Bài tập Chương 4. Bài 4. Các hệ số nhị thức

Bài tập

1. Tìm khai triển của $(x + y)^4$ bằng cách

a) dùng suy luận tổ hợp như trong ví dụ 1.

b) dùng định lí nhị thức.

2. Tìm khai triển của $(x + y)^5$ bằng cách

a) dùng suy luận tổ hợp như trong ví dụ 1.

b) dùng định lí nhị thức.

3. Tìm khai triển của $(x + y)^6$.

4. Tìm hệ số của x^5y^8 trong khai triển của $(x + y)^{13}$.

5. Trong khai triển của $(x + y)^{100}$ có bao nhiêu số hạng ?

6. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển của $(1 + x)^{11}$.

7. Tìm hệ số của x^9 trong khai triển của $(2 - x)^{19}$.

8. Tìm hệ số của x^8y^9 trong khai triển của $(3x + 2y)^{17}$.

9. Tìm hệ số của $x^{101}y^{99}$ trong khai triển của $(2x - 3y)^{200}$.

10*. Tìm công thức tính hệ số của x^k trong khai triển của $(x + 1/x)^{100}$, trong đó k là số tự nhiên.

11*. Tìm công thức tính hệ số của x^k trong khai triển của $(x^2 - 1/x)^{100}$, trong đó k là số tự nhiên.

12. Trong tam giác Pascal, hàng chứa hệ số nhị thức $C(10, k)$ $(0 \le k \le 10)$ là

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1.

Hãy sử dụng hằng đẳng thức Pascal tạo ra hàng ngay sau hàng trên trong tam giác Pascal.

13. Hàng nào của tam giác Pascal chứa hệ số nhị thức $C(9, k)$ $(0 \le k \le 9)$?

14. Chứng minh rằng, nếu n là số nguyên dương thì $1 = C(n,0) < C(n,1) < \ldots < C(n,\lfloor n/2 \rfloor)$ $= C(n,\lceil n/2 \rceil) > \ldots > C(n,n-1) > C(n,n) = 1$.

15. Chứng minh rằng, $C(n,k) \le 2^n$ với mọi số nguyên dương k và n, đồng thời $0 \le k \le n$.

16. a) Dùng bài tập 14 và hệ quả 1 chứng minh rằng, nếu n là số nguyên lớn hơn 1, thì $C(n,\lfloor n/2 \rfloor) \ge 2^n / n$.

b) Từ câu (a) hãy suy ra rằng nếu n là số nguyên dương thì $C(2n,n) \ge 4^n / 2n$.

17. Chứng minh rằng $C(n,k) \le n^k / 2^{k-1}$ với mọi số nguyên dương k và n, đồng thời $0 \le k \le n$.

18. Giả sử b là một số nguyên với $b \ge 7$. Hãy dùng định lí nhị thức và hàng thích hợp trong tam giác Pascal để tìm biểu diễn cơ số b của $(11)_b^4$ (tức là luỹ thừa bậc 4 của số $(11)_b$ trong kí hiệu cơ số b).

19. Chứng minh hằng đẳng thức Pascal bằng cách dùng công thức $C(n, r)$.

20. Giả sử k và n là các số nguyên dương với $0 \le k \le n$, hãy chứng minh **hằng đẳng thức bát giác**

$$C(n-1,k-1)C(n,k+1)C(n+1,k)$$
$$= C(n-1,k)C(n,k-1)C(n+1,k+1).$$

Sở dĩ hằng đẳng thức này có tên là bát giác vì nó là hệ thức chứa các số hạng trong tam giác Pascal tạo nên một hình bát giác.

21. Chứng minh rằng, nếu k và n là các số nguyên dương với $0 \le k \le n$, thì $kC(n,k) = nC(n-1,k-1)$ bằng cách dùng

a) một chứng minh tổ hợp. (*Gợi ý:* Chứng minh rằng hai vế của hằng đẳng thức cùng đếm số cách chọn một tập con với k phần tử từ một tập hợp chứa n phần tử và sau đó là một phần tử của tập con đó.)

b) dùng biến đổi đại số dựa trên công thức tính số tổ hợp chập r của tập hợp chứa n phần tử.

