ĐẠO HÀM RIÊNG

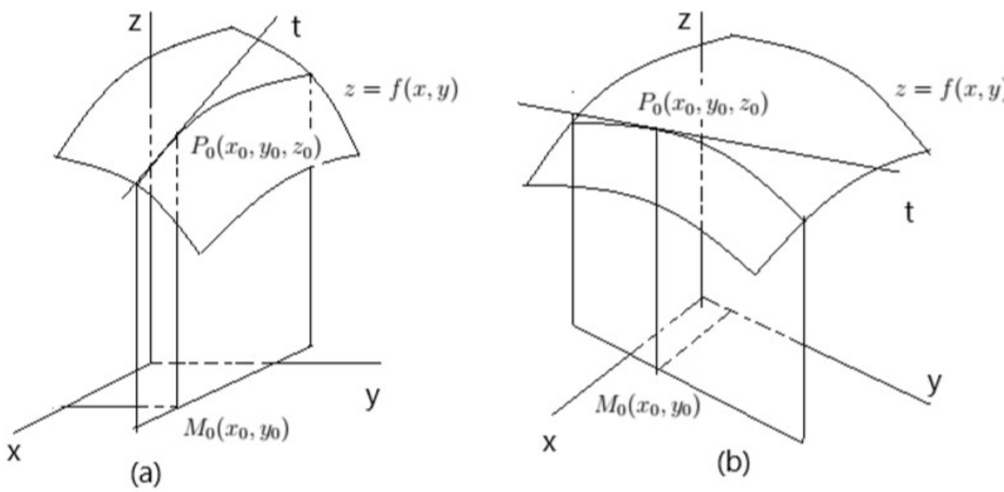
Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trong miền $D \in R^2 \to R$. Lấy điểm $M(x_0,y_0) \in D$. Đạo hàm riêng của hàm f đối với biến x tại điểm $M(x_0,y_0)$ được định nghĩa bởi giới hạn sau nếu tồn tại:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} = f'_x(x_0,y_0) = D_x f(x_0,y_0)$$

Tương tự, đạo hàm riêng của hàm f đối với biến y tại điểm $M(x_0,y_0)$ được định nghĩa bởi giới hạn sau nếu tồn tại:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y} = f'_y(x_0,y_0) = D_y f(x_0,y_0)$$

Chú ý: Từ định nghĩa, ta thấy rằng việc tính đạo hàm riêng của hàm nhiều biến giống như cách tính đạo hàm của hàm một biến số. Khi cần tính đạo hàm riêng của hàm số theo biến số nào, xem như hàm số chỉ phụ thuộc vào biến đó, còn các biến còn lại là các hằng số và áp dụng các quy tắc tính đạo hàm như hàm số một biến số.



Ý nghĩa hình học của $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ chính là độ dốc của tiếp tuyến P_0t của mặt cong $z = f(x, y)$ theo hướng x tại $P_0(x_0, y_0, z_0)$ và cũng chính là tiếp tuyến với đường cong giao tuyến giữa mặt phẳng $y = y_0$ và mặt cong $z = f(x, y)$.

Tương tự, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ chính là độ dốc của tiếp tuyến P_0t của mặt cong $z = f(x, y)$ theo hướng y tại $P_0(x_0, y_0, z_0)$ và cũng chính là tiếp tuyến với đường cong giao tuyến giữa mặt phẳng $x = x_0$ và mặt cong $z = f(x, y)$.

Đạo hàm riêng còn được viết dưới dạng ký hiệu:

$$f_x^{'}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0); f_y^{'}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Ví dụ. Cho hàm số $f(x, y) = 2\sin(x^2 + y^2)\sin(x^2 - y^2)$. Tính $f_x^{'}, f_y^{'}$ tại điểm $(0,0)$.

$$f_x^{'} = \frac{\partial f}{\partial x} = 4x\cos(x^2 + y^2)\sin(x^2 - y^2) + 4x\sin(x^2 + y^2)\cos(x^2 - y^2)$$

$$f_y^{'} = \frac{\partial f}{\partial y} = 4y\cos(x^2 + y^2)\sin(x^2 - y^2) - 4y\sin(x^2 + y^2)\cos(x^2 - y^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

VI PHÂN TOÀN PHẦN

Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trong miền $D \in R^2 \to R$. Lấy các điểm $M(x_0, y_0)$ và $N(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$, trong đó Δx và Δy tương ứng là các số gia của các biến x và y. Biểu thức:

$$\Delta f = f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right)$$

được gọi là số gia toàn phần của hàm $f(x, y)$ tại $M(x_0, y_0)$.

