



Kiểm định giả thuyết (phần 2)

Giảng viên: Hoàng Thị Điệp
Khoa CNTT – Đại học Công Nghệ

Nội dung

- » Phương pháp P-giá trị
- » Kiểm định giả thuyết về giá trị của nhiều xác suất
- » So sánh hai giá trị trung bình
- » So sánh hai tỉ lệ

Các loại giả thuyết

» Giả thuyết không (H_0)

- Là một phát biểu về tham số của tổng thể
- Thường là một tuyên bố bị nghi ngờ
- Được cho là đúng cho đến khi nó được chứng minh là sai

» Giả thuyết thay thế (H_a)

- Nhà nghiên cứu mong muốn ủng hộ và chứng minh là đúng
- Là phát biểu ngược với H_0
- Được cho là đúng nếu H_0 bị bác bỏ

» **Kiểm định giả thuyết nhằm mục đích bác bỏ hoặc không bác bỏ H_0 . Không nên kết luận là chấp nhận H_0 .**

Xây dựng giả thuyết về trung bình tổng thể

- » Giả thuyết “có thay đổi”:
 - $H_0: \mu = \mu_0$
 - $H_a: \mu \neq \mu_0$

- » Giả thuyết “thay đổi lớn hơn”:
 - $H_0: \mu = \mu_0$
 - $H_a: \mu > \mu_0$
 - Lưu ý: Chúng ta phải bác bỏ H_0 để giả thuyết H_a đúng

- » Giả thuyết “thay đổi nhỏ hơn”:
 - $H_0: \mu = \mu_0$
 - $H_a: \mu < \mu_0$
 - Lưu ý: Chúng ta phải bác bỏ H_0 để giả thuyết H_a đúng

- » Trong đó μ_0 là giá trị cho trước.

