BG Ch11 BÀI 3. MÁY HỮU HẠN TRẠNG THÁI KHÔNG CÓ ĐẦU RA

MỞ ĐẦU

Một trong những ứng dụng quan trọng của các máy hữu hạn trạng thái là sự đoán nhận một ngôn ngữ.

Ứng dụng này đóng vai trò cơ bản trong việc thiết kế và xây dựng các chương trình dịch cho các ngôn ngữ lập trình.

Trong Bài 2, chúng ta đã chứng tỏ rằng một máy hữu hạn trạng thái có đầu ra có thể được dùng để đoán nhận các ngôn ngữ bằng cách cho đầu ra 1 khi một xâu của ngôn ngữ đã được đọc và đầu ra 0 trong trường hợp ngược lại.

Tuy nhiên, có các loại máy hữu hạn trạng thái khác được thiết kế chuyên để đoán nhận các ngôn ngữ:

- *Thay vì tạo ra đầu ra, các máy này có những trạng thái kết thúc.*
- *Một xâu được đoán nhận nếu và chỉ nếu nó đưa trạng*

thái xuất phát tới một trạng thái kết thúc.

TẬP CÁC XÂU

Trước khi thảo luận về các máy hữu hạn trạng thái không có đầu ra, chúng tôi sẽ giới thiệu một số kiến thức cơ sở quan trọng về tập các xâu. Các phép toán được định nghĩa ở đây sẽ được dùng rộng rãi về sự đoán nhận ngôn ngữ bởi các máy có hữu hạn trạng thái.

ĐỊNH NGHĨA 1. *Cho A và B là hai tập hợp con của V*, với V là một từ vựng. Phép ghép của A và B, được kí hiệu bởi AB, là tập tất cả các xâu có dạng xy, trong đó x là xâu thuộc A và y là xâu thuộc B.*

VÍ DỤ 1. Cho A = {0, 11} và B = {1, 10, 110}. Tìm AB và BA.

Giải: Tập AB chứa tất cả các phép ghép của một xâu trong A và một xâu trong B. Do đó, AB = {01, 010, 0110, 111, 1110, 11110}. Tập BA chứa tất cả các phép ghép của một xâu trong B và một xâu trong A. Do đó, BA = { 10, 111,100, 1011, 1100, 11011}.

Chú ý rằng không nhất thiết phải có AB = BA, khi A và B là các tập con của V, như ví dụ 1 đã cho thấy.*

Từ định nghĩa phép ghép của hai tập các xâu, ta có thể định nghĩa A^n *với n = 0, 1, 2…Điều này được làm một cách đệ quy như sau:*

$A^0 = \{\lambda\};$

$A^{n+1} = A^nA$*, với n = 0, 1, 2…*

VÍ DỤ 2. Cho A = {1, 00}. Tìm A^n với n = 0, 1, 2 và 3.

Giải: Ta có $A^0 = \{\lambda\}$ và $A^1 = A^0A = \{\lambda\}A = \{1, 00\}$. Để tìm A^2, ghép các cặp phần tử của A. Kết quả được $A^2 = \{11, 100, 001, 0000\}$. Để tìm A^3, ta ghép các phần tử trong của A^2 và A, kết quả cho $A^3 = \{111, 1100, 1001, 10000, 0011, 00100, 00001, 000000\}$.

ĐỊNH NGHĨA 2.*Cho A là một tập con của V*. Khi đó bao đóng Kleene của A – được kí hiệu là A* - là tập gồm các phép ghép một số tùy ý các xâu thuộc A. Điều này có nghĩa* $A^* = A^0 \cup A \cup A^2 \cup \ldots \cup A^n \cup \ldots$

VÍ DỤ 3. Tìm bao đóng Kleene của các tập sau: A = {0}, B = {0, 1} và C = {11}.

Giải: Bao đóng Kleene của A là phép ghép của xâu 0 với chính nó một số hữu hạn lần tùy ý. Do đó, $A^* = \{0^n | n = 0, 1, 2, \ldots\}$. Bao đóng Kleene của B là phép ghép một số tùy ý các xâu, trong đó mỗi xâu là 0 hoặc 1. Đây chẳng qua là tập các xâu trên bộ chữ cái V = {0, 1}. Tức B* = V*. Cuối cùng, bao đóng Kleene của C là phép ghép xâu 11 với chính nó một số lần tùy ý. Do đó, C* là tập các xâu gồm một số chẵn các số 1. Tức là, C* = {1^{2n}|n = 0, 1, 2…}.

ÔTÔMAT HỮU HẠN (AUTOMAT hữu hạn)

Bây giờ chúng ta sẽ cho định nghĩa của máy của máy hữu hạn trạng thái không có đầu ra. Những máy này cũng được gọi các **ôtômat hữu hạn** và từ đây trở đi sẽ dùng thuật ngữ này. Các ôtômát hữu hạn khác với các máy hữu hạn trạng thái đã xét trong mục 11.2 ở chỗ chúng không tạo ra đầu ra mà có một tập các trạng thái kết thúc. Như chúng ta sẽ thấy, các ôtômat hữu hạn đoán nhận các xâu đưa trạng thái xuất phát tới một trạng thái kết thúc.

