Đề thi kết thúc môn học, Đông 2019 (2)

Trần Thùy Dung

1.
$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 3 & -4 & 11 & 6 \\ 0 & -9 & -13 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 27a-38 & -27a^2+49 & 0 \end{array}\right]$$

(a) Với $a=1$: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$

$\Longrightarrow$ Hệ có vô số nghiệm dạng $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) Hệ phương trình vô số nghiệm với mọi a.

2.

(a) $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_2+C_3\to C_2]{C_1-C_3\to C_1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

Ta có $\det(A+B) \neq 0$, do đó $A+B$ có nghịch đảo.

(b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -13 \end{array}\right]$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $X = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ -13 \end{bmatrix}$.

3.

(a) Ma trận chính tắc của T là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(b) Thực hiện các biến đổi sơ cấp trên A ta nhận được ma trận

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Không gian nghiệm của ma trận trên là $\ker(T) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

(c) Từ ma trận B, suy ra số chiều của không gian ảnh $\text{im}(T) = 2$.

Cơ sở không gian ảnh gồm các vector cột 1 và 2 của B: $\text{im}(T) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Do số chiều của $\text{im}(T) < 3$, T không phải là toàn cấu.

4.

(a)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1 &= a+3 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= a+4 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 &= 7 \end{aligned}$$

Để 3 giá trị trên tạo thành cấp số cộng với công sai bằng 1

$$\left[\begin{array}{l} a+3 = 7+1 \\ a+4 = 7-1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5 \\ a=2 \end{array}\right.$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \mathbf{u}_2 &= (1,0,0) \\ \mathbf{u}_3 &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

5.

(a)

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & -1 \\ -2 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-4)(\lambda-1)$$

• Với $\lambda_1 = -2$:

$$-2I - A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Không gian riêng: span $\left\{ \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

• Với $\lambda_2 = 4$:

$$4I - A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Không gian riêng: span $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

• Với $\lambda_3 = 1$:

$$1I - A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Không gian riêng: span $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(b) Trực chuẩn hóa các vector riêng của A ta nhận được ma trận P:

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$P^T A P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$