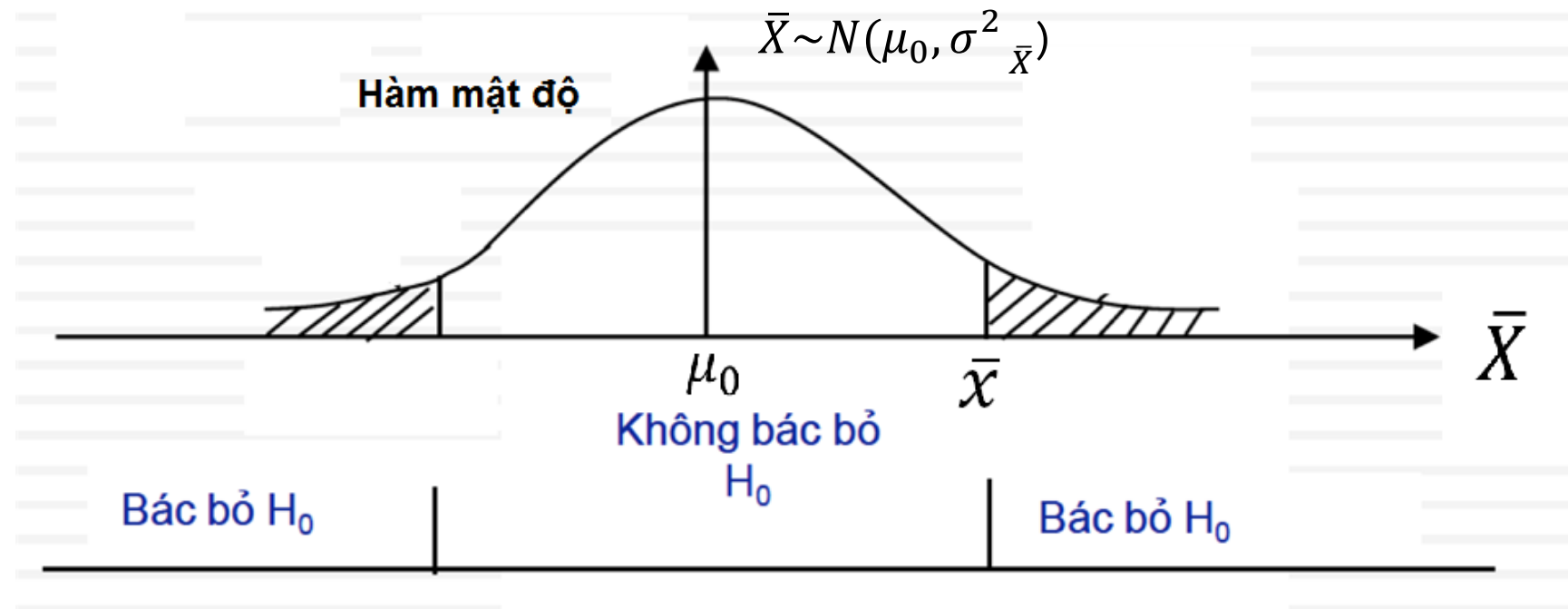
Trường hợp cỡ
mẫu lớn

Kiểm định giả thuyết “có thay đổi”

$$H_0: \mu = \mu_0$$

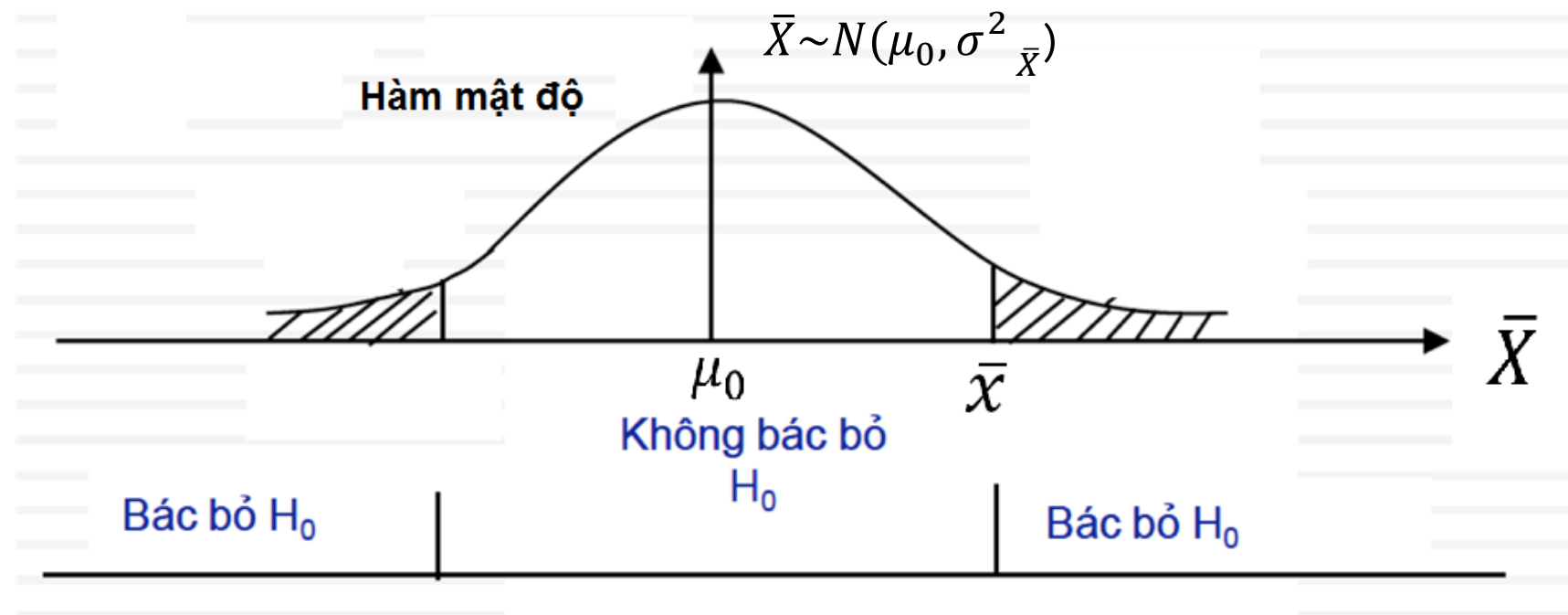
$$H_a: \mu \neq \mu_0$$

» P-value là mức ý nghĩa nhỏ nhất mà vẫn có thể bác bỏ được H_0 .



