Đề cương Phương pháp tính

21020055 - Trần Thùy Dung

May 29

1 Giải gần đúng phương trình

1. Trình bày các phương pháp giải gần đúng phương trình. Áp dụng và giải phương trình $f(x) = \sin(x)$ với $x \in [3,4]$.

Phương pháp	Khởi tạo	`i = 1`	`i = 2`	`i = 3`
Chia đôi: $p = (a+b)/2$ - $f(p) < 0: \ a \leftarrow p$ - $f(p) > 0: \ b \leftarrow p$	$a = 3, \ b = 4$	$p = 3.5$ $f(p) < 0$ $[a,b] : [3.5, 3]$	$p = 3.25$ $f(p) < 0$ $[a,b] : [3.25, 3]$	$p = 3.125$ $f(p) > 0$ $[a,b] : [3.25, 3.125]$
Điểm bất động: $p \leftarrow g(p)$	$g(p) = f(p) + p$ $p_0 = 3$	$p_1 = 3.141$	$p_2 = 3.14159265$	
Newton: $p_n = p_{n-1} - \dfrac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$	$p_0 = 3$	$p_1 = 3.143$	$p_2 = 3.141592653$	
Dây cung: $p_n = p_{n-1} -$ $\dfrac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}$	$p_0 = 4$	$p_1 = 3.157$	$p_2 = 3.139$	$p_3 = 3.141592$
Điểm sai: $p = \dfrac{a.f(b) - b.f(a)}{f(b) - f(a)}$	$[a,b] : \ [4, 3]$	$p_1 = 3.157$ $f(p_1) < 0$ $[a,b] : [3.157, 3]$	$p_2 = 3.142$ $f(p_2) < 0$ $[a,b] : [3.142, 3]$	$p_3 = 3.141592$

2 Giải hệ phương trình

2.1 Giải chính xác

Trình bày các phương pháp giải trực tiếp hệ phương trình tuyến tính.
Giải. Các phương pháp giải trực tiếp:

- Phương pháp Cramer, phương pháp thế, phương pháp sử dụng ma trận nghịch đảo.
- **Phương pháp khử Gauss, Gauss-Jordan.** Thực hiện các thao tác hàng.
- **Phân tích nhân tử.** Nếu phân tích $A = LU$, với L là ma trận tam giác dưới và U là ma trận tam giác trên, thì có thể tính $\mathbf{y}$ từ $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$, rồi tính được $\mathbf{x}$ từ $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$. Một số phương pháp phân tích dưới đây có thể áp dụng:
  - **Phương pháp Cholesky:** Chỉ áp dụng khi A là ma trận xác định dương. Ta

phân tích $A = L \cdot \underbrace{L^T}_{U}$, với L là ma trận tam giác dưới. Xác định L:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad l_{j1} = \frac{a_{j1}}{l_{11}} \quad (2 \le j \le n)$$
$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{s=1}^{j-1} l_{js}^2} \quad (2 \le j \le n)$$
$$l_{pj} = \frac{1}{l_{jj}}(a_{pj} - \sum_{s=1}^{j-1} l_{js}.l_{ps}) \quad (2 \le j,\ j+1 \le p \le n)$$

– **Phương pháp Doolittle:** Ta phân tích:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}}_{U}$$

Các phần tử của L, U xác định như sau:

$U_{1j} = A_{1j}$ $\qquad$ $L_{1j} = 1/U_{jj} \cdot A_{1j}$

$U_{ij} = A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}.U_{kj}$ $\qquad$ $L_{ij} = 1/U_{jj} \cdot (A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}.U_{kj}) \quad (i > 1)$

– **Phương pháp Crout:** Ta phân tích:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} \\ l_{21} & l_{21}u_{12} + l_{22} & l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} \\ l_{31} & l_{31}u_{12} + l_{32} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} \end{bmatrix}}_{A}$$

Sau đó giải thủ công các phần tử trên ma trận.

