Darstellungstheorie von Lie-Algebren

Kaniuar Bacho

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

SoSe 2020

Inhaltsverzeichnis

Entstehung der Darstellungstheorie

Entstehung der Darstellungstheorie

- Ursprünge der Darstellungstheorie in der Gruppentheorie

Entstehung der Darstellungstheorie

- Ursprünge der Darstellungstheorie in der Gruppentheorie
- Ein Charakter χ einer Gruppe G ist ein Gruppenhomomorphismus $\chi : G \to \mathbb{C}^{\times}$ (u.a. in den Arbeiten von Gauß und Dirichlet zur Zahlentheorie oft verwendet).

Entstehung der Darstellungstheorie

- Ursprünge der Darstellungstheorie in der Gruppentheorie
- Ein Charakter χ einer Gruppe G ist ein Gruppenhomomorphismus $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ (u.a. in den Arbeiten von Gauß und Dirichlet zur Zahlentheorie oft verwendet).
- Eine lineare Darstellung ρ einer Gruppe G ist ein Vektorraum V zusammen mit einem Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to GL(V)$.

Entstehung der Darstellungstheorie

- Ursprünge der Darstellungstheorie in der Gruppentheorie
- Ein Charakter χ einer Gruppe G ist ein Gruppenhomomorphismus $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ (u.a. in den Arbeiten von Gauß und Dirichlet zur Zahlentheorie oft verwendet).
- Eine lineare Darstellung ρ einer Gruppe G ist ein Vektorraum V zusammen mit einem Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to GL(V)$.
- 1896 entwickelte Frobenius die Charaktertafel einer endlichen nicht abelschen Gruppe um ein mathematisches Problem von Dedekind zu lösen.

Entstehung der Darstellungstheorie

- Ursprünge der Darstellungstheorie in der Gruppentheorie
- Ein Charakter χ einer Gruppe G ist ein Gruppenhomomorphismus $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ (u.a. in den Arbeiten von Gauß und Dirichlet zur Zahlentheorie oft verwendet).
- Eine lineare Darstellung ρ einer Gruppe G ist ein Vektorraum V zusammen mit einem Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to GL(V)$.
- 1896 entwickelte Frobenius die Charaktertafel einer endlichen nicht abelschen Gruppe um ein mathematisches Problem von Dedekind zu lösen.
- 1896 hat Frobenius die erste Charaktertafel veröffentlicht, jedoch erst ein Jahr später Zusammenhänge zu (der noch nicht existenten) linearen Darstellung einer Gruppe gefunden.

Entstehung der Darstellungstheorie

- Ursprünge der Darstellungstheorie in der Gruppentheorie
- Ein Charakter χ einer Gruppe G ist ein Gruppenhomomorphismus $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ (u.a. in den Arbeiten von Gauß und Dirichlet zur Zahlentheorie oft verwendet).
- Eine lineare Darstellung ρ einer Gruppe G ist ein Vektorraum V zusammen mit einem Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to GL(V)$.
- 1896 entwickelte Frobenius die Charaktertafel einer endlichen nicht abelschen Gruppe um ein mathematisches Problem von Dedekind zu lösen.
- 1896 hat Frobenius die erste Charaktertafel veröffentlicht, jedoch erst ein Jahr später Zusammenhänge zu (der noch nicht existenten) linearen Darstellung einer Gruppe gefunden.
- Burnside und Schur erweiterten Frobenius' Charaktertheorie auf Matrix-Darstellungen, doch Noether gab die obige übliche Definition.

Motivation der Darstellungstheorien von algebraischen Strukturen

Motivation der Darstellungstheorien von algebraischen Strukturen

- Grundprinzip der Mathematik: Objekte nicht einzeln untersuchen, sondern deren Verhalten untereinander mittels Morphismen.

Motivation der Darstellungstheorien von algebraischen Strukturen

- Grundprinzip der Mathematik: Objekte nicht einzeln untersuchen, sondern deren Verhalten untereinander mittels Morphismen.
- Dies führt zum Begriff der Gruppenwirkung: G und H Gruppen und $f : G \to H$ Homomorphismus. Satz von Cayley: H einbetten in eine Permutationsgruppe $S(X)$. D.h. müssen Homomorphismen $G \to S(X)$ untersuchen, was genau die Gruppenwirkungen sind.

Motivation der Darstellungstheorien von algebraischen Strukturen

- Grundprinzip der Mathematik: Objekte nicht einzeln untersuchen, sondern deren Verhalten untereinander mittels Morphismen.
- Dies führt zum Begriff der Gruppenwirkung: G und H Gruppen und $f : G \to H$ Homomorphismus. Satz von Cayley: H einbetten in eine Permutationsgruppe $S(X)$. D.h. müssen Homomorphismen $G \to S(X)$ untersuchen, was genau die Gruppenwirkungen sind.
- Weiteres Grundprinzip: Komplexere Strukturen auf einfachere zurückführen.