Một nhà nghiên cứu nhân chủng học muốn tìm hiểu xem chiều cao trung bình của thanh niên có thay đổi không so với mức $1.70m$ cách đây 10 năm. Một mẫu gồm 121 thanh niên được chọn và từ mẫu đó tính được $\bar{x} = 1.72m$ với độ lệch tiêu chuẩn $s = 0.02m$. Với mức ý nghĩa 5%, ta có thể kết luận gì về sự thay đổi chiều cao trung bình của thanh niên?

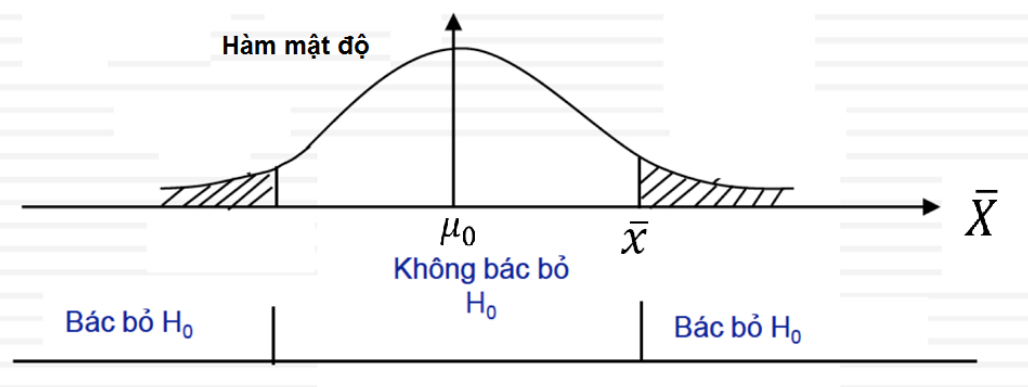
» P-value là mức ý nghĩa nhỏ nhất mà vẫn có thể bác bỏ được H_0 .



Một nhà nghiên cứu nhân chủng học muốn tìm hiểu xem chiều cao trung bình của thanh niên có thay đổi không so với mức $1.70m$ cách đây 10 năm. Một mẫu gồm 121 thanh niên được chọn và từ mẫu đó tính được $\bar{x} = 1.72m$ với độ lệch tiêu chuẩn $s = 0.02m$. Với mức ý nghĩa 5%, ta có thể kết luận gì về sự thay đổi chiều cao trung bình của thanh niên?

» P-value là mức ý nghĩa nhỏ nhất mà vẫn có thể bác bỏ được H_0 .

