

Đề thi kết thúc môn học, Đông 2019 (1)

Trần Thùy Dung

1.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 & | & 5 \\ 0 & -15 & 11 & 4 & | & 8 \\ 0 & 0 & 5m+6 & -5m-6 & | & -22 \end{bmatrix}$$

(a) Thay $m = 1$, ta có:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & -2 \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình có vô số nghiệm dạng

$$\begin{bmatrix} 3-t \\ -2+t \\ -2+t \\ t \end{bmatrix}$$

(b)

$$m = -\frac{6}{5}, \quad \text{hệ vô nghiệm.}$$

$$m \neq -\frac{6}{5}, \quad \text{hệ có vô số nghiệm.}$$

3.

(a) Ma trận chuẩn tắc của T là $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(b) Thực hiện các biến đổi sơ cấp trên A ta được

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Không gian hạch $\ker(T)$ là không gian nghiệm của A :

$$N(A). \text{ Cơ sở } \ker(T) \text{ là } \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) Không, vì $(0, -1, 1)$ không phải là tổ hợp tuyến tính của 2 cột đầu của A .

5.

(a) Đa thức đặc trưng của A là

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 3a & 0 \\ -1 & \lambda - 2a & 0 \\ -1 & 3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2a\lambda + 3a)$$

Phương trình luôn có nghiệm $\lambda_1 = 1$, do đó với mọi a ta luôn có $\lambda = 1$ là giá trị riêng của A .

(b) Thay $a = -1$, ta nhận được

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 & (\text{bội } 2) \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$$

• Với $\lambda_1 = 1$:

$$1I - A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Các vector riêng: $(3, 1, 0), (0, 0, 1)$

• Với $\lambda_2 = -3$:

$$-3I - A = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vector riêng: $(-1, 1, 1)$

2.

(a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1.2.3.4 = 24$$

(b) Vì $|A| \neq 0 \implies A$ khả nghịch.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 & 1 \\ -1/3 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

4.

$$d_{12}^2 = a^2 - 2a + 2$$

(a) $d_{23}^2 = 2a^2 + 2$

$$d_{31}^2 = a^2 + 2a + 1$$

$$d_{12} = d_{31} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$d_{12} = d_{23} \Leftrightarrow a^2 + 2a = 0$$

Suy ra, không có a thỏa mãn điều kiện.

(b)

$$\mathbf{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0)$$

$$\mathbf{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Ma trận P là

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$