ĐỀ TÀI: VAI TRÒ CỦA MÁY TÍNH TRONG CHỨNG MINH ĐỊNH LÝ 4 MÀU

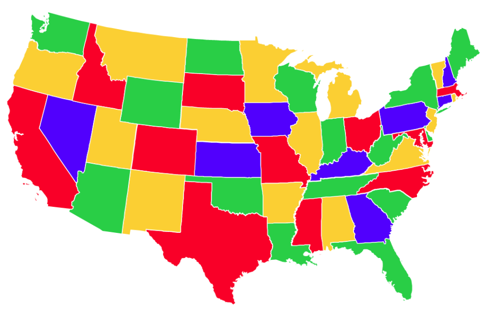
Trần Thùy Dung

1 Tổng quan

Một trong những bài toán khá thú vị với các nhà toán học - Định Lý Bốn Màu, có thể được phát biểu như sau.

Chiến lược : Định Lý Bốn Màu

Đối với bất kỳ mặt phẳng nào được chia thành các vùng phân biệt, chỉ cần dùng **tối đa bốn màu** để phân biệt các vùng lân cận với nhau. 2 vùng được coi là lân cận khi chúng có chung nhau 1 đoạn **đường biên** (không tính trường hợp chung nhau 1 điểm).



Bỏ qua cách định lý này xuất hiện, hay những câu chuyện lịch sử bên lề, từ giờ hãy tập trung vào duy chỉ chủ đề chính của chúng ta - vai trò của máy tính trong việc chứng minh Định Lý Bốn Màu.

Phân rã (Discharging)

Trước khi đi vào vấn đề cốt lõi, chúng ta hãy cùng đi tìm hiểu về một phương pháp chủ chốt quyết định lời giải bài toán 4 màu - phương pháp "*phân rã*" (phân phối phân lượng).

Phân rã là một phương pháp đếm, cũng như một kỹ thuật chứng minh trong bài toán tô màu đồ thị như sau:

- Gán cho mỗi vật (có thể là đỉnh, cạnh, miền của đồ thị) một *"phân lượng"* (charge) sao cho **tổng của các phân lượng là âm** (hoặc dương), có thể là một giá trị cụ thể.
- Phân phối lại các phân lượng dựa trên 1 tập các quy luật phân rã sao cho tổng các phân lượng không thay đổi.
- Dẫn tới được 1 **mâu thuẫn** nếu tổng các phân lượng mới (sau khi phân phối lại) không âm (hoặc không dương), suy ra được tính chất đã giả sử.

Đây là phương pháp chủ chốt cho lời giải câu đố Định Lý Bốn Màu, với số quy luật phân rã tương đối dài. Thậm chí đến chứng minh gần nhất vẫn trên 50 quy luật, chứng minh để có được sự mâu thuẫn thực sự cần đến hơn 50 trang.

Áp dụng cho Giả Thuyết Bốn Màu

- Mối liên hệ giữa số đỉnh n, số miền f, và số cạnh e của một đồ thị phẳng (gồm các đa giác) được thể hiện bởi *công thức Euler*

$$n + f - e = 2$$

Công thức Euler chính là nền tảng cho việc gán phân lượng. Chẳng hạn phân tượng có thể được khởi tạo thông thường như sau:

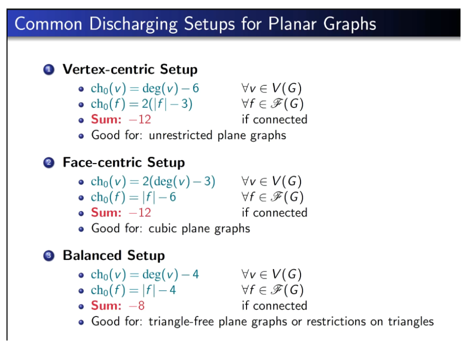
Phân lượng ban đầu:

- $\texttt{ch}_0(v) = \texttt{deg}(v) - 6 \qquad \forall v \in V$
- $\texttt{ch}_0(f) = 2(|f| - 3) \qquad \forall f \in F$