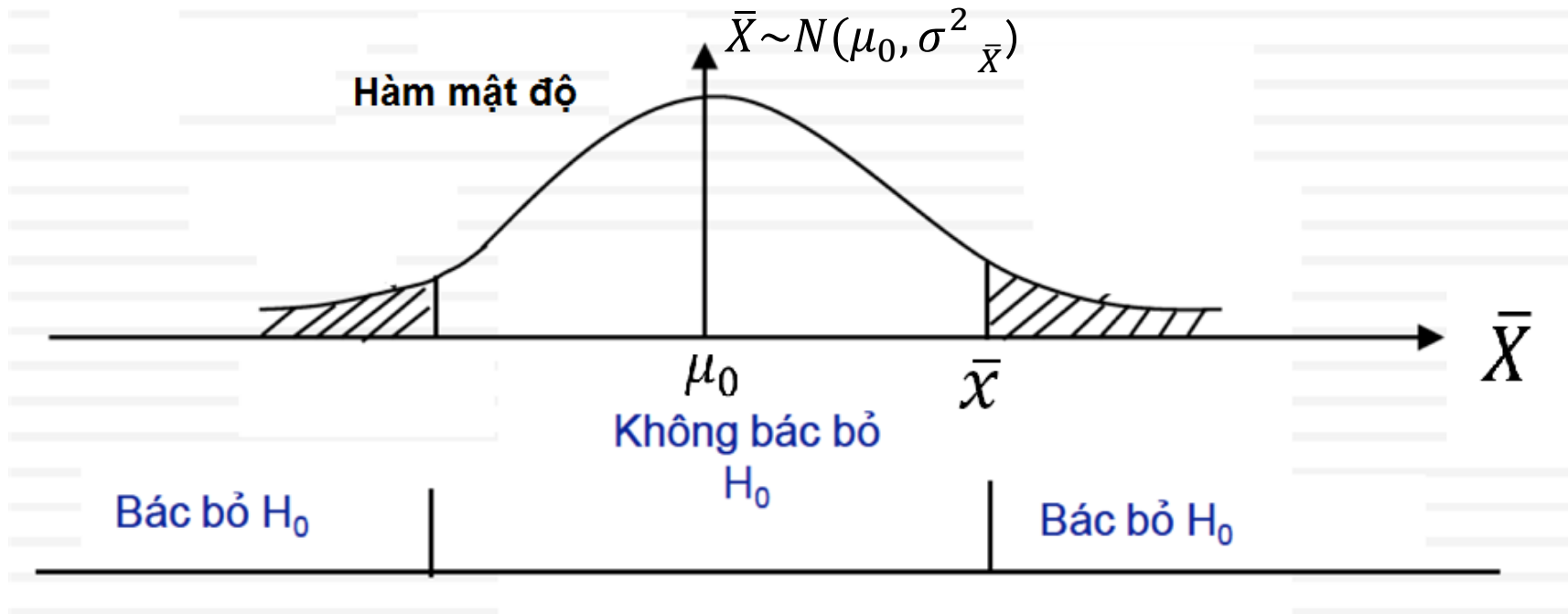
$$\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2_{\bar{X}})$$



Kiểm định giả thuyết “có thay đổi”

