8 第八讲：正则序数与序数算术

本次课的目标是引进序数的“梯度”概念，从而形成对序数的一种有意义的区分；并在这种区分之上考虑序数的算术问题。

8.1 梯度与正则序数

定义 8.1. 设 $\alpha > 0$ 是一个极限序数。

(1) 称 α 的一个子集合 A 在 α 中是**无界的**是指

$$\forall\beta\ (\beta < \alpha \rightarrow \exists\gamma\ (\gamma \in A \wedge \beta < \gamma))。$$

A 在 α 中**有界**当且仅当 $\exists\beta < \alpha\ (A \subseteq \beta)$。

(2) 称 A 是 α 的一个**无界闭子集**当且仅当 A 在 α 中无界，并且

$$\forall\gamma < \alpha\ (((\forall\beta < \gamma(\beta + 1 < \gamma)) \wedge \gamma \cap A \text{在}\ \gamma\ \text{中无界}) \rightarrow \gamma \in A.$$

(3) 称序数函数 $f : \beta \rightarrow \alpha$ 在 α 中是有界的当且仅当 $\exists\gamma < \alpha\ (f[\beta] \subseteq \gamma)$；
f 在 α 中是无界的当且仅当 $\forall\gamma < \alpha\,\exists\delta < \beta\ (\gamma < f(\delta))$。

(4) 如果序数函数 $f : \beta \rightarrow \alpha$ 在 α 中是有界的，f 的上确界

$$\sup(f) = \min(\{\gamma < \alpha \mid f[\beta] \subseteq \gamma\}) = \sup(\{f(\gamma) + 1 \mid \gamma \in \beta\}).$$

(5) 称序数函数 $f : \beta \rightarrow \alpha$ 是单调递增的当且仅当 $\forall\delta < \eta < \beta\ (f(\delta) < f(\eta))$；

(6) 称序数函数 $f : \beta \rightarrow \alpha$ 是单调递增的连续函数当且仅当 f 是单调递增的，并且

$$\forall\delta < \beta\ (\text{如果}\ \delta\ \text{是一极限序数，那么}\ f(\delta) = \bigcup\{f(\eta) \mid \eta < \delta\}.$$

定义 8.2. 设 α 为一个非零极限序数。α的**梯度**[13]，记成 $\mathrm{cf}(\alpha)$, 由如下等式定义：

$$\mathrm{cf}(\alpha) = \min\{\mathrm{ot}(A) \mid A \subseteq \alpha \wedge \forall\beta\ (\beta < \alpha \rightarrow \exists\gamma\ (\gamma \in A \wedge \beta < \gamma))\}.$$

即，$\mathrm{cf}(\alpha)$ 是 α 的最短的无界子集的**长度**。

定理 8.1. *设 $\alpha > 0$ 是一个极限序数。那么*

$$\mathrm{cf}(\alpha) = \min(\{\mathrm{ot}(B) \mid B\ \text{是}\ \alpha\ \text{的一个无界闭子集}\}).$$

证明 令 $\gamma = \min(\{\mathrm{ot}(B) \mid B$ 是 α 的一个无界闭子集$\})$。那么，$\mathrm{cf}(\alpha) \leq \gamma$。
令 $A \subseteq \alpha$ 在 α 中无界，并且 $\mathrm{ot}(A) = \mathrm{cf}(\alpha)$。令

$$\tau : \mathrm{cf}(\alpha) \rightarrow A$$

[13] cofinality

为 A 的自然列表，即$\forall\beta<\mathrm{ot}(A)\,(\beta=\mathrm{ot}(\tau(\beta)\cap A))$。以如下方式定义$\delta:\mathrm{cf}(\alpha)\to\alpha$：对于$\beta<\mathrm{cf}(\alpha)$，令

$$\delta(\beta)=\begin{cases}\tau(\beta) & \beta\text{ 是一后继序数;}\\ \tau(\beta) & \beta\text{ 是一个极限序数而且 }\tau(\beta)=\sup(\tau(\beta)\cap A);\\ \sup(\tau(\beta)\cap A) & \beta\text{ 是一个极限序数而且 }\tau(\beta)>\sup(\tau(\beta)\cap A).\end{cases}$$

那么$\delta:\mathrm{cf}(\alpha)\to\alpha$ 是一个连续单掉递增的在α 中无界的函数。令$B=\delta[\mathrm{cf}(\alpha)]$。那么$B$ 是α 的一个无界闭子集以及$\mathrm{ot}(B)=\mathrm{cf}(\alpha)$。因此，$\gamma\leq\mathrm{ot}(B)=\mathrm{cf}(\alpha)$。

□

定理 8.2. *设$\alpha\geq\gamma\geq\omega$ 为两个极限序数。那么如下两个命题等价：*
(1) $\gamma=\mathrm{cf}(\alpha)$.
(2) 存在从γ 到α的无界单增连续映射，并且对于任何一个$\eta<\gamma$，任意一个从η 到α 上的映射一定在α 中有界。

证明 (1) $\Rightarrow$ (2).
令$A\subseteq\alpha$ 在α 中无界闭子集而且$\mathrm{ot}(A)=\gamma=\mathrm{cf}(\alpha)$。那么，$A$ 的自然列表

$$\forall\beta\in A\,(\mathrm{ot}(A)\ni\mathrm{ot}(\beta\cap A)\mapsto\beta\in A)$$

就是一个从γ 到α 上的无界单增连续映射。
设$\eta<\gamma$。设$g:\eta\to\alpha$。令$B=g[\eta]$。那么$\mathrm{ot}(B)\leq\eta<\mathrm{cf}(\alpha)$。所以$B$ 必然在α 中有界。故g 一定在α 中有界。
(2) $\Rightarrow$ (1).
令$f:\gamma\to\alpha$ 为一个无界单增的映射。令$A=f[\gamma]$。那么，A在α 中无界，而且$\mathrm{ot}(A)=\gamma$。所以，

$$\mathrm{cf}(\alpha)\leq\gamma。$$

现假设$\mathrm{cf}(\alpha)<\gamma$。令$B\subseteq\alpha$ 为一个序型为$\mathrm{cf}(\alpha)$ 的在α 中无界的子集。那么，B 的自然列表

$$\forall\beta\in B\,(\mathrm{ot}(B)\ni\mathrm{ot}(\beta\cap B)\mapsto\beta\in B)$$