Ví dụ : Áp dụng các phương pháp trên với:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -3 \\ -3 & 10 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Phân tích A theo phương pháp Cholesky và Doolittle. Áp dụng giải hệ phương trình $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, với $\mathbf{b} = [-9,\ -1.5,\ 5]^T$

Giải:

Phương pháp Gauss-Jordan. Đưa về ma trận bậc thang thu gọn.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & -3 & -3 & -9 \\ -3 & 10 & 1 & -1.5 \\ -3 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[D_2 - D_3 \to D_3]{3D_2 + D_1 \to D_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 27 & 0 & -13.5 \\ -3 & 10 & 1 & -1.5 \\ 0 & 9 & -4 & -6.5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 10 & 1 & -1.5 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 9 & -4 & -6.5 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[\frac{1}{4}D_3 \to D_3]{9D2 - D_3 \to D_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 10 & 1 & -1.5 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{3}D_1 \to D_1]{10D_2 + D_3 - D_1 \to D_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{array}\right]$$

Phương pháp Cholesky. Ta xây L theo từng cột. Tại mỗi cột j hiện tại, mình tính phần tử trên đường chéo l_{jj} trước tiên (bởi các phần tử cột trước); rồi bắt đầu tính các phần tử cùng cột nhưng hàng dưới, tăng dần theo hàng.

Ta có: $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ hay $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -1.5 \\ 5 \end{bmatrix}$, suy ra $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1.5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$L^T\mathbf{x} = \mathbf{y}$ hay $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1.5 \\ 1 \end{bmatrix}$, suy ra $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

Phương pháp Doolitle. Xây các phần tử trên đường chéo trước, rồi xây L đi xuống và U đi sang phải.

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 9 & -3 & -3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{U}$$

$$\text{Ta có } L\mathbf{y} = \mathbf{b} \text{ hay } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -1.5 \\ 5 \end{bmatrix}, \text{ suy ra } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -9 \\ -4.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ hay } \begin{bmatrix} 9 & -3 & -3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -4.5 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ suy ra } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

2.2 Giải gần đúng

Lặp

Sau khi viết lại hệ dưới dạng dưới đây, ta được ma trận A có đường chéo là các phần tử 1.

$$\begin{aligned} x_1 &= & &+ c_{12}x_2 & &+ c_{13}x_3 + \dots \\ x_2 &= c_{21}x_1 & &+ & &+ c_{23}x_3 + \dots \\ &\vdots \\ x_n &= c_{n1}x_1 & &+ c_{n2}x_2 & &+ c_{n3}x_3 + \dots \end{aligned}$$

Phương pháp lặp đơn Jacobi:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= \mathbf{b} \\ C &= I - A \\ \mathbf{x}_n &= C \cdot \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{b} \end{aligned}$$

Phương pháp lặp Gauss-Seidel:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= \mathbf{d}, \quad A = L + I + U \\ C &= -(I+L)^{-1}U, \quad \mathbf{d} = (I+L)^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x}_n &= C \cdot \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{d} \end{aligned}$$

Ví dụ

(a) Tính toán 3 lần lặp, sai số 10^{-3} các phương pháp trên, giải gần đúng hệ phương trình $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ với $b = [-9, -1.5, 5]^T$, $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ và

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -3 \\ -3 & 10 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

(b) Chạy chương trình với A là ma trận vuông cấp 10.