$H_0: \mu = \mu_0$

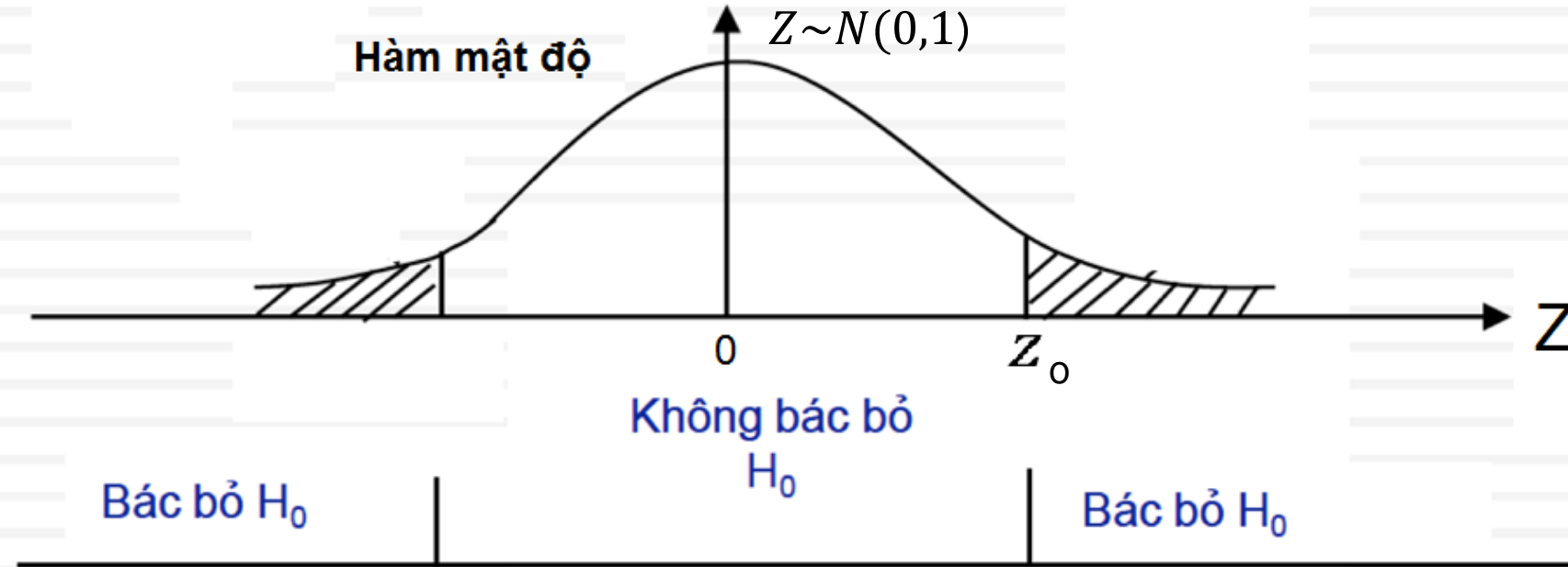
$H_a: \mu \neq \mu_0$



$$P - value = 2P(\bar{X} \leq \bar{x}) \text{ nếu } \bar{x} < \mu_0$$

$$P - value = 2P(\bar{X} \geq \bar{x}) \text{ nếu } \bar{x} > \mu_0$$

Kiểm định giả thuyết “có thay đổi”



Tính giá trị: $z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

$P - value = P(Z < -|z_0|) + P(Z > |z_0|) = 2 \times P(Z > |z_0|)$

Bài tập

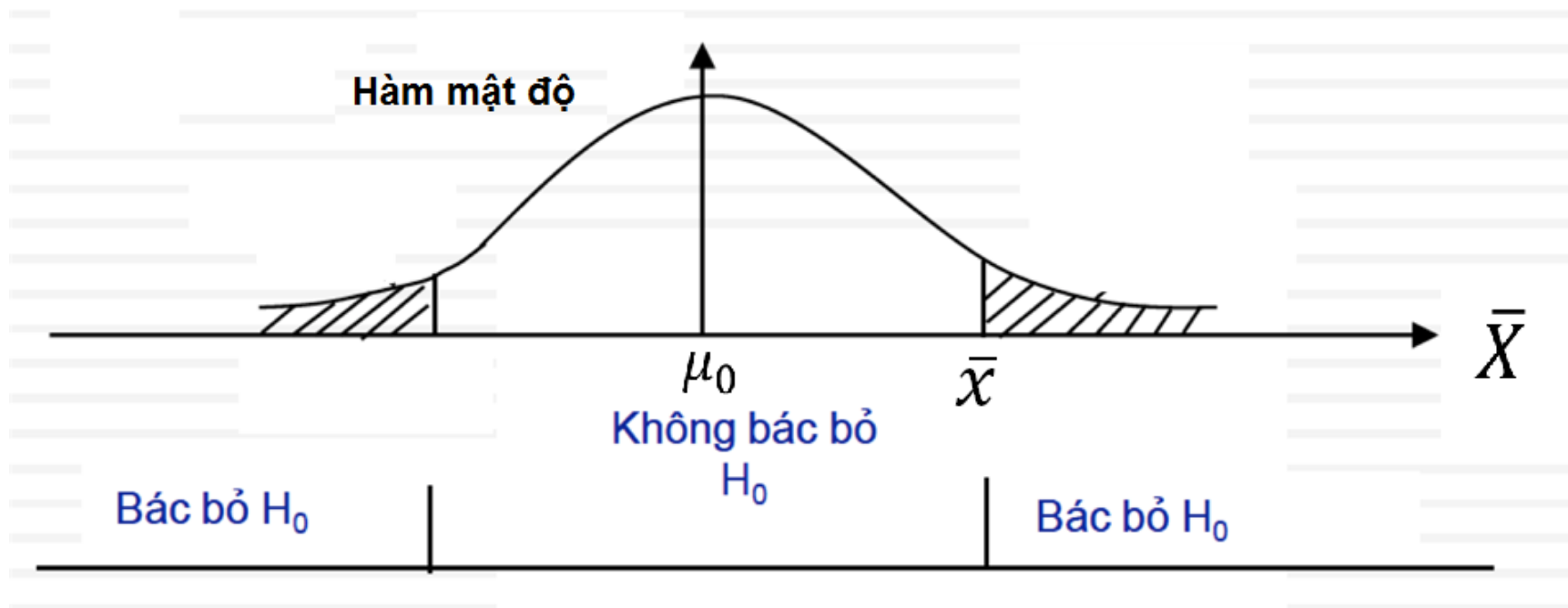
1. Một người nông dân sử dụng 1 loại phân bón mới cho 1 vườn táo và thu được 2756kg trên 100 cây. Biết rằng mức trung bình khi chưa sử dụng loại phân bón mới này là 26kg/1 cây với độ lệch chuẩn là 5,2kg. Hãy tìm giá trị p-value của giả thuyết loại phân bón mới làm thay đổi năng suất.
 - » 1. Thiết lập hai giả thuyết đối lập
 - » 2. Xác định mức ý nghĩa
 - » 3. Chọn lựa kiểm định phù hợp
 - » 4. Tính chỉ số thống kê tương ứng
 - » 5. Ra quyết định về giả thuyết không (bác bỏ hay không bác bỏ)
 - » 6. Ra một kết luận tổng thể

