Sự ra đời của hình học vi phân đó là sự tích hợp ứng dụng của nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học mà trong đó phải kể đến phép tính vi phân và tích phân. Đây là chuyên ngành nghiên cứu các vấn đề của hình học, trong đó lý thuyết về các đường cong trong mặt phẳng và không gian cũng như các mặt cong trong không gian Euclid ba chiều đã trở thành cơ sở cho sự phát triển ban đầu

Vào cuối thế kỷ thứ 19, hình học vi phân đã phát triển thành một lĩnh vực nghiên cứu những cấu trúc hình học tổng quát trên các đa tạp khả vi và có quan hệ mật thiết với ngành tôpô vi phân và phương diện hình học của lĩnh vực phương trình vi phân. Hình học vi phân có nhiều ứng dụng trong vật lý như thuyết tương đối của Einstein, điện từ học, cơ học Lagrange và cơ học Hamilton, thiết kế đồ họa, công nghệ thông tin, xác suất thống kê và địa chất cấu tạo.

Đường

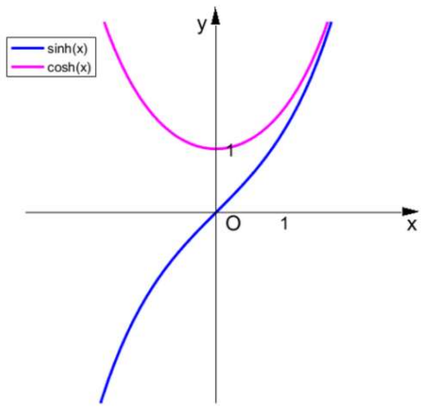
Đường cong là sự khái quát hóa của một đường, trong đó độ cong của nó không nhất thiết phải bằng không. Trong ngôn ngữ thông thường, đường cong là một tập hợp các điểm, tại những điểm gần nhau nó trông giống như một đường thẳng cho đến khi biến dạng.

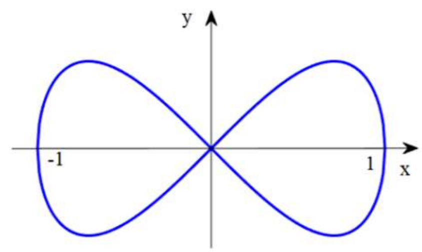
Sự ra đời của hình học giải tích cho phép mô tả đường cong bằng cách sử dụng phương trình chứ không phải là một cấu trúc hình học phức tạp. Điều này không chỉ cho phép xác định và nghiên cứu các đường cong mới mà còn cho phép tạo ra sự khác biệt giữa các đường cong bằng các phương trình đại số, đường cong siêu việt. Chẳng hạn parabol, hyperbol (đường cong conic) là những đường cong phẳng hoặc đường xoắn ốc (helix) là đường cong trong không gian. Đường cong kín là đường cong có điểm bắt đầu cũng là điểm kết thúc của nó, chẳng hạn như đường tròn, ellipse.

Đường cong phẳng

Trong hệ tọa độ Cartesian, phương trình của đường cong C trong mặt phẳng có dạng tổng quát $f(x,y)=0$.

Ví dụ $y=\sinh(x)$, $y=\cosh(x)$, $x^4-x^2+y^2=0$ (Lemniscate)

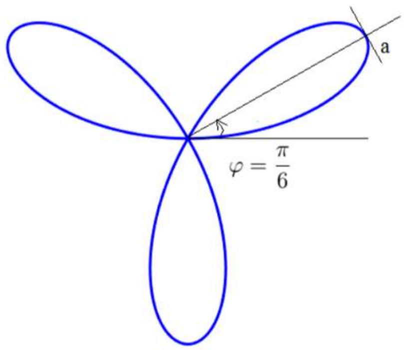


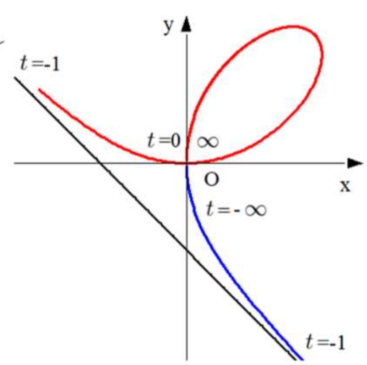


Trong hệ tọa độ cực (r,φ), phương trình đường cong có dạng tổng quát $f(r,\varphi)=0$.