(c) Đánh giá sai số

(a) Phần cộng, nhân ma trận, tính ma trận nghịch đảo có thể bấm máy.

$$\text{Ta chuyển } A = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 \\ -0.3 & 1 & 0.1 \\ -0.6 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -0.15 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Phương pháp Jacobi. $C = I - A = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0.3 & 0 & -0.1 \\ 0.6 & -0.2 & 0 \end{bmatrix}$.

i	$\mathbf{x}_i^T$	$[C\mathbf{x}_i]^T$
0	$[0,\ 0,\ 0]$	$[0,\ 0,\ 0]$
1	$[-1,\ -0.15,\ 1]$	$[0.283,\ -0.4,\ -0.57]$
2	$[-0.717,\ -0.55,\ 0.43]$	$[-0.04,\ -0.258,\ -0.32]$
3	$[-1.04,\ -0.408,\ 0.68]$	

3 Nội suy

Bảng 1: Phương pháp nội suy

<table>
<tr><td>Lagrange</td><td>Xây đa thức $p_n(x)$ bậc n từ $n+1$ bộ giá trị $(x_i,\ f_i)$:
$l_k = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)$
$L_k(x) = l_k(x)\ /\ l_k(x_k)$
$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x).f_k$</td></tr>
<tr><td>Newton Forward
$x_i = x_0 + i * h$
(các mốc cách đều h)</td><td>$\Delta^{i+1} f_j = \Delta^i f_{j+1} - \Delta^i f_j,\ \ r = (x-x_0)/h$
$$\begin{array}{|c|cccccc|}\hline j & x_j & f_j & \dots & \Delta^{n-1} f_j & \Delta^n f_j \\ \hline 0 & x_0 & f_0 & \dots & \Delta^{n-1} f_0 & \Delta^n f_0 \\ 1 & x_1 & f_1 & \dots & \Delta^{n-1} f_1 & \\ \vdots & & & \iddots & & \\ n & x_n & f_n & & & \\ \hline \end{array}$$
$f(x) \approx p_n(x) = \sum_{s=0}^{n} \binom{r}{s} \Delta^s f_0$
$= f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots + \frac{r(r-1)...(r-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$</td></tr>
<tr><td>Newton Backward
$x_i = x_0 + i * h$
(các mốc cách đều h)</td><td>$\nabla^i f_j = \nabla^{i-1} f_j - \nabla^{i-1} f_{j-1},\ \ r = (x-x_0)/h$
$$\begin{array}{|c|cccccc|}\hline j & x_j & f_j & \dots & \nabla^{n-1} f_j & \nabla^n f_j \\ \hline 0 & x_0 & f_0 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ n-1 & x_{n-1} & f_{n-1} & \dots & \nabla^{n-1} f_1 & \\ n & x_n & f_n & \dots & \nabla^{n-1} f_n & \nabla^n f_n \\ \hline \end{array}$$
$f(x) \approx p_n(x) = \sum_{s=0}^{n} \binom{r+s-1}{s} \nabla^s f_0$
$= f_0 + r\nabla f_0 + \frac{r(r+1)}{2!}\nabla^2 f_0 + \dots + \frac{r(r+1)...(r+n-1)}{n!}\nabla^n f_0$</td></tr>
<tr><td>Cubic Spline</td><td>Với $(i \in [0, n-1])$ xây dựng đa thức $g_i(x)$ cho đoạn $[x_i, x_{i+1}]$
$g_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i$
$g_i(x_i) = y_i = f_i$ và $g_i^{(0,1,2)}(x_{i+1}) = g_{i+1}^{(0,1,2)}(x_i + 1)$
$h_i = x_{i+1} - x_i\ ,\ S_i = g_i''(x_i)(\forall i = 0,..,n-1)$ và $S_n = S_{n-1}$
$a_i = \dfrac{S_{i+1} - S_i}{6h_i},\ b_i = \dfrac{S_i}{2},\ c_i = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \dfrac{h_i(2S_i - S_{i+1})}{6},\ d_i = y_i$
Giải hệ phương trình ẩn $S_0, S_1, .., S_n$:
$S_0 = f^{(2)}(x_0)$
$S_n = f^{(2)}(x_n)$
$h_{i-1}S_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)S_i + h_iS_{i+1} = 6(\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}})$</td></tr>
</table>

Ví dụ

Cho hàm số $f(x) = \sin(x)$.

