1.
$x(1+x^2)\,dy-(1+y^2)\,dx=0$
Công thức trên viết dưới dạng

$$\frac{dy}{1+y^2}-\frac{dx}{x(1+x^2)}=0$$

Tích phân 2 vế

$$\int\frac{dy}{1+y^2}-\int\frac{dx}{x(1+x^2)}=C$$

Ta có: $\int\frac{1}{x(x^2+1)}=\int\frac{1}{x}\,dx-\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}$.

$$\to \arctan{(y)}-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|1+x^2|=C$$

3.
$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y(x-y)}{x^2}$

$$\frac{y(x-y)}{x^2}=\frac{yx}{x^2}-\frac{y^2}{x^2}=\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Đặt $u=\dfrac{y}{x}\Rightarrow y=ux,\ y'=u+u'x=u-u^2$, suy ra

$$u'x=-u^2\Rightarrow x\frac{du}{dx}=-u^2\Rightarrow -\frac{du}{u^2}=\frac{dx}{x}$$

Có: $\int\dfrac{du}{u^2}=\int\dfrac{dx}{x}+C_1$
$\Rightarrow\dfrac{1}{u}=\ln x+\ln C=\ln Cx$
Tích phân 2 vế dẫn đến nghiệm tổng quát của PTVP:

$$\frac{1}{u}=\ln Cx\Rightarrow\frac{x}{y}=\ln Cx\Rightarrow y=\frac{x}{\ln Cx},\ \ Cx>0, Cx\neq 1$$

$$x\,dy-y\,dx=y\,dy,\ \ y(-1)=1$$

Ta có $x\,dy-y\,dx=y\,dy\to(x-y)\,dy=y\,dx\to y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x-y}=\dfrac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$

Đặt $u=\dfrac{y}{x}$, ta có

$$\begin{aligned}&u+u'x=\frac{u}{1-u}\to\frac{du}{dx}x=\frac{u}{1-u}-u=\frac{u^2}{1-u}\\&\to\frac{(1-u)\,du}{u^2}=\frac{dx}{x}\to\int\frac{(1-u)\,du}{u^2}=\int\frac{dx}{x}+C\\&\to-\frac{1}{u}-\ln|u|=\ln|x|-C\to\frac{1}{u}+\ln|xu|-C\\&\to x=y(X-\ln|y|)\end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện $y(-1)=1\Rightarrow -1=1(C-\ln|1|)\to C=-1$
Vậy nghiệm của PT là $x=-y(1+\ln|y|)$.

2

3

4

2.
$\left[4y+\ln\left(1+y^2\right)\right]dy=(e^{-2x}+2x^3)\,dx$
Tích pahan cả 2 vế ta có

$$2y^2+int\ln\left(1+y^2\right)dy=-\frac{e^{-2x}}{2}+\frac{x^4}{2}+C$$

Tích phân từng phần:

$$u=\ln\left(1+y^2\right)\Rightarrow du=\frac{2y}{1+y^2}dy,\ \ dv=dy\Rightarrow v=y$$

$$\Rightarrow\int\ln{(1+y^2)}\,dy=y\ln{(1+y^2)}-\int\frac{2y^2}{1+y^2}dy$$

4. $y-xy'=y\ln\dfrac{x}{y}$.

Chia cả 2 vế cho x, ta có $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$.
Suy ra

$$y'=u+u'x=u+\ln u$$

$$u'x=u\ln u\Rightarrow\frac{du}{dx}x=u\ln u\Rightarrow\frac{du}{u\ln u}=\frac{dx}{x}$$

Tích phân cả 2 vế

$$\begin{aligned}\int\frac{du}{u\ln u}&=\int\frac{dx}{x}+C*\Rightarrow\ln|\ln|u||=\ln|x|+C\\&\Rightarrow\ln\left|\frac{\ln|u|}{x}\right|=\ln C\\&\Rightarrow\ln|u|=C|x|\Rightarrow u=e^{C_1x}\to y=xe^{C_1x}\end{aligned}$$

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15