22. Chứng minh công thức : $C(n, r).C(r, k) = C(n, k).C(n-k, r-k)$, trong đó n, r, k là các số nguyên không âm, với $r \le n$ và $k \le r$

a) bằng lí thuyết tổ hợp.

b) bằng cách sử dụng công thức tính số tổ hợp chập r của tập n phần tử.

23. Chứng minh rằng, nếu k và n là các số nguyên dương thì

$$C(n+1,k) = (n+1)C(n,k-1)/k.$$

Hãy dùng hằng đẳng thức này để xây dựng một định nghĩa quy nạp của các hệ số nhị thức.

24. Chứng minh rằng, nếu p là một số nguyên tố và k là một số nguyên sao cho $0 \le k \le p-1$ thì $C(p,k)$ chia hết cho p.

25. Cho n là số nguyên dương, chứng minh rằng

$$C(2n,n+1) + C(2n,n) = C(2n+2,n+1)/2.$$

26*. Giả sử k và n là các số nguyên dương với $0 \le k \le n$, hãy chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} C(n,k)C(n,k-1) = C(2n+2,n+1)/2 - C(2n,n).$$

27*. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^{r} C(n+k,k) = C(n+r+1,r),$$

trong đó n và r là các số nguyên dương bằng cách sử dụng

a) chứng minh tổ hợp.

b) hằng đẳng thức Pascal.

28. Chứng tỏ rằng, nếu n là số nguyên dương thì $C(2n, 2) = 2C(n, 2) + n^2$, bằng cách sử dụng

a) chứng minh tổ hợp.

b) các biến đổi đại số.

29*. Hãy dùng chứng minh tổ hợp chứng tỏ rằng

$$\sum_{k=1}^{n} kC(n,k) = n2^{n-1}.$$

(*Gợi ý*: Hãy tính bằng hai cách số cách chọn một hội đồng và sau đó chọn thêm chủ tịch hội đồng đó.)

30*. Hãy dùng chứng minh tổ hợp chứng tỏ rằng

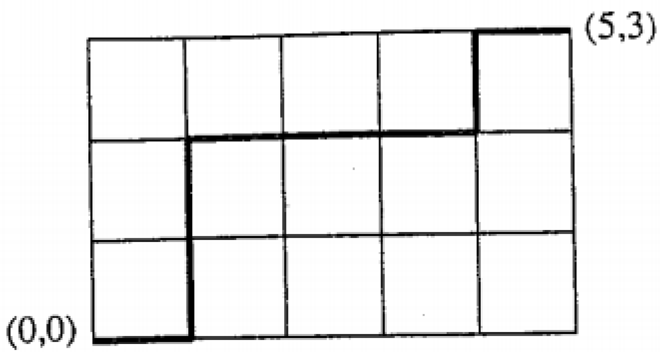
$$\sum_{k=1}^{n} kC(n,k)^2 = n.C(2n-1, n-1).$$

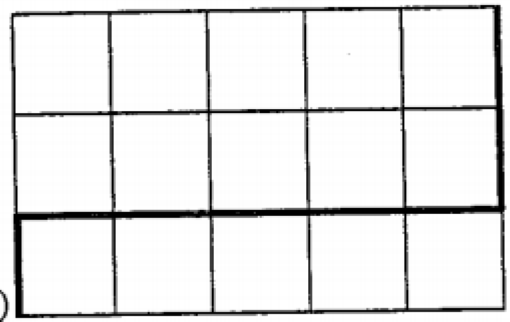
(*Gợi ý* : Hãy đếm bằng hai cách số cách chọn một hội đồng có n uỷ viên từ nhóm n giáo sư toán học và n giáo sư tin học, sao cho chủ tịch hội đồng là giáo sư toán.)

