Đề thi kết thúc môn học, Đông 2019 (3)

Trần Thùy Dung

1.

(a) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -2 \end{cases}$

(b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1-m & m \end{array}\right] \implies \begin{array}{l} m = 1: \text{ hệ vô nghiệm} \\ m \neq 1: \text{hệ có nghiệm duy nhất} \end{array}$

2.

(a) $I_3 - 2A^TA = \begin{bmatrix} 8/9 & 0 & 0 \\ 0 & 5/9 & 0 \\ 0 & 0 & 5/9 \end{bmatrix}$

(b) $(I_3 - 2A^TA)^2 = \begin{bmatrix} 64/81 & 0 & 0 \\ 0 & 25/81 & 0 \\ 0 & 0 & 25/81 \end{bmatrix}$

(c) $\det(I_3 - 2A^TA) > 0$ nên $I_3 - 2A^TA$ khả nghịch.

$$(I_3 - 2A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} 81/64 & 0 & 0 \\ 0 & 81/25 & 0 \\ 0 & 0 & 81/25 \end{bmatrix}$$

3.

(a) $\begin{cases} T(v_1) + T(v_2) = -v_1 - v_2 = T(v_1 + v_2) \\ T(cv_1) = c(-v_1) = cT(v_1) \end{cases}$

$\implies T_1$ là ánh xạ tuyến tính.

Ma trận chính tắc của T là $\begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{cases} T_2(cx, cy, cz) = -(cx + 1, cy + cz) \neq -(cx + c, cy + cz) = c[-(x + 1, y + z)] = cT_2(x, y, z) \end{cases}$

Vậy T_2 không là ánh xạ tuyến tính.

(c) $\begin{cases} T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, 0, 0) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ T(cx_1, cy_1, cz_1) = (cx_1, 0, 0) = cT(x_1, y_1, z_1) \end{cases}$

$\implies T_3$ là ánh xạ tuyến tính.

Ma trận chính tắc của T là $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{bmatrix}$$

(a) Số chiều của không gian ảnh $\dim(T) = \dim(A)$. Dùng các biến đổi sơ cấp trên hàng của A ta nhận được ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Để $\dim(A) = 2 \implies a-1=0$ hoặc $a=0$.
$\implies a=0$ hoặc $a=1$.
(b) Chọn $a=1$ ta nhận được ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Khi đó, không gian ảnh của T gồm các vector là tổ hợp tuyến tính của cột 1 và cột 3 của A .

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{u}_1 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ \implies \mathbf{u}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \end{cases}$$

Vậy $B' = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$.

5.
(a)

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda+1 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda+4)(\lambda-5)(\lambda-1)$$

Vậy A có 3 giá trị riêng $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 1$.
(b)
• Với $\lambda_1 = -4$:

$$-4I - A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies \mathbf{u}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

• Với $\lambda_2 = 5 : 5I - A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\implies \mathbf{u}_2 = \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$$

• Với $\lambda_3 = 1 : 1I - A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\implies \mathbf{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Vậy ma trận P là

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^T A P = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$