$$P - value = 2P(\bar{X} \leq \bar{x}) \text{ nếu } \bar{x} < \mu_0$$

$$P - value = 2P(\bar{X} \geq \bar{x}) \text{ nếu } \bar{x} > \mu_0$$

Bài tập

2. Sau khi thay đổi giám đốc, nhà máy sản xuất thép ghi nhận sản lượng trong 100 ngày, có trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu lần lượt là 880 tấn và 50 tấn. Hãy tìm giá trị p-value của giả thuyết rằng sản lượng bình quân hàng ngày của nhà máy hiện nay khác với mức sản lượng trung bình 892 tấn/ngày đã được ghi nhận cách đây 1 năm.



Bài tập

3. Một nhà máy sản xuất sắm lốp ô tô tuyên bố rằng tuổi thọ trung bình một chiếc lốp ô tô của họ là 30000 dặm. Cơ quan giám định nghi ngờ lời tuyên bố này đã kiểm tra 100 chiếc lốp và tìm được trung bình mẫu là $\bar{x} = 29000$ dặm với độ lệch tiêu chuẩn là 5000 dặm.

- a) Sử dụng phương pháp P-giá trị, hãy kết luận xem cơ quan giám định có bác bỏ được lời quảng cáo của nhà máy nói trên không? Mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.
- b) Cũng với câu hỏi trên nhưng với mức ý nghĩa được chọn là $\alpha = 0.02$.

Kiểm định giả thuyết “có thay đổi”

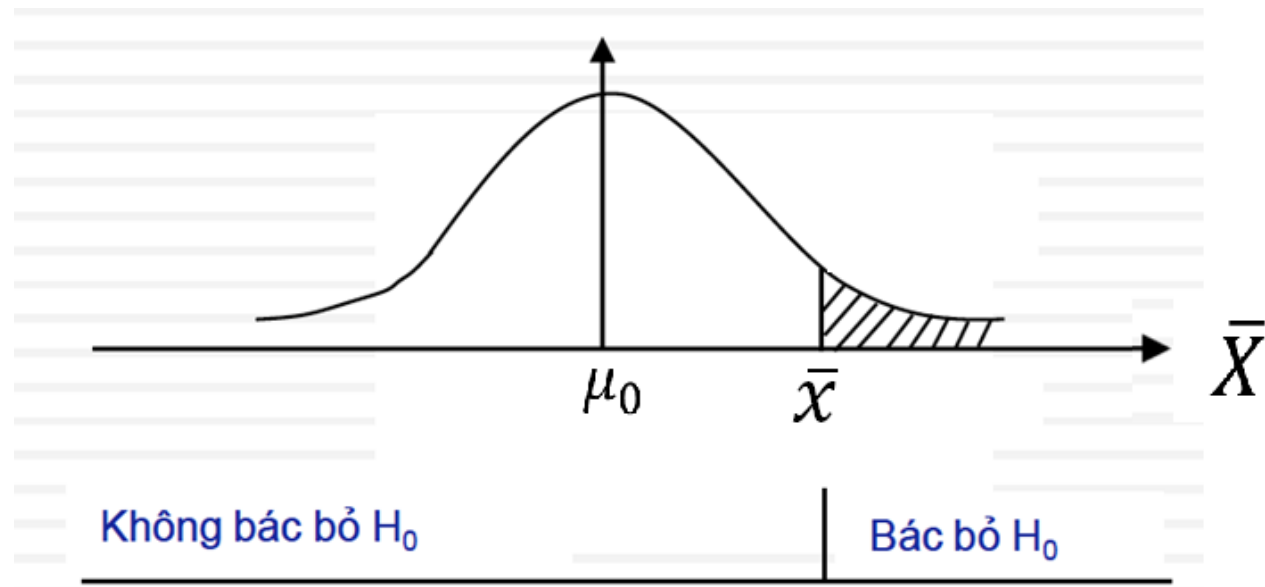
4. Một phương pháp ăn kiêng được quảng cáo rằng sẽ làm giảm trọng lượng ít nhất là 45 pound trong 6 tháng. Một mẫu gồm **36** người theo chế độ ăn kiêng này giảm trọng lượng trung bình là 35 pound với độ lệch tiêu chuẩn là 20 pound. Sử dụng phương pháp P-giá trị, hãy kết luận xem quảng cáo trên có nói đúng không? Mức ý nghĩa $\alpha = 0.01$.