ĐỊNH NGHĨA 3. *Một ôtômat hữu hạn $M = (S, I, f, s_0, F)$ gồm một tập hữu hạn S các trạng thái, một bộ chữ cái đầu vào I, một hàm chuyển f gán trạng thái tiếp theo* *cho mỗi cặp trạng thái và đầu vào (f: S x I → S), trạng thái xuất phát s_0 và một tập con F của S gồm các trạng thái kết thúc.*

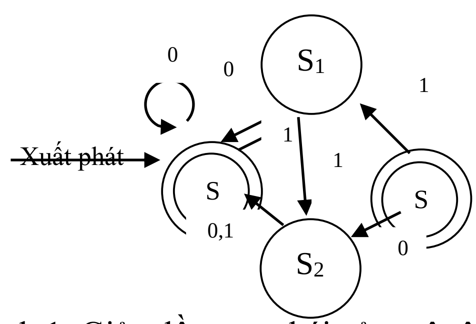
Chúng ta có thể biểu diễn một ôtômat hữu hạn bằng

- ***cách dùng các bảng trạng thái***
- ***hoặc các giản đồ trạng thái (Sơ đồ chuyển).***

Các trạng thái kết thúc được thể hiện bằng các vòng tròn kép trong giản đồ trạng thái.

VÍ DỤ 4. Dựng giản đồ trạng thái của ôtômat hữu hạn $M = (S, I, f, s_0, F)$ với $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$, $I = \{0,1\}$, $F = \{s_0, s_3\}$ và hàm chuyển f được cho trong bảng 1.

BẢNG 1.		
Trạng thái	**f**	
	Đầu vào	
	0	**1**
S_0	S_0	S_1
S_1	S_0	S_2
S_2	S_0	S_0
S_3	S_2	S_1



Hình 1. Giản đồ trạng thái của một ôtômat hữu hạn.

a) 010; b) 1101; c)1111110; d) 010101010

Giải. Giản đồ trạng thái được cho trên hình 1. Chú ý rằng vì cả hai đầu vào 0 và

1 đều đưa s_2 tới s_0, nên ta viết 0, 1 trên cạnh từ s_2 đến s_0.

Hàm chuyển f có thể được mở rộng sao cho nó được định nghĩa cho mọi cặp gồm một trạng thái và một xâu đó là,

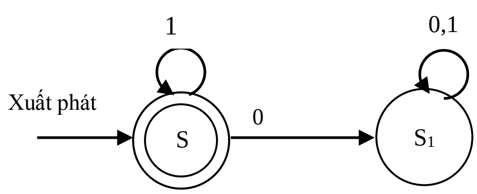
***f*: S x *I** → S.**

Giả sử x = $x_1x_2...x_k$ là xâu trong V^*. Khi đó f(s_1, x) là trạng thái nhận được bằng cách dùng tuần tự các kí hiệu trong x, từ trái sang phải, làm đầu vào, bắt đầu với trạng thái s_1. Từ s_1 ta có thể đi tới trạng thái s_2 = f(s_1, x_1), sau đó tới trạng thái s_3 = f(s_2, x_2)... với f(s_1, x) = f(s_k, x_k).

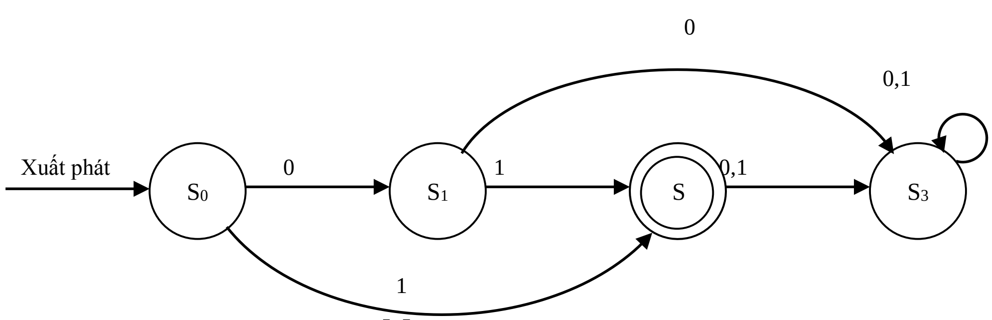
Một xâu x được gọi là được đoán nhận bởi máy M = (S, I, f, s_0, F) nếu nó đưa trạng thái xuất phát tới một trạng thái kết thúc, tức là f(s_0, x) là một trạng thái thuộc F. Ngôn ngữ được đoán nhận

bởi máy M, được kí hiệu là L(M), là tập tất cả các xâu được đoán nhận bởi M. Hai ôtômat hữu hạn được gọi là tương đương, nếu chúng cùng đoán nhận một ngôn ngữ.

