Bài tập XSTK

Nhóm 29: Vũ Quốc Tuấn, Trần Thùy Dung

MATH1101_20

Bài 1. (LTXS-Ch3-1)

Cho ĐLNN liên tục X có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} cx^2(1-x) & \text{với } x \in [0,\ 1] \\ 0 & \text{với } x \notin [0,\ 1] \end{cases}$$

i) Tím hằng số c.
ii) Tìm mod.
iii) Tìm $P\{0,4 < X < 0,6\}$.

Giải.
i) Ta có:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} cx^2(1-x)\,dx = \int_0^1 (cx^2 - cx^3)\,dx = \left(\frac{c}{3}x^3 - \frac{c}{4}x^4\right)\Bigg|_0^1 = 1$$
$$\Rightarrow \quad c = 12$$

ii) Ta cần tìm x sao cho $f(x)$ là lớn nhất trong khoảng $[0,1]$.

Tìm các điểm cực trị của đồ thị f(x): $f'(x) = 36x^2 - 24x = 12x(3x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2/3 \end{array}\right.$

Ta có $f(0) = 0, f(\frac{2}{3}) = \frac{16}{9}$, dễ thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trong khoảng $[0,\ 1]$ tại $x = \frac{2}{3}$.
Vậy mod X $= \frac{2}{3}$.
iii) $F(X) = 4x^3 - 3x^4$.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{0.4 < X < 0.6\} &= F(0.6) - F(0.4) \\ &= 0.296 \end{aligned}$$

Bài 2. (LTXS-Ch3-4)

Cho ĐLNN X có hàm mật độ $f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 \le x \le 3 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$

i) Tìm hằng số k.
ii) Tính $P\{X > 2\}$
iii) Tìm median.
iv) Xác định a để $P\{X < a\} = \frac{3}{4}$.

i) Ta có:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} kx^2\,dx = \int_0^3 kx^2\,dx = \left(\frac{k}{3}x^3\right)\Bigg|_0^3 = 1$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{9}$$

ii) $F(X) = \dfrac{x^3}{27}$, suy ra $\mathrm{P}\{X > 2\} = 1 - \mathrm{F}(2) = \frac{19}{27}$

iii) Gọi m là median thì: $F(m) = \dfrac{m^3}{27} = 0.5 \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2}} \approx 2.381$

iv) Ta có $\mathrm{P}\{X < a\} = F(a) = \dfrac{a^3}{27} = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow m \approx 2.726$

Bài 3. (LTXS-Ch5-17)

Ở 1 thành phố nào đó 54% dân số là phụ nữ.
a) Chọn một mẫu ngẫu nhiên 450 người. Tính xác suất để tỉ lệ phụ nữ trong mẫu bé hơn 50%.
b) Xác định kích thước mẫu n để với xác suất 0,01 tỉ lệ phụ nữ trong mẫu bé hơn 50%.

Giải.
a) Gọi X là biến cố số lượng nữ trong 450 người chọn ngẫu nhiên trong thành phố có 54% tỷ lệ dân cư là nữ.

$$X \sim \mathbf{B}(450,\ 0.54)$$

Nhận thấy $\begin{cases} np = 450.0,54 = 243 > 5 \\ n(1-p) = 450.(1-0,54) = 207 > 5 \end{cases}$ nên X có phân bố xấp xỉ $X' \sim \mathbf{N}(243, 111.78)$.

Ta có:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{X < 450.50\%\} &= \mathrm{P}\{X < 225\} = \mathrm{P}\left\{\frac{X-243}{\sqrt{111.78}} < \frac{225-243}{\sqrt{111.78}}\right\} \\ &= \mathrm{P}\{Z < -1.7025\} = \phi(-1.7025) \\ &\approx 0.0443 \end{aligned}$$

b) Gọi X là biến cố số lượng nữ trong n người chọn ngẫu nhiên trong thành phố có 54% tỷ lệ dân cư là nữ. Tương tự như câu a ta có: $$X \sim \mathbf{N}(0.54n, 0.2484n)$$