Motivation der Darstellungstheorien von algebraischen Strukturen

- Grundprinzip der Mathematik: Objekte nicht einzeln untersuchen, sondern deren Verhalten untereinander mittels Morphismen.
- Dies führt zum Begriff der Gruppenwirkung: G und H Gruppen und $f : G \to H$ Homomorphismus. Satz von Cayley: H einbetten in eine Permutationsgruppe $S(X)$. D.h. müssen Homomorphismen $G \to S(X)$ untersuchen, was genau die Gruppenwirkungen sind.
- Weiteres Grundprinzip: Komplexere Strukturen auf einfachere zurückführen.
- Tatsache: die am besten studierten algebraischen Objekte sind Vektorräume (vollständig klassifiziert und schöne Normalformen).

Motivation der Darstellungstheorien von algebraischen Strukturen

- Grundprinzip der Mathematik: Objekte nicht einzeln untersuchen, sondern deren Verhalten untereinander mittels Morphismen.
- Dies führt zum Begriff der Gruppenwirkung: G und H Gruppen und $f : G \to H$ Homomorphismus. Satz von Cayley: H einbetten in eine Permutationsgruppe $S(X)$. D.h. müssen Homomorphismen $G \to S(X)$ untersuchen, was genau die Gruppenwirkungen sind.
- Weiteres Grundprinzip: Komplexere Strukturen auf einfachere zurückführen.
- Tatsache: die am besten studierten algebraischen Objekte sind Vektorräume (vollständig klassifiziert und schöne Normalformen).
- Idee: Führen andere algebraischen Objekte auf Vektorräume zurück bzw. untersuchen deren Zusammenwirken und können somit Werkzeuge aus der Linearen Algebra benutzen.

Motivation der Darstellungstheorien von algebraischen Strukturen

Motivation der Darstellungstheorien von algebraischen Strukturen

- Kombinieren dieser Observationen: Wollen Gruppenwirkungen von G auf Mengen X studieren, jedoch soll X Vektorraumstruktur haben, schreibe $X = V$. Doch $G \to S(V)$ respektiert nicht die Vektorraumstruktur, d.h. schränken uns auf $G \to S(V) \cap \mathrm{End}(V) = GL(V)$ ein.

Motivation der Darstellungstheorien von algebraischen Strukturen

- Kombinieren dieser Observationen: Wollen Gruppenwirkungen von G auf Mengen X studieren, jedoch soll X Vektorraumstruktur haben, schreibe $X = V$. Doch $G \to S(V)$ respektiert nicht die Vektorraumstruktur, d.h. schränken uns auf $G \to S(V) \cap \mathrm{End}(V) = GL(V)$ ein.
- Wir haben gesehen, dass Gruppenwirkungen sehr hilfreich sind. Wir können also erwarten, dass Darstellungen genau so hilfreich sein werden.

Motivation mittels Kategorientheorie

Motivation mittels Kategorientheorie

- Grundprinzip der Kategorientheorie: Vereinheitlichung von mathematischen Konzepten, Studium von Objekten in einer Kategorie mittels Morphismen, größere Zusammenhänge aus verschiedenen Gebieten ersichtlich, usw.

Motivation mittels Kategorientheorie

- Grundprinzip der Kategorientheorie: Vereinheitlichung von mathematischen Konzepten, Studium von Objekten in einer Kategorie mittels Morphismen, größere Zusammenhänge aus verschiedenen Gebieten ersichtlich, usw.
- Galoistheorie und algebraische Topologie haben uns gelehrt über den Tellerrand hinauszuschauen. Müssen Probleme aus einer Kategorie in eine andere verständlichere Kategorie mit mächtigeren Werkzeugen transferieren.

Motivation mittels Kategorientheorie

- Grundprinzip der Kategorientheorie: Vereinheitlichung von mathematischen Konzepten, Studium von Objekten in einer Kategorie mittels Morphismen, größere Zusammenhänge aus verschiedenen Gebieten ersichtlich, usw.
- Galoistheorie und algebraische Topologie haben uns gelehrt über den Tellerrand hinauszuschauen. Müssen Probleme aus einer Kategorie in eine andere verständlichere Kategorie mit mächtigeren Werkzeugen transferieren.
- Nun geht es um das Zusammenspiel zwischen verschiedenen Kategorien und dort dienen Funktoren als Morphismen.

Motivation mittels Kategorientheorie

- Grundprinzip der Kategorientheorie: Vereinheitlichung von mathematischen Konzepten, Studium von Objekten in einer Kategorie mittels Morphismen, größere Zusammenhänge aus verschiedenen Gebieten ersichtlich, usw.
- Galoistheorie und algebraische Topologie haben uns gelehrt über den Tellerrand hinauszuschauen. Müssen Probleme aus einer Kategorie in eine andere verständlichere Kategorie mit mächtigeren Werkzeugen transferieren.
- Nun geht es um das Zusammenspiel zwischen verschiedenen Kategorien und dort dienen Funktoren als Morphismen.
- Fasse Gruppe G als Kategorie $\mathcal{C}$ auf mit genau einem Objekt und Morphismen sind die Gruppenelemente von G. Die am besten studierten Kategorien sind **Set** und $\mathbf{Vect}_K$.

