MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1. Không gian Euclide. Không gian vector V trong đó có định nghĩa tích vô hướng của hai vector $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ được gọi là không gian Euclide.

Trường hợp $V = R^n$ được gọi là không gian Euclide R^n.

Trong hình học, R^2 là không gian Euclide bao gồm mặt phẳng Euclide hai chiều và R^3 là không gian ba chiều như đã biết. Trường hợp tổng quát là không gian n chiều.

2. Hàm nhiều biến. Xét không gian Euclide n chiều R^n. Gọi $D \subset R^n$ và ánh xạ $f : D \to R$ sao cho với $\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$:

$$f : (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \to f(x_1, x_2, ..., x_n) \in R$$

f được gọi là hàm số của n biến; $x_1, x_2, ..., x_n$ được gọi là các biến độc lập và D được gọi là miền xác định của hàm f.

Hàm n biến $f : R^n \to R$

$$(x_1, x_2, .., x_n) \to y = f(x_1, x_2, .., x_n)$$

Ví dụ $u = x^3 + 5y^2 - z^4$ là hàm ba biến: $u(1,2,3) = 1^3 + 5.2^2 - 3^4 = -60$

Hàm 2 biến $f : R^2 \to R$

$$(x, y) \to z = f(x, y)$$

Ví dụ $z = x^3 + 2y^2 - 2\ln(x + y)$ là hàm hai biến.

3. Tập xác định và tập giá trị

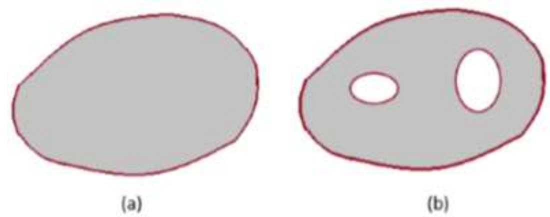
Cho hàm số 2 biến: $f : R^2 \to R$

$$(x, y) \to z = f(x, y)$$

Tập $D = \{(x, y)\} \subset R^2$ làm cho hàm số có nghĩa gọi là tập xác định (TXĐ).

Cho $(x, y) \subset D$, tập các giá trị z thu được gọi là tập giá trị: $TGT = [z_{\min}, z_{\max}]$.

Miền xác định D có thể là miền đơn liên (bị giới hạn bởi một mặt kín) hoặc miền đa liên (bị giới hạn bởi nhiều mặt kín rời nhau) như trong hình



Hình 1. Miền đơn liên (a) và đa liên (b)

Tập mức (level set) của hàm $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ được định nghĩa như sau:

$$\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in D : f(x_1, x_2, ..., x_n) = c\}, c = const$$

Khi $n = 2$ thì tập mức chính là đường mức (contour, isoline). Khi $n = 3$ thì tập mức gọi là mặt mức (level surface, isosurface). Khi $n > 3$ thì tập mức được gọi là siêu mặt mức (level hypersurface).

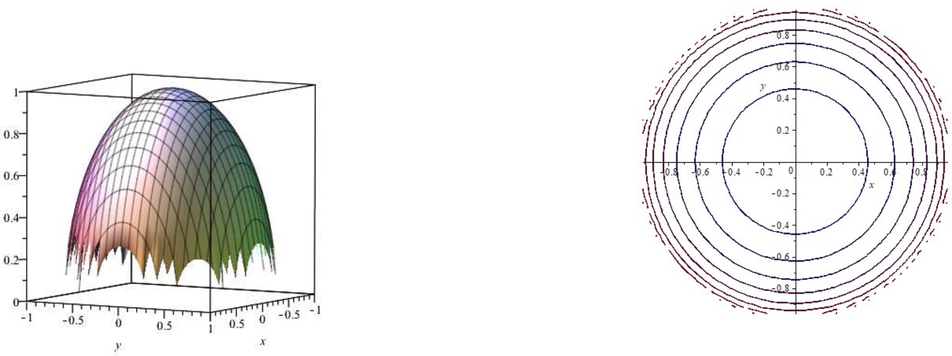
4. Ý nghĩa hình học của hàm hai biến

Đồ thị của hàm số $z = f(x, y)$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x, y, z)$ trong không gian R^3, trong đó (x, y) là tọa độ của điểm M thuộc miền xác định D và z là giá trị của hàm số tại điểm đó.