(a) Xây dựng đa thức nội suy cho $f(x)$ trên $[0, \pi/2]$ theo 4 điểm mốc cách đều theo phương pháp Lagrange, Newton và Spline với $f^{(2)}(0) = 0, f^{(2)}(\pi/2) = -1$. Đánh giá sai số.

(b) Lập trình để xây dựng đa thức nội suy cho $f(x)$ trên $[0, \pi/2]$ theo 50 điểm mốc cách đều theo phương pháp Lagrange, Newton và Spline với $f^{(2)}(0) = 0,\ f^{(2)}(\pi/2) = -1$. Đánh giá sai số.

Giải.

(a) $n = 3$, $\mathbf{x} = [0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, 0.5\pi]$

Phương pháp Lagrange.

$$p_n(x) = f(0)\frac{(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{3})(x-0.5\pi)}{(0-\frac{\pi}{6})(0-\frac{\pi}{3})(0-0.5\pi)} + f(\frac{\pi}{6})\frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{3})(x-0.5\pi)}{(\frac{\pi}{6}-0)(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3})(\frac{\pi}{6}-0.5\pi)}$$

$$+ f(\frac{\pi}{3})\frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{6})(x-0.5\pi)}{(\frac{\pi}{3}-0)(\frac{\pi}{3}-\frac{pi}{6})(\frac{\pi}{3}-0.5\pi)} + f(0.5\pi)\frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{3})}{(0.5\pi-0)(0.5\pi-\frac{\pi}{6})(0.5\pi-\frac{\pi}{3})}$$

$$p_n(x) = -0.11387x^3 - 0.06547x^2 + 1.02043x$$

Phương pháp Newton.

j	x_j	f_j	Δf_j	$\Delta^2 f_j$	$\Delta^3 f_j$
0	0	0	0.5	−0.13397	−0.09809
1	$\frac{\pi}{6}$	0.5	0.36603	−0.23206	
2	0.86603	0.13397			
3	0.5π	1			

$$r = \frac{(x-0)}{h} = \frac{6x}{\pi}$$

$$p(x) = 0 + 0.5(1.90985x) - 0.13397\frac{(1.90985x)(1.90985x-1)}{2}$$

$$- 0.09809\frac{(1.90985x)(1.90985x-1)(1.90985x-2)}{6}$$

$$p(x) = -0.11389x^3 - 0.06544x^2 + 1.02041x$$

Phương pháp Spline.

$S_0 = f^2(0) = 0$

$S_3 = f^2(\frac{\pi}{2}) = -1$

Do $h_0 = h_1 = h_2 = \frac{\pi}{6}$

$$\frac{\pi}{6}S_0 + \frac{2\pi}{3}S_1 + \frac{\pi}{6}S_2 = \frac{36}{\pi}(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1)$$

$$\frac{\pi}{6}S_1 + \frac{2\pi}{3}S_2 + \frac{\pi}{6}S_3 = \frac{36}{\pi}(\frac{3}{2} - \sqrt{3})$$

Giải hệ ta có: $S_1 = -0.50998$, $S_2 = -0.89213$

4 Xấp xỉ bình phương tối thiểu

Ví dụ

(a) Trình bày các phương pháp xấp xỉ bình phương tối thiểu rời rạc và liên tục. Áp dụng phương pháp xấp xỉ bình phương tối thiểu **rời rạc** cho $f(x) = (2\pi)^{0.5}e^{-x^2/2}$ với x trên đoạn $[0, 1]$.

(b) Tính bằng tay với 5 điểm mốc cách đều, xây dựng đa thức bậc 1, bậc 2 theo phương pháp bình phương tối thiểu. Đánh giá sai số.

(a) Áp dụng phương pháp xấp xỉ bình phương tối thiểu **liên tục** cho $f(x) = \sin(x)$ với x trên đoạn $[0, \pi/2]$. Đánh giá sai số.