Motivation mittels Kategorientheorie

- Grundprinzip der Kategorientheorie: Vereinheitlichung von mathematischen Konzepten, Studium von Objekten in einer Kategorie mittels Morphismen, größere Zusammenhänge aus verschiedenen Gebieten ersichtlich, usw.
- Galoistheorie und algebraische Topologie haben uns gelehrt über den Tellerrand hinauszuschauen. Müssen Probleme aus einer Kategorie in eine andere verständlichere Kategorie mit mächtigeren Werkzeugen transferieren.
- Nun geht es um das Zusammenspiel zwischen verschiedenen Kategorien und dort dienen Funktoren als Morphismen.
- Fasse Gruppe G als Kategorie $\mathcal{C}$ auf mit genau einem Objekt und Morphismen sind die Gruppenelemente von G. Die am besten studierten Kategorien sind **Set** und $\mathbf{Vect}_K$.
- Nun kann man nachrechnen: Die Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ entsprechen genau den Gruppenwirkungen auf Mengen und $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Vect}_K$ genau den Darstellungen.

Anwendungen der Darstellungstheorie

Anwendungen der Darstellungstheorie

- Diente als theoretischer Hintergrund für die Vorhersage, dass Quarks existieren (wird generell in der Quantenmechanik verwendet).

Anwendungen der Darstellungstheorie

- Diente als theoretischer Hintergrund für die Vorhersage, dass Quarks existieren (wird generell in der Quantenmechanik verwendet).
- Satz von Burnside: Gruppe der Ordnung $p^a \cdot q^b$ für zwei Primzahlen p und q mit $a, b \geq 0$ ist immer auflösbar.

Anwendungen der Darstellungstheorie

- Diente als theoretischer Hintergrund für die Vorhersage, dass Quarks existieren (wird generell in der Quantenmechanik verwendet).
- Satz von Burnside: Gruppe der Ordnung $p^a \cdot q^b$ für zwei Primzahlen p und q mit $a, b \geq 0$ ist immer auflösbar.
- Diente als wesentlicher Schritt im Beweis von FLT von Andrew Wiles (generell sehr wichtig für algebraische Zahlentheorie).

Anwendungen der Darstellungstheorie

- Diente als theoretischer Hintergrund für die Vorhersage, dass Quarks existieren (wird generell in der Quantenmechanik verwendet).
- Satz von Burnside: Gruppe der Ordnung $p^a \cdot q^b$ für zwei Primzahlen p und q mit $a, b \geq 0$ ist immer auflösbar.
- Diente als wesentlicher Schritt im Beweis von FLT von Andrew Wiles (generell sehr wichtig für algebraische Zahlentheorie).
- Hängt tief mit dem Langlands-Programm zusammen (Verbindungen zwischen Zahlentheorie und Geometrie - Peter Scholze arbeitet u.a. dran).

Darstellungen von Lie-Algebren

Darstellungen von Lie-Algebren

Adaptieren wir unsere gewonnen Erkenntnisse auf Lie-Algebren erhalten wir folgende Definition:

Darstellungen von Lie-Algebren

Adaptieren wir unsere gewonnen Erkenntnisse auf Lie-Algebren erhalten wir folgende Definition:

Darstellung einer Lie-Algebra

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und L eine Lie-Algebra über K. Eine **Darstellung** von L ist ein Lie-Algebra Homomorphismus

$$\varphi : L \to \mathrm{gl}(V).$$

Dieser heißt **treu**, falls φ injektiv ist. Durch den Übergang von linearen Abbildungen zur Matrixdarstellung bzgl. der Basis B der Kardinalität n

$$L \to \mathrm{gl}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gl}(\mathrm{n}, K)$$

sprechen wir auch von einer **Matrixdarstellung**.

Beispiele von Darstellungen

Beispiele von Darstellungen

Es gibt eine Darstellung mit der wir schon von Anfang an gearbeitet haben und diese sehr viele wertvolle Informationen geliefert hat:

Beispiele von Darstellungen

Es gibt eine Darstellung mit der wir schon von Anfang an gearbeitet haben und diese sehr viele wertvolle Informationen geliefert hat:

Adjungierte Darstellung

Die **adjungierte Darstellung** einer Lie-Algebra L ist

$$\mathrm{ad} : L \to \mathrm{gl}(L).$$

Wie wir gesehen haben ist die in der Tat ein Lie-Algebra Homomorphismus. Hier gilt speziell für den Vektorraum $V = L$ und $\ker(\mathrm{ad}) = Z(L)$. Also ist ad treu genau dann, wenn $Z(L) = 0$, was zum Beispiel für $L = \mathrm{sl}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$ erfüllt ist.

Beispiele von Darstellungen

Beispiele von Darstellungen

Natürliche Darstellung und triviale Darstellung

Sei V ein Vektorraum und L eine Lie-Unteralgebra von $\mathrm{gl}(V)$. Dann sei die **natürliche Darstellung** von L gerade die Inklusion

$$\iota : L \hookrightarrow \mathrm{gl}(V).$$

Da ι die Einschränkung der Identitätsabbildung ist, ist ι ein Lie-Algebra Homomorphismus. Diese sind insbesondere immer treu. Beispiele sind $L = \mathrm{sl}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$ und $L = \mathrm{b}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$ die oberen Dreiecksmatrizen.