就是一个从$\mathrm{cf}(\alpha)$ 到α 的单增无界映射，而且$\mathrm{cf}(\alpha)<\gamma$。这与(2)不符。

□

定理 8.3. *设α 为一个非零极限序数。那么，$\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))=\mathrm{cf}(\alpha)$。*

证明 一方面，我们有$\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))\leq\mathrm{cf}(\alpha)$。另一方面，取$A\subseteq\alpha$ 的一个序型为$\mathrm{cf}(\alpha)$ 的无界闭子集。令

$$\tau:\mathrm{cf}(\alpha)\to A$$

为A 的自然列表。再取$B\subseteq\mathrm{cf}(\alpha)$ 的一个序型为$\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))$ 的无界闭子集。那么$\tau[B]$ 为α的一个无界闭子集。因此，$\mathrm{cf}(\alpha)\leq\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))$。

□

推论 8.1. *设$\alpha>0$是一个极限序数。*
(1) 设$A\subseteq\mathrm{cf}(\alpha)$。那么，$A$ 在$\mathrm{cf}(\alpha)$ 中无界当且仅当A 的序型为$\mathrm{cf}(\alpha)$。
(2) 如果$\beta<\mathrm{cf}(\alpha)$, 而且$f:\beta\to\mathrm{cf}(\alpha)$, 那么$f$ 一定在$\mathrm{cf}(\alpha)$ 中有界。

证明 (2) 注意$\mathrm{rng}(f)$ 的序型一定小于等于$\mathrm{dom}(f)$，因为$\mathrm{rng}(f)$ 与$\mathrm{dom}(f)$ 的一个子集同构：

$$\{\xi\in\mathrm{dom}(f)\mid\exists\gamma\,(\gamma\in\mathrm{rng}(f)\wedge f(\xi)=\gamma\wedge\forall\eta((\eta\in\mathrm{dom}(f)\wedge\gamma=f(\eta))\to\xi\leq\eta))\}.$$

□

定理 8.4. *(1) 设$\alpha > 0$ 为一个极限序数。如果$A \subseteq \alpha$ 是α 的一个无界子集，那么A 一定包含一个序型为$\mathrm{cf}(\alpha)$ 的无界子集。*

*(2) 设α 和γ 为非零极限序数。又设$f : \gamma \to \alpha$ 为一个长度为γ 的**单调不减**序列，即如果$\xi < \beta < \gamma$，那么*

$$f(\xi) \leq f(\beta),$$

并且α 是f 的上确界。那么$\mathrm{cf}(\gamma) = \mathrm{cf}(\alpha)$。

证明 (1) 设$\alpha > 0$ 为一极限序数，$A \subseteq \alpha$ 是α 的一个无界子集。那么，A 的序型一定大于或者等于$\mathrm{cf}(\alpha)$。令$\tau : \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ 为一个连续单增且在α 中无界的函数。利用τ, 我们来定义A 的一个序型为$\mathrm{cf}(\alpha)$ 的在α 中无界的子集。为此，我们只需定义一个从$\mathrm{cf}(\alpha)$ 到A 中的在α 中无界的严格单调递增映射f (它的值域就是我们所要的集合)；我们还需要同时定义一个具有辅助功能的从$\mathrm{cf}(\alpha)$ 到$\mathrm{cf}(\alpha)$ 的单调递增的连续函数γ。

令$\gamma_0 = 0$, $f(0) = \min(A - \{\tau(\gamma_0) + 1\})$。

对$\beta < \mathrm{cf}(\alpha)$, 令$\gamma_{\beta+1} < \mathrm{cf}(\alpha)$ 为满足不等式方程$f(\beta) < \tau(x)$ 的最小解，以及

$$f(\beta + 1) = \min(A - \{\tau(\gamma_{\beta+1}) + 1\})。$$

如果$\beta < \mathrm{cf}(\alpha)$ 是一个非零极限序数，而且对于$\eta < \beta$, 我们已经定义了$f(\eta)$ 和γ_η, 令

$$\gamma_\beta = \bigcup\{\gamma_\eta \mid \eta < \beta\}.$$

再令

$$f(\beta) = \min(A - \{\tau(\gamma_\beta) + 1\}).$$

于是，$f : \mathrm{cf}(\alpha) \to A$ 是一个严格单调递增的在α 中无界的映射, 因为对于任意的$\xi < cf(\alpha)$,

$$\tau(\gamma_\xi) < f(\xi) < \tau(\gamma_{\xi+1}) < f(\xi + 1)$$

以及$\langle \gamma_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\alpha) \rangle$ 是$\mathrm{cf}(\alpha)$ 中的一个连续单增函数，而且对于任意的$\eta < \mathrm{cf}(\alpha)$, 我们都有

$$\tau(\gamma_\eta) = \bigcup\{\tau(\gamma_\xi) \mid \xi < \eta\}。$$

(2) 现在设α 和γ 分别是两个非零极限序数。而且设$f : \gamma \to \alpha$ 为一个单增的在α 中无界的函数。

先来证明$\mathrm{cf}(\alpha) \leq \mathrm{cf}(\gamma)$。为此，定义$f$ 的"典型逆向选择函数" $g : \mathrm{rng}(f) \to \gamma$ 如下：