Tổng của tất cả các phân lượng sẽ là một con số đẹp:

$$\begin{aligned}
&\text{Total sum of charges: } \textstyle\sum_{v\in V(G)} \mathrm{ch}_0(v) + \sum_{f\in\mathscr{F}(G)} \mathrm{ch}_0(f) \\
&= \sum_{v\in V(G)} (\deg(v) - 6) + \sum_{f\in\mathscr{F}(G)} 2(|f| - 3) \\
&= \sum_{v\in V(G)} \deg(v) - 6|V(G)| + 2\sum_{f\in\mathscr{F}(G)} |f| - 6|\mathscr{F}(G)| \\
&= 2|E(G)| - 6|V(G)| + 2(2|E(G)|) - 6|\mathscr{F}(G)| && \text{by handshaking} \\
&= 6(|E(G)| - |V(G)| - |\mathscr{F}(G)|) \\
&= -6(1 + |\mathscr{C}(G)|) && \text{by Euler's formula} \\
&= -12 && \text{if connected}
\end{aligned}$$

Tổng này là hằng số, và là số -12 luôn luôn. Đây cũng là cách khởi tạo hoàn hảo cho các đồ thị phẳng. Trên thực tế, có những cách khởi tạo khác và dành cho các loại đồ thị khác (chẳng hạn như đồ thị phẳng lập phương, đồ thị phẳng không có hình tam giác...), nhưng đó không phải là phần chúng ta cần nhắm tới.



2 Cội rễ của đáp án là một lời giải sai

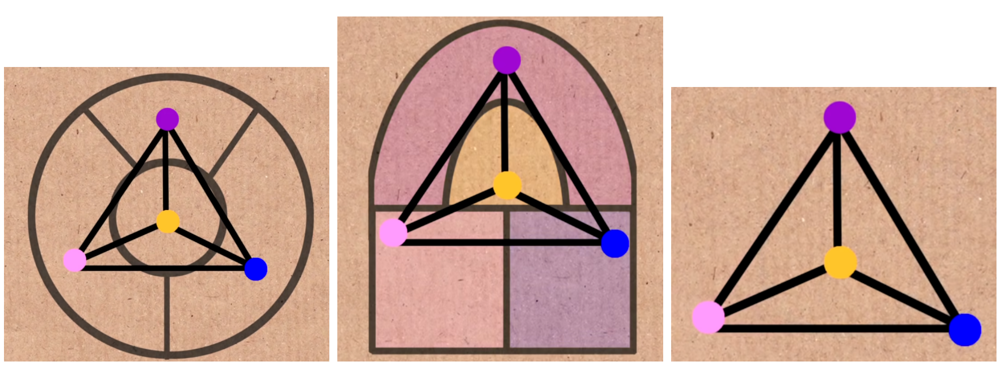
Để chứng minh giả thuyết "Mọi bản đồ chỉ cần dùng tối đa bốn màu để tô", hoặc chúng ta phải chứng minh rằng mọi đồ thị có thể được tô bằng 4 màu hoặc ít hơn - hoặc tìm ra được một phản mẫu (tức tìm ra một đồ thị thật phức tạp, thật lạ đến mức bắt buộc phải dùng 5 màu mới có thể tô). Đó là khi cuộc hành trình bắt đầu.

2.1 Khái quát vấn đề

Tạm thời, chúng ta hãy có một *"cái nhìn khác"* về mặt phẳng và các miền trên mặt phẳng.

Trước tiên, một mặt phẳng có thể được "biến hóa" thành một mạng lưới đồ thị nếu ta coi mỗi miền là một đỉnh, và giữa 2 miền lân cận nhau có cạnh nối. Nói cách khác, đồ thị chúng ta nhận được là *đồ thị đối ngẫu*. Khi đó, bài toán trở thành tô màu đồ thị sao cho 2 đỉnh kề nhau không cùng màu - một bài toán thậm chí còn trừu tượng hơn, nhưng lại có thể được giải dễ dàng hơn bằng hệ thống mạng lưới đỉnh.

