1 Cơ sở của phép đếm

Bài 42*. Tương tự bài 43.

Bài 43.** Gọi $F(n)$ là số xâu nhị phân **KHÔNG** có 3 bit 0 cạnh nhau và có độ dài n.

Xâu này có thể có 1 trong 3 dạng:

- `1...`
- `01...`
- `001...`

1 *Từ đó, $F(n)$ có thể được truy hồi như sau:*

$$\begin{cases} F(0) & = 1, F(1) = 2, F(2) = 4 \\ F(n) & = F(n-1) + F(n-2) + F(n-3) \\ & = F(n-1) * 2 - F(n-4) \text{ với } n \geq 3 \end{cases}$$

Như vậy, ta được $F(8) = 149$.

Tương tự, gọi $G(n)$ là số xâu nhị phân **KHÔNG** có 4 bit 1 cạnh nhau và có độ dài n.

Xâu này có thể có 1 trong 4 dạng:

- `0...`
- `10...`
- `110...`
- `1110...`

2 *$G(n)$ có thể được truy hồi như sau:*

$$\begin{cases} G(0) & = 1, G(1) = 2, G(2) = 4, G(3) = 8 \\ G(n) & = G(n-1) + G(n-2) + G(n-3) + G(n-4) \\ & = G(n-1) * 2 - G(n-5) \text{ với } n \geq 4 \end{cases}$$

Như vậy, ta được $G(8) = 208$.

Đồng thời, số xâu vừa có 3 bit 0 cạnh nhau vừa có 4 bit 1 cạnh nhau là 8. Đáp án của bài là

$$(2^8 - F(8)) + (2^8 - G(8)) - 8 = 147$$

Bài 54*.

Mỗi bảng giá trị chân lý của mệnh đề n biến sẽ có 2^n giá trị khác nhau của $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Với mỗi hàm $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, có thể có giá trị 0 hoặc 1. Do đó, số bảng giá trị chân lý khác nhau là $2.2 \dots 2 = 2^{2^n}$.

2 Nguyên lý Dirichlet

Bài 1. Có 5 ngày, 6 lớp nên theo nguyên lý Dirichlet DPCM.

Bài 3.

(a) Để chắc chắn rằng có ít nhất 2 chiếc cùng màu, phải lấy $2 + 1 = 3$ chiếc.

(b) Để chắc chắn rằng có ít nhất 2 chiếc tất màu đen, phải lấy $12 + 2 = 14$ chiếc.

Bài 4.

(a) Để chắc chắn có ít nhất 3 viên bi cùng màu, phải lấy $2.2 + 1 = 5$ viên bi.

(b) Để chắc chắn có ít nhất 3 viên bi màu xanh, phải lấy $10 + 3 = 13$ viên bi.

Bài 8. Gọi $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$.

Giả sử f là hàm đơn ánh, $f(s_1), f(s_2), \dots, f(s_n)$ phải đôi một khác nhau, hay $|T| \geq n$ (trái với đầu bài). Vậy nên, f không là hàm đơn ánh.

Bài 10-11*. Gọi $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = (x_1 \bmod 2, x_2 \bmod 2, \dots, x_n \bmod 2)$.

Số trường hợp khác nhau của $\langle \mathbf{x'} \rangle$ là 2^n. Theo nguyên lý Dirichlet, nếu có nhiều hơn 2^n điểm trong $\mathbb{R}^n$ thì điểm giữa của đường nối ít nhất 1 trong số các cặp điểm đã cho có tọa độ nguyên.

Bài 12. Gọi $(a', b') = (a \bmod 5, b \bmod 5)$.

Số trường hợp khác nhau của (a', b') là 5^2, nên để tồn tại 2 cặp có cùng (a', b') thì cần ít nhất $25 + 1 = 26$ cặp.

Bài 13.

$$9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$$

(a) Có 4 cặp số, chọn 5 thì phải có 2 số cùng 1 cặp.

(b) Không, mỗi số có thể ở 1 cặp khác nhau.

Bài 18.

(a) Giả sử cả nam và nữ đều có ít hơn 5 sinh viên, thì tổng số sinh viên không vượt quá 8, trái với đề bài. Nên phải có ít nhất 5 sinh viên nam hoặc 5 sinh viên nữ.

