Cực trị tuyệt đối và cực trị địa phương

Cho hàm $f: D \subset R^2 \to$R. Gọi $M_0(x_0, y_0) \in D$ và $B(M_0, \delta) \in D$ là 2 điểm lân cận.

1) Hàm $f(x, y)$ có giá trị cực đại tuyệt đối tại $M_0(x_0, y_0)$ nếu:

$$f(x,y) \leq f(x_0, y_0), \forall (x,y) \in D$$

2) Hàm $f(x, y)$ có giá trị cực tiểu tuyệt đối tại $M_0(x_0, y_0)$ nếu:

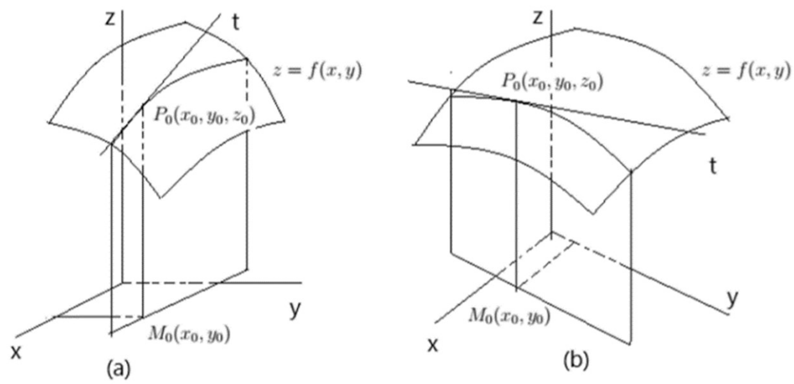
$$f(x,y) \geq f(x_0, y_0), \forall (x,y) \in D$$

3) Hàm $f(x, y)$ có giá trị cực đại tương đối (cực đại địa phương) tại $M_0(x_0, y_0)$ nếu nó đạt cực đại tuyệt đối trong lân cận $B(M_0, \delta)$ và f(x_0, y_0) được gọi là giá trị cực đại tương đối của hàm f tại điểm $M_0(x_0, y_0)$.

4) Hàm $f(x, y)$ có giá trị cực tiểu tương đối (cực tiểu địa phương) tại $M_0(x_0, y_0)$ nếu nó đạt cực tiểu tuyệt đối trong lân cận $B(M_0, \delta)$ và f(x_0, y_0) được gọi là giá trị cực tiểu tương đối của hàm f tại điểm $M_0(x_0, y_0)$.

Khi hàm $f(x, y)$ đạt cực đại hay cực tiểu tại M_0 thì được gọi chung là hàm f đạt cực trị tại M_0.

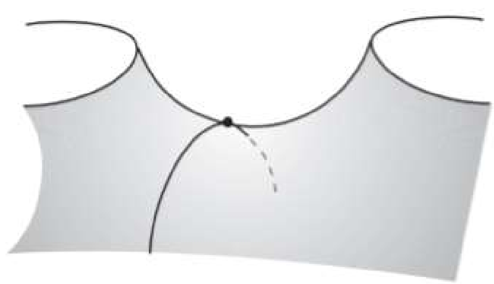
Định lý. Nếu hàm $f(x, y)$ đạt cực trị địa phương tại $M_0(x_0, y_0)$ và giả sử hàm $f(x, y)$ có đạo hàm riêng tại $M_0(x_0, y_0)$ thì các đạo hàm riêng đó phải bằng 0.



Ý nghĩa hình học của định lý trên là nếu hàm $f(x, y)$ có cực trị địa phương tại $M_0(x_0, y_0)$ thì mặt phẳng tiếp tuyến với mặt $f(x, y)$ tại $M_0(x_0, y_0)$ nằm ngang.

Điểm $M_0(x_0, y_0)$ nói trên được gọi là điểm dừng (stationary point) hoặc điểm tới hạn (critical point).

Điểm dừng trở thành điểm yên ngựa (saddle point) khi lân cận $B(M_0, \delta)$ luôn chứa những điểm (x, y) sao cho $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ và những điểm khác f(x,y) $\geq$ f(x_0,y_0).