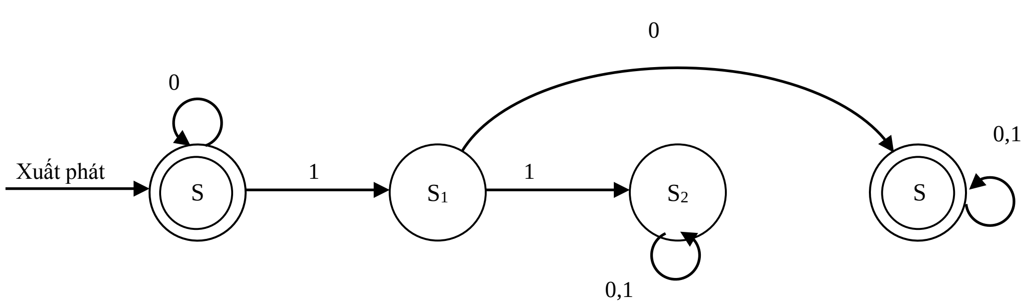
VÍ DỤ 5. Xác định ngôn ngữ được đoán nhận bởi các ôtômat hữu hạn M_1. M_2 và M_3 trên hình 2.



M_1



M_2



M_3

Hình 2: Một số ôtômat hữu hạn.

Giải: Trạng thái kết thúc duy nhất của M_1 là s_0. Do đó, $L(M_1) = \{1^n | n = 0, 1, 2,\ldots\}$.

Trạng thái kết thúc duy nhất của M_2 là s_2. Các xâu đưa s_0 tới s_2 là 1 và 01. Do đó, $L(M_2) = \{1, 01\}$.

Các trạng thái cuối cùng của M_3 là s_0 và s_3. Các xâu đưa s_0 đến chính nó là λ, 0, 00, 000, …, tức là xâu rỗng và các xâu gồm toàn số 0. Còn các xâu đưa s_0 tới s_3 là xâu rỗng hoặc các xâu gồm các số 0 liên tiếp, tiếp sau bởi 10 rồi tiếp sau nữa bởi một xâu bất kì. Do đó, $L(M_3) = \{0^n, 0^m10x \mid n, m = 0, 1, 2, \ldots$ và x là xâu bất kì$\}$.

Các ôtômat được xét cho tới đây đều là các ôtômat tất định, vì đối với mỗi cặp trạng thái và giá trị đầu vào có một trạng thái kế tiếp duy nhất được cho bởi hàm chuyển. Tuy nhiên, còn có một loại ôtômat hữu hạn quan trọng khác, trong đó có thể có một số trạng thái kế tiếp khả dĩ ứng với mỗi cặp giá trị đầu vào và trạng thái. Những máy này được gọi là ôtômat không tất định. Các ôtômat hữu hạn không tất định đóng vai trò quan trọng trong việc xác định các ngôn ngữ nào là được đoán nhận bởi một ôtômat hữu hạn.

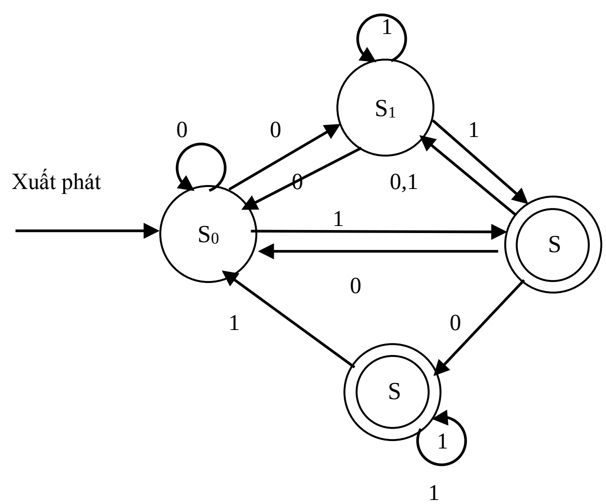
ĐỊNH NGHĨA 4. Automat hữu hạn không tất định M = (S, I, f, s_0, F) gồm tập S các trạng thái, một bộ chữ cái đầu vào I, một hàm chuyển f gán cho mỗi cặp gồm trạng thái và đầu vào một tập các trạng thái (f: S x I → P(S)), trạng thái xuất phát s_0 và *tập con F của S gồm các trạng thái kết thúc.*

Cũng có thể biểu diễn các automat hữu hạn không tất định bằng một bảng các trạng thái hoặc giản đồ trạng thái. Khi dùng bảng trạng thái, đối với mỗi cặp gồm trạng thái và giá trị đầu vào, ta cho một liệt kê các trạng thái kế tiếp khả dĩ. Còn trong giản đồ trạng thái, đưa vào các cạnh từ mỗi trạng thái tới tất cả các trạng thái kế tiếp khả dĩ và đánh dấu các cạnh đó bằng đầu vào hoặc các đầu vào dẫn tới các chuyển dịch đó.