(b) Giả sử số sinh viên nam nhỏ hơn 3, thì số sinh viên nữ phải lớn hơn hoặc bằng 7 và ngược lại. Do đó, ĐPCM.

Bài 23*.

LIS.png

Bài 24. Mỗi người có 4 mối quan hệ với những người còn lại.

./friend.png

- Chỉ cần 3 trong 4 mối quan hệ cùng là bạn hoặc thù, thì chắc chắn sẽ buộc phải có *ba người là bạn của nhau hoặc thù của nhau* (có thể chứng minh được).
- Nhưng nếu 2 mối quan hệ là bạn và 2 mối quan hệ là thù, chúng ta hoàn toàn có thể xây dựng một đồ thị như vậy - đảm bảo rằng không có 3 cạnh nào cùng là bạn (hoặc thù).

Bài 25. Mỗi người có 9 mối quan hệ, hoặc bạn hoặc thì nên theo nguyên lý Dirichlet, có ít nhất 5 trong 9 mỗi quan hệ đó cùng là bạn hoặc thù. Không mất tính tổng quát, ta giả sử 5 mối quan hệ $AB_1, AB_2, \ldots, AB_5$ là bạn.

Chỉ cần 1 mối quan hệ B_iB_j giữa $B_1, \ldots, B_5$ là bạn, ta có ngay 3 người là bạn $A - B_i - B_j$. Nếu không, $B_1B_2 = B_1B_3 = \cdots = B_4B_5$, ta được 4 người là thù của nhau. Chứng minh tương tự, ta được ĐPCM.

Bài 36*. Một người quen từ 0 đến $n-1$ người.

- **TH1.** Giả sử bất cứ ai cũng quen ít nhất một người, thì số người quen từ 1 đến $n-1$ người ($n-1$ giá trị tổng cộng), mà có n người, nên theo nguyên lý Dirichlet, có ít nhất 2 người có cùng số người quen.
- **TH2.** Giả sử tồn tại một người không quen ai, thì nếu tồn tại một người khác cũng không quen ai, thì ta được ĐPCM. Còn nếu $n-1$ người quen lại đều quen ít nhất 1 người, thì ta được kết quả như **TH1**.

Bài 41*. Đặt $a_j = jx - \lfloor jx \rfloor$. Do x vô tỉ, $a_j \notin \{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. với $j, k = 1, 2, \dots, n$.
Đặt $I_k = \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$.

TH1. Với mọi k từ $1 \to n$, đều tồn tại 1 số $a_i \in I_k$

Khi đó, $a_i \in I_1$ là số thỏa mãn đề bài.

TH2. Tồn tại I_x mà không chứa a_i nào. Khi đó, theo nguyên lý Dirichlet, phải tồn tại $a_i, a_j \in I_k$. Hiệu chúng là $(j-i)x < \frac{1}{n}$, hay $a_{j-i} \in I_1$ là đáp án.

Bài 43*.

$i_1, i_2, \dots, i_{n^2+1} \leq n$

a, Giả sử rằng $i_k \leq n$ với mọi k. Khi đó theo nguyên lý Dirichlet tổng quát thì có ít nhất $[(n^2+1)/n]$ = n+1 với số i_1, i_2, ... , $i_(n^2+1)$ bằng nhau. b, Nếu a(kj) < a(k(j+1)) thì dãy con chứa a(kj) và tiếp sau là dãy con tăng độ dài i(k(j+1)) bắt đầu bằng a(k(j+1)) mâu thuẫn với đẳng thức i(kj) = i(k(j+1)) Vì thế a(kj) > a(k(j+1)) c, Nếu không có dãy con tăng với độ dài lớn hơn n thì áp dụng phần a và b => a(k(n+1)) > a(kn) > ... > a(k2) > a(k1) là dãy con giảm độ dài n+1

3 Chỉnh hợp và tổ hợp

Bài 42*.

Bài 43*.

Bài 44*.

4 Các hệ số nhị thức

Bài 26*.

Bài 27*.

Bài 30*.

Bài 32*.

Bài 39*.