对$\beta \in \mathrm{rng}(f)$, 令$g(\beta)$ 为满足方程$\beta = f(x)$的最小解。

令$X = \mathrm{rng}(g)$。那么$g : \mathrm{rng}(f) \to X$ 是一个同构映射。同时X 在γ中是无界的(因为α 是一个极限序数，f 在α 中无界，f 不可能从某一点之后为常数函数)。取X 的一个序型为$\mathrm{cf}(\gamma)$ 的子集$A \subseteq X$。那么$f \restriction A$ 必在α中无界：对于$\xi < \alpha$, 取$\beta \in X$ 满足$f(\beta) > \xi$，再取$\eta \in A$ 满足$\eta > \beta$，那么$f(\eta) > \xi$。由于$f \restriction A : A \to \mathrm{rng}(f \restriction A)$是一个同构映射，我们有$\mathrm{cf}(\alpha) \leq \mathrm{cf}(\gamma)$。

再来证明$\mathrm{cf}(\gamma) \leq \mathrm{cf}(\alpha)$。为此，取$\mathrm{rng}(f)$的一个长度为$\mathrm{cf}(\alpha)$的无界子集$B \subseteq \mathrm{rng}(f)$。令$\tau : \mathrm{cf}(\alpha) \to B$ 为B的自然列表。再令$h = g \circ \tau : \mathrm{cf}(\alpha) \to \gamma$。那么$h$ 是一个严格单调递增而且在γ中无界的函数。因此，$\mathrm{cf}(\gamma) \leq \mathrm{cf}(\alpha)$。

这样，我们得到$\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\gamma)$。

□

定义 8.3. 我们称一个极限序数$\alpha > 0$为一个**正则序数**[14]当且仅当$\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$。

[14]regular ordinal

例子 8.1. (1) ω是一个正则序数。

(2) 如果α是一个非零极限序数，那么$\mathrm{cf}(\alpha)$是一个正则序数。

问题 8.1. 存在大于ω的正则序数吗？

定理 8.5. *如果α 是一个正则序数，那么α 是一个基数。*

证明 设$\alpha \geq \omega$是一个极限序数，并且$\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$。

假设$\mathbf{Card}(\alpha) < \alpha$。令$\beta = \mathbf{Card}(\alpha)$。那么，$\beta \geq \omega$ 必是一个极限序数。

令$f : \beta \to \alpha$ 为一个双射。又令$g : \mathrm{cf}(\beta) \to \beta$为一个在$\beta$ 中单增无界的函数。由于$\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$，对于$\gamma \in \beta < \mathrm{cf}(\alpha)$，$f[\gamma]$ 是α的一个有界子集。于是，对于$\xi \in \mathrm{cf}(\beta)$，令

$$h(\xi) = \sup(f[g(\xi)]) < \alpha。$$

$h[\mathrm{cf}(\beta)]$是α的一个无界子集，并且$\mathrm{ot}(h[\mathrm{cf}(\beta)]) \leq \mathrm{cf}(\beta) \leq \beta < \mathrm{cf}(\alpha)$。这是一个矛盾。

□

定义 8.4 (奇异基数)**.** 称一个基数κ为一个**奇异基数**当且仅当$\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$；称一个基数$\kappa$为一个**正则基数**当且仅当$\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$。

例子 8.2. ω是一个正则极限基数；$\aleph_\omega$是一个奇异基数；阿列夫序列不动点定理的证明表明存在任意大的梯度为ω的奇异极限基数；

命题 8.1. *如果$\alpha \geq \omega$为一个极限序数，那么$\mathrm{cf}(\alpha)$是一个正则基数，从而，每一个正则序数都是一个正则基数；如果$\kappa > \omega$是一个正则极限基数，那么$\kappa = \aleph_\kappa$。*

证明 设$\alpha \geq \omega$是一个极限序数。令$\gamma = \mathrm{cf}(\alpha)$。根据定理8.3，$\gamma$是一个正则序数；根据定理8.5，$\gamma$是一个基数；因此，$\gamma$是一个正则基数。如果$\alpha$是一个正则序数，那么$\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$，所以，$\alpha$是一个正则基数。

设$\kappa > \omega$是一个正则极限基数。令$\kappa = \aleph_\beta$。那么β是一个极限序数，并且$\mathrm{cf}(\beta) = \beta \leq \kappa$。我们来证明$\beta = \kappa$。事实上，我们应用归纳法来证明：

$$\forall \alpha < \kappa \, (\aleph_\alpha < \kappa)。$$

当$\alpha = 0$时，$\alpha_0 = \omega < \kappa$。当$\alpha = \gamma + 1$时，根据归纳假设以及$\kappa$是一个极限基数的假设就得到所要的结论。

现在设$\alpha < \kappa$是一个极限序数。那么，$\mathrm{cf}(\alpha) < \kappa = \mathrm{cf}(\kappa)$。令$f : \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$为一个在$\alpha$中单增无界的序列。那么，

$$\aleph_\alpha = \bigcup \{\aleph_\gamma \mid \gamma < \alpha\} = \bigcup \{\aleph_{f(\gamma)} \mid \gamma < \mathrm{cf}(\alpha)\}。$$

由归纳假设，每一个$\aleph_{f(\gamma)} < \kappa$；由于序列$\langle \aleph_{f(\gamma)} \mid \gamma < \mathrm{cf}(\alpha) \rangle$在$\aleph_\alpha$ 中单增无界，$\aleph_\alpha \leq \kappa$，以及

$$\mathrm{cf}(\alpha) < \mathrm{cf}(\kappa) = \kappa,$$

这个序列必然在κ中有界。因此，$\aleph_\alpha < \kappa$。

□

问题 8.2. 是否每一个奇异基数都一定是一个极限基数？也就是问是否存在奇异的后继基数？

问题 8.3 (基数列表正则序数不动点问题)**.** 在$\aleph$的诸多不动点之中是否有一个正则序数α？等价地，是否存在正则极限基数？

这个问题是一个独立于我们的基本公理系统的问题：任何一个这样的不动点都会是一个"大基数"，一种高阶无穷假设。

命题 8.2. *设$\kappa \geq \omega$是一个正则基数。*

(1) 如果$X \subset \kappa$，并且$\mathbf{Card}(X) < \kappa$，那么$X$在$\kappa$中一定有界；

(2) 如果$\lambda < \kappa$，$f : \lambda \to \kappa$，那么$f[\lambda]$一定在κ中有界。

证明 练习。

□

定理 8.6. *设$\alpha > 0$为一个极限序数。那么如下两个命题等价：*
(1) α是一个正则序数；
(2) α的任何两个无界子集都$\in$-同构；从而，α的任何无界子集都具有序型α；