VÍ DỤ 6. Tìm Đồ thị chuyển cho ôtômat hữu hạn không tất định với bảng trạng thái là bảng 2. Biết các trạng thái kết thúc là s_2 và s_3.

Giải: Giản đồ trạng thái của ôtômat hữu hạn không tất định này được cho trên hình 3.

BẢNG 2		
Trạng thái	*f*	
	đầu vào	
	0	1
s_0	s_0, s_1	s_3
s_1	s_0	s_1, s_3
s_2	$\varnothing$	s_0, s_2
s_3	s_0, s_1, s_2	s_1

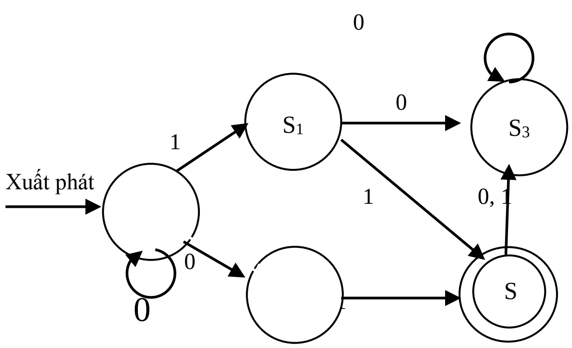


Hình 3: Ôtômat hữu hạn không tất định với bảng trạng thái là bảng 2.

a) 010; b) 1101; c)1111110; d) 010101010

VÍ DỤ 7. Lập bảng trạng thái đối với ôtômat hữu hạn không tất định có giản đồ trạng thái cho trên hình 4.

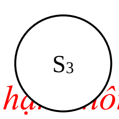
Giải: Bảng trạng thái cần tìm được cho trên bảng 3.



BẢNG 3.		
Trạng thái	***f*** **Đầu vào**	
	0	**1**
S_0	S_0, S_2	S_1
S_1	S_3	S_4
S_2	$\varnothing$	S_4
S_3	S_3	$\varnothing$
S_4	S_3	S_3

Hình 4: Một ôtômat hữu hạn không tất định.

1



BẢNG 3.		
Trạng thái	***f*** **Đầu vào**	
	0	**1**
S_0	S_0, S_2	S_1
S_1	S_3	S_4
S_2	$\varnothing$	S_4
S_3	S_3	$\varnothing$
S_4	S_3	S_3

Đối với một ôtômat hữu hạn không tất định, việc đoán nhận một xâu $x = x_1, x_2, \ldots, x_k$ có nghĩa là như thế nào ? Kí hiệu đầu tiên của đầu vào x_1 đưa trạng thái xuất phát S_0 tới tập S_1 các trạng thái. Kí hiệu thứ hai *của đầu vào x_2 đưa mỗi một trạng thái của tập S_1 tới một tập các trạng thái. Gọi S_2 là hợp của các tập này. Tiếp tục quá trình này bằng cách ở mỗi giai đoạn gộp vào tất cả các trạng thái nhận được bằng cách dùng một trạng thái nhận được ở giai đoạn trước và kí hiệu là đầu vào hiện thời.* Chúng ***đoán nhận*** *một xâu x nếu có một trạng thái kết thúc trong tập tất cả các trạng thái có thể nhận được từ s_0* khi dùng *x*.

Ngôn ngữ được đoán nhận *bởi một ôtômat hữu hạn không tất định là tập tất cả các xâu được đoán nhận bởi ôtômat đó.*

VÍ DỤ 8. Tìm ngôn ngữ được đoán nhận bởi ôtômat hữu hạn không tất định được cho trên hình 4.

Giải: Vì s_0 là trạng thái kết thúc và có một chuyển dịch s_0 đến chính nó khi đầu vào là 0, nên máy này đoán nhận tất cả các xâu là xâu rỗng hoặc xâu chứa toàn các số 0. Hơn nữa, vì s_4 cũng là trạng thái kết thúc, nên mọi xâu có s_4 ở trong tập các trạng thái có thể đưa tới từ s_0 nhờ xâu đầu vào đó, đều được đoán nhận. Những xâu duy nhất có tính chất này là xâu rỗng hoặc các xâu gồm toàn số 0 tiếp sau vởi 01 hoặc 11. Vì s_0 và s_4 là các trạng thái kết thúc duy nhất, nên ngôn ngữ được đoán nhận bởi máy là $\{0^n, 0^m01, 0^k11 \mid n, m, k \geq 0\}$.

Có một tính chất quan trọng là: một ngôn ngữ được đoán nhận bởi một ôtômat hữu hạn không tất định cũng sẽ được đoán nhận bởi một ôtômat hữu hạn tất định. Chúng ra sẽ sử dụng kết quả này trong mục sau khi xác định các ngôn ngữ nào được đoán nhận bởi một ôtômat hữu hạn.