Điều này khiến cho một số mặt phẳng dù nhìn khác nhau lại trở nên giống nhau về bản chất. Chẳng hạn như dưới đây là 3 mặt phẳng có bản chất giống hệt nhau, có chung đồ thị đối ngẫu:



Tất cả các đồ thị phẳng đều có thể trở thành một mạng lưới, nhưng không phải mọi mạng lưới đều hợp lệ và có thể biến đổi thành một đồ thị phẳng được. Vậy câu hỏi đặt ra là, mạng lưới như thế nào mới là hợp lệ? Đó là khi đồ thị có thể được vẽ sao cho không có hai cạnh nào cắt nhau.

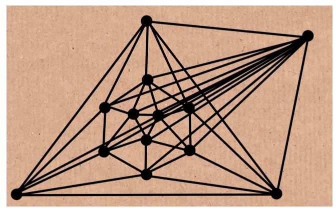
2.2 Đặc trưng của đồ thị phẳng

Trong bất kỳ đồ thị phẳng nào cũng sẽ có những đặc trưng cơ bản.

Để ví dụ, đầu tiên, xét một miền A bất kỳ của đồ thị (đỉnh A trong mạng lưới). Các vùng lân cận A có thể thuộc một trong các trường hợp sau:

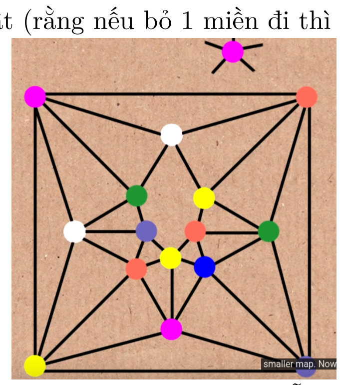
Them hinh vao ey yo

Tuy nhiên, chúng ta không thể có một đồ thị mà mọi đỉnh đều liền kề với 6 đỉnh khác. Đạt đến con số 5 đã là cực đại, khi có thêm 1 đỉnh nữa, việc gỡ rối là bất khả thi.



Như vậy, mọi đồ thị đều có đặc trưng này: 1 đỉnh trong đồ thị sẽ thuộc 1 trường hợp trong danh sách trên.

Chứng minh Định Lý Bốn Màu thực sự khó. Ban đầu, người ta chỉ nhắm đến những bài toán đơn giản hơn, chẳng hạn như mọi đồ thị có thể tô được bằng 7, hay 6 hay 5 màu. Từ đặc trưng phía trên, chúng ta hoàn toàn có thể chứng minh rằng một mặt phẳng không cần đến 7 màu để tô. Giả sử, thật sự tồn tại các mặt phẳng cần 7 màu mới tô được. Trong những mặt phẳng như vậy, chúng ta sẽ chọn mặt phẳng tối giản nhất (rằng nếu bỏ 1 miền đi thì ngay lập tức có thể tô được bằng 6 màu).



Như đặc trưng chúng ta vừa nói đến ở phía trên, thì phải tồn tại 1 đỉnh A thuộc danh sách đã được liệt kê. Tại đây, khi bỏ đỉnh A ở giữa đi, đồ thị ngay lập tức có thể tô được bằng 6 màu. Tô lại đồ thị mới, và khi bỏ đỉnh A trở lại đồ thị, do bậc của A cao nhất chỉ là 5, nên vẫn còn 1 màu nữa gán cho A được - đồng nghĩa với việc chúng ta nhiều nhất chỉ sử dụng 6 màu.

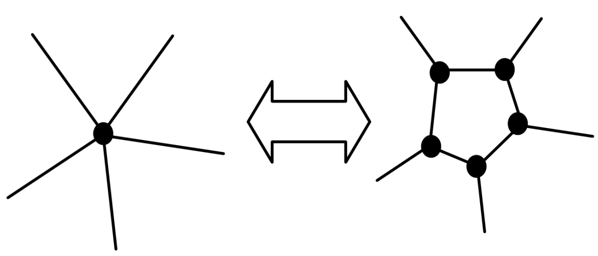
Tại đây, chúng ta đang diễn tả đại khái bằng lời để dễ hình dung. Trên thực tế, các đặc trưng có dạng như vậy sẽ được tổng hợp bằng phương pháp **phân rã** đã được đề cập ở trên để có thể cho ra những kết luận cuối cùng về đồ thị phẳng.