Điểm yên ngựa tiêu biểu

Ví dụ. Tìm cực trị của hàm:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$$

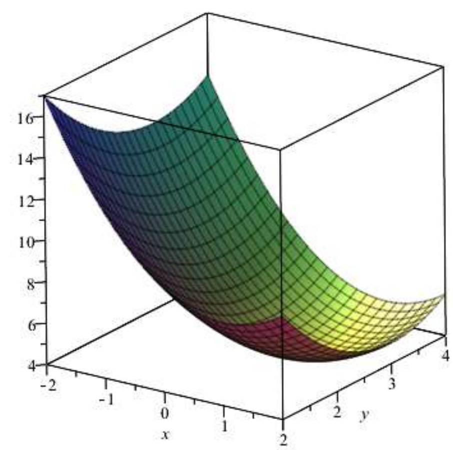
Trước hết tìm điểm dừng bằng cách giải HPT:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 = 0; \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 6 = 0$$

Ta tìm được $x = 1, y = 3$ là điểm dừng duy nhất. Mặt khác:

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-3)^2 + 4 \geq 4, \forall (x,y)$$

Vậy hàm vừa đạt cực tiểu tuyệt đối vừa đạt cực tiểu địa phương tại điểm (1,3), giá trị là 4.



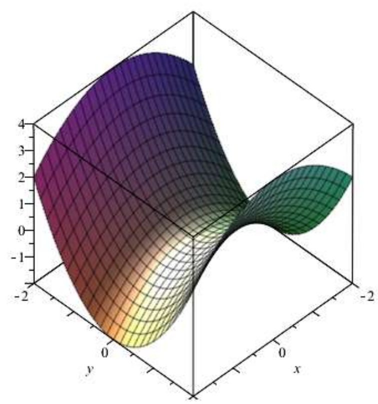
Ví dụ. Tìm cực trị của hàm:

$$f(x,y) = y^2 - \frac{1}{2}x^2$$

Trước hết tìm điểm dừng bằng cách giải HPT:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x = 0; \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$$

Ta tìm được $x = 0, y = 0$ là điểm dừng duy nhất. Mặt khác, hàm $f(x,0) = -\frac{1}{2}x^2$ đạt cực đại tại $x = 0$ và hàm $f(0,y) = y^2$ đạt cực tiểu tại $y = 0$. Vậy điểm (0,0) là điểm yên ngựa.



Phương pháp tìm cực trị địa phương

Định lý *(điều kiện cần)*: Nếu hàm số $z = f(x, y)$ khả vi tại điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$ mà tại đó hàm số đạt cực trị thì:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0; f'_y(x_0, y_0) = 0 \ (*)$$

Các điểm thỏa mãn (*) được gọi là các điểm dừng hoặc điểm tới hạn.

Định lý *(điều kiện đủ)*: Giả sử điểm $M_0(x_0, y_0)$ là một điểm dừng của hàm số $z = f(x, y)$ và hàm số đó có các đạo hàm riêng đến cấp hai:

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}; B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}; C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}$$

- $\Delta = B^2 - A.C > 0$: hàm số không có cực trị (có điểm yên ngựa tại M_0).
- $\Delta = B^2 - A.C = 0$: không kết luận về bản chất của hàm số tại M_0.
- $\Delta = B^2 - A.C < 0$: hàm số đạt cực đại tại M_0 nếu $A < 0$ và đạt cực tiểu tại M_0 nếu $A > 0$.