5 Tính gần đúng đạo hàm

Ví dụ

(a) Viết các công thức tính gần đúng đạo hàm bậc nhất và bậc 2. Áp dụng tính gần đúng đạo hàm cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^{0.5}} e^{-x^2/2}$ trên $[0, 1]$ với 5 điểm mốc cách đều. Đánh giá sai số.

(b) Tính bằng máy trên $[0, 1]$ với 50 điểm mốc cách đều. Đánh giá sai số.

Giải.
(a) Chỉ cần chọn 1 phương pháp để tính.

Bảng 2: Công thức tính đạo hàm

3-point midpoint	$\frac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)]$
3-point endpoint	$\frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)]$
5-point midpoint	$\frac{1}{12h}[f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)]$
5-point endpoint	$\frac{1}{12h}[-25f(x_0) + 48f(x_0 + h) - 36f(x_0 + 2h) + 16f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 4h)]$
Đạo hàm bậc 2	$f^{(2)}(x_0) = h^{-2}.[f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)]$

Áp dụng: $h = (1 - 0)/5 = 0.2$

(b)

6 Tính gần đúng Tích phân xác định

Ví dụ

(a) Viết các công thức tính gần đúng tích phân theo công thức hình thang, công thức Simpson và công thức điểm giữa. Áp dụng, tính gần đúng tích phân cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^{-0.5}} e^{-x^2/2}$ trên $[0, 1]$ với 4 điểm mốc. Đánh giá sai số.

(b) Tính bằng máy trên $[0, 1]$ với 50 điểm mốc. Đánh giá sai số.

(a) Có 3 dạng:

Bảng 3: Phương pháp tính tích phân

	$h = (b - a)/n$
Trapezoidal Rule	$T_n = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$
Midpoint Rule	$M_n = h\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \ldots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right]$
Simpson Rule	Chẵn: x2, Lẻ: x4 $S_n = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

Áp dụng: $f(x) = \sqrt{2\pi}.e^{-x^2/2}$, $h = 0.25$, Đáp án: 2.14473

	$h = (b-a)/n = (1-0)/4 = 0.25$
Trapezoidal Rule	$T_n = \frac{0.25}{2}\left[f(0) + 2f(0.25) + 2f(0.5) + 2f(0.75) + f(1)\right] = 2.13680$
Midpoint Rule	$M_n = 0.25\left[f(0.125) + f(0.375) + f(0.625) + f(0.875)\right] = 2.14871$
Simpson Rule	$S_n = \frac{0.25}{3}\left[f(0) + 4f(0.25) + 2f(0.5) + 4f(0.75) + f(1)\right] = 2.14480$

(b) Chạy chương trình:

```
import IntegralApprox
from math import pi, e

if __name__ == "__main__":
    f = lambda x: (2 * pi) ** 0.5 * e ** (-x**2/2)
    a, b = (0, 1)
    n = 50

    trap = IntegralApprox.TrapezoidalRule()
    mid = IntegralApprox.MidpointRule()
    simp = IntegralApprox.SimpsonRule()

    print("Trapezoidal Rule: ", trap.solve(f, a, b, n))
    print("Midpoint Rule: ", mid.solve(f, a, b, n))
    print("Simpson Rule: ", simp.solve(f, a, b, n))
```

Kết quả:

```
Trapezoidal Rule:  2.144681614275053
Midpoint Rule   :  2.1140466356463916
Simpson Rule    :  2.1447322933497492
```

7 Giải gần đúng phương trình vi phân

Ví dụ

(a) Trình bày các phương pháp giải gần đúng PTVP bậc nhất.
Áp dụng giải PT $y' = 2xy$, $y(1) = 1$, $h = 0.1$, tính đến y_2. Đánh giá sai số.

(b) Lập trình tính đến y_{10} với $h = 0.01$. Đánh giá sai số.

(a) Phương trình vi phân là phương trình có dạng $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$.