Đồ thị của hàm hai biến số là một mặt trong không gian ba chiều R^3.

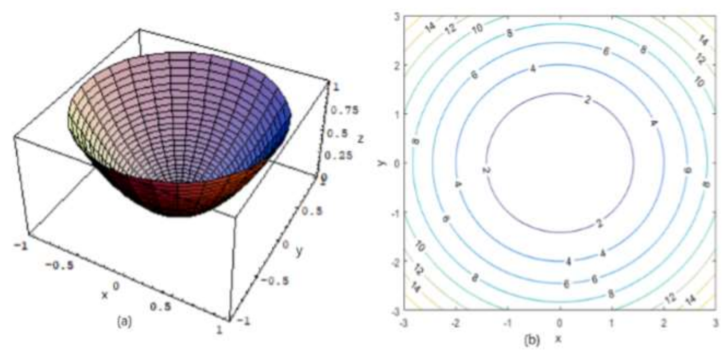
Ví dụ hàm $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ là nửa mặt cầu tâm O, bán kính $R = 1$ nằm trong nửa không gian $z \geq 0$.

```
> restart
> with(plots) :
> f := sqrt(1 - x^2 - y^2) :
> plot3d(f, x = -1 ..1, y = -1 ..1);
  contourplot(f, x = -1 ..1, y = -1 ..1)
```



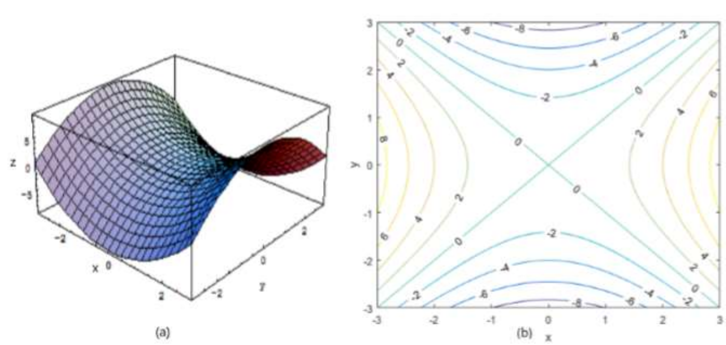
Hình 2. Mặt Elliptic paraboloid và các đường đồng mức, $f(x,y)=x^2+y^2$

Ví dụ hàm $f(x,y)=x^2+y^2$ là hàm hai biến với các biến độc lập x,y. Miền xác định là $D=R^2$. Đây là phương trình của mặt elliptic paraboloid (hình 3).



Hình 3. Mặt $f(x,y)=x^2+y^2$ *(a) và đường mức* $x^2+y^2=const$ *(b)*

Hàm $f(x,y)=x^2-y^2$ là hàm hai biến với các biến độc lập x,y. Miền xác định là $D=R^2$. Đây là phương trình của mặt yên ngựa (hình 4).

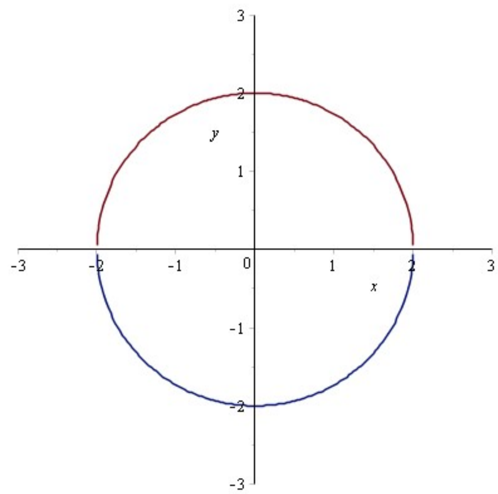


Hình 4. Mặt $f(x,y)=x^2-y^2$ *(a) và đường mức* $x^2-y^2=const$ *(b)*

Bài tập. Tìm và biểu diễn tập xác định của:

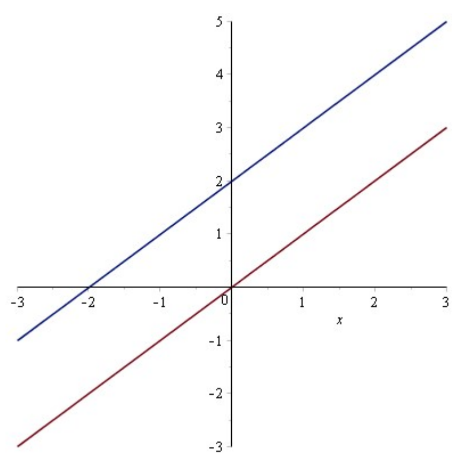
a) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$

$$4-x^2-y^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2\leq 4$$



b) $z=\arcsin\left(x-y+1\right)$

$$-1\leq x-y+1\leq 1 \Leftrightarrow -2\leq x-y\leq 0$$



GIỚI HẠN CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

Định nghĩa 1. Ta nói điểm $M_n(x_n, y_n)$ có giới hạn là (hội tụ đến) điểm $M_0(x_0, y_0)$ trong R^2 và ký hiệu là $M_n \to M_0$ khi $n \to \infty$ nếu:

$$\lim_{n\to\propto} x_n = x_0 \text{ và } \lim_{n\to\propto} y_n = y_0$$

Ví dụ dãy điểm $\left\{M_n\left(\frac{n}{n+1}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ hội tụ về điểm $(1,0)$ khi $n \to \infty$ vì:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Định nghĩa 2. Hàm $f(x, y)$ có giới hạn L khi $(x, y) \to (x_0, y_0)$ nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: 0 < \rho < \delta \to |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

Trong đó $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ hoặc:

$$\forall M_n(x_n, y_n) \to M_0(x_0, y_0) \to \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = L$$

Ký hiệu:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = L$$

Định nghĩa 3. Hàm $f(x, y)$ liên tục tại điểm $(a, b) \in D$ nếu:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = f(a, b)$$

Hàm số liên tục tại mọi điểm trong miền $D \in R^2$ gọi là liên tục trên D.

<u>Một số nhận xét:</u>

1/ Giới hạn tồn tại là duy nhất, dù (x, y) tiến tới (x_0, y_0) theo kiểu gì. Trong không gian 2 chiều, càng nhiều kiểu (x, y) tiến tới (x_0, y_0) nên càng khó tồn tại giới hạn.

2/ Để chứng minh hàm số không tồn tại giới hạn, ta xét hai dãy $(x_n^1, y_n^1), (x_n^2, y_n^2)$ cùng dần tiến về (x_0, y_0) nhưng $(x_n^1, y_n^1) \to L_1 \neq (x_n^2, y_n^2) \to L_2$.

3/ Các tính chất giới hạn của tổng, tích, thương của hàm hai biến hoàn toàn tương tự tính chất của hàm một biến.

Ví dụ: Tìm giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

Đặt $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. MXĐ $D = R^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Khi $(x, y) \to (0,0)$ theo hướng $y = kx^2$ thì $f(x, y) = \dfrac{kx^4}{x^4 + k^2 x^4} = \dfrac{kx^4}{x^4(1 + k^2)}$ phụ thuộc vào giá trị của k. Vì vậy hàm đã cho không có giới hạn.

Có thể sử dụng chứng minh khác theo hướng $y = \pm x^2$ thì $f(x, y) = \pm \dfrac{x^4}{2x^4} \to \pm \dfrac{1}{2}$ khi $(x, y) \to (0,0)$.

Ví dụ: Khảo sát giới hạn của hàm $f\left(x,y\right)=\dfrac{e^{x+y}}{x^2+y^2}$ khi $(x,y)\to(0,0)$

MXĐ $D=R^2\setminus\left\{\left(0,0\right)\right\}$. Khi $(x,y)\to(0,0)$ theo hướng $y=kx$ thì ta có:

$$\lim_{x\to 0} f\left(x,y\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x+y}}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\left(k+1\right)x}}{\left(k^2+1\right)x^2}=\infty$$

Do đó hàm f không có giới hạn hữu hạn tại (0,0).

Chúng ta hoàn toàn có thể áp dụng các định lý về giới hạn của hàm một biến vào hàm nhiều biến.

