BIỂU DIỄN HỆ THỐNG TTBB TRONG MIỀN THỜI GIAN

1 Biểu diễn hệ thống rời rạc theo thời gian

- Phiên bản rời rạc của PTVP là **phương trình sai phân** *(difference equation)*.
- Hệ thống TTBB rời rạc theo t: PT sai phân tuyến tính hệ số hằng.

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y[n-i] = \sum_{j=0}^{M} b_j x[n-j]$$

EXAMPLE.

$$y[n] + y[n-2] = x[n]$$

Điều kiện đầu của PT sai phân rời rạc dưới dạng giá trị y thời điểm trước khi thời điểm có tín hiệu vào (giả sử là 0), thì có thể cho tín hiệu vào: $\begin{cases} y[-1] = 1 \\ y[-2] = -1 \\ x[n] = 2^{-n}u[n] \end{cases}$

$y[n] = y_0[n] + y_s[n]$

Với $y_0[n]$: $y[n] + y[n-2] = 0$

Dạng này cũng là tổ hợp tuyến tính của các hàm mũ, nhưng dạng khác so với trường hợp liên tục: $\sum c_i z_i^n$. Để tìm các z_i, chúng ta cũng thay $y[n] = z^n$ vào PT thuần nhất.

$$\begin{aligned} z^n + z^{n-2} &= 0 \\ z^{n-2}(z^2+1) &= 0 \end{aligned}$$

Nghiệm $z = 0$ là vô nghĩa, nên không cần xét, nên chỉ xét $z^2 + 1 = 0$. Đây là PT có 2 nghiệm phức: $z_{1,2} = \pm j$. Có thể thắc mắc nghiệm phức thì làm sao cho ra hệ thống thực được, nhưng thực ra chỉ là biểu diễn qua số phức. KQ khi ra thì vẫn là thực.

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \pm j \\ y_0[n] &= c_1 j^n + c_2(-j)^n \\ y_0[-1] &= 1 \Rightarrow c_1 - c_2 = j \\ y_0[-2] &= -1 \Rightarrow c_1 + c_2 = +1 \end{aligned}$$

$$y_s[n] = k_1 j^n + k_2(-j)^n + k_3 2^{-n}$$

Note. Các hệ số PT đặc trưng cũng chính là các hệ số của PT vi phân.

Với trường hợp rời rạc, không đồng nhất hệ số (dễ bị sai), nên tính bằng **đệ quy**. Chẳng hạn với $y_s[-1], y_s[-2]$ sẽ cho ra $y_s[0]$ thông qua $y[n] + y[n-2] = x[n]$:

Khi đổi thành $u[n-1]$ thì điều kiện đầu chuyển sang $y_s[-1] = y_s[0] = 0$.

$$\begin{aligned} y_s[-1] &= 0 \\ y_s[1] + y_s[-1] &= x[1] \\ y_s[1] &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Thay tiếp và lại giải được tiếp.

EXAMPLE. $x[n] = 2^{-n}u[n-1]$

Cũng tương tự, nhưng tín hiệu này chỉ xuất hiện từ khi $n = 1$. Chúng ta không thể dùng $y_s[0]$ (thực chất vẫn phụ thuộc vào đk đầu). Chung quy chỉ là trung gian để tính.

1.1 Dạng tích chập

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \times h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

EXAMPLE. $\begin{cases} h(t) = \delta(t-1) + \delta(t+1) \\ x(t) = e^{-2t}u(t) \end{cases}$. Ta có:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= x(t) \times (\delta(t-1) + \delta(t+1)) \\
&= x(t) \times \delta(t-1) + x(t) \times \delta(t+1) \\
&= x(t-1) \times \delta(t) + x(t+1) \times \delta(t) \\
&= x(t-1) + x(t+1) \qquad \text{(Nhân với } \delta(t) \text{ là chính nó)} \\
&= e^{-2(t-1)}u(t-1) + e^{-2(t+1)}u(t+1) \qquad \text{(tính chất liên quan đến tích phân của xung } \delta) \\
&= \int_0^{+\infty} \left[\delta(t-\tau-1) + \delta(t-\tau+1)\right] d\tau \qquad \text{(Sửa lại cận của tích phân để khử } u(\tau)) \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-2\tau}\delta(t-\tau-1)\, d\tau \qquad \text{(biến ở đây là } \tau\text{, công thức chỉ áp dụng được khi } t-1 \geq 0) \\
&\quad + \int_0^{\infty} e^{-2\tau}\delta(t-\tau+1) d\tau \qquad \text{(công thức chỉ áp dụng được khi } t+1 \geq 0) \\
&= e^{-2(t-1)} \times u(t-1) + e^{-2(t+1)} \times u(t+1)
\end{aligned}
$$

.

Lấy mẫu bằng hàm xung. Năng lượng không phải giá trị tức thời, nên không đơn giản thay $t = t_0$, mà nguyên tắc là **tích lũy năng lượng**. Chẳng hạn chụp ảnh, ảnh của khung cảnh tại 1 thời điểm, nhưng màn chập của máy ảnh đã mở trong 1 khoảng thời gian đủ lớn $\frac{1}{30}$s để lượng ánh sáng và năng lượng, photon đủ vào, tích lũy tại các cảm biến trên mp ảnh của máy ảnh. Bởi vậy có camera tốc độ cao (sensor có độ nhạy sáng cực kỳ cao để chụp ảnh trong ĐK ánh sáng rất yếu), và thấp.

Cho nên lấy mẫu tại 1 thời điểm, không có nghĩa là tức thời ở thời điểm đó mà phải có qtrinh tích lũy. Nên công thức lấy mẫu phải thể hiện bằng tích phân của $f(t)$: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)\, dt$.

EXAMPLE.

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x[n] * h[n] \\
h[n] &= u[n-2] \\
x[n] &= 2^n u[n]
\end{aligned}
$$

Ta có:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{-k}u[k]u[n-k-2] \qquad \text{(bỏ } u[k] \text{ được, còn để bỏ } u[n-k-2] \text{ thì...)}
\end{aligned}
$$

Tại đây k mang dấu âm, nên nhảy mức $n-2$.

+ TH1: $n-2 < 0$, thì $y[n] = 0$.
+ TH2: $n \geq 2$, thì $u[n-k-2] = 1$ trong khoảng $0 \to n-2$.

$$
y[n] = \sum_{k=0}^{n-2} 2^{-k} = \ldots
$$

Công thức chuỗi hàm mũ hữu hạn:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} \alpha^k &= \frac{\alpha^{N+1}-1}{\alpha-1} \\
\sum_{k=0}^{+\infty} &= \lim_{N\to\infty} \frac{\alpha^{N+1}-1}{\alpha-1} = \frac{1}{1-\alpha} \qquad (|\alpha| < 1 \Rightarrow \alpha^{N+1} \to 0)
\end{aligned}
$$

Không phải khi nào cận dưới cũng bằng không, nên phải đổi biến để đưa về dạng đó.

Cho nên ta có: $y[n] = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$

Giữa kỳ: C1, C2.