31. Giả sử S là một tập không rỗng cho trước nào đó. Chứng minh rằng số các tập con của S có số phần tử là lẻ cũng bằng số các tập con của nó với số phần tử là chẵn.

32*. Dùng quy nạp toán học, hãy chứng minh định lí nhị thức.

33. Trong bài tập này chúng ta sẽ đếm số đường đi từ gốc $O(0, 0)$ của mặt phẳng Oxy tới điểm (m, n) sao cho mỗi đường đi gồm một dãy các bước đi. Mỗi bước đi là sự dịch chuyển sang bên phải hay lên trên một đơn vị (sự dịch chuyển sang bên trái hay xuống dưới là không cho phép). Hai đường đi như thế từ điểm (0, 0) tới (5, 3) được minh hoạ trên hình vẽ.





a) Chứng tỏ rằng mỗi đường đi loại đó có thể biểu diễn bằng một xâu nhị phân gồm m bit 0 và n bit 1, trong đó bit 0 biểu thị chuyển động sang phải, còn 1 là biểu thị chuyển động lên trên một đơn vị.

b) Từ câu (a) hãy suy ra có $C(m + n, n)$ đường đi từ điểm (0, 0) tới điểm (m, n).

34. Dùng bài tập 33 chứng minh đẳng thức $C(n, k) = C(n, n - k)$, trong đó k là số nguyên và $0 \leq k \leq n$. (*Gợi ý*: Tính số đường đi dạng như trong bài tập 33, từ điểm (0, 0) tới điểm $(n - k, k)$ và từ (0, 0) tới $(k, n - k)$.)

35. Dùng bài tập 33 chứng minh định lí 4. (*Gợi ý*: Tính số đường đi với n bước được mô tả trong bài tập 33. Mỗi đường đi như thế có điểm cuối tại một trong các điểm $(n - k, k)$ với $k = 0, 1, 2, ..., n$.)

36. Dùng bài tập 33 chứng minh hằng đẳng thức Pascal. (*Gợi ý*: Chứng tỏ rằng đường đi như được mô tả trong bài tập 33 từ điểm (0, 0) tới $(n + 1 - k, k)$ qua hoặc

$(n+1-k, k-1)$ hoặc $(n-k, k)$, nhưng không qua cả hai.)

37. Chứng minh hằng đẳng thức trong bài tập 27 bằng cách sử dụng bài tập 33. (*Gợi ý*: Trước tiên, lưu ý rằng số đường đi từ (0, 0) tới $(n+1, r)$ bằng $C(n+1+r, r)$. Sau đó, tính số đường đi bằng cách lấy tổng các đường có bước đầu tiên là đi lên trên k đơn vị ($k = 0, 1, ..., r$).)

38. Chứng minh bằng tổ hợp rằng nếu n là một số nguyên dương thì

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C(n,k) = n(n+1)2^{n-2} .$$

(*Gợi ý* : Chứng tỏ rằng cả hai vế đều đếm số cách chọn các tập con của một tập hợp chứa n phần tử cùng với hai phần tử không nhất thiết phải khác nhau từ tập con đó. Sau đó viết vế phải dưới dạng $n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}$.)

39*. Hãy xác định một công thức có liên quan tới các hệ số nhị thức đối với số hạng thứ n của các dãy được liệt kê dưới đây. (*Gợi ý* : Quan sát tam giác Pascal sẽ rất hữu ích. Mặc dù có vô số dãy xuất phát từ một tập các số hạng xác định, nhưng mỗi danh sách dưới đây là điểm xuất phát của một dãy thuộc loại mong muốn.)

a) 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, ...

b) 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, ...

c) 1, 2, 6, 20, 70, 252, 924, 3432, 12870, 48620, ...

d) 1, 1, 2, 3, 6, 10, 20, 35, 70, 126, ...

e) 1, 1, 1, 3, 1, 5, 15, 35, 1, 9, ...

f) 1, 3, 15, 84, 495, 3003, 18564, 116280, 735471, 4686825, ...