Theo đề bài: $\mathrm{P}\{X < n.50\%\} = 0.01$

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\left\{X < \frac{n}{2}\right\} = \mathrm{P}\left\{Z < \frac{0.5n - 0.54n}{\sqrt{0.2484n}}\right\} = \mathrm{P}\left\{Z < \frac{-0.04n}{\sqrt{0.2484n}}\right\} = 0.01 \\ \Leftrightarrow\ &\phi\left(\frac{-0.04n}{\sqrt{0.2484n}}\right) \approx \phi(-2.326) \\ \Leftrightarrow\ &\frac{-0.04n}{\sqrt{0.2484n}} \approx -2.326 \\ \Leftrightarrow\ &n = \ 840 \end{aligned}$$

Vậy với kích thước mẫu $n = 840$ thì xác suất xấp xỉ 0.01 tỉ lệ phụ nữ trong mẫu bé hơn 50%.

Bài 4. (LTTK-Ch4-16)

Một bộ nọ báo cáo rằng số nhân viên của họ có ít nhất 35% là nữ. Kiểm tra ngẫu nhien danh sách 92 nhân viên cho thấy có 22 là nữ. Sử dụng P - giá trị hãy nhận định xem báo cáo bộ này có đúng không với mức ý nghĩa $\alpha = 0,025$.

Giải.

1	$H_0 : p = 0.35$ $H_A : p < 0.35$
2	Mức ý nghĩa: $\alpha = 2,5\%$.
3	Ta có: $\begin{cases} n.p_0 & = 92 * 0.35 > 5 \\ n.(1-p_0) & = 92 * 0.65 > 5 \end{cases}$ Do đó biến ngẫu nhiên tỉ lệ mẫu F có phân bố xấp xỉ chuẩn. Ta chọn kiểm định phía trái trên đồ thị Z.
4	$F \sim \mathbf{N}\left(0.35, \frac{0.35*0.65}{92}\right)$ **p-giá trị** $= P(F < \frac{22}{92}) = P\left(Z < \frac{\frac{22}{92} - 0.35}{\sqrt{\frac{0.35*0.65}{92}}}\right) = P(Z < -2.23) = \phi(-2.23) \approx 0.0129$
5	Ta có **p-giá trị** $< \alpha$ nên bác bỏ H_0.
6	Kết luận: Ta có đủ cơ sở để kết luận rằng tỉ lệ của nữ của bộ ít hơn 35%.

Bài 5. (BTXS-Ch2-58)

Cho X, Y là hai ĐLNN có phân bố xác suất đồng thời như sau:

X \ Y	-1	1	
-1	1/6	1/4	5/12
0	1/6	1/8	7/24
1	1/6	1/6	7/24
	1/2	1/2	

Hãy tính $E(X)$, $E(Y)$, $\mathrm{cov}(X,Y)$, $\rho(X,Y)$.

Giải.

$$E(X) = (-1) * \frac{5}{12} + 0 * \frac{7}{24} + 1 * \frac{7}{24} = -\frac{1}{8}$$
$$E(Y) = (-1) * \frac{1}{2} + 1 * \frac{1}{2} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(X,Y) &= E(XY) - E(X) * E(Y) \\ &= \sum (X_i Y_j) * p_{X_i} * p_{Y_j} - E(X) * E(Y) \\ &= -\frac{1}{8} - (-\frac{1}{8}) * 0 = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$D(X) = E(X^2) - E(X) = \sum X_i^2 p_{X_i} - E(X)^2 = \frac{133}{192}$$
$$D(Y) = E(Y^2) - E(Y) = \sum Y_i^2 p_{Y_i} - E(Y)^2 = 1$$

$$\rho(x,y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-1/8}{\sqrt{133/192 * 1}} \approx -0,15$$

Bài 6. (BTTK-Ch1-14)

Tính giá trị trung bình, median (số trung vị) và mod của dãy số liệu sau đây: 860, 940, 1120, 900, 840, 1050, 1220, 860, 770, 1010, 870, 890, 910, 930, 1040, 1280, 1020, 970, 1330, 890, 980, 1260, 980, 760.

