Bài tập Chương 4. Bài 2. Nguyên lý chuồng Bồ câu

Bài tập

1. Chứng tỏ rằng trong bất kì tập hợp gồm sáu lớp học nào cũng có ít nhất hai lớp gặp nhau trong cùng một ngày, các lớp học nghỉ thứ bảy.

2. Chứng tỏ rằng, nếu trong một lớp có 30 sinh viên thì ít nhất có hai sinh viên có tên bắt đầu bằng cùng một chữ cái.

3. Một ngăn tủ có chứa một tá chiếc tất màu nâu và một tá chiếc tất màu đen. Một người lấy các chiếc tất một cách ngẫu nhiên trong bóng tối.

a) Anh ta cần phải lấy ra bao nhiêu chiếc tất để chắc chắn rằng có ít nhất hai chiếc tất cùng màu ?

b) Anh ta cần phải lấy ra bao nhiêu chiếc tất để chắc chắn rằng có ít nhất hai chiếc tất màu đen?

4. Một chiếc bát chứa 10 viên bi đỏ và 10 viên bi xanh. Một phụ nữ nhắm mắt chọn các viên bi một cách ngẫu nhiên.

a) Chị ta cần phải lấy ra bao nhiêu viên bi để chắc chắn rằng có ít nhất ba viên bi cùng màu ?

b) Chị ta cần phải lấy ra bao nhiêu viên bi để chắc chắn rằng có ít nhất ba viên bi màu xanh ?

5. Chứng minh rằng trong một nhóm gồm năm số nguyên (không nhất thiết phải liên tiếp nhau), có hai số khi chia cho 4 có cùng số dư.

6. Cho d là một số nguyên dương. Chứng tỏ rằng trong một nhóm tuỳ ý gồm $(d + 1)$ số nguyên có ít nhất hai số khi chia cho d có cùng số dư.

7. Cho n là một số nguyên dương. Chứng tỏ rằng trong mọi tập gồm n số nguyên liên tiếp có đúng một số chia hết cho n.

8. Chứng minh rằng, nếu f là một hàm từ S đến T, trong đó S và T là hai tập hữu hạn và $|S| > |T|$ thì sẽ có các phần tử s_1 và s_2 của S sao cho $f(s_1) = f(s_2)$ hoặc nói cách khác f không là hàm đơn ánh.

9. Mỗi sinh viên trong một trường đại học đều có quê ở một trong 50 bang. Cần phải tuyển bao nhiêu sinh viên để đảm bảo có ít nhất 100 người cùng bang ?

10*. Cho (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4, 5$, là một tập hợp gồm năm điểm khác nhau có các toạ độ nguyên trên mặt phẳng Oxy. Chứng tỏ rằng điểm giữa của đường nối ít nhất một trong số các cặp điểm này có toạ độ nguyên.

11*. Cho (x_i, y_i, z_i), $i = 1, 2, ..., 9$ là một tập hợp gồm chín điểm khác nhau có các toạ độ nguyên trong không gian $Oxyz$. Chứng tỏ rằng điểm giữa của đường nối ít nhất một trong số các cặp điểm này có toạ độ nguyên.

12. Cần có bao nhiêu cặp số nguyên (a, b) để đảm bảo chắc chắn có hai cặp (a_1, b_1), (a_2, b_2) sao cho $a_1 \bmod 5 = a_2 \bmod 5$ và $b_1 \bmod 5 = b_2 \bmod 5$?

13. **a)** Chứng tỏ rằng trong năm số chọn từ tám số nguyên dương đầu tiên nhất thiết phải có một cặp có tổng bằng 9.

b) Điều khẳng định trong câu (a) có đúng không nếu chỉ chọn bốn chứ không phải năm số?

14. **a)** Chứng tỏ rằng trong bảy số chọn từ mười số nguyên dương đầu tiên nhất thiết phải có ít nhất hai cặp có tổng bằng 11.

b) Điều khẳng định trong câu (a) có đúng không nếu thay cho bảy ta chọn sáu số ?