Bảng 4: Áp dụng các phương pháp xấp xỉ PTVP bậc nhất

$x_0 = 1, y_0 = 1, f(x,y) = 2xy$	**i = 1**	**i = 2**
Chuỗi Taylor. $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i).h$	$x_1 = 1.1$ $y_1 = 1 + 2(0.1) = 1.2$	$x_2 = 1.2$ $y_2 = 1.2 + (2.64)(0.1)$ $= 1.464$
Mid-point. $x_{i+1/2} = x_i + h/2$ $y_{i+1/2} = y_i + h/2.f(x_i, y_i)$ $f_{i+1/2} = f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$ $y_{i+1} = y_i + h.f_{i+1/2}$	$x_{0.5} = 1.05$ $y_{0.5} = 1.1$ $f_{0.5} = 2.31$ $y_1 = 1.231$	$x_{1.5} = 1.15$ $y_{1.5} = 1.366$ $f_{1.5} = 3.1418$ $y_2 = 1.545$
Heun. $\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$ (đệm) $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i)$ $+f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})]$	$\tilde{y}_1 = 1.2$ $y_1 = 1.232$	$\tilde{y}_2 = 1.503$ $y_2 = 1.548$
Runge-Kutta (RK4) $k_1 = f(x_i, y_i)$ $k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1 h)$ $k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2 h)$ $k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$ $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2$ $+2k_3 + k_4)$	$k_1 = 2$ $k_2 = 2.31$ $k_3 = 2.343$ $k_4 = 2.715$ $y_1 = 1.234$	$k_1 = 2.714$ $k_2 = 3.150$ $k_3 = 3.200$ $k_4 = 3.730$ $y_2 = 1.553$

(b) Kết quả chạy chương trình:

Bảng 5: Chạy chương trình giải gần đúng PTVP

i	Taylor	Midpoint	Heun	RK4
0	1.02	1.020301	1.020302	1.020303365234
1	1.040604	1.041222302614	1.041224353624	1.04122718172
2	1.0618323216	1.062785079401	1.062788234935	1.062792629519
3	1.083706067425	1.085011326951	1.085015643149	1.085021714204
4	1.106247153627	1.107923901747	1.107929437507	1.107937301744
5	1.129478343854	1.131546556614	1.131553373732	1.131563154992
6	1.153423284743	1.155903978852	1.155912142159	1.155923971837
7	1.178106543037	1.181021830107	1.18103140763	1.181045425118
8	1.203553644366	1.206926788097	1.20693785121	1.206954204377
9	1.229791113814	1.233646590249	1.233659213849	1.233678059539

Ví dụ

(a) Trình bày các phương pháp giải gần đúng **hệ** PTVP bậc nhất và bậc cao. Áp dụng giải hệ sau:

$$x^{(2)} = e^{-x'} + x - \cos t$$
$$y' = \sqrt[3]{y} - tx'$$
$$x(0) = -2, \; x'(0) = 0, \; y(0) = 8$$

Chuyển bài toán trên thành 1 hệ tương đương các phương trình vi phân bậc nhất với các giá trị ban đầu. Lấy 2 bước với phương pháp Euler và độ dài bước $h = 0.5$ cho hệ này.

(**b**) Giải bằng máy với $h = 0.01$ trên đoạn $[0, 1]$. Đánh giá sai số.

(**a**) • Hệ n PTVP bậc nhất có dạng: $Y(x) = [y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)]^T$
Khi đó: $F(y, x) = \frac{dY(x)}{dx} = [\frac{y_1(x)}{dx},\ \frac{y_2(x)}{dx},\ \ldots,\ \frac{y_n(x)}{dx}]^T$

Ta giải tương tự với các phương pháp nêu ở bài trước (cho PTVP bậc nhất), thay Y thành vector.

• Đối với hệ PTVP bậc cao, ta đưa về hệ phương trình bậc nhất.