Beispiele von Darstellungen

Natürliche Darstellung und triviale Darstellung

Sei V ein Vektorraum und L eine Lie-Unteralgebra von $\mathrm{gl}(V)$. Dann sei die **natürliche Darstellung** von L gerade die Inklusion

$$\iota : L \hookrightarrow \mathrm{gl}(V).$$

Da ι die Einschränkung der Identitätsabbildung ist, ist ι ein Lie-Algebra Homomorphismus. Diese sind insbesondere immer treu. Beispiele sind $L = \mathrm{sl}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$ und $L = \mathrm{b}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$ die oberen Dreiecksmatrizen.
Sei nun die Lie-Algebra L über K beliebig und setze $V = K$. Dann sei die **triviale Darstellung** von L die Nullabbildung

$$0 : L \to \mathrm{gl}(K).$$

Vorsicht: Man kann V beliebig wählen, aber wenn wir von der trivialen Darstellung sprechen, dann soll $V = K$ gelten.

Lie-Moduln

Lie-Moduln

Bevor wir die Definition geben, stellen wir erst mal für Mengen A und B fest:

$$\begin{aligned} \mathrm{Abb}(A, \mathrm{Abb}(B, B)) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Abb}(A \times B, B) \\ f &\mapsto [(a, b) \mapsto f(a)(b)] \end{aligned}$$

Lie-Moduln

Bevor wir die Definition geben, stellen wir erst mal für Mengen A und B fest:

$$\begin{aligned} \mathrm{Abb}(A, \mathrm{Abb}(B, B)) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Abb}(A \times B, B) \\ f &\mapsto [(a, b) \mapsto f(a)(b)] \end{aligned}$$

Wenden wir diese Tatsache blind auf eine Darstellung $\varphi : L \to \mathrm{gl}(V)$ an, erhalten wir eine Abbildung $\varphi' : L \times V \to V$, die wir mit $a \odot v := \varphi'(a, v) = \varphi(a)(v)$ notieren. Dann ist diese in beiden Komponenten K-linear und folgendes gilt:

Lie-Moduln

Bevor wir die Definition geben, stellen wir erst mal für Mengen A und B fest:

$$\begin{aligned} \mathrm{Abb}(A, \mathrm{Abb}(B, B)) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Abb}(A \times B, B) \\ f &\mapsto [(a, b) \mapsto f(a)(b)] \end{aligned}$$

Wenden wir diese Tatsache blind auf eine Darstellung $\varphi : L \to \mathrm{gl}(V)$ an, erhalten wir eine Abbildung $\varphi' : L \times V \to V$, die wir mit $a \odot v := \varphi'(a, v) = \varphi(a)(v)$ notieren. Dann ist diese in beiden Komponenten K-linear und folgendes gilt:

$$\begin{aligned} [a, b] \odot v = \varphi([a, b])(v) = [\varphi(a), \varphi(b)](v) &= (\varphi(a) \circ \varphi(b))(v) - (\varphi(b) \circ \varphi(a))(v) \\ &= a \odot (b \odot v) - b \odot (a \odot v). \end{aligned}$$

Das motiviert die folgende Definition:

Lie-Moduln

Lie-Moduln

Lie-Modul

Sei L eine Lie-Algebra über K. Ein **Lie-Modul** über L (oder auch ein **L-Modul**) ist ein endlich dimensionaler K-Vektorraum V mit einer Abbildung

$$\begin{aligned} L \times V &\to V \\ (a, v) &\mapsto a \cdot v \end{aligned}$$

sodass die drei Bedingungen

$$\begin{aligned} (\lambda a + \mu b) \cdot v &= \lambda(a \cdot v) + \mu(b \cdot v) \\ a \cdot (\lambda v + \mu w) &= \lambda(a \cdot v) + \mu(a \cdot v) \\ [a, b] \cdot v &= a \cdot (b \cdot v) - b \cdot (a \cdot v) \end{aligned}$$

für alle $a, b \in L$, $v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ gelten. Dies sind genau die drei Bedingungen, die wir vorhin festgestellt haben.

Lie-Moduln

Lie-Moduln

- Wir haben also, dass jede Darstellung V von L eine Lie-Modul Struktur auf V induziert und es gilt auch dass jede Lie-Modul Struktur eine Darstellung induziert (leicht nachrechenbar).

Lie-Moduln

- Wir haben also, dass jede Darstellung V von L eine Lie-Modul Struktur auf V induziert und es gilt auch dass jede Lie-Modul Struktur eine Darstellung induziert (leicht nachrechenbar).
- Mit den offensichtlichen Morphismen, die wir gleich definieren werden, heißt das nichts anderes als: die Kategorie der Darstellungen von L ist isomorph zur Kategorie der Lie-Moduln über L.