Nếu có thể biểu diễn số gia toàn phần dưới dạng:

$$\Delta f = A.\Delta x + B.\Delta y + \alpha.\rho \qquad (*)$$

Trong đó A, B không phụ thuộc vào $\Delta x, \Delta y$.

$\alpha \to 0$ khi $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$ thì ta nói hàm $z = f(x, y)$ khả vi tại điểm $M(x_0, y_0)$. Phần chính bậc nhất $A.\Delta x + B.\Delta y$ được gọi là vi phân toàn phần của $z = f(x, y)$ tại $M(x_0, y_0)$, ký hiệu là dz.

Chú ý:

a) Nếu hàm $f\left(x, y\right)$ là khả vi tại $M\left(x_0, y_0\right)$ thì liên tục tại $M\left(x_0, y_0\right)$. Thật vậy, từ (*) suy ra $\Delta f \to 0$ khi $\Delta x, \Delta y \to 0$. Do đó:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) = f\left(x_0, y_0\right)$$

Nghĩa là hàm liên tục tại $M\left(x_0, y_0\right)$.

b) Hàm $f\left(x, y\right)$ khả vi tại mọi điểm $M\left(x, y\right) \in D$ thì hàm khả vi trên D.

c) Đối với hàm số một biến số, sự tồn tại đạo hàm tại điểm (x_0, y_0) tương đương với sự khả vi của nó tại (x_0, y_0). Đối với hàm số nhiều biến số, sự tồn tại của các đạo hàm riêng tại (x_0, y_0) chưa đủ để nó khả vi tại (x_0, y_0). Định lý sau đây chỉ ra điều kiện đủ để hàm số $z = f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0).

Định lý. Nếu hàm $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng trong lân cận của điểm $M(x_0, y_0)$ và nếu các đạo hàm riêng đó liên tục tại $M(x_0, y_0)$ thì $f(x, y)$ khả vi tại $M(x_0, y_0)$:

$$dz = f_x^{'}dx + f_y^{'}dy = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

Ví dụ. Tìm VPTP của hàm số: $z = \sin\left(x^2 + y^2\right)$

$$dz = \left(2xdx + 2ydy\right)\cos\left(x^2 + y^2\right)$$

Ứng dụng của vi phân toàn phần để tính gần đúng

Nếu hàm $z = f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0) thì giá trị của $f(x, y)$ tại lân cận điểm (x_0, y_0) được tính theo công thức xấp xỉ tuyến tính (bỏ qua đại lượng VCB bậc cao) sau đây:

$$f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) \approx f\left(x_0, y_0\right) + f'_x\left(x_0, y_0\right)\Delta x + f'_y\left(x_0, y_0\right)\Delta y$$

Ví dụ. Tính gần đúng giá trị $\ln\frac{1.01}{0.98}$

Đặt $f\left(x, y\right) = \ln\frac{x}{y}$ và điểm $\left(x_0, y_0\right) = \left(1,1\right)$ ta có:

$$f'_x = \frac{1}{x}; f'_y = -\frac{1}{y} \Rightarrow f'_x\left(1,1\right) = 1; f'_y\left(1,1\right) = -1; \Delta x = 0.01; \Delta y = -0.02$$

$$\Rightarrow f\left(1.01, 0.98\right) \approx f\left(1,1\right) + f'_x\left(1,1\right)\Delta x + f'_y\left(1,1\right)\Delta y = 0 + 0.01 + 0.02 = 0.03$$

ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ HỢP

Giả sử $z = f(x,y)$ khả vi theo các biến số trung gian, còn $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ (trong đó t là biến độc lập), φ và ψ là các hàm khả vi thì:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

Giả sử $z = f(u)$ khả vi theo biến số u, còn $u = \varphi(x,y)$ khả vi theo các biến số độc lập x và y, ta có các đạo hàm riêng:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = f_u^{'}.u_x^{'} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = f_u^{'}.u_y^{'} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