Kiểm định giả thuyết “thay đổi lớn hơn”

$$H_0: \mu = \mu_0$$

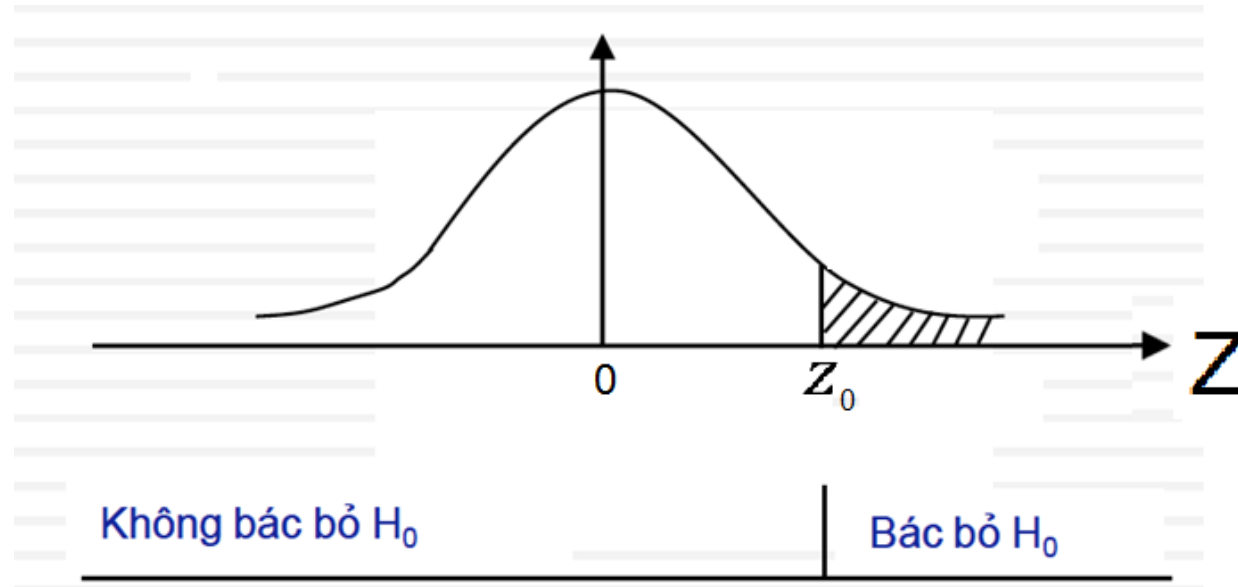
$$H_a: \mu > \mu_0$$

- » P-value là mức ý nghĩa nhỏ nhất mà vẫn có thể bác bỏ được H_0 .
- » Kiểm định 1 phía



$$P - value = P(\bar{X} \geq \bar{x})$$

Kiểm định giả thuyết “thay đổi lớn hơn”