Lie-Moduln

- Wir haben also, dass jede Darstellung V von L eine Lie-Modul Struktur auf V induziert und es gilt auch dass jede Lie-Modul Struktur eine Darstellung induziert (leicht nachrechenbar).
- Mit den offensichtlichen Morphismen, die wir gleich definieren werden, heißt das nichts anderes als: die Kategorie der Darstellungen von L ist isomorph zur Kategorie der Lie-Moduln über L.
- Wir werden die offensichtlichen Definitionen für Lie-Moduln im Folgenden definieren und diese einfach dann via der 1zu1 Korrespondenz auf die Darstellung übertragen.

Lie-Moduln

- Wir haben also, dass jede Darstellung V von L eine Lie-Modul Struktur auf V induziert und es gilt auch dass jede Lie-Modul Struktur eine Darstellung induziert (leicht nachrechenbar).
- Mit den offensichtlichen Morphismen, die wir gleich definieren werden, heißt das nichts anderes als: die Kategorie der Darstellungen von L ist isomorph zur Kategorie der Lie-Moduln über L.
- Wir werden die offensichtlichen Definitionen für Lie-Moduln im Folgenden definieren und diese einfach dann via der 1zu1 Korrespondenz auf die Darstellung übertragen.
- Wie bei Gruppenwirkungen hat die eine Notation ihre Vorteile gegenüber der anderen in bestimmten Situationen (Lie-Modul eher zum Rechnen, Darstellungen eher für abstrakte Folgerungen).

Untermodul und Quotientenmodul

Untermodul und Quotientenmodul

Untermodul und Teildarstellung

Sei V ein L-Modul. Ein **Untermodul** U von V ist ein Unterraum, welcher abgeschlossen unter der Wirkung von L ist, d.h. für alle $a \in L$ und $u \in U$ gilt $a \cdot u \in U$. Also ist U selbst wieder ein L-Modul.

Untermodul und Quotientenmodul

Untermodul und Teildarstellung

Sei V ein L-Modul. Ein **Untermodul** U von V ist ein Unterraum, welcher abgeschlossen unter der Wirkung von L ist, d.h. für alle $a \in L$ und $u \in U$ gilt $a \cdot u \in U$. Also ist U selbst wieder ein L-Modul.
Übertragen auf Darstellungen $\varphi : L \to \mathrm{gl}(V)$ heißt das, dass wir ein Unterraum U von V haben, sodass $\varphi(a)(U) \subseteq U$ für alle $a \in L$. Also ist die Einschränkung $\varphi : L \to \mathrm{gl}(U)$ wieder eine Darstellung, welche wir **Teildarstellung** nennen.

Untermodul und Quotientenmodul

Beispiel 1

Da $\mathrm{ad} : L \to \mathrm{gl}(L)$ eine Darstellung von L ist, erhalten wir dass L ein L-Modul ist mit der Multiplikation

$$\begin{aligned}[-,-] : L \times V &\to V \\ (a,b) &\mapsto [a,b]\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass die Untermoduln genau die Ideale von L sind:
Sei U ein Untermodul von L, d.h. U ist ein Unterraum von L und $[a,u] \in U$ für alle $a \in L$. Also ist U ein Ideal in L. Umkehrung gilt trivialerweise auch.

Untermodul und Quotientenmodul

Beispiel 2

Sei $L = \mathrm{b}(\mathrm{n}, K)$ die Lie-Algebra der oberen Dreiecksmatrizen. Die natürliche Darstellung induziert eine L-Modul Struktur auf K^n via Matrixmultiplikation. Sei $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ die Standard-Basis. Definiere $W_r := \langle e_1, ...e_r\rangle$ für alle $0 \leq r \leq n$. Diese W_r sind dann genau alle Untermoduln:
Ist trivialerweise Untermodul, da für jede obere Dreiecksmatrix A gilt $A \cdot e_i \in \langle e_1, ...e_i\rangle$. Sei umgekehrt U ein Untermodul ungleich 0. Nehme ein Element aus $u \in U$, was bzgl. der linear Kombination der e_i maximalen Indexgrad aufweist, sagen wir $u = \lambda_1 \cdot e_1 + ... + \lambda_m \cdot e_m$ mit $\lambda_m \neq 0$ und $m \geq 1$. Falls $m = 1$ folgt direkt $U = \langle e_1\rangle$. Sei A die Matrix mit Nullen und einer 1 in der $(m-1)$-ten Zeile und m-ten Spalte. So folgt $A \cdot u = \lambda_m \cdot e_{m-1} \in U$. Also $e_{m-1} \in U$ und demnach auch alle e_i mit $i \leq m-1$ und letztendlich auch $e_m \in U$. Da m der maximale Indexgrad war, folgt $U = \langle e_1, ...e_m\rangle$.