Giả sử $z = f(u,v)$ khả vi theo các biến số u và v, còn $u = u(x,y), v = v(x,y)$ khả vi theo các biến số x, y, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = f_u^{'}.u_x^{'} + f_v^{'}.v_x^{'} = \dfrac{\partial f}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = f_u^{'}.u_y^{'} + f_v^{'}.v_y^{'} = \dfrac{\partial f}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

Công thức trên có thể được viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ trong đó ma trận } \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận *Jacobi*, định thức của ma trận ấy được gọi là *định thức Jacobi* của u, v với x, y và được ký hiệu là $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$.

Ví dụ. Tìm đạo hàm riêng của hàm số hợp: $z = e^{u^2 - 2v^2}, u = \cos x, v = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ta có:

$$u_x^{'} = -\sin x; u_y^{'} = 0; v_x^{'} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; v_y^{'} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\Rightarrow z_x^{'} = e^{\cos x^2 - 2\left(x^2 + y^2\right)}\left(\sin 2x - 4x\right); z_y^{'} = e^{\cos x^2 - 2\left(x^2 + y^2\right)}\left(-4y\right)$$

GRADIENT VÀ ĐẠO HÀM THEO HƯỚNG

Cho $f(x,y,z)$ là một hàm số xác định trong miền $D \in R^3$ và $\vec{l} = (l_1, l_2, l_3)$ là một véctơ bất kỳ trong R^3. Giới hạn nếu có:

$$\lim_{s \to 0} \frac{f\left(M_0 + s\,\vec{l}\right) - f(M)}{s}$$

Được gọi là đạo hàm của hàm số f theo hướng $\vec{l}$ tại điểm M_0 và được ký hiệu $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)$.

Nếu $\vec{l}$ trùng với véctơ đơn vị i của trục Ox thì đạo hàm theo hướng $\vec{l}$ chính là đạo hàm riêng theo biến x của hàm f:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$$

Vậy đạo hàm riêng theo biến x chính là đạo hàm theo hướng của trục Ox. Tương tự, $\frac{\partial f}{\partial y}$ và $\frac{\partial f}{\partial z}$ tương ứng là các đạo hàm của hàm f theo hướng của trục Oy và Oz. Định lý sau đây về mối liên hệ giữa đạo hàm theo hướng và đạo hàm riêng:

Định lý 1: Nếu hàm $f(x,y,z)$ khả vi tại điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ thì tại M_0 có đạo hàm theo mọi hướng $\vec{l}$ và ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\cos\gamma$$

Trong đó $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là cosin chỉ phương của $\vec{l}$.

Cho $f\left(x,y,z\right)$ là hàm số có các đạo hàm riêng tại điểm $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$. Gọi Gradient của f tại M_0 là véctơ:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(M_0\right),\frac{\partial f}{\partial y}\left(M_0\right),\frac{\partial f}{\partial z}\left(M_0\right)\right)$$

Và được ký hiệu là $\overrightarrow{grad}f\left(M_0\right)$.

Định lý 2: Nếu hàm $f\left(x,y,z\right)$ khả vi tại điểm $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ thì tại M_0 ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\left(M_0\right)=\overrightarrow{grad}f.\vec{l}$$

Chú ý. $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\left(M_0\right)$ thể hiện tốc độ biến thiên của hàm số f tại M_0 theo hướng $\vec{l}$. Từ công thức $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\left(M_0\right)=\overrightarrow{grad}f.\vec{l}=\left|\overrightarrow{grad}f\right|\left|\vec{l}\right|.\cos\left(\overrightarrow{grad}f,\vec{l}\right)$ ta có $\left|\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\left(M_0\right)\right|$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\left|\overrightarrow{grad}f\right|\left|\vec{l}\right|$ nếu $\vec{l}$ có cùng phương với $\overrightarrow{grad}f$, cụ thể:

+ Theo hướng $\vec{l}$, hàm số f tăng nhanh nhất tại M_0 nếu $\vec{l}$ có cùng phương, cùng hướng với $\overrightarrow{grad}f$.

+ Theo hướng $\vec{l}$, hàm số f giảm nhanh nhất tại M_0 nếu $\vec{l}$ có cùng phương, ngược hướng với $\overrightarrow{grad}f$.