2.3 Cụ thể hơn

Chứng minh cơ bản của **Định lý bốn màu** thật kỳ lạ là đã không hề thay đổi từ khởi nguyên của nó - một chứng minh sai của Kempe năm 1879. Chứng minh đó là như sau:

(a) Chỉ cần xem xét các đồ thị *lập phương* (chính xác 3 cạnh giao nhau ở mỗi đỉnh) là đủ.

Thay mỗi đỉnh thành 1 miền đa giác. Nếu đồ thị *lập phương* mới có thể tô màu được, thì chỉ cần xóa những miền đã thêm vào sẽ dẫn đến 1 cách tô màu cho đồ thị ban đầu.

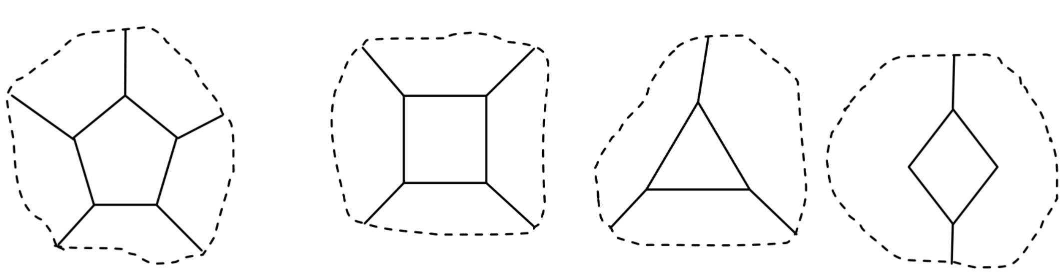


(b) Trong một đồ thị *lập phương*, dễ thấy $3n = 2e$, do đó *công thức Euler* có thể viết lại thành $2e = 6f - 12$.

Mà $2e$ cũng chính là tổng số cạnh bên của tất cả các miền, điều này có nghĩa là: mọi miền có trung bình **gần như** 6 cạnh bên, nhưng tổng thể thì có 12 cạnh bị mất (đây cũng là lý do nó cần 12 hình ngũ giác bên cạnh các lục giác để khâu 1 quả bóng đá).

(c) Xét 1 phản mẫu lập phương tối giản nhất của Định Lý Bốn Màu: Giả sử có những đồ thị đa diện mà cần ít nhất 5 màu để tô, chọn đồ thị có ít miền nhất.

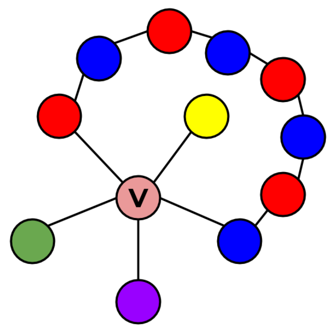
(d) Theo (b), đồ thị phản mẫu tối giản này nhất định phải có 1 miền với 5 cạnh bên hoặc ít hơn, nên số miền lân cận xung quanh miền đó phải thuộc một trong các trường hợp sau



Nếu xóa một hoặc 2 cạnh bên của miền trung tâm, chúng ta có được 1 đồ thị đa diện lập phương nhỏ hơn mà chắc chắn theo đó thì tô được bằng bốn màu. (Đối với hình vuông hoặc ngũ giác, xóa 2 cạnh bên x và y không kề nhau và khác nhau).

(e) Nếu miền trung tâm không phải ngũ giác, chúng ta ngay lập tức tìm được 1 màu cho nó. (Nhắc lại rằng với 1 hình vuông, chúng ta xóa 2 cạnh đối).