Untermodul und Quotientenmodul

Beispiel 3

Sei L eine auflösbare Lie-Algebra und $\varphi : L \to \mathrm{gl}(V)$ eine Darstellung mit $V \neq 0$ und V ist komplexer Vektorraum. Somit ist auch $\mathrm{im}(\varphi)$ auflösbar als Lie-Unteralgebra von $\mathrm{gl}(V)$. Aus Vortrag 4 wissen wir, dass es ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ gibt, der Eigenvektor von $\mathrm{im}(\varphi)$ ist, d.h. aber, dass $\langle v \rangle$ ein 1-dimensionaler Untermodul von V ist.

Untermodul und Quotientenmodul

Untermodul und Quotientenmodul

Quotientenmodul

Sei V ein L-Modul und U ein Untermodul. Dann definieren wir den **Quotientenmodul** V/U mit der Multiplikation

$$\begin{aligned} \cdot : L \times V/U &\to V/U \\ (a, v+U) &\mapsto a \cdot v + U \end{aligned}$$

Die übliche triviale Rechnerei, dass es wohldefiniert ist, lasse wir aus. Man kann auch leicht zeigen, dass V/U mit obiger Multiplikation ein L-Modul ist.

Homomorphismen

Homomorphismen

Homomorphismus

Seien V und W zwei L-Moduln. Ein L-**Modul Homomorphismus** (oder **Lie Homomorphismus**) von V nach W ist eine lineare Abbildung $f : V \to W$, s.d.

$$f(a \cdot v) = a \cdot f(v)$$

für alle $a \in L$ und $v \in V$. Ein **Isomorphismus** ist ein bijektiver Lie Homomorphismus.

Homomorphismen

Homomorphismus

Seien V und W zwei L-Moduln. Ein L-**Modul Homomorphismus** (oder **Lie Homomorphismus**) von V nach W ist eine lineare Abbildung $f : V \to W$, s.d.

$$f(a \cdot v) = a \cdot f(v)$$

für alle $a \in L$ und $v \in V$. Ein **Isomorphismus** ist ein bijektiver Lie Homomorphismus. Es gelten die üblichen Beobachtungen: $\ker(f)$ ist ein Untermodul von V und $\mathrm{im}(f)$ ist ein Untermodul von W. Summen und Schnitte von Untermoduln sind wieder Untermoduln.
Übertragen auf Darstellungen $\varphi_1 : L \to \mathrm{gl}(V)$ und $\varphi_2 : L \to \mathrm{gl}(W)$ heißt das: $f : V \to W$ ist linear und erfüllt

$$f \circ \varphi_1(a) = \varphi_2(a) \circ f$$

für alle $a \in L$.

Isomorphiesätze

Isomorphiesätze

Isomorphiesätze

Es gelten die üblichen Isomorphiesätze:
(1) Sei $f : V \to W$ ein Homomorphismus von L-Moduln. Dann ist $V/\ker(f) \cong \mathrm{im}(f)$.
(2) Seien U und W Untermoduln von V, dann gilt $(U+W)/W \cong U/(U \cap W)$.
(3) Seien U und W Untermoduln von V mit $U \subseteq W$, dann ist W/U ein Untermodul von V/U und es gilt $(V/U)/(W/U) \cong V/W$.
(4) Wir haben erneut eine 1zu1 Korrespondenz zwischen den Untermoduln von V/U und allen Untermoduln von V, die U enthalten.

Direkte Summe

Direkte Summe

Externe und interne direkte Summe

Seien V und $(V_i)_{i \in I}$ für eine Indexmenge I L-Moduln und seien $(U_i)_{i \in I}$ Untermoduln von V. Wir definieren die **externe direkte Summe** $\oplus_{i \in I} V_i$ der V_i als externe direkte Summe von Vektorräumen, wobei L komponentenweise auf die Elemente von $\oplus_{i \in I} V_i$ wirkt. Analog ist die **interne direkte Summe** $\oplus_{i \in I} U_i$ als interne direkte Summe von Unterräumen definiert (d.h. die Summe der Unterräume ist ganz V und außerdem ist die 0 nur als endliche linear Kombination von Elementen aus U_i darstellbar, wenn all diese Elemente schon selbst 0 sind).

Interne und externe direkte Summe

Interne und externe direkte Summe

Folgendes Lemma soll viele Unklarheiten zwischen interner und externe direkten Summen aufheben, womit viele Studenten zu kämpfen haben.

Interne und externe direkte Summe

Folgendes Lemma soll viele Unklarheiten zwischen interner und externe direkten Summen aufheben, womit viele Studenten zu kämpfen haben.

Äquivalenz von interner und externer direkte Summe

Sei V ein L-Modul. Dann gilt:
Falls es Untermoduln U_i gibt mit $V = \oplus_{i \in I} U_i$ (intern), dann gibt es L-Moduln V_i isomorph zu U_i, sodass $V \cong \oplus_{i \in I} V_i$ (extern).
Umgekehrt, falls es L-Moduln V_i gibt mit $V \cong \oplus_{i \in I} V_i$ (extern), so gibt es Untermoduln U_i mit $V = \oplus_{i \in I} U_i$ (intern).

Interne und externe direkte Summe

Folgendes Lemma soll viele Unklarheiten zwischen interner und externe direkten Summen aufheben, womit viele Studenten zu kämpfen haben.