Áp dụng. Đặt $z = x'$, ta có $F(x, y, z) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \sqrt[3]{y} - tz \\ e^{-z} + x - \cos(t) \end{bmatrix}$, $Y(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$

Bảng 6: Áp dụng giải hệ phương trình vi phân bậc cao

`i = 0`	`i = 1`	`i = 2`
$Y = [-2,\ 8,\ 0]^T$	$Y = [-2,\ 9,\ -1]^T$	$Y = [-2.5,\ 10.29,\ -1.08]^T$
$F = [0,\ 2,\ -2]^T$	$F = [-1,\ 2.58,\ -0.159]^T$	

(**b**) Kết quả chạy chương trình với $h = 0.01$ trên đoạn $[0, 1]$: (Tự chạy nha).

8 Tính gần đúng trị riêng bằng phương pháp lũy thừa

Ví dụ

(a) Trình bày các phương pháp tính gần đúng trị riêng trội nhất và véctơ riêng trội nhất. Áp dụng tính với ma trận cấp 2 với 5 bước. Đánh giá sai số.

(b) Lập trình với ma trận cấp 10 với 50 bước. Đánh giá sai số.

Giải. Các phương pháp tính gần đúng trị riêng trội nhất và vector riêng trội nhất:

Bảng 7: Phương pháp lũy thừa

	Euclidean Scaling	**Maximum Entry Scaling**
λ	$A\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i \ \to \lambda$	$\dfrac{A\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i}{\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i} \to \lambda$
$\mathbf{x}_i$	$A\mathbf{x}_{i-1} \ / \ \lVert A\mathbf{x}_{i-1} \rVert$	$\underbrace{A\mathbf{x}_{i-1}}_{A^i\mathbf{x}_0} \ / \ \max(\underbrace{A\mathbf{x}_{i-1}}_{A^i\mathbf{x}_0})$

Ví dụ ma trận cấp 2:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{with } \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Euclidean Scaling.

$$A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_1 = \frac{A\mathbf{x}_0}{\lVert A\mathbf{x}_0 \rVert} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \approx \frac{1}{3.60555}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.83205 \\ 0.55470 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}_1 \approx \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.83205 \\ 0.55470 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3.60555 \\ 3.32820 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_2 = \frac{A\mathbf{x}_1}{\lVert A\mathbf{x}_1 \rVert} \approx \frac{1}{4.90682}\begin{bmatrix} 3.60555 \\ 3.32820 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.73480 \\ 0.67828 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}_2 \approx \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.73480 \\ 0.67828 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3.56097 \\ 3.50445 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_3 = \frac{A\mathbf{x}_2}{\lVert A\mathbf{x}_2 \rVert} \approx \frac{1}{4.99616}\begin{bmatrix} 3.56097 \\ 3.50445 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.71274 \\ 0.70143 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}_3 \approx \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.71274 \\ 0.70143 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3.54108 \\ 3.52976 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_4 = \frac{A\mathbf{x}_3}{\lVert A\mathbf{x}_3 \rVert} \approx \frac{1}{4.99985}\begin{bmatrix} 3.54108 \\ 3.52976 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.70824 \\ 0.70597 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}_4 \approx \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.70824 \\ 0.70597 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3.53666 \\ 3.53440 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_5 = \frac{A\mathbf{x}_4}{\lVert A\mathbf{x}_4 \rVert} \approx \frac{1}{4.99999}\begin{bmatrix} 3.53666 \\ 3.53440 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.70733 \\ 0.70688 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^{(1)} = (A\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{x}_1 = (A\mathbf{x}_1)^T\mathbf{x}_1 \approx \begin{bmatrix} 3.60555 & 3.32820 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.83205 \\ 0.55470 \end{bmatrix} \approx 4.84615$$