Định lí 1. ***Nếu ngôn ngữ L được đoán nhận bởi một ôtômat hữu hạn không tất định M_0 thì L cũng được đoán nhận bởi một ôtômat hữu hạn tất định M_1.***

Chứng minh. Chúng ta sẽ mô tả cách làm thế nào dựng được một ôtômat hữu hạn tất định M_1 đoán nhận L từ M_0 là ôtômat hữu hạn không tất định đoán nhận ngôn ngữ này.

Mỗi một trạng thái trong M_1 sẽ được tạo bởi một tập các trạng thái trong M_0. Kí hiệu xuất phát của M_1 là $\{s_0\}$ – là tập có chứa trạng thái xuất phát của M_0. Tập đầu vào của M_1 cũng là tập đầu vào của M_0. Cho trạng thái $\{s_{i1}, s_{i2},\ldots,s_{ik}\}$ của M_1, kí hiệu đầu vào x đưa trạng thái này tới hợp các tập của trạng thái kế tiếp đối với mỗi phần tử của tập đó, tức là hợp của các tập hợp $f(s_{i1},x), f(s_{i2},x),\ldots, f(s_{ik},x)$. Tất cả các trạng thái của M_1 đều là các tập con của S – tập các trạng thái của M_0 – nhận được bằng cách đó xuất phát từ s_0. (có cả thảy 2^n trạng thái trong ôtômat hữu hạn tất định, với n là số trạng thái trong máy không tất định, vì tất cả các tập con đều có thể xuất hiện như các trạng thái, kể cả tập rỗng, mặc dù thông thường số các trạng thái thường gặp ít hơn nhiều).

Các trạng thái kêt thúc của M_1 là các tập nói trên có chứa một trạng thái kết thúc của M_0.

Giả sử một xâu đầu vào được đoán nhận bởi M_0. Khi đó một trong số các trạng thái có thể tới được từ s_0 nhờ xâu đầu vào này là một trạng thái kết thúc (độc giả có thể chứng minh điều này bằng quy nạp).

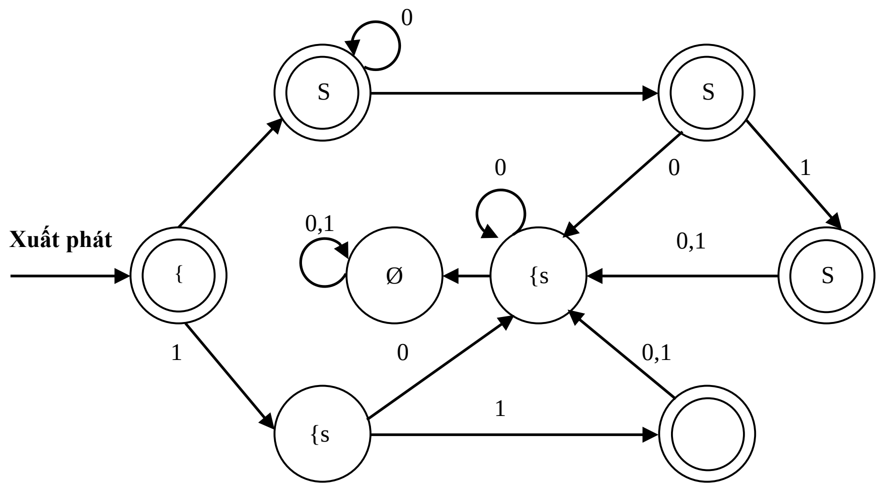
Điều này có nghĩa là trong M_1, xâu đầu vào này dẫn từ $\{s_0\}$ tới một tập các trạng thái của M_0 có chứa một trạng thái kết thúc. Tập con này là một trạng thái cuối cùng của M_1, vậy xâu này được đoán nhận bởi M_1.

Cũng như vậy, một xâu đầu vào không được đoán nhận bởi M_0 cũng không dẫn tới trạng thái kết thúc nào của M_0. (Độc giả nên chứng minh chi tiết khẳng định này). Do đó, xâu đầu vào này không dẫn từ $\{s_0\}$ tới một trạng thái kết thúc nào trong M_1.

VÍ DỤ 9.Tìm một ôtômat hữu hạn tất định đoán nhận cùng một ngôn ngữ như ôtômat hữu hạn không tất định cho trong ví dụ 7.

Giải: Ôtômat hữu hạn tất định cho trên hình 5 được xây dựng từ ôtômat hữu hạn không tất định cho trong ví dụ 7. Các trạng thái của ôtômat tất định này là các tập con của tập tất cả các trạng thái của ôtômat không tất định. Trạng thái kế tiếp của một tập con dưới tác động của một kí hiệu đầu vào là một tập con chứa các trạng thái kế tiếp trong ôtômat không tất định của tất cả các phần tử trong tập con nói lúc đầu. Ví dụ, với đầu vào 0, $\{s_0\}$ sẽ chuyển tới $\{s_0,$

