1. $\int_C xy\,ds$, $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ trong góc phần tư thứ nhất.

Đặt $x=2\cos t$, $y=3\sin t$, $t:0\to\dfrac{\pi}{2}$. Tích phân được tính

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t.3\sin t\,\sqrt{4\sin t^2+3\cos t^2}t\,dt$$

2. $\int_C xy\,dt$, $C: x=y^2$ từ $A(0,0)\ \to\ B(4,2)$.

$I=\int_0^2 y^2.y\sqrt{(2y)^2+1}dy=\int_0^2 y^2.y\sqrt{4y^2+1}\,dy$

Đặt $\sqrt{4y^2+1}=t \implies t^2=4y^2+1 \implies 2t\,dt=8y\,dy \implies y\,dy=\dfrac{t\,dt}{4}$

$$I=\int_1^{\sqrt{17}}\frac{t^2-1}{4}.t\,\frac{t\,dt}{4}=\frac{1}{16}\int_1^{\sqrt{17}}(t^4-t^2)\,dt=\frac{1}{16}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{17}}$$

3. Tính khối lượng đường cong:

$$x=\cos t,\ y=\sqrt{2}\sin t,\ \frac{2\pi}{3}\le t\le\frac{5\pi}{6}$$

Biết mật dộ khối lượng $\rho(x,y)=|xy|$

$$\begin{aligned}
m&=\int_C\rho(x,y)\,ds=\sqrt{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}}|\sin t\cos t|\sqrt{1+\cos t^2}\,dt\\
&=-\sqrt{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}}\sqrt{1+\cos t^2}`\,dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\cos t^2}\,d(1+\cos t^2)\\
&=\frac{\sqrt{2}}{3}.\frac{7\sqrt{7}-5\sqrt{5}}{8}
\end{aligned}$$

Note. Đạo hàm của $\sqrt{1+\cos t^2}$ là $2\sin t\cos t$.

Diễn giải rất quan trọng, có thể từ dòng 2 điểm vẫn có nhưng không cao.

4. Tính khối lượng đường đinh ốc

$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t,\ 0\le t\le 2\pi$$

Mật độ khối lượng $\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

$$m=\int_C\rho(x,y,z)\,ds=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+t^2}\,dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[t\sqrt{1+t^2}+\ln(a)\right]$$

5. Tính $\int_C\left(x^2+y^2\right)\,ds,\ C: x^2+y^2=2x,\ (x\ge 1)$.

Đặt phương tình tham số của đường $\begin{cases}x=1+\cos t\\ y=\sin t\end{cases},\ -\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2}.$

$$ds=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t)^2)}\,dt=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\,dt=dt$$

$$\begin{aligned}
I&=\int_{t_1}^{t_2}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left((1+\cos t^2)+(\sin t)^2\right)\,dt\\
&-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2+2\cos t)\,dt=(2t+2\sin t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\pi+4
\end{aligned}$$

6. $\int_C y^2\,ds$, C là đường tròn: $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases},\ 0\le t\le 2\pi,\ a>0.$

$x'(t) = a(1-\cos t),\ y'(t)a\sin t \to \sqrt{((x'(t))^2 + (y(t))^2} = 2a\sin\dfrac{t}{2}.$

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{AB} f(x,y)\,ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2.2a\sin\frac{t}{2}\,dt = \frac{256a^3}{15}
\end{aligned}
$$

7. $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds, C$ là đường tròn có phương trình $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ b = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$, $0 <= t \leq 2\pi, a > 0.$

$x'(t) = at\cos t, y'(t) = at\sin t \to \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2} = at$

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{AB} f(x,y)\,ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\Big[(\cos t + t\sin t)^2 + (\sin t - t\cos t^2)\Big]}at\,dt = \frac{a^2}{3}\left(\sqrt{(1+4\pi)^2}-1\right)
\end{aligned}
$$

8. Tính tích phân đường $I = \int_L \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right)$, trong đó L là đường Astroid có phương trình:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (a > 0)$$

Khi x, y đổi dấu, biểu thức không thay đổi.

$I = 4\int_{L_1}()$ (do tính chất đối xứng) Tham số hóa đường cong:

$$x = a\cos t^2,\ y = a\sin t^2$$

$$
\begin{aligned}
I &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\frac{4}{3}}(\cos t^4 + \sin t^4)4a\sin t\cos t\,dt \\
&= 12a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t^5\sin t + \sin t^5\cos t)\,dt = 12a^{\frac{7}{3}}\left(-\frac{1}{6}\cos t^6 + \frac{1}{6}\sin t^6\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4a^{\frac{7}{3}}
\end{aligned}
$$

Note.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(3a\sin t\cos t^2) + (3a\sin t^2\cos t)^2} &= 3a\sqrt{\sin t^2\cos t^4 + \sin t^4\cos t^2} \\
&= 3a\sin t\cos t\sqrt{\cos t^2 + \sin t^2} = 3a\sin t\cos t
\end{aligned}
$$

Lại có $\int \cos t^5\sin t\,dt = \int \cos t^5\,d(\cos t),\ \int \sin t^5\cos t\,dt = \int \sin t^5\,d(\sin t)$

9. $I = \int_L xyz\,ds,\ L$ là đừng xoắn có phương trình $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 3t),\ t \in [0, 4\pi]$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{4\pi} 3t\cos t\sin t\sqrt{\sin t^2 + \cos t^2 + 9}\,dt = \frac{3\sqrt{10}}{2}\int_0^{4\pi} t\sin(2t)\,dt \\
&= \frac{3\sqrt{10}}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 2t - \frac{t}{2}\cos(2t)\right]_0^{4\pi} = -3\sqrt{10}\pi
\end{aligned}
$$

10. $I = \int_L x^2\,ds,\ L$ là giao điểm của các mặt $x^2+y^2+z^2 = a^2,\ (a > 0),\ \ x+y+z = 0.$

L là một đường tròn lớn của mặt cầu, có chu vi 2π, không thay đổi khi hoán vị các trục x, y, z. Do đó

$$\int_L x^2\,ds = \int_L y^2\,ds = \int_L z^2\,ds = \frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)\,ds$$

Lại có $x^2+y^2+z^2 = a$ nên

$$\int_{x^2} ds = \frac{a^2}{3}\int_L ds = \frac{a^2}{3}.2\pi a = \frac{2\pi a^3}{3}$$