Ví dụ. Cho hàm số $f\left(x,y\right)=2x^2+xy-y^3$ và $\vec{l}=\left(1,2\right)$. Tìm đạo hàm của f theo hướng $\vec{l}$ tại điểm $P_0\left(-2,3\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{l_1}{\left\|l\right\|}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{l_2}{\left\|l\right\|}=\frac{\left(4x+y\right)}{\sqrt{5}}+\frac{2\left(x-3y^2\right)}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\left(P_0\right)=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(5,58\right)=\left(-\frac{5}{\sqrt{5}},-\frac{58}{\sqrt{5}}\right)$$

ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN TOÀN PHẦN CẤP CAO

Cho hàm hai biến số $z = f(x, y)$. Các đạo hàm riêng f'_x, f'_y là các đạo hàm riêng cấp một. Các đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp một, nếu tồn tại, được gọi là các đạo hàm riêng cấp hai. Có bốn đạo hàm riêng cấp hai được ký hiệu như sau:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y);\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y);\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)$$

Đạo hàm riêng cấp ba được xác định tương tự bằng cách lấy đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp hai:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)=f'''_{xxx};\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)=f'''_{xyx};\ldots$$

Tương tự, ta có thể tiến hành lấy đạo hàm riêng cấp cao hơn nữa. Chú ý rằng không phải ta luôn có $f''_{xy} = f''_{\mathrm{yx}}$. Điều kiện để hai đạo hàm riêng này bằng nhau được chỉ ra bởi định lý sau:

Định lý Schwarz/Clairaut. Nếu trong cận U nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$, hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng $f''_{xy}, f''_{\mathrm{yx}}$ và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại M_0 thì $f''_{xy} = f''_{\mathrm{yx}}$ tại M_0.

Xét hàm số $z = f(x, y)$. Vi phân toàn phần của nó $dz = f'_x dx + f'_y dy$, nếu tồn tại, là một hàm số đối với hai biến x, y. Vi phân toàn phần của dz, nếu tồn tại, được gọi là vi phân toàn phần cấp hai của z được biểu diễn bởi:

$$d^2z = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$$

Chú ý: $dx^2 = (dx)^2, dy^2 = (dy)^2$.

Ví dụ. Cho $f(x, y) = x^2e^{2y} + \cos x \sin y$. Tính các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{2y} - \sin x \sin y; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2e^{2y} + \cos x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{2y} - \cos x \sin y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x^2e^{2y} - \cos x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xe^{2y} - \cos y \sin x; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xe^{2y} - \cos y \sin x$$

ĐẠO HÀM CỦA HÀM ẨN

Phương trình $F(x,y)=0$ trong đó $F: U \to R$ là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên tập mở $U \in R^2$ và $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Khi đó phương trình $F(x,y)=0$ xác định một hàm số ẩn $y=y(x)$ trong một lân cận nào đó của điểm x_0 và có đạo hàm:

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

Tương tự, cho phương trình $F(x,y,z)=0$ trong đó $F: U \to R$ là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên tập mở $U \in R^3$ và $F'_y(x_0, y_{0,} z_0) \neq 0$. Khi đó phương trình $F(x,y,z)=0$ xác định một hàm số ẩn $z=z(x,y)$ trong một lân cận nào đó của điểm (x_0, y_0) và có đạo hàm:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}; z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Ví dụ. Tìm đạo hàm z'_x của hàm ẩn $x^3y - y^3x = a^4$

Xét hàm ẩn $F(x,y) = x^3y - y^3x - a^4$ có:

$$F(x,y) = x^3y - y^3x - a^4$$

$$F'_x = 3x^2y - y^3; F'_y = x^3 - 3y^2x \Rightarrow y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{3x^2y - y^3}{x^3 - 3y^2x}$$

Ví dụ. Tìm đạo hàm z'_x, z'_y của hàm ẩn $x + y + z = e^z$

Xét hàm số $F(x,y,z) = x + y + z - e^z$

$$F_x^{'} = 1; F_y^{'} = 1; F_z^{'} = 1 - e^z \Rightarrow z_x^{'} = \frac{-1}{1 - e^z}; z_y^{'} = \frac{-1}{1 - e^z}$$