15. Hỏi phải chọn bao nhiêu số từ tập hợp {1, 2, 3, 4, 5, 6} để đảm bảo nhận được ít nhất một cặp số có tổng bằng 7?

16. Hỏi phải chọn bao nhiêu số từ tập hợp {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15} để đảm bảo nhận được ít nhất một cặp số có tổng bằng 16?

17. Một công ti giữ hàng hoá trong kho. Số các ngăn chứa trong kho được xác định bởi số gian hàng, số ô trong mỗi gian và số các giá ở mỗi ô. Biết nhà kho có 50 gian, mỗi gian có 85 ô và mỗi ô có năm giá. Hỏi số hàng hoá tối thiểu phải bằng bao nhiêu để có ít nhất hai sản phẩm được đặt trong cùng một ngăn ?

18. Giả sử có chín sinh viên trong lớp toán rời rạc của một trường đại học.

a) Chứng tỏ rằng lớp này phải có ít nhất năm sinh viên nam hoặc ít nhất năm sinh viên nữ.

b) Chứng tỏ rằng lớp này phải có ít nhất ba sinh viên nam hoặc ít nhất bảy sinh viên nữ.

19. Giả sử mọi sinh viên trong lớp toán rời rạc gồm 25 người là sinh viên năm thứ nhất, năm thứ hai và năm thứ ba.

a) Chứng tỏ rằng trong lớp này phải có ít nhất 10 sinh viên năm thứ nhất, ít nhất 10 sinh viên năm thứ hai, hoặc ít nhất 10 sinh viên năm thức ba.

b) Chứng tỏ rằng hoặc là có ít nhất ba sinh viên năm thứ nhất, hoặc ít nhất 19 sinh viên năm thứ hai hoặc ít nhất năm sinh viên năm thứ ba.

20. Hãy tìm dãy con tăng và dãy con giảm có độ dài cực đại của dãy số 22, 5, 7, 2, 23, 10, 15, 21, 3, 17.

21. Hãy xây dựng một dãy 16 số nguyên dương không có dãy con tăng hoặc dãy con giảm – gồm năm số hạng.

22. Hãy chứng tỏ rằng, nếu có 101 người có chiều cao khác nhau đứng thành một hàng thì có thể tìm được 11 người có chiều cao tăng dần hoặc giảm dần mà không thay đổi thứ tự của họ trong hàng.

23*. Hãy mô tả thuật toán dưới dạng giả mã để tạo các dãy con tăng hoặc giảm dài nhất của một dãy các số nguyên khác nhau.

24. Chứng tỏ rằng trong một nhóm có năm người (trong đó hai người bất kì hoặc là bạn hoặc là kẻ thù) không phải nhất thiết phải có ba người là bạn của nhau hoặc là kẻ thù của nhau.

25. Chứng tỏ rằng trong một nhóm có mười người (trong đó hai người bất kì hoặc là bạn hoặc là kẻ thù) luôn có ba người là bạn hoặc bốn người là kẻ thù lẫn nhau và có nhóm ba người là kẻ thù hoặc bốn người là bạn của nhau.

26. Sử dụng bài tập 25 chứng minh rằng trong một nhóm tuỳ ý gồm 20 người (trong đó hai người bất kì hoặc là bạn hoặc là kẻ thù) có một nhóm bốn người hoặc là bạn hoặc là kẻ thù của nhau.

27. Chứng minh rằng, nếu n là một số nguyên dương với $n \geq 2$ thì số Ramsey $R(2, n) = n$.

28. Chứng minh rằng, nếu m và n là những số nguyên dương với $m \geq 2$ và $n \geq 2$ thì số Ramsey $R(m, n)$ và $R(n, m)$ bằng nhau.

29. Chứng minh rằng có ít nhất bốn người ở California (dân số: 34 triệu) có cùng tên họ viết tắt bằng ba chữ cái, sinh cùng một ngày trong năm (không nhất thiết trong cùng một năm).

30. Chứng tỏ rằng trong số 100 triệu người ăn lương ở Mỹ có thu nhập thấp hơn một triệu đô la tồn tại hai người có tổng thu nhập bằng tiền như nhau, tính đến từng xu (penny).

31. Trong một trường đại học có 38 ca học phân cho các lớp. Nếu có 677 lớp khác nhau thì cần phải có bao nhiêu phòng học ?