证明 练习。

□

8.2 序数算术运算

这里我们来定义三类定义在序数类上的单增连续类函数：序数加法运算、乘法运算和指数运算；这三个二元运算当它们作为第二分量的类函数时都是单增连续的。

定义 8.5. 对于两个不相交的线性有序集合$(A, <_A)$和$(B, <_B)$, 我们如下定义它们的**直和**$(A + B, <)$：

$$< = <_A \cup <_B \cup \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\},$$

即，定义$A < B$，A中的每一个元素都小于B中的每一个元素。

定义 8.6. 对于两个线性有序集合$(A, <_A)$和$(B, <_B)$，我们如下定义它们的**乘积**$(A \times B, <)$: 对于$A \times B$中的任意两个$(a, b), (x, y)$,

$$(a, b) < (x, y) \leftrightarrow (a <_A x \vee (a = x \wedge b < y))。$$

即$A \times B$的**垂直字典序**，简称为A与B的**字典序**。

定义 8.7. 对于两个线性有序集合$(A, <_A)$和$(B, <_B)$，我们如下定义它们的**乘积**$(A \times B, <)$: 对于$A \times B$中的任意两个$(a, b), (x, y)$,

$$(a, b) < (x, y) \leftrightarrow (b <_B y \vee (b = y \wedge a < x))。$$

即$A \times B$的**水平字典序**，又称为**反字典序**。

[想象：B是一条垂线，将B中的每一个点换成以这个点为颜色的与A同构的一条水平直线，而这些不同颜色的水平直线之间仍保持着原来这些点之间的线性序。这就构成了一条新的直线：它们的乘积序，水平字典序。这一图形在证明结合律有用。]

注意，当B是一个单点集合，$<_B = \emptyset$, 上面所定义的乘积便是$(A, <_A)$的一个简单的自然同构。

命题 8.3. *设α和β为两个序数。*
(1) 令$(\alpha \times \{0\}, <_0)$和$(\beta \times \{1\}, <_1)$ 分别为它们的乘积。那么这两个乘积的直和$(\alpha \times \{0\} + \beta \times \{1\}, <)$是一个秩序集合。
(2) 在字典序或者水平字典序下，$(\alpha \times \beta, <)$是一个秩序集合。

证明 (练习。)

□

定义 8.8. 我们将两个序数α和β的序数之和，记成$\alpha+\beta$, 定义为唯一的与

$$(\alpha \times \{0\} + \beta \times \{1\}, <)$$

同构的序数。

注意：序数之和并非可交换。比如，$1+\omega=\omega<\omega+1$。

命题 8.4 (序数加法递归式). $\alpha+\beta=\alpha\cup\{\alpha+\gamma\mid;\gamma\in\beta\}$。
更具体地说，序数的加法运算满足如下的递归运算公式：
(1) $\alpha+0=\alpha$*;*
(2) $\forall\beta\ (\beta\in \mathrm{Ord}\to(\alpha+(\beta+1)=(\alpha+\beta)+1))$;
(3) 对于所有的非零极限序数β*,* $\alpha+\beta=\bigcup\{\alpha+\xi\mid\xi<\beta\}$.

证明 对于序数加法运算：首先，加法递归定义计算公式是合理的。考虑三个二元类函数G_1,G_2,G_3：$G_1(z,x)=z$；$G_2(z,x)=x+1$；当x是一个函数时，$G_3(z,x)=\bigcup\mathrm{rng}(x)$；否则，$G_3(z,x)=\emptyset$。那么，如下的计算公式给出序数加法运算的递归定义：对于任意的z，

- $F(z,0)=G_1(z,0)=z$；
- 对于任意序数α，$F(z,\alpha+1)=G_2(z,F_z(\alpha))=F(z,\alpha)+1$；
- 对于任意非零极限序数γ，$F(z,\gamma)=G_3(z,F_z\restriction_\gamma)=\bigcup\mathrm{rng}(F_z\restriction_\gamma)=\bigcup\{F(z,\alpha)\mid\alpha<\gamma\}$。

令$(W_1,<_1)\cong(\alpha_1,<)$；$(W_2,<_2)\cong(\alpha_2,<)$；$W_1\cap W_2=\emptyset$；$(W,<)=(W_1+W_2,<)$；对$\alpha_2$施归纳，验证：$(W,<)\cong\alpha_1+\alpha_2$，其中$\alpha_1+\alpha_2$依据递归定义计算。
当$\alpha_2=\beta+1$时，令$a\in W_2$为最大元，那么根据归纳假设，$(W[a],<)\cong(\alpha_1+\beta,<)$，从而

$$(W,<)\cong(\alpha_1+\alpha_2,<)。$$

当$\alpha_2>0$是一个极限序数时，根据归纳假设，对于$\beta<\alpha_2$，令$a_\beta\in W_2$见证$(W[a_\beta],<)\cong(\alpha_1+\beta,<)$，令$f_\beta$为唯一的序同构映射。如果$\beta<\gamma<\alpha_2$，那么$f_\beta\subset f_\gamma$。令

$$f=\bigcup\{f_\beta\mid\beta<\alpha_2\}。$$

那么，$f:(W,<)\cong(\alpha_1+\alpha_2,<)=(\alpha_1+\bigcup\{\alpha_1+\beta\mid\beta<\alpha_2\},<)$。