$$\lambda^{(2)} = (A\mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{x}_2 = (A\mathbf{x}_2)^T\mathbf{x}_2 \approx \begin{bmatrix} 3.56097 & 3.50445 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.73480 \\ 0.67828 \end{bmatrix} \approx 4.99361$$

$$\lambda^{(3)} = (A\mathbf{x}_3) \cdot \mathbf{x}_3 = (A\mathbf{x}_3)^T\mathbf{x}_3 \approx \begin{bmatrix} 3.54108 & 3.52976 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.71274 \\ 0.70143 \end{bmatrix} \approx 4.99974$$

$$\lambda^{(4)} = (A\mathbf{x}_4) \cdot \mathbf{x}_4 = (A\mathbf{x}_4)^T\mathbf{x}_4 \approx \begin{bmatrix} 3.53666 & 3.53440 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.70824 \\ 0.70597 \end{bmatrix} \approx 4.99999$$

$$\lambda^{(5)} = (A\mathbf{x}_5) \cdot \mathbf{x}_5 = (A\mathbf{x}_5)^T\mathbf{x}_5 \approx \begin{bmatrix} 3.53576 & 3.53531 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.70733 \\ 0.70688 \end{bmatrix} \approx 5.00000$$

Maximum Entry Scaling.

$$A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_1 = \frac{A\mathbf{x}_0}{\max(A\mathbf{x}_0)} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 0.66667 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}_1 \approx \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 0.66667 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 4.33333 \\ 4.00000 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = \frac{A\mathbf{x}_1}{\max(A\mathbf{x}_1)} \approx \frac{1}{4.33333} \begin{bmatrix} 4.33333 \\ 4.00000 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 0.92308 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}_2 \approx \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 0.92308 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 4.84615 \\ 4.76923 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_3 = \frac{A\mathbf{x}_2}{\max(A\mathbf{x}_2)} \approx \frac{1}{4.84615} \begin{bmatrix} 4.84615 \\ 4.76923 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 0.98413 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}_3 \approx \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 0.98413 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 4.96825 \\ 4.95238 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_4 = \frac{A\mathbf{x}_3}{\max(A\mathbf{x}_3)} \approx \frac{1}{4.96825} \begin{bmatrix} 4.96825 \\ 4.95238 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 0.99681 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}_4 \approx \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 0.99681 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 4.99361 \\ 4.99042 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_5 = \frac{A\mathbf{x}_4}{\max(A\mathbf{x}_4)} \approx \frac{1}{4.99361} \begin{bmatrix} 4.99361 \\ 4.99042 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 0.99936 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^{(1)} = \frac{A\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1} = \frac{(A\mathbf{x}_1)^T \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1} \approx \frac{7.00000}{1.44444} \approx 4.84615$$

$$\lambda^{(2)} = \frac{A\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2} = \frac{(A\mathbf{x}_2)^T \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_2} \approx \frac{9.24852}{1.85207} \approx 4.99361$$

$$\lambda^{(3)} = \frac{A\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{x}_3}{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{x}_3} = \frac{(A\mathbf{x}_3)^T \mathbf{x}_3}{\mathbf{x}_3^T \mathbf{x}_3} \approx \frac{9.84203}{1.96851} \approx 4.99974$$

$$\lambda^{(4)} = \frac{A\mathbf{x}_4 \cdot \mathbf{x}_4}{\mathbf{x}_4 \cdot \mathbf{x}_4} = \frac{(A\mathbf{x}_4)^T \mathbf{x}_4}{\mathbf{x}_4^T \mathbf{x}_4} \approx \frac{9.96808}{1.99362} \approx 4.99999$$

$$\lambda^{(5)} = \frac{A\mathbf{x}_5 \cdot \mathbf{x}_5}{\mathbf{x}_5 \cdot \mathbf{x}_5} = \frac{(A\mathbf{x}_5)^T \mathbf{x}_5}{\mathbf{x}_5^T \mathbf{x}_5} \approx \frac{9.99360}{1.99872} \approx 5.00000$$