Äquivalenz von interner und externer direkte Summe

Sei V ein L-Modul. Dann gilt:
Falls es Untermoduln U_i gibt mit $V = \oplus_{i \in I} U_i$ (intern), dann gibt es L-Moduln V_i isomorph zu U_i, sodass $V \cong \oplus_{i \in I} V_i$ (extern).
Umgekehrt, falls es L-Moduln V_i gibt mit $V \cong \oplus_{i \in I} V_i$ (extern), so gibt es Untermoduln U_i mit $V = \oplus_{i \in I} U_i$ (intern).

Der Beweis ist eine gute Übungsaufgabe. Es geht darum, dass wir zwischen interner und externer direkte Summe apriori nicht unterscheiden müssen.

Interne und externe direkte Summe

Folgendes Lemma soll viele Unklarheiten zwischen interner und externe direkten Summen aufheben, womit viele Studenten zu kämpfen haben.

Äquivalenz von interner und externer direkte Summe

Sei V ein L-Modul. Dann gilt:
Falls es Untermoduln U_i gibt mit $V = \oplus_{i \in I} U_i$ (intern), dann gibt es L-Moduln V_i isomorph zu U_i, sodass $V \cong \oplus_{i \in I} V_i$ (extern).
Umgekehrt, falls es L-Moduln V_i gibt mit $V \cong \oplus_{i \in I} V_i$ (extern), so gibt es Untermoduln U_i mit $V = \oplus_{i \in I} U_i$ (intern).

Der Beweis ist eine gute Übungsaufgabe. Es geht darum, dass wir zwischen interner und externer direkte Summe apriori nicht unterscheiden müssen. Obiges Lemma gilt auch für R-Moduln (also auch für Vektorräume) und für Darstellungen von K-Algebren. Jedoch nicht für Lie-Algebren, dort muss man die Untermoduln nicht mit Lie-Unteralgebren ersetzen, sondern durch Ideale.

Irreduzibilität und Unzerlegbarkeit

Irreduzibilität und Unzerlegbarkeit

Irreduzibilität

Ein L-Modul V heißt **irreduzibel** (oder **einfach**), falls $V \neq 0$ und 0 mit V die einzigen Untermoduln sind.

Irreduzibilität und Unzerlegbarkeit

Irreduzibilität

Ein L-Modul V heißt **irreduzibel** (oder **einfach**), falls $V \neq 0$ und 0 mit V die einzigen Untermoduln sind.
Unser V heißt **unzerlegbar**, falls aus $V \cong V_1 \oplus V_2$ folgt $V_1 = 0$ oder $V_2 = 0$ oder äquivalent, falls für Untermoduln U_1 und U_2 aus $V = U_1 \oplus U_2$ folgt $U_1 = 0$ oder $U_2 = 0$.

Irreduzibilität und Unzerlegbarkeit

Irreduzibilität

Ein L-Modul V heißt **irreduzibel** (oder **einfach**), falls $V \neq 0$ und 0 mit V die einzigen Untermoduln sind.
Unser V heißt **unzerlegbar**, falls aus $V \cong V_1 \oplus V_2$ folgt $V_1 = 0$ oder $V_2 = 0$ oder äquivalent, falls für Untermoduln U_1 und U_2 aus $V = U_1 \oplus U_2$ folgt $U_1 = 0$ oder $U_2 = 0$.
Unser V heißt **vollständig reduzibel**, falls irreduzible L-Moduln S_i existieren mit $V \cong S_1 \oplus S_2 \oplus \ldots \oplus S_n$ oder äquivalent, falls irreduzible Untermoduln U_i existieren mit $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_n$.

Irreduzibilität und Unzerlegbarkeit

Irreduzibilität

Ein L-Modul V heißt **irreduzibel** (oder **einfach**), falls $V \neq 0$ und 0 mit V die einzigen Untermoduln sind.
Unser V heißt **unzerlegbar**, falls aus $V \cong V_1 \oplus V_2$ folgt $V_1 = 0$ oder $V_2 = 0$ oder äquivalent, falls für Untermoduln U_1 und U_2 aus $V = U_1 \oplus U_2$ folgt $U_1 = 0$ oder $U_2 = 0$.
Unser V heißt **vollständig reduzibel**, falls irreduzible L-Moduln S_i existieren mit $V \cong S_1 \oplus S_2 \oplus \ldots \oplus S_n$ oder äquivalent, falls irreduzible Untermoduln U_i existieren mit $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_n$.

Offensichtlich gilt, dass die Irreduzibilität die Unzerlegbarkeit nach sich zieht. Rückrichtung gilt nicht (werden Beispiel sehen)!

Irreduzibilität und Unzerlegbarkeit

Irreduzibilität

Ein L-Modul V heißt **irreduzibel** (oder **einfach**), falls $V \neq 0$ und 0 mit V die einzigen Untermoduln sind.
Unser V heißt **unzerlegbar**, falls aus $V \cong V_1 \oplus V_2$ folgt $V_1 = 0$ oder $V_2 = 0$ oder äquivalent, falls für Untermoduln U_1 und U_2 aus $V = U_1 \oplus U_2$ folgt $U_1 = 0$ oder $U_2 = 0$.
Unser V heißt **vollständig reduzibel**, falls irreduzible L-Moduln S_i existieren mit $V \cong S_1 \oplus S_2 \oplus \ldots \oplus S_n$ oder äquivalent, falls irreduzible Untermoduln U_i existieren mit $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_n$.