32. Một mạng máy tính gồm có sáu máy, mỗi máy nối trực tiếp với ít nhất một máy khác. Chứng tỏ rằng có ít nhất hai máy trong mạng được nối trực tiếp với một số như nhau các máy khác.

33. Một mạng máy tính gồm có sáu máy, mỗi máy nối trực tiếp hoặc không nối với các máy khác. Chứng tỏ rằng có ít nhất hai máy trong mạng được nối trực tiếp với một số như nhau các máy khác.

34. Tìm số đường cáp ít nhất cần thiết kết nối tám máy tính với bốn máy in để đảm bảo rằng bốn máy tính có thể truy cập trực tiếp bốn máy in khác nhau. Giải thích đáp án của bạn.

35. Tìm số đường cáp ít nhất cần thiết kết nối 100 máy tính với 20 máy in để đảm bảo rằng 20 máy tính có thể truy cập trực tiếp 20 máy in khác nhau. Giải thích đáp án của bạn.

36*. Một bữa tiệc có ít nhất hai người. Chứng minh rằng có hai người có số người quen ở đây bằng nhau.

37. Một đô vật tham gia thi đấu giành chức vô địch trong 75 giờ. Mỗi giờ anh ta có ít nhất một trận đấu, nhưng tổng cộng số trận trong suốt thời gian thi đấu không vượt quá 125 trận. Chứng tỏ rằng có những giờ liên tiếp anh ta đã đấu đúng 24 trận.

38*. Điều khẳng định trong bài tập 37 có còn đúng không nếu thay con số 24 bằng con số

a) 2 ? **b)** 23 ? **c)** 25 ? **d)** 30 ?

39. Chứng tỏ rằng, nếu f là một hàm từ S đến T, trong đó S và T là các tập hữu hạn và $m = \lceil |S|/|T| \rceil$ thì có ít nhất m phần tử của S được gán cho cùng một phần tử của T. Điều đó có nghĩa là có m phần tử $s_1, s_2, \ldots, s_m$ của S sao cho $f(s_1) = f(s_2) = \ldots = f(s_m)$.

40. Có 51 ngôi nhà trong một phố. Mỗi ngôi nhà có địa chỉ nằm từ số 1000 đến 1099. Chứng tỏ rằng có ít nhất hai nhà có địa chỉ là hai số nguyên liên tiếp.

41*. Giả sử x là một số vô tỉ. Chứng tỏ rằng với một số nguyên j nào đó không vượt quá n thì giá trị tuyệt đối của hiệu giữa jx và số nguyên gần nó nhất sẽ nhỏ hơn $1/n$.

42. Cho $n_1, n_2, ..., n_t$ là các số nguyên dương. Chứng tỏ rằng, nếu xếp $n_1 + n_2 + ... + n_t - t + 1$ vật vào t hộp, thì với một i nào đó ($i = 1, 2, ..., t$) hộp thứ i chứa ít nhất n_i vật.

43*. Cách chứng minh định lí 3 dựa trên nguyên lí Dirichlet tổng quát là ý chính của bài toán này. Ta sẽ sử dụng những kí hiệu đã dùng trước đây.

a) Giả sử rằng $i_k \le n$, với $k = 1, 2, ..., n^2 + 1$. Dùng nguyên lí Dirichlet tổng quát chứng minh rằng có $(n + 1)$ số hạng $a_{k_1}, a_{k_2}, ..., a_{k_{n+1}}$, với $i_{k_1} = i_{k_2} = ... = i_{k_{n+1}}$, trong đó $1 \le k_1 < k_2 < ... < k_{n+1}$.

b) Chứng tỏ rằng $a_{k_j} > a_{k_{j+1}}$, với $j = 1, 2, ..., n$.

(*Gợi ý:* Giả sử $a_{k_j} < a_{k_{j+1}}$, hãy chứng tỏ rằng điều này kéo theo $i_{k_j} > i_{k_{j+1}}$, đó là mâu thuẫn.)

c) Dùng câu (a) và (b) để chứng minh nếu không có dãy con tăng có độ dài $(n + 1)$ thì phải có dãy con giảm cùng độ dài.