□

于是，如果κ 和λ 是两个基数，那么

$$\kappa+\lambda=\min\left(\{\gamma\mid|\gamma|=|\kappa\cup\{\kappa+\beta\mid\beta\in\lambda\}|\}\right).$$

引理 8.1 (序数加法连续性). *如果*$\gamma>0$*是一个极限序数，*$\langle\beta_\xi\mid\xi<\gamma\rangle$*是序数的一个单调递增序列，*

$$\beta=\bigcup\{\beta_\xi\mid\xi<\gamma\}=\sup_{\xi<\gamma}\beta_\xi。$$

那么，对于任意的序数α*都有：*

$$\alpha+\beta=\sup_{\xi<\gamma}\left(\alpha+\beta_\xi\right)。$$

证明 练习。

□

定理 8.7 (加法基本性质). *(1) 加法结合律：设*α, β*和*γ*为序数。那么，*$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$。

(2) 左消去律：

(a) $\forall\alpha\,\forall\beta\,\forall\gamma\,(\alpha<\beta\leftrightarrow\gamma+\alpha<\gamma+\beta)$；

(b) $\forall\alpha\,\forall\beta\,\forall\gamma\,(\alpha+\beta=\alpha+\gamma\leftrightarrow\beta=\gamma)$；

(3) 右弱保序：$\forall\alpha, \forall\gamma\,\forall\beta\,(\alpha<\gamma\to\alpha+\beta\leq\gamma+\beta)$。

(4) 补差律：$\forall\alpha\,\forall\beta\,(\alpha\leq\beta\to\exists\gamma\,(\alpha+\gamma=\beta)($*此*$\gamma$*必唯一*$))$。

证明 (1) 对γ施归纳。

当$\gamma=0$时，等式自然成立。

设$\gamma=\gamma_0+1$。归纳假设为：$\alpha+(\beta+\gamma_0)=(\alpha+\beta)+\gamma_0$。那么

$$\alpha+(\beta+(\gamma_0+1))=\alpha+((\beta+\gamma_0)+1)=(\alpha+(\beta+\gamma_0))+1=((\alpha+\beta)+\gamma_0)+1=(\alpha+\beta)+(\gamma_0+1)。$$

设γ是一个非零极限序数，以及$\forall\gamma_0<\gamma\,(\alpha+(\beta+\gamma_0)=(\alpha+\beta)+\gamma_0)$。此时，

$$\beta+\gamma=\bigcup\{\beta+\gamma_0\mid\gamma_0<\gamma\}$$

也是一个极限序数。于是，根据加法递归定义(命题8.4) 以及加法运算的连续性(引理8.1)，

$$\begin{array}{rcl}\alpha+(\beta+\gamma) & = & \bigcup\{\alpha+\delta\mid\delta<\beta+\gamma\}\\ & = & \bigcup\{\alpha+(\beta+\gamma_0)\mid\gamma_0<\gamma\}\\ & = & \bigcup\{(\alpha+\beta)+\gamma_0\mid\gamma_0<\gamma\}\\ & = & (\alpha+\beta)+\gamma\end{array}$$

(2)(a) 首先，对β施归纳，验证：$\alpha<\beta\to\gamma+\alpha<\gamma+\beta$。

假设$\alpha<\beta$，以及$\forall\delta\,(\alpha<\delta<\beta\to\gamma+\alpha<\gamma+\delta)$。如果$\beta=\delta+1$，那么$\alpha\leq\delta$；不妨设$\alpha<\delta$，应用归纳假设，

$$\gamma+\alpha<\gamma+\delta<(\gamma+\delta)+1=\gamma+(\delta+1)=\gamma+\beta。$$

如果β是一极限序数，那么，$\alpha+1<\beta$，以及

$$\gamma+\alpha<(\gamma+\alpha)+1=\gamma+(\alpha+1)\leq\bigcup\{\gamma+\delta\mid\delta<\beta\}=\gamma+\beta。$$

其次，假设$\gamma+\alpha<\gamma+\beta$。如果$\beta<\alpha$，根据上述，$\gamma+\beta<\gamma<\alpha$；如果$\beta=\alpha$，则$\gamma+\alpha=\gamma+\beta$。因此，只能有$\alpha<\beta$。

(2)(b) 由(2)(a)即得。

(3) 直接应用递归定义。

(4) 设$\alpha<\beta$。此时$\beta=\alpha\cup\{\eta<\beta\mid\alpha\leq\eta\}$；令$(\xi,<)\cong(\{\eta<\beta\mid\alpha\leq\eta\},<)$。于是，$\beta=\alpha+\xi$。

□

定义 8.9. 我们将两个序数α和β的序数之积，记成$\alpha\cdot\beta$， 定义为唯一的与$\alpha\times\beta$的水平字典序

$$(\alpha\times\beta,<)$$

同构的序数；而将两个序数β和α的序数之积，记成$\beta\cdot\alpha$， 定义为唯一的与$\alpha\times\beta$的字典序

$$(\alpha\times\beta,<)$$

同构的序数。

例子 8.3. $2 \cdot \omega = \omega < \omega + \omega = \omega \cdot 2.$

命题 8.5 (乘法递归式). *序数的乘法运算满足如下的递归运算公式：*

(1) $\alpha \cdot 0 = 0$*;*

(2) $\forall \beta\, (\beta \in \mathrm{Ord} \to (\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha))$;

(3) 对于所有的非零极限序数β*,* $\alpha \cdot \beta = \bigcup\{\alpha \cdot \xi \mid \xi < \beta\}$.

