punktes  $T$  bestimmen. Da  $T$  auf der Geraden  $A_1A_2$  liegt ist die  $y$ -Koordinate Null.



Da die Punkte  $A_1$  und  $A_2$  auf der  $x$ -Achse liegen, lautet die Funktion, die durch bei Punkte geht, offensichtlich  $f(t) = 0$ . Nun bestimmen wir die Funktion der Geraden, die durch die Punkte  $A_3$  und  $S$  geht. Nach Gleichsetzen dieser beiden Funktikonen erhal-

ten wir die Stelle des Schnittpunktes  $T$  der beiden Geraden. Sei  $g(t) = m \cdot t + n$  die lineare Funktion, die durch die Punkte  $A_3$  und  $S$  geht. Zunächst rechnen wir  $m$  (die Steigung) durch die zwei gegebenen Punkte aus. Es gilt  $m = \frac{(\frac{z}{2} - z)}{(\frac{(2x+3y)}{6} - y)} = -\frac{(\frac{z}{2})}{(\frac{2x-3y}{6})} =$

$-\frac{3z}{2x-3y}$ . Da  $A_3$  auf der Geraden der Funktion  $g$  liegt, können wir nun  $n$  (den  $y$ -Achsenabschnitt) bestimmen. Es muss gelten

$z = -\frac{3z}{2x-3y} \cdot y + n$ , dies ist äquivalent zu  $n = \frac{2xz}{2x-3y}$ . Nun

müssen wir nur noch  $f$  und  $g$  gleichsetzen, um den Schnittpunkt der Geraden zu erhalten. Es gelte also  $0 = -\frac{3z}{2x-3y} \cdot t + \frac{2xz}{2x-3y}$ ,

was äquivalent ist zu  $t = \frac{2}{3}x$ . Der Schnittpunkt ist also an der

Stelle  $\frac{2}{3}x$ , demnach ist  $\vec{T} = \begin{pmatrix} 2x/3 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Hieraus erhalten wir das

Streckenverhältnis  $\frac{|A_1T|}{|TA_2|} = \frac{(\frac{2x}{3})}{(x - \frac{2x}{3})} = \frac{(\frac{2x}{3})}{(\frac{x}{3})} = 2$ . Sei  $S'S$  bzw.

$A'_3A_3$  die Orthogonale auf der Geraden  $A_1A_2$ . Es gilt mit dem

Satz des Pythagoras  $|TS| = \sqrt{(\frac{2x}{3} - \frac{(2x+3y)}{6})^2 + (\frac{z}{2} - 0)^2} =$

$\sqrt{(\frac{2x-3y}{6})^2 + (\frac{z}{2})^2}$  und  $|SA_3| = \sqrt{(\frac{(2x+3y)}{6} - y)^2 + (z - \frac{z}{2})^2}$

$= \sqrt{(\frac{2x-3y}{6})^2 + (\frac{z}{2})^2}$ . Also folgt  $\frac{|TS|}{|SA_3|} = 1$ .

□