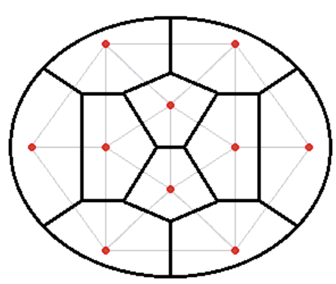
(f) Nếu miền trung tâm là 1 ngũ giác, có lẽ chúng ta cần phải thay đổi cách tô màu sao cho có 1 màu dư ra cho hình ngũ giác ấy. Khá là khó khăn, việc này được thực hiện bằng cách đổi 2 màu trong bất kỳ nhóm miền nào mà được bao quanh bởi 2 màu khác. Những nhóm *2 tông màu* như vậy (hay còn gọi là "**chuỗi Kempe**") không thể giao nhau, vì đồ thị là phẳng.



Kempe liệt kê toàn bộ các khả năng mà các chuỗi có thể liên kết các miền trong chiếc vòng bao xung quanh hình ngũ giác trung tâm để khẳng định rằng *tái tô màu* là khả thi.

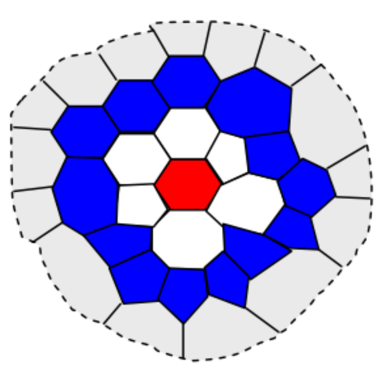
Phải tận 10 năm sau, lỗi sai của ông mới được chỉ ra và gần như 1 thế kỷ để sửa những gì đã xảy ra ở bước cuối cùng - một số trường hợp đã bị thiếu khi liệt kê (Kempe đã quên rằng việc đổi các màu trong 1 chuỗi sẽ làm phá hủy các chuỗi khác). Lời giải đúng của bài vẫn đi theo nguyên tắc ban đầu, nhưng xét các phần đồ thị lớn hơn - gọi là **cấu hình**. Một cấu hình bao gồm 1 nhóm các miền liên kết nhau - còn được gọi là **hạt nhân**, được bao quanh bởi 1 *vòng* các bán miền. Bước chân quan trọng đầu tiên đi đến một chứng minh đúng đã được thực hiện bởi Birkhoff năm 1913. Ông chỉ ra rằng

1. Với một vài cấu hình *khả quy* (rút gọn được), chẳng hạn như hình dưới đây có hạt nhân là một nhóm 4 ngũ giác (hay còn gọi là hình kim cương Birkhoff), luận điểm (f) của Kempe đã thất bại cho từng hình ngũ giác.

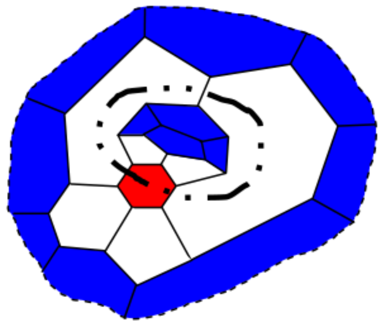


2. Luận điểm của Kempe hoạt động cho bất kỳ cấu hình nào được bao quanh bởi 1 vòng nhiều nhất 5 miền - *ngoại trừ* cấu hình chỉ có đúng 1 ngũ giác. Gọi một vòng là **tầm thường** khi phần bên trong nó hoặc là rỗng - hoặc là bao gồm một ngũ giác đơn lẻ. Theo đó, một phản mẫu tối giản có thể không chứa vòng không tầm thường có độ dài không quá 5.

3. Như một hệ quả, trong một phản mẫu tối giản, tất cả các miền được bao quanh bởi 2 vòng đồng tâm, chẳng hạn như *miền lân cận thứ hai* phải có hình tương tự dưới đây.



Tuy nhiên trường hợp sau thì không tính, đồ thị mà 2 miền lân cận không liên tiếp nhau lại kề nhau như hình dưới - bởi những đồ thị như vậy có chứa một cấu hình với một vòng ba miền (chú thích bằng các đường nét đứt).