Ví dụ phương trình hoa hồng 3 cánh $r(\varphi)=a(sin3\varphi)$ khi $\varphi=\frac{\pi}{6}\rightarrow r=a$ và

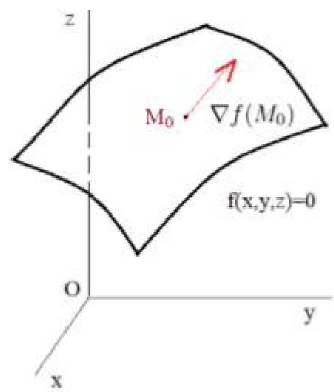
phương trình lá Descartes $x=\dfrac{3at}{1+t^3}, y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$





Mặt

Mặt S trong không gian R^3 được xác định bởi phương trình $f(x,y,z)=0$.



$$S=\{(x,y,z)\in R^3 : f(x,y,z)=0\}$$

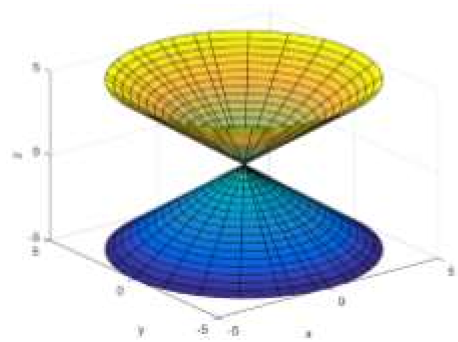
Gọi $M_0(x_0,y_0,z_0)\in S$. Giả sử M_0 là điểm chính quy nghĩa là $grad\ f\neq 0$, lúc đó $grad\ f(M_0)$ là pháp véc tơ với mặt S tại M_0.

Phương trình tham số của mặt S có dạng:

$$x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v)$$

Ví dụ. Mặt nón có phương trình $x^2+y^2-z^2=0$ có phương trình dạng tham số (r,θ):

$$x=r\cos\theta; y=r\sin\theta; z=r$$



1. Một số ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học phẳng

Các dạng phương trình đường cong (phẳng)

- Dạng hàm hiện $y = f(x)$

$$y = x^3 + 4x^2 - 3x - 5$$

$$y = e^{2-x^2}$$

- Dạng hàm tham số $x = x(t), y = y(t)$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^2} \\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

- Dạng hàm ẩn $F(x, y) = 0$

$$F = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 5$$

Phương trình tiếp tuyến và phương trình pháp tuyến của đường cong

Khi đường cong (L) được xác định bởi các đường cong tham số $x = x(t), y = y(t)$, nếu tồn tại các đạo hàm $x'(t), y'(t)$ không đồng thời bằng 0, điểm $M(x(t_0), y(t_0))$ được gọi là điểm chính quy của đường cong (L).

$$\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 \neq 0$$

Phương trình tiếp tuyến:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}$$

Nói cách khác, véc tơ tiếp tuyến của đường cong *(L)* tại điểm $M\left(x(t_0), y(t_0)\right)$ là $\vec{n} = \left(x'(t_0), y'(t_0)\right)$.

