1 Khái niệm

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

$y = y(x)$: hàm ẩn, bậc là bậc đạo hàm cao nhất
PT đạo hàm riêng: nhiều hơn 1 ẩn. VPTT: bậc 1 y'

Definition

Hàm y phải TM tại mọi điểm trong khoảng XĐ.

$$\begin{cases} y = f(x, C_1, C_2, ..., C_n) \\ F(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0 \end{cases}$$

1. $y = x^2$ không là nghieiemj của PTVP $xy' + x^2 = 3x$ do chỉ thỏa mãn tại $x = 0,\ x = 1$.
2. $y = \frac{2x^4}{7} + \frac{1}{x^3}$ là nghiệm $xy' + 3y = 2x^4$

Definition : Bài toán Cauchy

ĐK ban đầu $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$

1.1 Phương trình khuyết y

Có dạng $F(x, y') = 0$.

- Giải được $y' = f(x) \Leftrightarrow y = \int f(x)\,dx$
- Giải được $x = f(y')$: Đặt $y' = t, x = f(t) \Leftrightarrow dx = f'(t)\,dt,\ dy = tdx = tf'(t)\,dt$.

$$y = \int tf'(t)\,dt = tf(t) - \int f(t)\,dt$$

- Giải được $\begin{cases} x = f(t) \\ y' = g(t) \end{cases}$ thì

$$y' - \frac{dt}{}$$

1.2 Phương trình khuyết x

$F(y, y') = 0$

-

2 PTVP c1

PT vp có biến số phân ly hay còn gọi là PT tách biến có dạng

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

Nếu $g(y) \neq 0$: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$
Suy ra tích phân tổng quát:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C$$

Nếu $g(y) = 0$ có nghiệm $y = b$ là nghiệm PT.
VD. $y' = x(1 + y^2)$
Do $1 + y^2 \geq 1$ nên chia cả 2 vế

$$\frac{dy}{1 + y^2} = x\,dx$$

Tích phân cả hai vế

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int x\,dx + C \to \arctan y = \frac{x^2}{2} + C$$

VD. $\dfrac{dy}{1+y^2}+\dfrac{dx}{1+x^2}=0$

$$\frac{dy}{1+y^2}=-\frac{dx}{1+x^2}$$

TP 2 vế $\int\dfrac{dy}{1+y^2}=-\int\dfrac{dx}{1+x^2}=...$

VD. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+2x-5}{y^2}$

a. Tìm nghiệm tổng quát

b. Tìm nghiệm TMDK ban đầu $y(0)=2$.

a. ĐK: $y\neq 0$.

$$y^2\,dy=(x^2+2x-5)\,dx$$

$$\Rightarrow\frac{y^3}{3}=\frac{x^3}{3}+x^2-5x+C^*$$

$$\Rightarrow y=sqrt3(x^3+3x^2-15x+C),C=3C^*$$

b. ĐK ban đầu dẫn đến $sqrt3(C)=2\Rightarrow C=8$. Vậy nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu là $y=sqrt3(x^3+3x^2-15x+8)$

2.1 PT VP cấp 1 đẳng cấp

Cấp 1 có dạng $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Đặt $u=y/x\to y=ux$, đạo hàm 2 vế theo x.

$$y'=u+u'x=f(u)$$

PT trở nên dạng có biến phân ly

$$f(u)-u=x\frac{du}{dx}$$

Nếu $f(u)-u\neq 0\to\dfrac{du}{f(u)-u}=\dfrac{dx}{x}$ dẫn đến tích phân tổng quát

$$\int\frac{du}{f(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C$$

VD. Giải PTVP $y'=\dfrac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}$.

Đặt $u=y/x\to y=ux,y'=u+e^u$

$$u'x=e^u\to x\frac{du}{dx}=e^u\to e^{-u}du=\frac{dx}{x}$$

Tích phân 2 vế

$$C-e^{-u}=\ln x$$

$$\to C\ln x+e^{-u}=\ln x+e^{-\frac{y}{x}}$$

VD. $y'=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$

$$y'=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x^2}{xy}+\frac{y^2}{xy}=\left(\frac{y}{x}\right)^{-1}+\left(\frac{y}{x}\right)=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$y'=u+u'x=u+\dfrac{1}{u'}$ suy ra

$$u'x=\frac{1}{u}\Rightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\Rightarrow udu=\frac{dx}{x}$$

Tích phân 2 vế dẫn đến nghiệm tổng quát

$$\frac{u^2}{2}=\ln Cx\Rightarrow\frac{y^2}{2x^2}=\ln Cx\Rightarrow y=\ x\sqrt{2\ln Cx}$$

2.2 PTVP tuyến tính cấp 1

Biểu thức là tt

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Nếu $q(x) = 0 \to$ PTTT cấp 1 thuần nhất $y' + p(x)y = 0$

Nghiệm tổng quát ko thuần nhất:

$$y = Ce^{-\int p(x)\,dx} + e^{-\int p(x)\,dx} \int q(x) e^{\int p(x)\,dx}\,dx = y_1 + y_2$$

Trong đó y_1 là nghiệm PT thuần nhất.

Công thức thường được áp dụng

$$a^{\log_b c} = c^{\log_a b} \to e^{\ln x} = x^{\ln e} = x,\ e^{3\ln x} = x^3$$

VD. Tìm nghiệm của PT $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$.

$$p(x) = -\frac{1}{x} \to \int p(x)\,dx = -\int \frac{1}{x} dx;\ q(x) = x^2$$

Dẫn đến nghiệm tổng quát

$$\Rightarrow y = e^{\int \frac{1}{x}\,dx}\left(C + \int e^{-\int \frac{1}{x}\,dx}\,dx\right) = x\left(C + \int x\,dx\right) = x\left(C + \frac{x^2}{2}\right)$$

VD. $y' + 2y = x^3 e^{-2x}$ Tìm nghiệm thỏa mãn $y(0) = 1$.

$p(x) = 2, q(x) = x^3 e^{-2x}$, thay vào tìm nghiệm.

2.3 PT Bernoulli

$y' + p(x)y = y^\alpha g(x) \qquad (\alpha \in R)$

- $\alpha = 1, 0$ VP TT
- Đặt $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$

Chia 2 vế cho y^α, thay z, z'

$$\frac{y'}{y^\alpha} + p(x)\frac{y}{y^\alpha} = \frac{y^\alpha}{y^\alpha}g(x) \to \frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = g(x)$$

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)g(x)$$

Note. Xét trường hợp $y = 0$ trc.

VD. $y' + \dfrac{y}{x} = x^2y^4, y \neq 0$

Đây là PT Bernoulli có $\alpha = 4$. Chia 2 vế cho y^4

$$y^{-4}y + \frac{y^{-3}}{x} = x^2$$

Đặt $z = y^{-3} \Rightarrow z' = -3y^{-4}y'$, thay vào.

$$-\frac{z'}{3} + \frac{z}{x} = x^2 \to z' - 3\frac{z}{x} = -3x^2$$

Đây là PTVP tuyến tính cấp 1 theo z nên có nghiệm tổng quát

$$z = eblablabal$$