$s_2\}$, vì s_0 có những chuyển dịch tới chính nó và tới s_2 trong ôtômat không tất định, tập con $\{s_0, s_2\}$ với đầu vào 1 sẽ chuyển tới $\{s_1, s_4\}$, vì trong máy không tất định với đầu vào là 1, s_0 chỉ chuyển tới s_1 và s_2 chỉ chuyển tới s_4; với đầu vào 0 tập $\{s_1, s_4\}$ sẽ chuyển tới $\{s_3\}$ vì trong máy không tất định, với đầu vào 0, s_1 và s_4 đều chỉ chuyển tới s_3. Tất cả các tập con nhận được bằng cách đó đều được bao hàm trong máy tất định. Chú ý rằng tập rỗng cũng là một trong những trạng thái của máy này, vì nó là tập con chứa tất cả các trạng thái kế tiếp $\{s_3\}$ với đầu vào 1. Trạng thái xuất phát là $\{s_0\}$ và các trạng thái kết thúc là các tập con có chứa s_0 hoặc s_4.



Hình 5: Ôtômat tất định tương ứng với ôtômat không tất định cho trong ví dụ

BÀI TẬP

1.Cho A = {0, 11} và B = {00, 01}. Hãy tìm các tập sau:

4. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\{\lambda\}^* = \{\lambda\}$;

a) AB; b) BA c) A^2 d) B^3.

2. Chứng minh rằng, nếu A là tập các xâu, thì AØ = ØA = Ø.

3. Tìm tất cả các tập A và B của các xâu sao cho AB = {10, 111, 1010, 1000, 10111, 101000}.

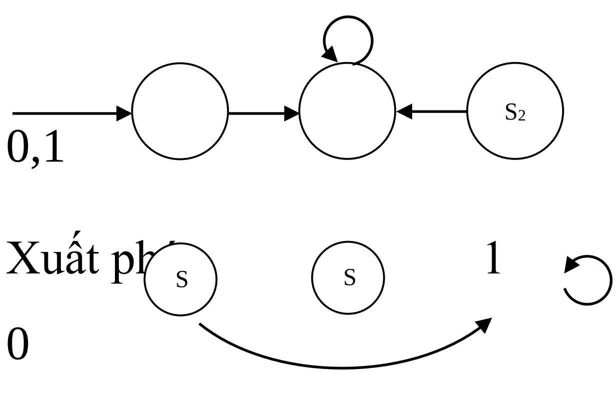
6. Cho V là bộ chữ cái (từ vựng); A và B là các tập con của

b) $(A^*)^* = A^*$ với mọi tập các xâu A.

5. Mô tả các phần tử của tập A^* với các giá tri sau của A.

a) {10}; b) {111}; c) {0, 01}; d) {1, 101}.

12.



1

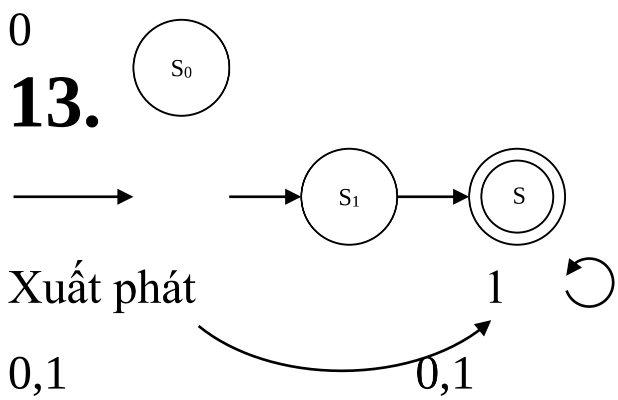
V^*. Chứng minh rằng $|AB| \le |A||B|$.

7. Cho V là bộ chữ cái, A và B là các tập con của V^* với $A \subseteq B$. Chứng minh rằng $A^* \subseteq B^*$.

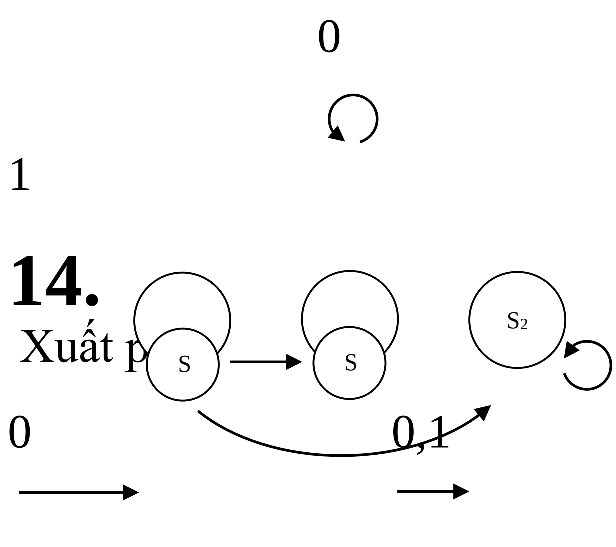
8. Cho A là tập con của V^* với V là bộ chữ cái. Hãy chứng minh hoặc bác bỏ các mệnh đề sau:

a) $A \subseteq A^2$; b) Nếu $A = A^2$ thì $\lambda \in A$

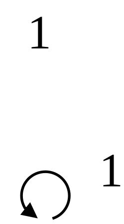
13.