Và phương trình pháp tuyến:

$$x'(t_0)\left(x - x(t_0)\right) + y'(t_0)\left(y - y(t_0)\right) = 0$$

Khi đường cong (L) xác định bởi phương trình $y = f(x)$. Tại điểm $M(x_0, y_0)$ thuộc (L), phương trình tiếp tuyến:

$$y = f_x^{'}(M)(x - x_0) + y_0$$

Và phương trình pháp tuyến:

$$f_x^{'}(M)(y - y_0) + (x - x_0) = 0$$

Khi đường cong (L) xác định bởi phương trình $F(x, y) = 0$. Điểm $M(x_0, y_0)$ được gọi là điểm chính quy của đường cong (L) nếu tồn tại các đạo hàm riêng $F_x'(M), F_y'(M)$ không đồng thời bằng 0.

$$\left(F_x^{'}(M)\right)^2 + \left(F_y^{'}(M)\right)^2 \neq 0$$

Phương trình tiếp tuyến:

$$F_x^{'}(M)(x - x_0) + F_y^{'}(M)(y - y_0) = 0$$

Và phương trình pháp tuyến:

$$\frac{x - x_0}{F_x^{'}(M)} = \frac{y - y_0}{F_y^{'}(M)}$$

Ví dụ. Viết PT tiếp tuyến và pháp tuyến tại điểm $\mathrm{M}(1,2)$ của đường cong:

$$y = f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 3$$

$$f_x^{'} = 3x^2 + 4x - 4 \Rightarrow f_x^{'}(M) = 3$$

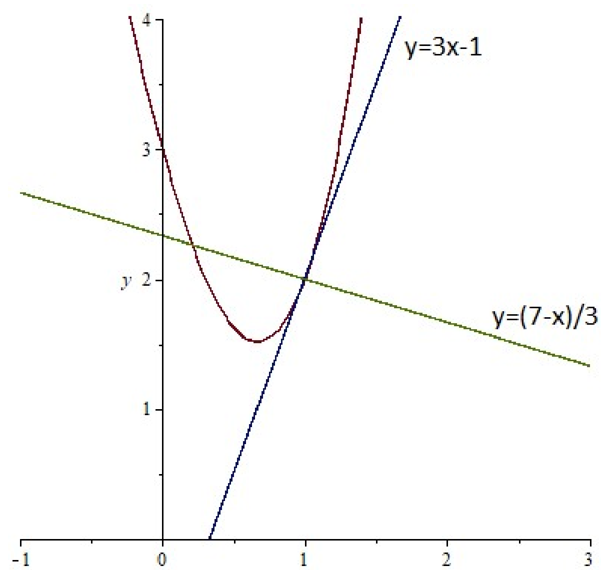
Phương trình tiếp tuyến:

$$y = f_x^{'}(M)(x - x_0) + y_0$$

$$\Rightarrow y = 3(x-1) + 2 \Rightarrow y = 3x - 1$$

Phương trình pháp tuyến:

$$f_x^{'}(M)(y - y_0) + (x - x_0) = 0 \Rightarrow 3(y-2) + (x-1) = 0 \Rightarrow y = \frac{-x+7}{3}$$



Ví dụ. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến với đường cong $x = t + sint; y = t + cost$ tại điểm $B(0,1)$

Giả sử điểm $B(0,1)$ tương ứng với điểm $t = t_0$, dẫn đến:

$$\begin{cases} x(t_0) = 0 \\ y(t_0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_0 + \sin t_0 = 0 \\ t_0 + \cos t_0 = 1 \end{cases}$$

Dễ thấy $t_0 = 0$ thỏa mãn hệ. Mặt khác:

$$x'(t) = 1 + \cos t \Rightarrow x'(t_0) = 1 + 1 = 2$$
$$y'(t) = 1 - \sin t \Rightarrow y'(t_0) = 1 - 0 = 1$$

Phương trình tiếp tuyến:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} \Rightarrow 1.(x - 0) = 2.(y - 1) \Rightarrow x - 2y + 2 = 0$$

Phương trình pháp tuyến:

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) = 0$$
$$\Rightarrow 2.(x - 0) + 1.(y - 1) = 0 \Rightarrow 2x + y - 1 = 0$$

Ví dụ. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến tại điểm $C(-2,1)$ của đường:

$$x^2y + y^2 - y^3 = 4$$

Đặt $F(x,y) = x^2y + y^2 - y^3 - 4$, ta có:

$$F_x^{'} = 2xy; F_y^{'} = x^2 + 2y - 3y^2$$

$$\Rightarrow F_x^{'}(C) = -4; F_y^{'}(C) = 3$$

Thay vào biểu thức của phương trình tiếp tuyến:

$$F_x^{'}(C)(x - x_0) + F_y^{'}(C)(y - y_0) = 0 \Rightarrow -4(x+2) + 3(y-1) = 0$$