证明 对β施归纳，验证上面定义的序数乘法满足递归定义等式。

设β是非零极限序数。如下定义$f : (\alpha \times \beta, <) \to \alpha \cdot \beta$：对于$(\xi, \eta) \in \alpha \times \beta$，

$$f(\xi, \eta) = \alpha \cdot \eta + \xi。$$

那么，f是一个同构。

□

引理 8.2 (乘法连续性). *如果*$\gamma > 0$*是一个极限序数，*$\langle \beta_\xi \mid \xi < \gamma \rangle$*是序数的一个单调递增序列，*

$$\beta = \bigcup\{\beta_\xi \mid \xi < \gamma\} = \sup_{\xi < \gamma} \beta_\xi。$$

那么，对于任意的序数α*都有：*

$$\alpha \cdot \beta = \sup_{\xi < \gamma} (\alpha \cdot \beta_\xi)\ 。$$

证明 练习。

□

定理 8.8. *(1) 分配律：*$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$*；*

(2) 结合律：$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$*；*

(3) 左消去律：

(a) $\forall \alpha, \forall \gamma \forall \beta\, (\beta \neq 0 \to (\alpha < \gamma \leftrightarrow \beta \cdot \alpha < \beta \cdot \gamma))$；

(b) $\forall \alpha, \forall \gamma \forall \beta\, (\beta \neq 0 \to (\alpha = \gamma \leftrightarrow \beta \cdot \alpha = \beta \cdot \gamma))$；

(4) 右弱保序：$\forall \alpha, \forall \gamma \forall \beta\, (\alpha < \gamma \to \alpha \cdot \beta \leq \gamma \cdot \beta)$。

证明 我们来证明(1)和(2)，将其余的留作练习。

(1) 对γ施归纳。

设$\gamma = \gamma_0 + 1$。那么

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot ((\beta + \gamma_0) + 1) = \alpha \cdot (\beta + \gamma_0) + \alpha = (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma_0) + \alpha = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma。$$

设γ是非零极限序数。那么根据递归定义以及连续性，

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta + \gamma) &= \bigcup\{\alpha \cdot \delta \mid \delta < (\beta + \gamma)\} \\ &= \bigcup\{\alpha \cdot (\beta + \eta) \mid \eta < \gamma\} \\ &= \bigcup\{\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \eta \mid \eta < \gamma\} \\ &= \alpha \cdot \beta + \bigcup\{\alpha \cdot \eta \mid \eta < \gamma\} \\ &= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma。 \end{aligned}$$

(2) 对γ施归纳。

$\alpha\cdot(\beta\cdot(\gamma_0+1))=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma_0+\beta)=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma_0)+\alpha\cdot\beta=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma_0+\alpha\cdot\beta=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$。

设γ是非零极限序数。那么，根据递归定义以及连续性，

$$\begin{aligned}\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma) &= \bigcup\{\alpha\cdot\delta \mid \delta<\beta\cdot\gamma\}\\ &= \bigcup\{\alpha\cdot(\beta\cdot\eta)\mid \eta<\gamma\}\\ &= \bigcup\{(\alpha\cdot\beta)\cdot\eta\mid\eta<\gamma\}\\ &= (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma。\end{aligned}$$

□

定义 8.10 (序数指数运算)**.** 设α为一个序数。

(1) $\alpha^0=1$;

(2) 对于所有的序数β, $\alpha^{\beta+1}=\alpha^\beta\cdot\alpha$;

(3) 对于所有的非零极限序数β, $\alpha^\beta=\bigcup\{\alpha^\xi\mid\xi<\beta\}$.

引理 8.3 (单调性)**.** *(1)* $\alpha\leq\beta\to\alpha^\gamma\leq\beta^\gamma$*；*

(2) $(1<\alpha\wedge\beta<\gamma)\to\alpha^\beta<\alpha^\gamma$*；*

(3) $\beta<\gamma\to\forall k\in\omega(\omega^\beta\cdot k<\omega^\gamma)$*。*

证明 (1) 和(2) 之证明留着练习。

(3) $\omega^\beta\cdot k<\omega^\beta\cdot\omega=\omega^{\beta+1}\leq\omega^\gamma$。

□

引理 8.4 (序数运算连续性)**.** *如果*$\gamma>0$*是一个极限序数，*$\langle\beta_\xi\mid\xi<\gamma\rangle$*是序数的一个单调递增序列，*

$$\beta=\bigcup\{\beta_\xi\mid\xi<\gamma\}=\sup_{\xi<\gamma}\beta_\xi。$$

那么，对于任意的序数α*都有：*

$$\alpha+\beta=\sup_{\xi<\gamma}(\alpha+\beta_\xi)\,;\ \alpha\cdot\beta=\sup_{\xi<\gamma}(\alpha\cdot\beta_\xi)\,;\ \alpha^\beta=\sup_{\xi<\gamma}\left(\alpha^{\beta_\xi}\right)。$$

证明 (练习。)

□

推论 8.2. *(1) 映射*$\alpha\mapsto\omega\cdot\alpha$*是序数*$\alpha$*的一个单增连续泛函；*

(2) 映射$\alpha\mapsto\omega^\alpha$*是序数*$\alpha$*的一个单增连续泛函。*

定理 8.9. *假设*δ*是一个正则序数，即*δ*是一个非零极限序数，并且*$\mathrm{cf}(\delta)=\delta$*。那么*

$$\forall\alpha<\delta\,\forall\beta<\delta\ (\alpha+\beta<\delta;\ \wedge\ \alpha\cdot\beta<\delta;\ \wedge\ \alpha^\beta<\delta)。$$

因此，当$\delta=\mathrm{cf}(\delta)>\omega$*时，如下三个集合在*$\delta$*中都是无界闭子集：*

$$\{\gamma<\delta\ \omega+\gamma=\gamma\};\ \{\gamma<\delta\mid\omega\cdot\gamma=\gamma\};\ \{\gamma<\delta\mid\omega^\gamma=\gamma\}。$$

证明 设$\alpha,\beta<\delta$。对β施归纳。注意当$\beta<\delta$为非零极限序数时，$\mathrm{cf}(\beta)<\mathrm{cf}(\delta)=\delta$。