Offensichtlich gilt, dass die Irreduzibilität die Unzerlegbarkeit nach sich zieht. Rückrichtung gilt nicht (werden Beispiel sehen)!
Falls $V \neq 0$ können wir ein irreduziblen Untermodul S finden. Dann können wir ein irreduziblen Untermodul S' von V/S finden, usw. Auf gewisse Weise besteht V aus $S, S', \ldots$. Man sagt irreduzible Moduln sind die *Bausteine* der endlich dimensionalen Moduln (Analogon von einfachen Gruppen).

Untermodul und Quotientenmodul

Beispiel 1

Falls V ein 1-dimensionaler L-Modul ist, so ist V irreduzibel (da aus Dimensionsgründen 0 und V die einzigen Untermoduln sind). D.h. unsere triviale Darstellung ist irreduzibel (deswegen hatten wir $V = K$ gewählt).

Untermodul und Quotientenmodul

Beispiel 1

Falls V ein 1-dimensionaler L-Modul ist, so ist V irreduzibel (da aus Dimensionsgründen 0 und V die einzigen Untermoduln sind). D.h. unsere triviale Darstellung ist irreduzibel (deswegen hatten wir $V = K$ gewählt).

Beispiel 2

Falls L eine einfache Lie-Algebra ist (Ideale sind nur 0 und L mit $L \neq 0$), so ist L als L-Modul via der adjungierten Darstellung irreduzibel (da die Untermoduln genau die Ideale waren). Beispiel $L = \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$.

Untermodul und Quotientenmodul

Beispiel 3

Wir betrachten wieder $L = \mathrm{b}(\mathrm{n}, K)$ mit der natürlichen Darstellung. Wir haben gesehen, dass die Untermoduln genau $W_r := \langle e_1, ...e_r \rangle$ sind. Falls $n \geq 2$, so folgt $V = K^n$ ist nicht irreduzibel, aber unzerlegbar, da die Untermoduln eine totale Ordnung bzgl. der Inklusion bilden. D.h. insbesondere unzerlegbar impliziert nicht irreduzibel.

Kurze Überlegung

Kurze Überlegung

Fakt

Seien S und T irreduzible L-Moduln mit einem von Null verschiedenen Homomorphismus $f : S \to T$. Da $\ker(f)$ ein Untermodul von S, aber ungleich S ist, folgt aus der Irreduzibilität $\ker(f) = 0$. Analog folgt $\mathrm{im}(f) = T$. D.h. f ist ein Isomorphismus. D.h. zwischen nicht isomorphem irreduziblen Moduln existiert nur der Nullhomomorphismus.

Lemma von Schur

Lemma von Schur

Lemma von Schur

Sei L eine komplexe Lie-Algebra und S eine endlich dimensionaler irreduzibler L-Modul. Dann ist $f : S \to S$ ein Homomorphismus genau dann, wenn $f = \lambda \cdot id_S$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$.

Lemma von Schur

Lemma von Schur

Sei L eine komplexe Lie-Algebra und S eine endlich dimensionaler irreduzibler L-Modul. Dann ist $f : S \to S$ ein Homomorphismus genau dann, wenn $f = \lambda \cdot id_S$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$.

Beweis. Rückrichtung gilt offensichtlich. Für die Hinrichtung ist f insbesondere ein Vektorraum Homomorphismus. Es gibt also einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist $f - \lambda \cdot id_S$ noch immer ein L-Modul Homomorphismus von S nach S. Da dieser einen nicht leeren Kern hat, muss der Kern schon ganz S sein, was gerade heißt: $f - \lambda \cdot id_S = 0$, was zu zeigen war.

Anwendung des Lemmas von Schur

Beispiel 1

Sei L eine komplexe Lie-Algebra und V ein irreduzibler L-Modul. Falls $z \in Z(L)$, dann wirkt z mittels Skalarmultiplikation von L linear aus V. Dann ist diese Abbildung ein Vielfaches der Identität.

Anwendung des Lemmas von Schur

Beispiel 1

Sei L eine komplexe Lie-Algebra und V ein irreduzibler L-Modul. Falls $z \in Z(L)$, dann wirkt z mittels Skalarmultiplikation von L linear aus V. Dann ist diese Abbildung ein Vielfaches der Identität.

Beweis. Die Abbildung $v \mapsto z \cdot v$ ist nicht nur K-linear, sondern sogar ein L-Modul Homomorphismus, denn:

$$z \cdot (x \cdot v) = x \cdot (z \cdot v) + [z, x] \cdot v = x \cdot (z \cdot v)$$

Der Rest folgt mit dem Lemma von Schur.

Gibt es Fragen? :)

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!