Và phương trình pháp tuyến:

$$\frac{x - x_0}{F_x^{'}(C)} = \frac{y - y_0}{F_y^{'}(C)} \Rightarrow \frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{3}$$

Độ cong và bán kính cong của đường cong tại một điểm

Độ cong của (C) tại M được định nghĩa bởi:

+ Nếu đường cong được cho bởi phương trình $y = f(x)$:

$$\kappa(M) = \left| \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}} \right| \qquad (*)$$

+ Nếu đường cong được cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t)$:

$$y' = \frac{y_t'}{x_t'}; y'' = \frac{x_t' y_{tt}'' - y_t' x_{tt}''}{\left(x_t'\right)^3}$$

Thay vào công thức (*) nhận được:

$$\kappa(M) = \frac{|x' y'' - x'' y'|}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}$$

+ Nếu đường cong được cho bởi phương trình trong hệ tọa độ cực $r = r(\varphi)$:

$$\kappa(M) = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{\left(r^2 + r'^2\right)^{3/2}}$$

Bán kính cong của đường cong tại một điểm được đưa ra:

$$R(M) = \frac{1}{\kappa(M)}$$

Ví dụ đường thẳng $y = ax + b \Rightarrow y' = a; y'' = 0 \Rightarrow \kappa = 0; R = \infty$.

Ví dụ. Tính độ cong và bán kính cong của hàm $y=-x^3$ tại điểm có hoành độ $x=\frac{1}{2}$

$$y=-x^3 \Rightarrow y'=-3x^2; y''=-6x$$

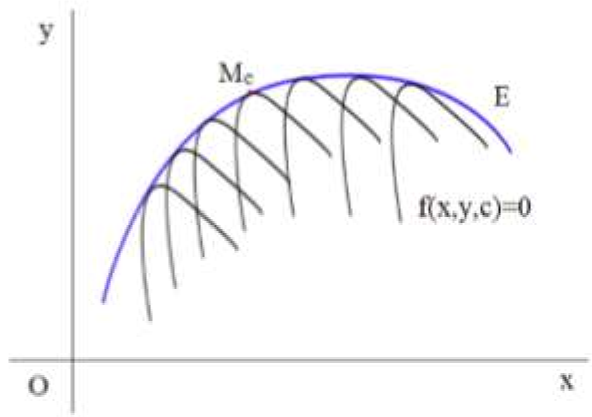
$$\Rightarrow y'(M)=-3.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}; y''(M)=-6.\frac{1}{2}$$

$$\kappa(M)=\frac{|y''(M)|}{\left(1+y'^2(M)\right)^{3/2}}=\frac{\left|-6.\frac{1}{2}\right|}{\left(1+\left(3.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{\left(1+\frac{9}{16}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{192}{125}$$

$$R(M)=\frac{1}{\kappa(M)}=\frac{125}{192}$$

Hình bao của họ đường cong phụ thuộc tham số

Cho họ đường cong (L) biểu diễn bởi $f(x,y,c)=0$. Ứng với mỗi giá trị của c ta sẽ có một đường cong. Nếu mỗi đường cong trong họ (L) đều tiếp xúc với đường cong (E) và ngược lại, mỗi điểm của (E) có một đường của họ (L) tiếp xúc với (E) tại điểm đó thì (E) được gọi là hình bao của họ đường cong (L).



Quy tắc tìm hình bao

Định lý. *Cho họ đường cong $F(x,y,c)$=0 phụ thuộc tham số c. Nếu họ đường cong trên không có điểm kỳ dị* (điểm kì dị: $grad\ f=0$) *thì hình bao của nó được xác định bằng cách khử c từ hệ phương trình:*

$$\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ F_c'(x,y,c)=0 \end{cases} \qquad (*)$$

Nếu hệ phương trình (*) có điểm kỳ dị thì hệ phương trình (*) bao gồm hình bao (E) và quỹ tích (tập hợp) các điểm kỳ dị thuộc họ các đường cong đã cho.