□

序数运算的连续性的一个直接推论便是：在序数乘法和指数运算下，闭区间的源像必有最大元。

引理 8.5. *(1) 如果$0 < \alpha \le \gamma$，那么集合$\{\beta \mid \alpha \cdot \beta \le \gamma\}$必有最大元；*

(2) 如果$1 < \alpha \le \gamma$，那么集合$\{\beta \mid \alpha^\beta \le \gamma\}$必有最大元。

证明 对于满足条件的$\alpha \le \gamma$，必有$\exists\delta\,(\alpha \cdot \delta > \gamma)$以及$\exists\delta\,(\alpha^\delta > \gamma)$。这是因为$\alpha \cdot (\gamma+1) \ge \gamma + 1 > \gamma$，以及$\alpha^{\gamma+1} \ge \gamma + 1 > \gamma$。

令$\eta = \min(\{\delta \mid \alpha \cdot \delta > \gamma\}$以及$\mu = \min(\{\delta \mid \alpha^\delta > \gamma\}$。根据上面的序数运算连续性引理，$\eta$和$\mu$都必定是后继序数。令$\eta = \beta + 1, \mu = \xi + 1$。$\beta$和$\xi$就是分别所要的最大元。

□

例子 8.4. $\omega + \omega = \bigcup\{\omega + n \mid n < \omega\}$.

$\omega^2 = \omega \cdot \omega = \bigcup\{\omega \cdot n \mid n \in \omega\} = \bigcup\{\omega, \omega+\omega, \cdots, \omega + \cdots + \omega, \cdots\}$.

$\omega^3 = \omega^2 \cdot \omega = \omega \cdot \omega \cdot \omega$.

$\omega^\omega = \bigcup\{\omega^n \mid n < \omega\}$. (注意，这里的$\omega^\omega$是用来记序数$\omega$的$\omega$次幂指数，而不是从$\omega$到$\omega$的函数的全体所成的集合。)

回顾一下自然数算术运算的两个基本定理：带余除法定理，以及基展开范式定理。

定理 8.10 (带余除法定理)**.** *对于任意自然数$n \in \omega$，如果自然数$m \in \omega$非零，那么必有唯一的自然数序对$(q, r) \in \omega \times \omega$ 实现下列*等式与不等式*：*

$$n = q \cdot m + r;\ r < m。$$

证明 当$n < m$时，令$q = 0, r = n$；当$n = m$时，令$q = 1, r = 0$；当$m < n$时，令

$$q = \max(\{\ell \mid m \cdot \ell < n\})。$$

此$q \ge 1$必定存在。这样，$q \cdot m < n \le m \cdot (q+1) = m \cdot q + m$。令$r < m$为满足等式$n = m \cdot q + r$的唯一自然数。

□

定义 8.11. 对于$i, n \in \mathbb{N}$，

$$n \ominus i = \begin{cases} m & \leftrightarrow \quad (n \ge i \wedge i + m = n); \\ 0 & \leftrightarrow \quad n < i。\end{cases}$$

定理 8.11. *1. 如果$n \in \mathbb{N}$，那么存在满足下述要求的唯一有序对(i, m)：*

$$i \le n,\ m \le n,\ 2^i \le n + 1 < 2^{i+1},\ 2^i + m = n + 1。$$

2. 如果$n \in \mathbb{N}$ 且$n > 0$，那么存在满足下述要求的唯一的长度为$m \ge 1$的序列$\langle k_1, \cdots, k_m\rangle$：

$$k_1 > \cdots > k_m \ge 0,\ n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_m}。$$

下面的基展开范式定理是前面二进制展开表示定理11.6的一般化结论。

定理 8.12 (基展开范式定理)**.** *设$b \in \mathbb{N}$且$1 < b$。对于任意自然数$m \in \omega$，必有唯一自然数对序列*

$$\langle (n_i, k_i) \mid 1 \le i \le \ell\rangle$$

满足下述三项要求：

(1) $n_1 > n_2 > \cdots > n_\ell \ge 0$；

(2) $\forall 1 \leq i \leq \ell\ (0 < k_i < b)$；

(3) $m = b^{n_1} \cdot k_1 + b^{n_2} \cdot k_2 + \cdots + b^{n_\ell} \cdot k_\ell$。

证明 如果$m < b$，那么$\ell = 1$，且$n_1 = 0$以及$k_1 = m$；如果$m = b$，则$\ell = 1, n_1 = 1, k_1 = 1$。

现在设$b < m$。由于$b^i < b^{i+1}$对于任意自然数i都成立，$\{i \mid b^i < m\}$是一个非空有限集合，因而有最大元。令$n_1 = \max(\{i \mid b^i < m\})$。于是，$1 \leq n_1$并且$b^{n_1} < m \leq b^{n_1+1}$。集合$\{k \mid b^{n_1} \cdot k < m\}$是$b$的一个非空子集合。令$k_1 = \max(\{k \mid b^{n_1} \cdot k < m\})$。那么，$0 < k_1 < b$。

令m_1为满足等式$m = b^{n_1} \cdot k_1 + m_1$的唯一自然数。此时，$m_1 < m$且$m_1 < b^{n_1}$。根据归纳假设，必有自然数对序列$\langle (n_i, k_i) \mid 2 \leq i \leq \ell \rangle$满足下述三项要求：

