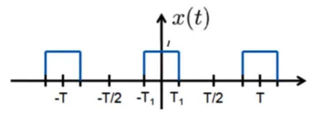
Thời gian liên tục	Thời gian rời rạc
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\omega_0 t}$	$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{jk\omega_0 n}$
$X(k) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$	$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\omega_0 n}$

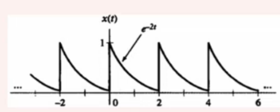
0.0.1



- $x(t)$ tuần hoàn với chu kỳ T $\Rightarrow$ Tần số cơ bản: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
- Công thức tính hệ số Fourier:
- $X(k) = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$

0.0.2

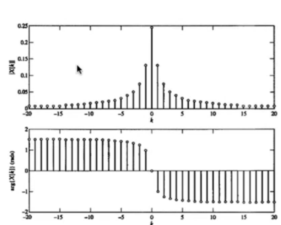
Xác định các hệ số khai triển chuỗi Fourier và vẽ phổ của tín hiệu sau



a+bj => liên hợp phức a-bj
(a+bj)(a-bj) =a^2 +b^2

- $x(t)$ tuần hoàn với chu kỳ T=2
  $\Rightarrow$ Tần số cơ bản: $\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$
- $X(k) = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-2t}e^{-jk\pi t}dt$
- $X(k) = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-t(2+jk\pi)}dt = \frac{-1}{2(2+jk\pi)}(e^{-2(2+jk\pi)} - 1)$

- $X(k) = \frac{1-e^{-4}}{2(2+jk\pi)}$ là số phức $\Rightarrow$ Muốn vẽ phổ biên độ, pha cần xác định phần thực phần ảo của X(k)
- $Re(X(k)) = \frac{1-e^{-4}}{4+k\pi^2}$
- $Im(X(k)) = \frac{k\pi(e^{-4}-1)}{8+2k\pi^2}$
- $\Rightarrow$ |X(k)|, $\Phi(X(k))$ theo Re(X(k)), Im(X(k))



0.0.3

Xác định các hệ số khai triển chuỗi Fourier và vẽ phổ của tín hiệu sau $x(t) = 1 + \frac{1}{2}cos(2\pi t) + sin(3\pi t)$

- x(t) có sẵn dạng tổng của các tín hiệu sin và cos
- Thay vì dùng công thức tích phân, ta dùng trực tiếp công thức khai triển Fourier và công thức Euler
- x(t) tuần hoàn chu kỳ T=2; $\omega_0 = \pi$

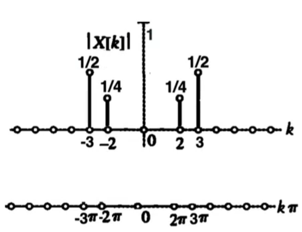
- $x(t) = 1 + \frac{1}{2}cos(2\pi t) + sin(3\pi t)$
- $x(t) = e^{j0t} + \frac{1}{4}e^{j2\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2j}e^{j3\pi t} - \frac{1}{2j}e^{-j3\pi t}$ (Euler)
- Fourier: $x(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\omega_0 t}$
- hay $x(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\pi t}$
- Đồng nhất hệ số ta có: $X(k) = \begin{cases} 1, \text{k=0} \\ \frac{1}{4}, k = \pm 2 \\ \frac{1}{2j}, \text{k=3} \\ \frac{-1}{2j}, \text{k=-3} \\ 0, k \text{ còn lại} \end{cases}$

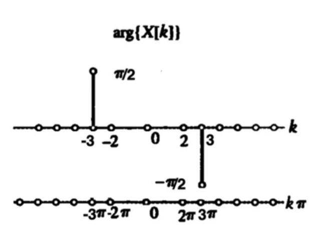
$\Rightarrow$ Muốn vẽ phổ biên độ, pha cần xác định phần thực phần ảo

Viết lại X(k): $X(k) = \begin{cases} 1, \text{k=0} \\ \frac{1}{4} + 0.j, k = \pm 2 \\ 0 + \frac{-j}{2}, \text{k=3} \\ 0 + \frac{j}{2}, \text{k=-3} \\ 0, k \text{ còn lại} \end{cases}$

$Re(X(k)) = \begin{cases} 1, \text{k=0} \\ \frac{1}{4}, k = \pm 2 \\ 0, k = \pm 3 \\ 0, k \text{ còn lại} \end{cases}$ $\quad Im(X(k)) = \begin{cases} 0, k = 0 \\ 0, k = \pm 2 \\ \frac{-1}{2}, k = 3 \\ \frac{1}{2}, k = -3 \\ 0, k \text{ còn lại} \end{cases}$