Ví dụ. Tìm hình bao của họ đường cong $y = \frac{x}{c} + c^2$

Đặt $F(x, y, c) = y - \frac{x}{c} - c^2 \; (c \neq 0)$. Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} F'_x(x, y, c) = 0 \\ F'_y(x, y, c) = 0 \\ F(x, y, c) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{c} = 0 \\ 1 = 0 \\ y - \frac{x}{c} - c^2 = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm nên họ đường cong không có điểm kỳ dị. Xét tiếp hệ phương trình:

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ F'_c(x, y, c) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y - \frac{x}{c} - c^2 = 0 \\ \frac{x}{c^2} - 2c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2c^3 \\ y = 3c^2 \end{cases}$$

Vậy hình bao của họ đường cong đã cho là đường $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{y}{3}\right)^3$ trừ đi điểm $(0,0)$ (vì tương ứng với $c = 0$).

2. Một số ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học không gian

PT tiếp tuyến và pháp diện của đường cong cho dưới dạng tham số

Cho đường cong (C) trong không gian được định nghĩa bởi phương trình $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ và một điểm chính quy $M_0(x_0, y_0, z_0) \in C$.

- Phương trình tiếp tuyến tại M:

$$(d): \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

- Phương trình pháp diện tại M:

$$(P): x'(t_0).(x - x(t_0)) + y'(t_0).(y - y(t_0)) + z'(t_0).(z - z(t_0)) = 0$$

Đặc biệt, nếu mặt cong cho bởi phương trình $z = z(x, y)$ thì phương trình tiếp diện tại M là $(P): z - z_0 = z_x'(M)(x - x_0) + z_y'(M)(y - y_0)$.

Ví dụ. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường:

$$x = \mathrm{a}sin^2 t; y = b\sin t\cos t; z = c\cos^2 t$$

Tại điểm tương ứng với $t = \frac{\pi}{4}$.

$$t = \frac{\pi}{4} \to x = a.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{a}{2}; y = b.\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}}; z = c.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{c}{2}$$

$$x' = 2.a.\sin t.\cos t = 2.a.\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}} = a;$$

$$y' = b\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right) = 0;$$

$$z' = -2.c.\cos t.\sin t = -2.c.\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}} = -c$$

- Phương trình tiếp tuyến:

$$(d): \frac{x - \frac{a}{2}}{a} = \frac{y - \frac{b}{2}}{0} = \frac{z - \frac{c}{2}}{c}$$

- Phương trình pháp diện:

$$(P): a\left(x - \frac{a}{2}\right) - c\left(z - \frac{c}{2}\right) = 0$$

Phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong

Cho mặt cong (S) xác định bởi phương trình $f(x, y, z) = 0$ và điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ là một điểm chính quy của (S).

- Phương trình pháp tuyến tại M:

$$(d): \frac{x - x_0}{f_x'(M)} = \frac{y - y_0}{f_y'(M)} = \frac{z - z_0}{f_z'(M)}$$

- Phương trình tiếp diện tại M:

$$(P): f_x'(M)(x - x_0) + f_y'(M)(y - y_0) + f_z'(M)(z - z_0) = 0$$

Ví dụ. Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong:

$$x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6 \Rightarrow f(x, y, z) = x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 6$$

Tại điểm $M(2,2,3)$.

$$f'_x(x, y, z) = 2x \to f'_x(M) = 4$$
$$f'_y(x, y, z) = -8y \to f'_y(M) = -16;$$
$$f'_z(x, y, z) = 4z \to f'_z(M) = 12$$

- Phương trình pháp tuyến của mặt tại $M(2,2,3)$.

$$(d): \frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{-16} = \frac{z-3}{12} \to x - 2 = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{3}$$

- Phương trình tiếp diện tại M:

$$(P): 4(x-2) - 16(y-2) + 12(z-3) = 0 \to x - 2 - 4(y-2) + 3(z-3) = 0$$

Phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong cho dưới dạng giao của hai mặt cong

Cho đường cong xác định bởi giao của hai mặt cong $f(x,y,z)$ và $g(x,y,z)$.