(1) $n_2 > \cdots > n_\ell \geq 0$；

(2) $\forall 2 \leq i \leq \ell\ (0 < k_i < b)$；

(3) $m_1 = b^{n_2} \cdot k_2 + \cdots + b^{n_\ell} \cdot k_\ell$。

于是，$n_2 < n_1$，以及序列$\langle (n_i, k_i) \mid 1 \leq i \leq \ell \rangle$满足三项要求。

唯一性留作练习。

□

现在我们将自然数的这两个展开表示定理推广到整个序数之上。

引理 8.6 (带余除法引理). *对于任意的序数γ以及非零序数α，必有唯一的序数对(β, ρ)来满足下述等式与不等式：*

$$\gamma = \alpha \cdot \beta + \rho;\ \ \rho < \alpha\ 。$$

证明 如果$\alpha > \gamma$，令$\beta = 0$以及$\rho = \gamma$；如果$\alpha = \gamma$，令$\beta = 1$以及$\rho = 0$。不妨设$\alpha < \gamma$。根据引理8.5，令

$$\delta = \max\left(\{\beta \mid \alpha \cdot \beta \leq \gamma\}\right)。$$

根据引理8.7中的(4)，令ρ为唯一的实现等式$\alpha \cdot \delta + \rho = \gamma$之序数。此$\rho < \alpha$。因若不然，$\alpha \leq \rho$，从而

$$\alpha \cdot (\delta + 1) = \alpha \cdot \delta + \alpha \leq \alpha \cdot \delta + \rho = \gamma。$$

这与δ的选取不符。

现假设$\gamma = \alpha \cdot \beta + \rho_1 = \alpha \cdot \delta + \rho_2$，并且$\rho, \rho_2 < \alpha$。如果$\beta = \delta$，那么，根据引理8.7中的(2)，必有$\rho_1 = \rho_2$。

欲得矛盾，不妨假设$\beta < \delta$。从而，$\beta + 1 \leq \delta$，

$$\alpha \cdot \beta + (\alpha + \rho_2) = \alpha \cdot (\beta + 1) + \rho_2 \leq \alpha \cdot \delta + \rho_2 = \gamma = \alpha \cdot \beta + \rho_1。$$

依此，再根据引理8.7中的(1)，$\rho_1 \geq \alpha + \rho_2 \geq \alpha$。这是一矛盾。

□

定理 8.13 (康托范式). *如果α 是一个非零的序数，那么，α 可以唯一地写成如下一种规范形式：*

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n,$$

其中，$1 \leq n < \omega$，$\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_n$，以及$0 < \min(\{k_1, k_2, \cdots, k_n\}) \leq \max(\{k_1, k_2, \cdots, k_n\}) < \omega$。

证明 先用关于α的归纳法证明范式存在。

当$1 \leq \alpha = n < \omega$时，$\alpha = \omega^0 \cdot n$。

设$\alpha \geq \omega$。根据引理8.5中的(2)，令

$$\beta = \max\left(\{\delta \mid \omega^\delta \leq \alpha\}\right)。$$

根据带余除法引理8.6，令(δ,ρ)为满足等式

$$\alpha = \omega^\beta \cdot \delta + \rho$$

的唯一序数对。因为$\omega^\beta \leq \alpha$以及$\rho < \alpha$，必有$\delta > 0$。我们断言：$\delta < \omega$。否则，下述不等式

$$\alpha \geq \omega^\beta \cdot \delta \geq \omega^\beta \cdot \omega = \omega^{\beta+1}$$

表明β并非如所定义的。于是，令$\beta_1 = \beta$，$k_1 = \delta$。$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \rho$。

如果$\rho = 0$，我们得到所要的。不然，$1 \leq \rho < \alpha$。根据归纳假设，

$$\rho = \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$$

其中，$\beta_2 > \cdots > \beta_n$，以及$0 < k_2, \cdots, k_n$为自然数。

由于$\rho < \omega^{\beta_1}$，必有$\omega^{\beta_2} \leq \rho < \omega^{\beta_1}$，从而，$\beta_1 > \beta_2$。这样，

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$$

其中，$\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_n$，以及$0 < k_1, k_2, \cdots, k_n$为自然数。

现在来证明规范式之唯一性。依旧对α施归纳。

当$\alpha = 1$时，唯一性自然。

现在设

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n = \omega^{\gamma_1} \cdot \ell_1 + \omega^{\gamma_2} \cdot \ell_2 + \cdots + \omega^{\gamma_m} \cdot \ell_m$$

其中，$\beta_1 > \cdots > \beta_n$，$\gamma_1 > \cdots > \gamma_m$，以及$0 < k_1, \cdots, k_n$，$0 < \ell_1, \cdots, \ell_m$为自然数。

根据引理8.3中的(3)，如果$\gamma > \beta_1$，必有$\alpha < \omega^\gamma$。因此，得出$\beta_1 = \gamma_1$。

令$\delta = \omega^{\beta_1} = \omega^{\gamma_1}$，

$$\rho = \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$$

以及

$$\sigma = \omega^{\gamma_2} \cdot \ell_2 + \cdots + \omega^{\gamma_m} \cdot \ell_m。$$

我们便有

$$\alpha = \delta \cdot k_1 + \rho = \delta \cdot \ell_1 + \sigma。$$

由于$\rho < \delta, \sigma < \delta$，带余除法引理8.6蕴含$k_1 = \ell_1$和$\rho = \sigma$。

应用关于规范式唯一性归纳假设，我们得到$m = n$，$\beta_i = \gamma_i, k_i = \ell_i \, (2 \leq i \leq m)$。

□

8.3 练习

练习 8.1. 证明 $\mathrm{cf}(\omega) = \omega$。

练习 8.2. 设 α 为一个非零极限序数。证明

(1) $\mathrm{cf}(\alpha)$ 是一个非零极限序数。

(2) $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \alpha$。

练习 8.3. 验证命题8.2。

练习 8.4. 验证定理8.6。

练习 8.5. 验证：存在非零的序数 α 来实现等式 $\omega + \alpha = \alpha$；试求出满足此等式的最小的非零序数 α。

练习 8.6. 验证：存在非零的序数 α 来实现等式 $\omega \cdot \alpha = \alpha$；试求出满足此等式的最小的非零序数 α。

练习 8.7. 验证：一个序数 α 是一个极限序数的充分必要条件是 $\exists \beta \in \mathrm{Ord}\ (\alpha = \omega \cdot \beta)$。