Đề thi kết thúc môn học, Đông 2019 (4)

Trần Thùy Dung

1. (a) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \\ z = -6 \end{cases}$

(b) $\begin{array}{ll} m \neq -\frac{54}{11}: & \text{hệ vô nghiệm} \\ m = -\frac{54}{11}: & \text{hệ vô nghiệm} \end{array}$

2.

(a) $AB = \begin{bmatrix} 22 & 37 & 7-4m \\ 48 & 68 & 16-8m \\ -30+2m & -60-3m & -9+7m \end{bmatrix}$

(b) Không, vì $\det(A) = 0$.

3.

(a) Viết các vector của B' thành các cột của ma trận P

$$|P| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Suy ra, phương trình $c_1(2,1,0) + c_2(-1,1,0) + c_3(-2,1,1) = (0,0,0)$ có nghiệm duy nhất.

$\implies$ B' độc lập tuyến tính và có đúng 3 vector, do đó B' là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

(b) Đối với cơ sở B là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$

$$T_B = \begin{bmatrix} 1 & 16 & -12 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ma trận P chính là ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận T đối với cơ sở B' là

$$T_{B'} = P^{-1} T_B P = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4.

(a) $\begin{aligned} d_{12} &= \sqrt{2a^2 - 8a + 11} \\ d_{23} &= \sqrt{a^2 - 4a + 5} \\ d_{31} &= \sqrt{a^2 - 2a + 6} \end{aligned}$

• $d_{12} = d_{23} \Leftrightarrow a^2 - 4a + 6 = (a-2)^2 + 2 = 0$

$\implies$ Không có a thỏa mãn.

(b)

$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{u}_1 = (0,1,0)$

$\implies \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = (0,1,0)$

$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_3)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_3)\mathbf{u}_2 = \left(-\frac{6}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$

$\implies \mathbf{u}_3 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

5.

(a) $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-1 & 2 \\ 1 & 3 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-4)$

• Với $\lambda_1 = -2 : -2I - A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\implies$ Không gian con riêng: span $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

• Với $\lambda_2 = 2 : 2I - A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\implies$ Không gian con riêng: span $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

• Với $\lambda_3 = 4 : 4I - A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Không gian con riêng: $:span \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(b)

Viết các vector riêng của A thành các cột của P

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \implies P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận đường chéo nhận được là

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$