Đặt $\overrightarrow{n_f} = \left(f_x^{'}(M), f_y^{'}(M), f_z^{'}(M)\right)$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng tiếp diện của mặt cong $f(x,y,z) = 0$ tại điểm M.

Đặt $\overrightarrow{n_g} = \left(g_x^{'}(M), g_y^{'}(M), g_z^{'}(M)\right)$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng tiếp diện của mặt cong $g(x,y,z) = 0$ tại điểm M.

Khi đó $\overrightarrow{n_f} \wedge \overrightarrow{n_g}$ là véctơ chỉ phương của tiếp tuyến đường cong đã cho tại M.

Vậy phương trình tiếp tuyến là:

Phương trình tổng quát:

$$\begin{cases} f_x^{'}(M)(x-x_0) + f_y^{'}(M)(y-y_0) + f_z^{'}(M)(z-z_0) = 0 \\ g_x^{'}(M)(x-x_0) + g_y^{'}(M)(y-y_0) + g_z^{'}(M)(z-z_0) = 0 \end{cases}$$

Phương trình cần tìm:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} f_y^{'}(M) & f_z^{'}(M) \\ g_y^{'}(M) & g_z^{'}(M) \end{vmatrix}} = \frac{y-x_0}{\begin{vmatrix} f_z^{'}(M) & f_x^{'}(M) \\ g_z^{'}(M) & g_x^{'}(M) \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} f_x^{'}(M) & f_y^{'}(M) \\ g_x^{'}(M) & g_y^{'}(M) \end{vmatrix}}$$

Phương trình pháp diện cần tìm:

$$\begin{vmatrix} f_y^{'}(M) & f_z^{'}(M) \\ g_y^{'}(M) & g_z^{'}(M) \end{vmatrix}(x-x_0) + \begin{vmatrix} f_z^{'}(M) & f_x^{'}(M) \\ g_z^{'}(M) & g_x^{'}(M) \end{vmatrix}(y-y_0) + \begin{vmatrix} f_x^{'}(M) & f_y^{'}(M) \\ g_x^{'}(M) & g_y^{'}(M) \end{vmatrix}(z-z_0) = 0$$

Ví dụ. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cho bởi giao của 2 mặt $x^2 + y^2 = 10, y^2 + z^2 = 25$ tại điểm $M(1,3,4)$.

Đặt $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 10; g(x,y,z) = y^2 + z^2 - 25$

Ta có:

$$f_x^{'}(x,y,z) = 2x \rightarrow f_x^{'}(M) = 2; f_y^{'}(x,y,z) = 2y \rightarrow f_y^{'}(M) = 6; f_z^{'}(x,y,z) = 0 \rightarrow f_z^{'}(M) = 0$$
$$g_x^{'}(x,y,z) = 0 \rightarrow g_x^{'}(M) = 0; g_y^{'}(x,y,z) = 2y \rightarrow g_y^{'}(M) = 6; g_z^{'}(x,y,z) = 2z \rightarrow g_z^{'}(M) = 8$$

Dẫn đến phương trình tiếp diện của mặt $x^2 + y^2 = 10$ tại điểm M là:

$$2(x-1) + 6(y-3) = 0 \text{ hay } (x-1) + 3(y-3) = 0$$

Phương trình tiếp diện của mặt $y^2 + z^2 = 25$ tại điểm M là:

$$6(y-3) + 8(z-4) = 0 \text{ hay } 3(y-3) + 4(z-4) = 0$$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$\begin{cases} (x-1) + 3(y-3) = 0 \\ 3(y-3) + 4(z-4) = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{x-1}{12} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{3}$$

Phương trình pháp diện cần tìm là:

$$12(x-1) - 4(y-3) + 3(z-4) = 0$$