$|X(k)| = \begin{cases} 1, \text{k=0} \\ \frac{1}{4}, k = \pm 2 \\ \frac{1}{2}, k = \pm 3 \\ 0, k \text{ còn lại} \end{cases}$ $\quad \Phi(X(k)) = \begin{cases} artan(0) = 0, k = 0, \pm 2 \\ artan(-\infty) = \frac{-\pi}{2}, k = 3 \\ artan(\infty) = \frac{\pi}{2}, k = -3 \\ 0, \text{k còn lại} \end{cases}$



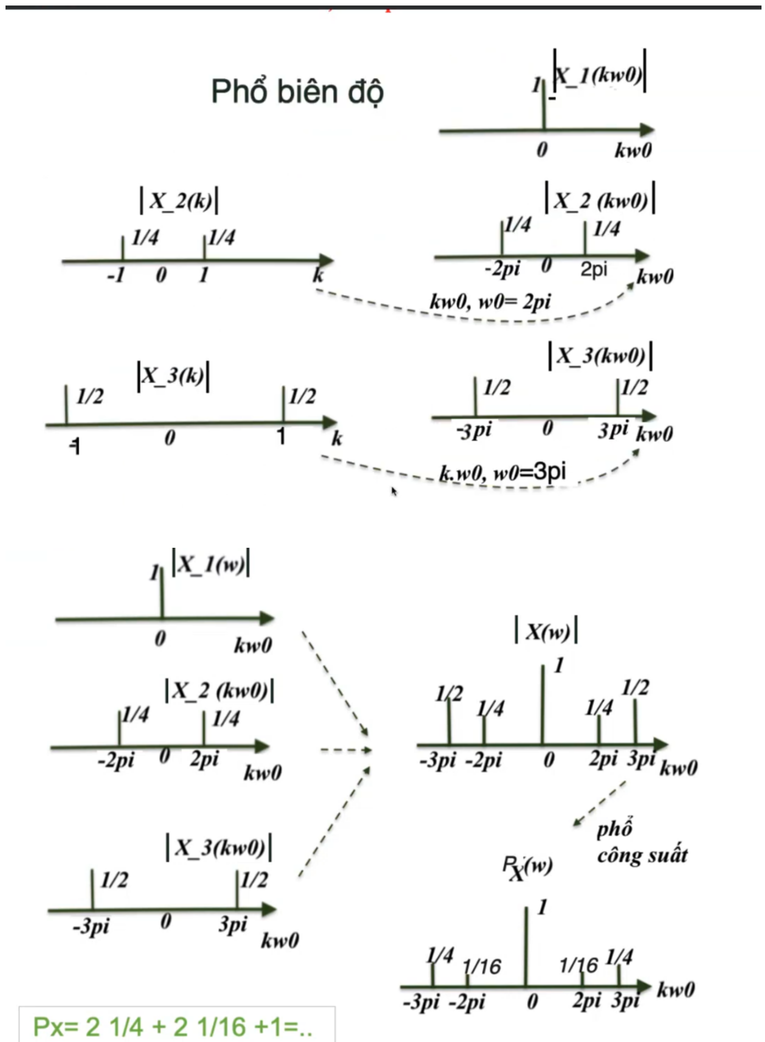


0.0.4

Với tín hiệu:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}cos(2\pi t) + sin(3\pi t)$$

Ta có thể tách thành 3 tín hiệu thành phần: $x1(t) = 1$
$x2(t) = \frac{1}{2}cos(2\pi t)$
$x3(t) = sin(3\pi t)$
Sử dụng khai triển Fourier và công thức Euler (phương pháp đồng nhất hệ số), ta có phổ biên độ của các tín hiệu trên lần lượt là:

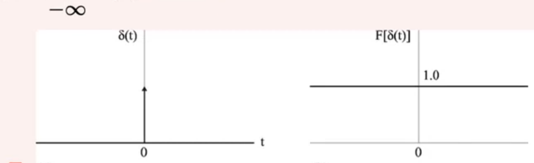


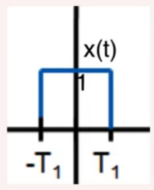
0.0.5

Example 1

Xác định biểu diễn tần số và vẽ phổ biên độ và phổ pha của tín hiệu $x(t) = \delta(t)$:

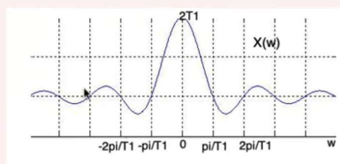
- $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$
- $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = 1$



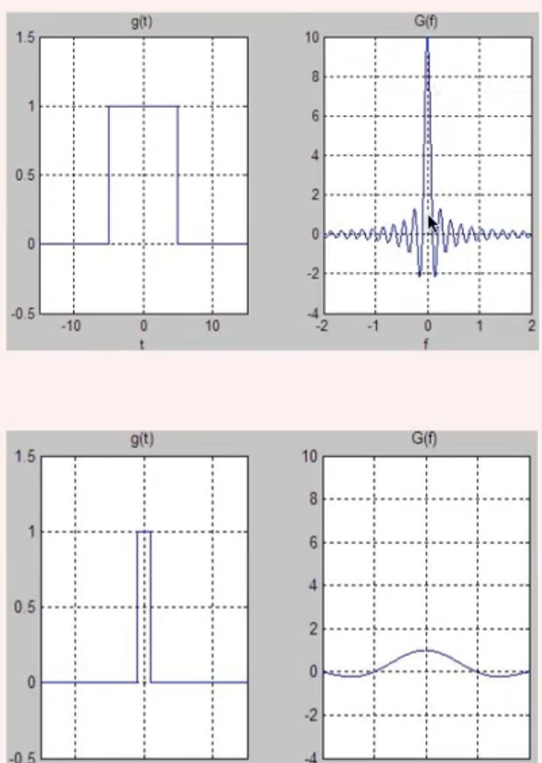


- $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$
- $X(\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} 1e^{-j\omega t}dt = \frac{-1}{j\omega}e^{-j\omega t}|_{-T_1}^{T_1} = \frac{e^{j\omega T_1} - e^{-j\omega T_1}}{j\omega}$

Example 2

- $X(\omega)$ là số thực $\Rightarrow$ phổ pha bằng 0
- $X(\omega) = \frac{2sin(\omega T_1)}{\omega} = 2T_1 sinc(\omega T_1) \Rightarrow$ Phổ biên độ có dạng xung sinc
- 

Scale.



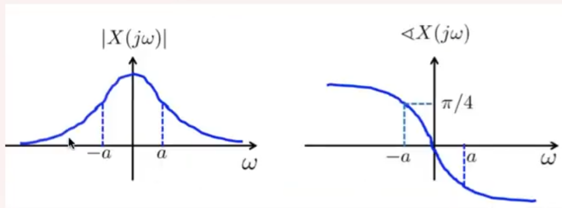
0.0.6

Example 3

Xác định biểu diễn tần số và vẽ phổ biên độ và phổ pha của tín hiệu $x(t) = e^{-at}.u(t)$, a>0

- Tín hiệu $x(t)$ không tuần hoàn
- Năng lượng $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{0}^{+\infty} (e^{-at})^2 dt = \frac{-1}{2a}e^{-2at}|_0^{+\infty} = \frac{1}{2a} < \infty \Rightarrow$ x(t) có biểu diễn tần số:
- $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}.u(t)e^{-j\omega t}dt$

- $X(\omega)$ là số phức:
- $X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega} = \frac{a-j\omega}{a^2+\omega^2}$
- Biên độ $|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2)}}$; Pha $\phi(X(\omega)) = arctan(\frac{-\omega}{a})$
-



Example 4

Xác định biểu diễn tần số và vẽ phổ biên độ và phổ pha của tín hiệu $x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$,

- Tín hiệu $x(n)$ không tuần hoàn
- Năng lượng hữu hạn
  do$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{2})^{2n} = \frac{1-1/2^{\infty}}{1-1/2} = 2$
- x(n) có biểu diễn tần số: $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-jn\omega} =$
  $\sum_{n=0}^{+\infty}(1/2)^n e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{2}e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1-(\frac{1}{2}e^{-j\omega})}$
- $X(\omega) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}cos(\omega)+j\frac{1}{2}sin(\omega)}$

0.1 Năng lượng

-
$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$
-
$$E_x = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Examples

Determine Fourier transform of :

- $x(t) = te^{-at}u(t)$
- $x(n) = (n+1)(1/2)^n u(n)$
- $x(t) = e^{-2t}u(t-3)$
- $x(t) = cos(\pi t/3) + sin(\pi t/2)$