14.



15.



c) $A\{\lambda\} = A$; d) $(A^*)^* = A^*$;

e) $A^*A = A^*$; f) $|A^n| = |A|^n$.

9. Xác định xem xâu 11101 có nằm trong các tập sau không ?

a) $\{0, 1\}^*$;

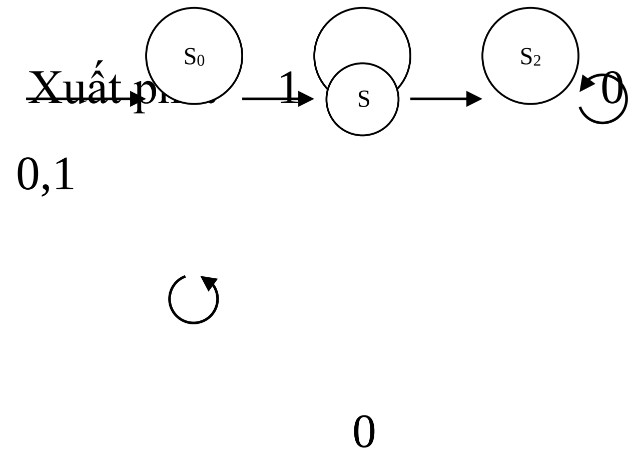
b) $\{1\}^*\{0\}^*\{1\}^*$;

c) $\{11\}\{1\}^*\{01\}$;

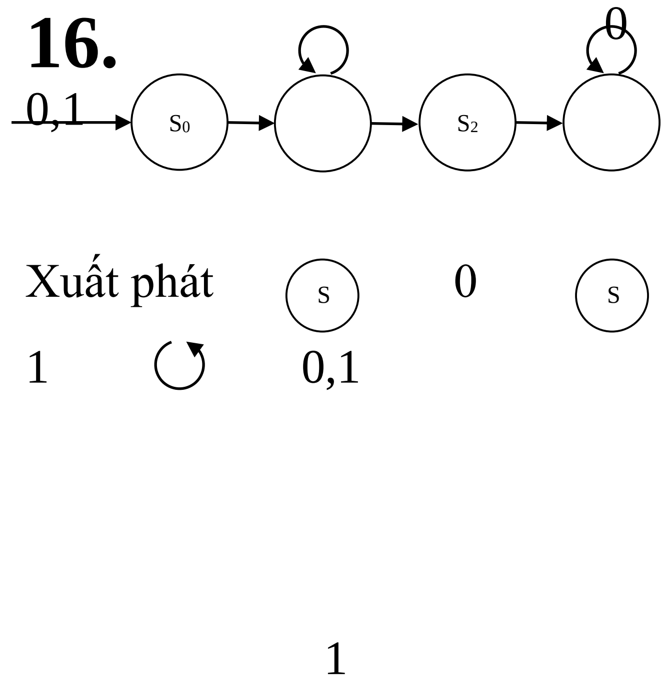
d) $\{11\}^*\{01\}^*$;

e) $\{111\}^*\{0\}^*\{1\}$;

f) $\{111,000\}\{00,01\}$.



16.



Trong các bài tập 17-21, hãy tìm ngôn ngữ được đoán nhận bởi ôtômat hữu hạn không tất định được cho dưới đây.

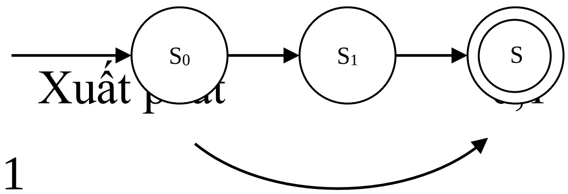
10. Hãy xác định xem các xâu dưới đây có được đoán nhận bởi ôtômat hữu hạn tất định trong hình 1 không ?

a) 010; b) 1101; c)1111110;

d) 010101010

11. Hãy xác định xem tất cả các xâu trong các tập sau có được đoán nhận bởi ôtômat hữu hạn tất

17.



0

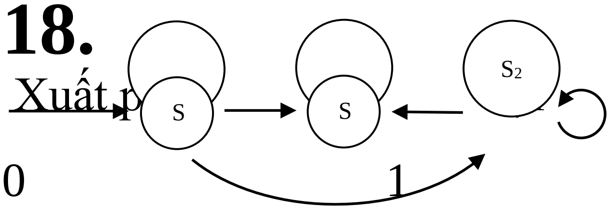
định trong hình 1 không ?

a) $\{0\}^*$; b) $\{0\}\{0\}^*$; c) $\{1\}\{0\}^*$

d) $\{01\}^*$; e) $\{0\}^*\{1\}^*$; f) $\{1\}\{0,1\}^*$

Trong các bài tập 12 – 16, hãy tìm ngôn ngữ được đoán nhận bởi ôtômat hữu hạn tất định được cho dưới đây.