Phương pháp này gọi là phương pháp ma trận Hesse (Hessian):

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

Định thức của ma trận Hesse:

$$\det(\mathbf{H}) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx} f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2$$

Ví dụ. Tìm cực trị của hàm số: $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$

Hàm số xác định $\forall(x,y) \in R^2$. Tính:

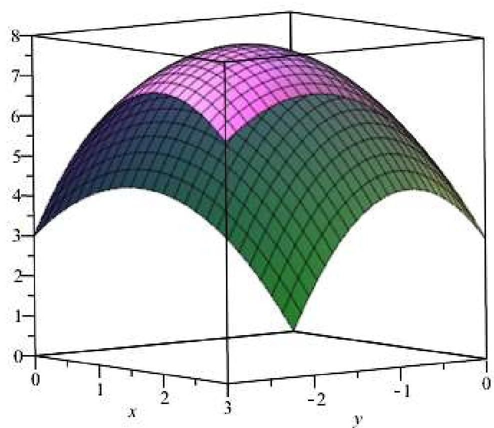
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x+4; \frac{\partial z}{\partial y} = -2y-4;\ \frac{\partial z}{\partial x} = 0; \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \rightarrow M_0(2,-2)$$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2 < 0; C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2; B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\rightarrow \Delta = B^2 - AC = -4 < 0$$

Vậy hàm số đạt cực trị tại $M_0(2,-2)$. Do $A = -2 < 0$

nên hàm số đạt cực đại với giá trị $z_{max} = z(2,-2) = 8$.



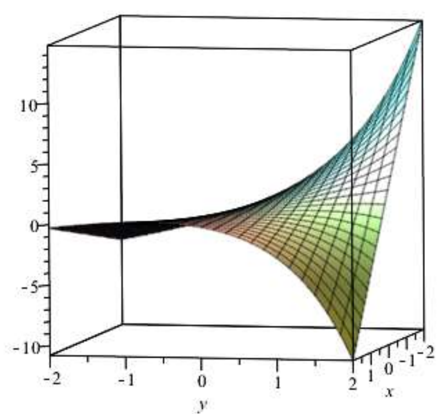
Ví dụ. Tìm cực trị của hàm số $z = x + y - x.e^y$

Hàm số xác định $\forall(x, y) \in R^2$. Tính:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 - e^y; \frac{\partial z}{\partial y} = 1 - x.e^y; \ \frac{\partial z}{\partial x} = 0; \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \rightarrow M_1(1,0)$$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0; C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -1; B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1$$

Giá trị $B^2 - A.C = 1 > 0$ nên hàm số đã cho không có cực trị (điểm yên ngựa) tại M_1.



Ví dụ. Tìm cực trị của hàm số: $z = -x^2y^2 + 4xy - x^2 + 4x$

Hàm số xác định $\forall(x, y) \in R^2$. Tính:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2xy^2 + 4y - 2x + 4; \frac{\partial z}{\partial y} = -2x^2y + 4x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0; \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \to \begin{cases} -2xy^2 + 4y - 2x + 4 = 0 \\ -2x^2y + 4x = 0 \end{cases} \to M_1(0,-1); M_2(2,1)$$

+) Tại $M_1(0, -1)$, tính:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2y^2 - 2 = -4; C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x^2 = 0; B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xy + 4 = 4$$

$$\to \Delta = B^2 - AC = 16 > 0$$

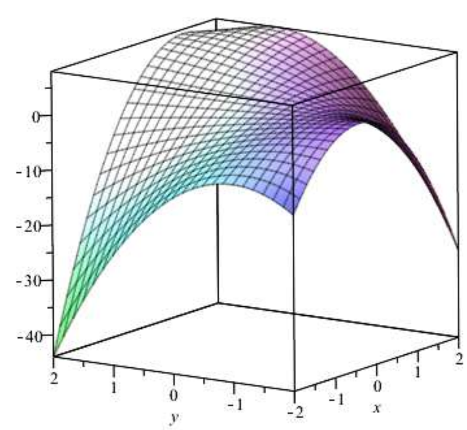
Vậy điểm $M_1(0, -1)$ không phải là điểm cực trị.

+) Tại $M_2(2,1)$, tính:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2y^2 - 2 = -4 < 0; C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x^2 = -8; B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xy + 4 = -4$$

$$\to \Delta = B^2 - AC = 16 - 32 = -16 < 0$$

Vậy điểm $M_1(2,1)$ là điểm cực đại của hàm số, đạt giá trị $f_{max} = f(2,1) = 8$.