2.4 Các định nghĩa

- **Một cấu hình** trong đồ thị G có thể là bất cứ cấu trúc nào bên trong G (thường là một loại đồ thị con xác định).
- Một cấu hình là **khả quy** nếu nó không nằm bên trong một **phản mẫu** tối giản của giả định bốn màu. Nói cách khác, cấu hình này của G (G có tính chất Q nào đó) không nằm bên trong đồ thị nhỏ nhất mà không có tình chất Q.
- Một tập các cấu hình là **tất yếu** (không thể tránh khỏi) nếu mọi đồ thị tam giác phẳng chứa các phần tử trong tập đó.

Từ tất cả những khám phá ở trên, có thể rút ra 1 điều rằng: định lý bốn màu có thể được chứng minh nếu tìm được một tập các cấu hình khả quy. Để có thể đi đến câu trả lời, trước tiên, hãy cùng tìm hiểu về một phương pháp đóng vai trò vô cùng quan trọng trong việc chứng minh bài toán. Tất cả những điều này đã gợi nên một "chiến lược" trong việc chứng minh Định Lý Bốn Màu:

Chiến lược : Định lý bốn màu

Tìm một danh sách R gồm các cấu hình sao cho nó có thể thỏa mãn:

- **Tính khả quy.** Mọi cấu hình trong R có thể khả quy, sử dụng các biến thể của (1).
- **Tính tất yếu.** Mọi phản mẫu tối giản trong R phải chứa ít nhất 1 trong các cấu hình của R (theo (b), (e), (2), (3)).

Định Lý Bốn Màu rồi sẽ tuân theo sự mâu thuẫn, vì không có cấu hình nào khả quy xuất hiện trong 1 phản mẫu tối giản.

3 Những người đi trước

Phương pháp sử dụng trong (1), cùng với một chút khái quát cùng cải tiến, đã đem đến hiệu quả cho **tính rút gọn**. Tuy nhiên phải đến tận năm 1969, một phương pháp hệ thống cho **tính tất yếu** được công bố bởi Heinrich Heesch, một nhà toán học người Đức.

Định Lý Bốn Màu đã được chứng minh bằng phương pháp phân rã này như sau:

1. Tìm một công thức để tính bậc "trung bình" (số cạnh bên) của đa giác trong lớp lân cận thứ hai của một miền - sao cho tổng của tất cả các trung bình trên mọi miền bằng $2e$, tổng số cạnh của đồ thị. (*)
2. Chỉ ra rằng trong một phản mẫu tối giản, tất cả các lớp lân cận thứ hai mà có bậc trung bình, được tính sử dụng công thức (*) nhỏ hơn hẳn 6, và chứa một trong những cấu hình khả quy trong R.

Tính tất yếu suy ra từ (2), vì bất cứ đồ thị lập phương nào cũng phải chứa lớp lân cận thứ hai mà bậc tủng bình nhỏ hơn 6. Bước (2) cũng có thể thực hiện bởi việc liệt kê ra toàn bộ bậc có thể của các miền trong lớp lân cận thứ hai. Heesch cũng cho ra một phương pháp để cấu thành nên công thức trung bình.

Độ hiếm trung bình nhận được bởi "*discharging*" có thể không phụ thuộc vào độ hiếm của tất cả các miền lân cận, nên có thể việc liệt kê ra các bậc của *tất cả* các miền trong vùng lân cận với bậc nhỏ hơn 6.

Mặc dù Heesch đã vạch ra đường đi đúng đắn cho lời giải của Định Lý Bốn Màu, trên thực tế ông đã không thể thực hiện nó bởi một nhân tố chí mạng: **năng lục tính toán**. Các quy tắc "discharge" mà ông thử đã cho ông một tập R gồm những cầu hình với vòng có độ lớn là 18 - đã vượt qua tầm với của máy tính thời điểm đó. Tuy nhiên, hy vọng chưa dập tắt, vì cả tập các quy tắc "discharge" và tập R có thể thay đổi một cách trừu tượng, đi từng bước đến thành công.