18.

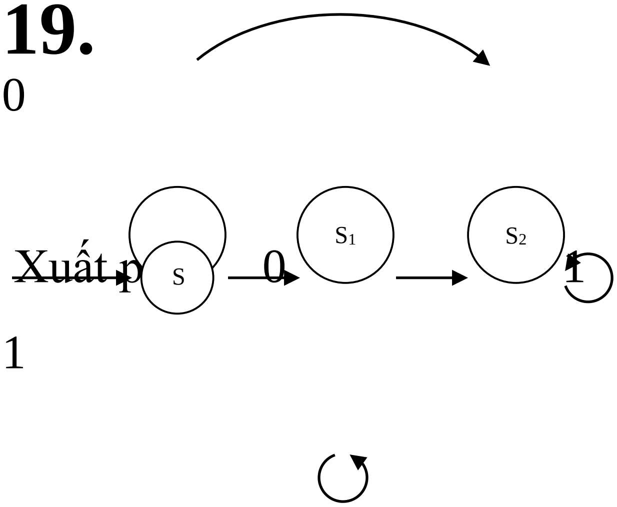


0

1

19.

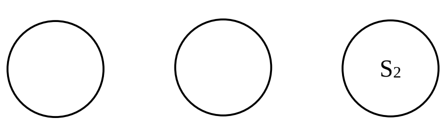
0



1

0

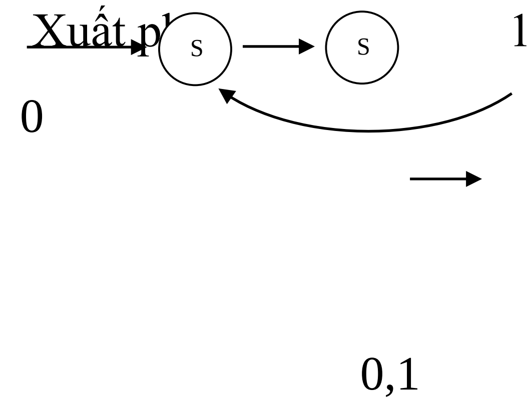
20.



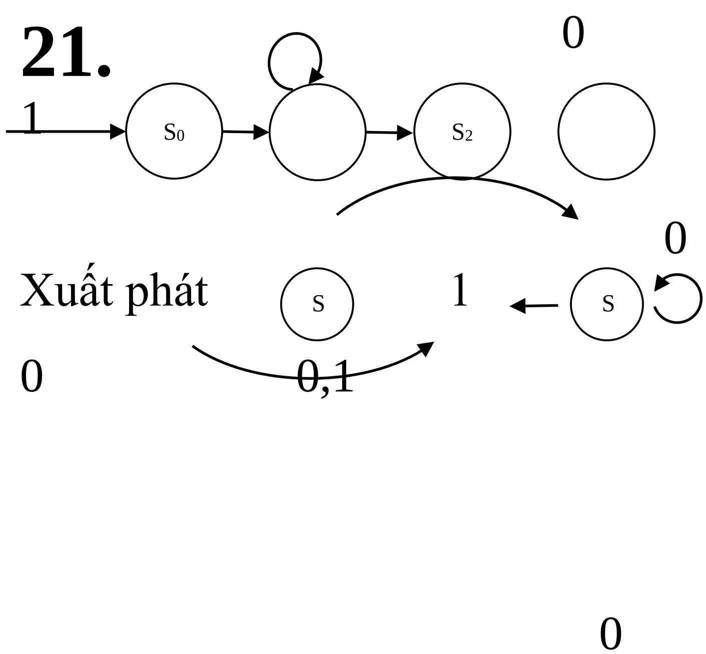
23. Cũng hỏi như trên đối với ôtômat hữu hạn không tất định trong bài tập 18.

24. Cũng hỏi như trên đối với ôtômat hữu hạn không tất định trong bài tập 19.

25. Cũng hỏi như trên đối với ôtômat hữu hạn không tất định trong bài tập 20.



21.



22. Tìm ôtômat hữu hạn tất định đoán nhận

26. Cũng hỏi như trên đối với ôtômat hữu hạn không tất định trong bài tập 21.

27. Tìm các ôtômat hữu hạn tất định đoán nhận các tập sau:

a) {0}; b) {1,00}, c) $\{1^n | n = 2,3,4... \}$

28. Tìm ôtômat hữu hạn không tất định đoán nhận các ngôn ngữ trong bài cùng một ngôn ngữ như ôtômat hữu hạn không tất định trong bài tập 17.

tập 27 và có ít trạng thái hơn, nếu có thể, so với ôtômat hữu hạn tất định mà bạn đã tìm được trong bài tập đó.

29*. Chứng minh rằng không có một ôtômat hữu hạn đoán nhận tập các xâu nhị phân chứa các số 0 và số các số 1 bằng nhau.