Định lý: Cho $\lim f(x,y)=a; \lim g(x,y)=b$

$$\lim[f(x,y)+g(x,y)]=a+b$$

$$\lim c\,.\,f(x,y)=c.\,a$$

$$\lim[f(x,y).\,g(x,y)]=a.\,b$$

$$\lim\left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right]=\frac{a}{b}, b\neq 0$$

Định lý giới hạn kẹp: Giả sử $f(x,y), g(x,y)$ và $\mathrm{h}(x,y)$ cùng xác định trên D, và:

$$h(x,y)\leq f(x,y)\leq g(x,y), \forall x,y\in D$$

Hơn nữa $\lim h(x,y)=\lim g(x,y)=0$. Khi đó $\lim f(x,y)=0$.

Giới hạn lặp: Xét hàm số $f(x,y)$. Cố định giá trị $y \neq y_0$ và xem xét hàm $f(x,y)$ như hàm 1 biến x. Giả sử tồn tại giới hạn:

$$\lim_{x \to x_0} f(x,y) = g(y)$$

Nếu tồn tại giới hạn $\lim_{y \to y_0} g(y) = a$ thì a được gọi là giới hạn lặp của $f(x,y)$ khi $x \to x_0, y \to y_0$ và viết: $\lim_{y \to y_0}\left(\lim_{x \to x_0} f(x,y)\right) = a$.

Hoàn toàn tương tự, chúng ta cũng có khái niệm $\lim_{x \to x_0}\left(\lim_{y \to y_0} f(x,y)\right)$.

Ví dụ. Tính giới hạn của hàm số

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \frac{\sqrt{3xy+1}-1}{5xy^2}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \frac{\sqrt{3xy+1}-1}{5xy^2} = \lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 1} \frac{\sqrt{3xy+1}-1}{5xy^2}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 1} \frac{\left(\sqrt{3xy+1}-1\right)\left(\sqrt{3xy+1}+1\right)}{5xy^2\left(\sqrt{3xy+1}+1\right)}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 1} \frac{3xy}{5xy^2\left(\sqrt{3xy+1}+1\right)}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 1} \frac{3}{5y\left(\sqrt{3x+1}+1\right)}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{3}{5\left(\sqrt{3x+1}+1\right)}\right) = \frac{3}{10}$$

Bài tập 3: Tính giới hạn của hàm số

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\left(\frac{x^{\mathrm{yx}}-x(2y-1)}{\ln x-xy+y^2}\right)$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\left(\frac{x^{\mathrm{yx}}-x(2y-1)}{\ln x-xy+y^2}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to 1}\left(\frac{x^{\mathrm{yx}}-x(2y-1)}{\ln x-xy+y^2}\right)\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^{\mathrm{x}}-x}{\ln x-x+1}\right)$$

Ta có:

$$y=x^x\to\ln y=x\ln x\ \ (x>0)$$

$$\frac{y'}{y}=\ln x+x\frac{1}{x}=\ln x+1$$

$$\to y'=(\ln x+1)x^x$$

$$\to\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^{\mathrm{x}}-x}{\ln x-x+1}\right)\overset{L}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x+1)x^x-1}{\frac{1}{x}-1}\overset{L}{=}\lim_{x\to 1}\frac{x^x.\frac{1}{x}+(\ln x+1)^2x^x}{-\frac{1}{x^2}}=-2$$

SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

Khái niệm hàm nhiều biến số liên tục được định nghĩa tương tự như trong trường hợp hàm một biến số.

Cho hàm $f: D \to R$ xác định trên miền $D \in R^n$ và M_0 là một điểm thuộc D. Hàm số $f(M)$ được gọi là liên tục tại M_0 nếu $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Hàm số không liên tục tại M_0 được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

Nếu hàm số liên tục tại mọi điểm M_0 thuộc miền D, ta nói hàm liên tục trên D.

Ví dụ. Hàm số $\lim\limits_{x \to 0, y \to 0} \dfrac{x \sin x - y \sin x}{x^2 + y^2} = 0$ nên:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \sin x - y \sin x}{x^2 + y^2} \;\; khi \;\; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \;\; khi \;\; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Liên tục tại điểm (0,0).