K. Appel và W. Haken đã đi đến bước ngoặt vào năm 1976, tập trung hết công sức trong việc thay đổi các quy tắc discharge hơn là mở rộng R. Sau các lần thử và các tính toán lỗi, họ đã dừng chân tại tập R chỉ chứa những cấu hình mà vòng có độ lớn nhiều nhất là 14 - quá đủ tài nguyên để tính toán lúc bấy giờ.

4 Vai trò của máy tính trong việc chứng minh Định Lý Bốn Màu

Bỏ qua những thuật toán phức tạp dẫn đến bài toán cuối cùng, một bài toán đòi hỏi khả năng tính toán vượt qua tầm với của con người - thế nhưng lại hoàn toàn khả thi với máy tính, câu hỏi đặt ra là:

Sẽ như thế nào khi một bài toán được chứng minh bởi máy tính?

Dầu cho vào thời bấy giờ, cách chứng minh của Kenneth Appel và Wolfgang Haken đã đặt dấu mốc lớn cho bài toán không lời giải đối với các nhà toán học, khiến nó trở nên bài toán đầu tiên giải được với sự trợ giúp của máy tính, thế nhưng cũng chính vì lý do đó mà sự kiện này đã gây cực nhiều tranh cãi vào thời bấy giờ. Và các nhà toán học - cho dù có không hài lòng đến bao nhiêu chăng nữa - thì cũng vẫn không thể phủ nhận rằng họ đã thua, bởi chứng minh của máy tính là một chứng minh tuyệt đối chính xác. Con người chúng ta có những ưu điểm và cũng có những khuyết điểm, nhưng thậm chí có là đỉnh cao chăng nữa thì cũng chỉ là con người mà thôi, cũng có những giới hạn nhất định, ngay cả về "sự chính xác". Máy tính cũng vậy, nhưng có một điểm khác biệt là, nó tuyệt đối không bao giờ sai cho dù chỉ là 1 phép toán. Họa chăng nếu có, đó chỉ là do cách 1 chương trình vận hành đã sai mà thôi.

Đạt được kết quả là một chuyện, giải được bài toán là một chuyện khác. Bản chất của việc có đáp án với sự trợ giúp của máy tính không đồng nghĩa với việc bài toán đã được giải đứng theo góc nhìn của toán học. Tất nhiên có những bài toán với số trường hợp ít trong khả năng của con người, thì lại được coi là "giải được". Không có một tiêu chuẩn nào để phán xét, nhưng với các nhà toán học, đây đương nhiên không phải là một "lời giải hay". Chính bởi vì điểm chí mạng rằng nếu không có sự tham gia của máy tính, thì lời giải kia không đi đến kết quả, nên người ta thật sự cảnh giác với máy tính trong khi quan ngại rằng "*Liệu Toán học có còn giữ được bản chất thuần túy nữa hay không?*". Quả thật như vậy, đầu tiên, phương pháp mà Kenneth Appel và Wolfgang Haken dùng đã cần phải liệt kê rất nhiều trường hợp (gần 2000 - sau đó đã giảm còn 1500 nhưng vẫn là một con số lớn). Đó không phải là cách chứng minh tốt nhất, mặc dù có thể chấp nhận được. Vấn đề mấu chốt ở đây là, nó không khiến chúng ta có một sự am hiểu tường tận bản chất gốc rễ của định lý mà chỉ đơn giản cho chúng ta một câu trả lời mà thôi. "Toán học thuần túy" không thực sự như vậy.

5 Kết luận

Suy cho cùng, ứng dụng của máy tính vào thời đại ngày nay đã khác, ngay cả trong việc chứng minh toán học chứ không còn cứng nhắc như thế kỳ trước. Bên cạnh đó, không phải lúc nào việc am hiểu bản chất tường tận, ngọn nguồn của mọi vấn đề cũng cần thiết. Tuy nhiên có một điều sẽ chẳng bao giờ thay đổi, rằng một chứng minh dựa trên máy tính cho dù có như nào đi nữa thì cũng luôn luôn chính xác tuyệt đối, nên máy tính thật sự là một trợ lý đáng tin cậy trong bất cứ lĩnh vực nào không chỉ riêng toán học.

Tài liệu tham khảo