Cực trị có điều kiện, nhân tử Lagrange

Trong thực tế đôi khi chúng ta muốn tìm giải pháp tối ưu cho một cho một vấn đề nào đó dựa trên một số điều kiện ràng buộc nhất định cho trước. Bằng cách biểu diễn vấn đề đang xét dưới dạng hàm và lúc này bài toán sẽ được phát biểu như sau:

Tìm cực trị của hàm $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ thỏa mãn m điều kiện ràng buộc:

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, i = 1, m, m < n$$

Và được gọi là cực trị có điều kiện.

Nói chung, bài toán cực trị có điều kiện rất phức tạp và không có phương pháp chung để giải. Có một số phương pháp đặc biệt được áp dụng cho các bài toán mà các điều kiện ràng buộc là tương đối đơn giản. Một trong những phương pháp đó là phương pháp nhân tử Lagrange.

Cách giải bài toán. Tìm cực trị của hàm $z = f(x, y)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$

+ Trường hợp 1: Nếu từ $\varphi(x, y) = 0$ có thể rút ra được $x = g(y)$ hoặc $y = h(x)$ thì thay vào $z = f(x, y)$ ta được hàm một biến, từ đó tìm cực trị của hàm một biến.

Ví dụ 1. Tìm cực trị của hàm $f(x, y) = xy$ với điều kiện $x + y = 1$.

Từ điều kiện $x + y = 1 \rightarrow y = 1 - x$ thay vào hàm $f(x, y)$ dẫn đến:

$$f(x, 1 - x) = x(1 - x) = -x^2 + x$$

$$f'(x, 1 - x) = -2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Lập bảng biến thiên:

x	1/2
f’	+ 0 -
f	Tăng 1/4 Giảm

Thay vào hàm điều kiện $\rightarrow y = 1 - x = 1 - \frac{1}{2} = 1/2$

Vậy hàm số $f(x, y)$ đạt cực đại tại điểm $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ và có giá trị bằng $\frac{1}{4}$.

Ví dụ 2. Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = xy$ với điều kiện $2x + 3y - 5 = 0$

Từ điều kiện $2x + 3y - 5 = 0 \rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$. Thay vào hàm $f(x,y)$ ta có:

$$f\left(x, -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}\right) = x\left(-\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}\right) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x$$

$$f' = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} = 0 \rightarrow x = \frac{5}{4}$$

Lập bảng biến thiên:

x	5/4		
f'	+	0	-
f	Tăng		Giảm

Thay vào hàm điều kiện $\rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}.\frac{5}{4} + \frac{5}{3} = \frac{5}{6}$

Vậy hàm $f(x,y)$ đạt cực đại tại điểm $(\frac{5}{4}, \frac{5}{6})$ và đạt giá trị bằng $\frac{25}{24}$.

+ Trường hợp 2. Nếu từ $\varphi(x, y) = 0$ không thể rút ra được $x = g(y)$ hoặc $y = h(x)$ thì ta lập hàm Lagrange:

$$F = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

Xét điều kiện cần của cực trị: $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$

Điều kiện đủ: - Nếu $d^2F\Big|_{(M_0, \lambda_0)} > 0 \rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $M_0(x_0, y_0)$

- Nếu $d^2F\Big|_{(M_0, \lambda_0)} < 0 \rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $M_0(x_0, y_0)$

Ví dụ 3. Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = xy$ với điều kiện $2x + 3y - 5 = 0$

Lập hàm nhân tử Lagrange: $F = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$

Tìm điểm dừng từ hệ: $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = y + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x + 3\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$

Giải hệ trên ta được điểm tới hạn:

$$M_0\left(\lambda = -\frac{5}{12}; x = \frac{5}{4}; y = \frac{5}{6}\right)$$

Tính vi phân toàn phần cấp 2:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0; \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1; \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \to d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2 = 2dxdy \ (*)$$

Từ điều kiện ban đầu: $2x + 3y - 5 = 0 \to 2dx = -3dy \to dy = -\dfrac{2}{3}dx$

Thay vào (*) dẫn đến:

$$d^2F = 2dxdy = 2dx\left(-\frac{2}{3}dx\right) = -\frac{4}{3}dx^2 < 0$$

Như vậy hàm $f(x,y)$ đạt cực đại tại điểm $(\frac{5}{4}, \frac{5}{6})$ và đạt giá trị bằng $\frac{25}{24}$.