Giải.
Giá trị trung bình: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{23680}{24} \approx 986,67$
Số trung vị : $\frac{940+970}{2} = 955$
Mod : 980.

Bài 7. (BTTK-Ch1-26)

Tính giá trị trung bình và độ lệch tiêu chuẩn từ bảng số liệu sau:

X	114	115	116	117	118	119
Tần số k	21	57	111	78	45	18

Giải.
Giá trị trung bình: $\bar{x} = \frac{\sum k_i.x_i}{\sum k_i} = \frac{114*21+115*57+116*111+117*78+118*45+119*18}{21+57+111+78+45+18} = 116.3727$

Độ lệch chuẩn : $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 * k_i}{n-1}} = 1.25$

Bài 8. (BTTK-Ch2-43)

Một sọt cam rất lớn được phân loại theo cách sau: Chọn ngẫu nhiên 20 quả cam để xem xét. Nếu trong đó không có quả cam nào hỏng thì sọt cam được xếp loại 1. Nếu trong đó có một hoặc hai quả hỏng thì sọt cam được xếp loại 2. Trong trường hợp còn lại (có từ ba quả hỏng trở lên) thì sọt cam được xếp loại 3.
Giả sử tỉ lệ cam hỏng trong sọt cam là 3%. Hãy tính xác suất để:
a) Sọt cam được xếp loại 1;
b) Sọt cam được xếp loại 2;
c) Sọt cam được xếp loại 3.

Giải.
a) Xác suất để sọt cam xếp loại 1: $p_1 = (1-0.03)^{20} \approx 0,5434$.
b) Xác suất để sọt cam xếp loại 2: $p_2 = \binom{20}{1}(0,03)^1(0,97)^{19} + \binom{20}{2}(0,03)^2(0,97)^{18} \approx 0,4352$.
c) Xác suất để sọt cam xếp loại 3: $p_3 = 1 - p_1 - p_2 = 0,021$

Bài 9. (BTTK-Ch3-66)

Để xác định trọng lượng trung bình của các bao bột mì được đóng bằng máy tự động, người ta chọn ngẫu nhiên 15 bao và tính được $\bar{x} = 39,8$ kg và $s^2 = 0,144$.
Tìm khoảng tin cậy 99% của trọng lượng trung bình μ của các bao bột.

Giải.
Theo đề bài: $n = 15,\ \alpha = 99\%,\ \bar{x} = 39,8,\ s^2 = 0,144 \Rightarrow \mathrm{u}_\beta = 2,58,\ \sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \approx 0,031$
Khoảng tin cậy 99% của trọng lượng trung bình μ của các bao bột là:

$$[\bar{x} - \mathrm{u}_\beta.\sigma_{\bar{x}},\ \bar{x} + \mathrm{u}_\beta.\sigma_{\bar{x}}]$$
$$[39.72,\ 39.88]$$

Bài 10. (BTTK-Ch3-91)

Một cuộc nghiên cứu được tiến hành nhằm xác định lượng trung bình các luật sư giỏi ở Mỹ dựa trên một mẫu điều tra. Hỏi cần lấy mẫu với kích thước tối thiểu là bao nhiêu để sai số không vượt quá 100 USD, với độ tin cậy là 95%? Với độ tin cậy 99% thì kích thước mẫu phải là bao nhiêu? Biết rằng độ lệch tiêu chuẩn của tập hợp chính là 1000 USD.

Giải.
Theo đề bài: $\sigma = 1000,\ \varepsilon = 100$.
Với độ tin cậy 95%, ta có $\mathrm{u}_\beta = 1,96$, do đó:

$$n \geq \left(\frac{1,96.1000}{100}\right)^2 = 385$$

Với độ tin cậy 99%, ta có $\mathrm{u}_\beta = 2,58$, do đó:

$$n \geq \left(\frac{2,58.1000}{100}\right)^2 = 666$$