Ví dụ 4. Tìm cực trị của hàm $f\left(x,y\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2},\left(a>0\right)$

Lập hàm nhân tử Lagrange: $F=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\lambda\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{a^2}\right)$

Tìm điểm dừng từ hệ: $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}-\frac{2\lambda}{x^3}=0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}-\frac{2\lambda}{y^3}=0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{a^2}=0 \end{cases}$

Giải hệ trên ta được các điểm tới hạn:

$$M_1\left(\lambda=-\frac{a}{\sqrt{2}};x=a\sqrt{2};y=a\sqrt{2}\right);\ M_2\left(\lambda=\frac{a}{\sqrt{2}};x=-a\sqrt{2};y=-a\sqrt{2}\right)$$

Tính vi phân toàn phần cấp 2:

$$d^2F=\left(\frac{2}{x^3}+\frac{6\lambda}{x^4}\right)dx^2+\left(\frac{2}{y^3}+\frac{6\lambda}{y^4}\right)dy^2\ (*)$$

Từ điều kiện $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$ suy ra $-\frac{2}{x^3}dx-\frac{2}{y^3}dy=0 \Rightarrow dy=-\frac{y^3}{x^3}dx$ thay vào biểu thức (*) ta có:

+ Tại $M_1\left(\lambda=-\frac{a}{\sqrt{2}};x=a\sqrt{2};y=a\sqrt{2}\right)$:

$\Rightarrow d^2F=-\frac{\sqrt{2}}{4a^3}\left(dx^2+dy^2\right)=-\frac{2\sqrt{2}}{4a^3}\left(dx^2\right)<0$. Vậy hàm đạt cực đại tại M_1.

+ Tại $M_2\left(\lambda=\frac{a}{\sqrt{2}};x=-a\sqrt{2};y=-a\sqrt{2}\right)$:

$\Rightarrow d^2F=\frac{\sqrt{2}}{4a^3}\left(dx^2+dy^2\right)=\frac{2\sqrt{2}}{4a^3}\left(dx^2\right)>0$. Vậy hàm đạt cực tiểu tại M_2.

Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trong miền kín

Để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $z = f(x, y)$ trong miền kín $D \subset R$, ta làm như sau:

- Tìm các điểm nghi ngờ (tới hạn) trong miền D (cực trị địa phương);
- Tìm các điểm nghi ngờ (tới hạn) trên biên Γ của miền D (cực trị có điều kiện, điều kiện chính là phương trình biên D);
- Tính giá trị tại các điểm nghi ngờ trong D và trên Γ, so sánh giá trị lớn nhất, bé nhất.

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm $z = x^2 - y^2$ trong miền D xác định bởi $x^2 + y^2 \leq 4$

Hàm $z = x^2 - y^2$ liên tục $\forall (x, y) \in R^2$. Ta có:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x; \frac{\partial z}{\partial y} = -2y$$

Vậy chỉ có điểm gốc tọa độ (0,0) là điểm tới hạn nằm trong miền D.

Xét giá trị của z trên biên của miền D (tức là trên đường tròn $x^2 + y^2 = 4$:

$$y^2 = 4 - x^2 \to z = 2x^2 - 4$$

Trong $-2 \leq x \leq 2$, z đạt giá trị lớn nhất bằng 4 khi $x = \pm 2$ và đạt giá trị nhỏ nhất bằng -4 khi x=0. So sánh với giá trị của z tại điểm tới hạn (0,0) ta thấy rằng hàm số z đạt giá trị lớn nhất bằng 4 tại (-2,0) và (2,0), đạt giá trị nhỏ nhất bằng -4 tại (0,-2) và (0,2).

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm $z = y^2 + 10x$ với điều kiện:

$$2y^2 - 5x^2 = 12$$

Các điểm dừng: $M_1\left(-2,4,\frac{1}{2}\right), M_2\left(-2,-4,\frac{1}{2}\right)$