Tính giá trị:
$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$P - value = P(Z > z_0)$$

Bài tập

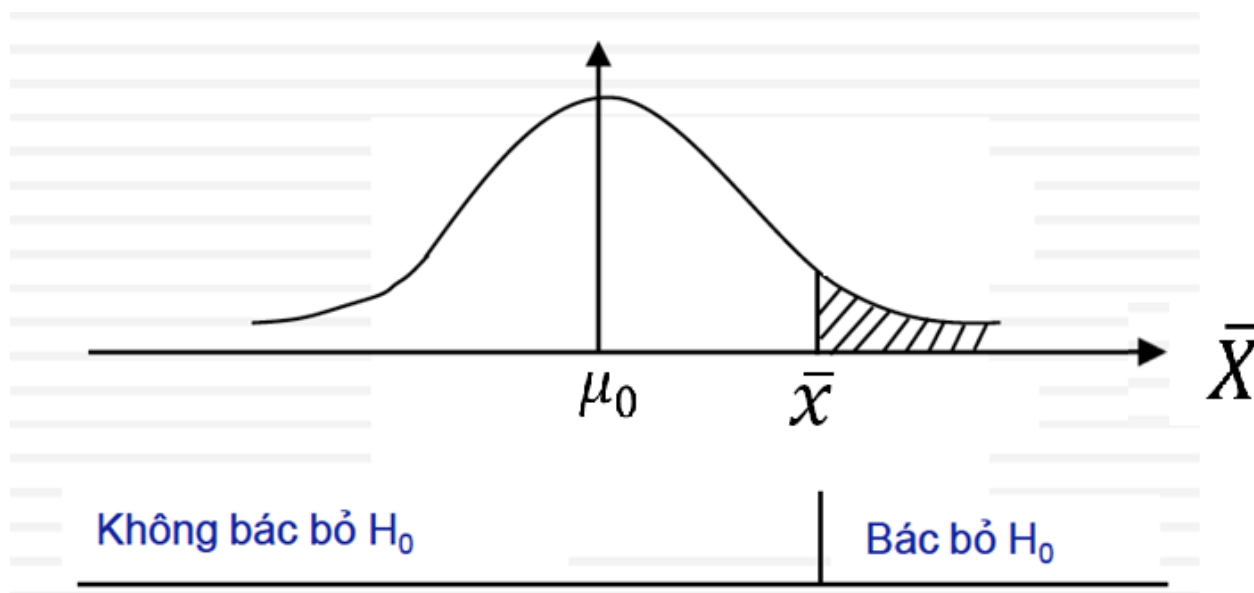
1. Một người nông dân sử dụng 1 loại phân bón mới cho 1 vườn táo và thu được 2956kg trên một 100 cây. Biết rằng mức trung bình khi chưa sử dụng loại phân bón mới này là 26kg/1 cây với độ lệch chuẩn là 5,2kg. Hãy tính p-value của giả thuyết sản lượng của cây táo tăng lên bởi loại phân bón này.
2. Sau khi thay đổi giám đốc mới, nhà máy sản xuất thép ghi nhận sản lượng trong 100 ngày, có trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu lần lượt là 980 tấn và 50 tấn. Hãy tính p-value của giả thuyết rằng sản lượng bình quân hàng ngày của nhà máy hiện tăng hơn so với mức sản lượng trung bình 892 tấn/ngày đã được ghi nhận cách đây 1 năm.

Bài tập

3. (Thí dụ 15, trang 106) Từ một tập hợp chính có trung bình μ (chưa biết) người ta lấy ra một mẫu có kích thước $n=36$ và tính được trung bình mẫu $\bar{x}=5040$ và độ lệch tiêu chuẩn mẫu $s=780$. Sử dụng phương pháp p-giá trị hãy kiểm định giả thiết:

» $H_0: \mu = 4700$

» $H_a: \mu > 4700$



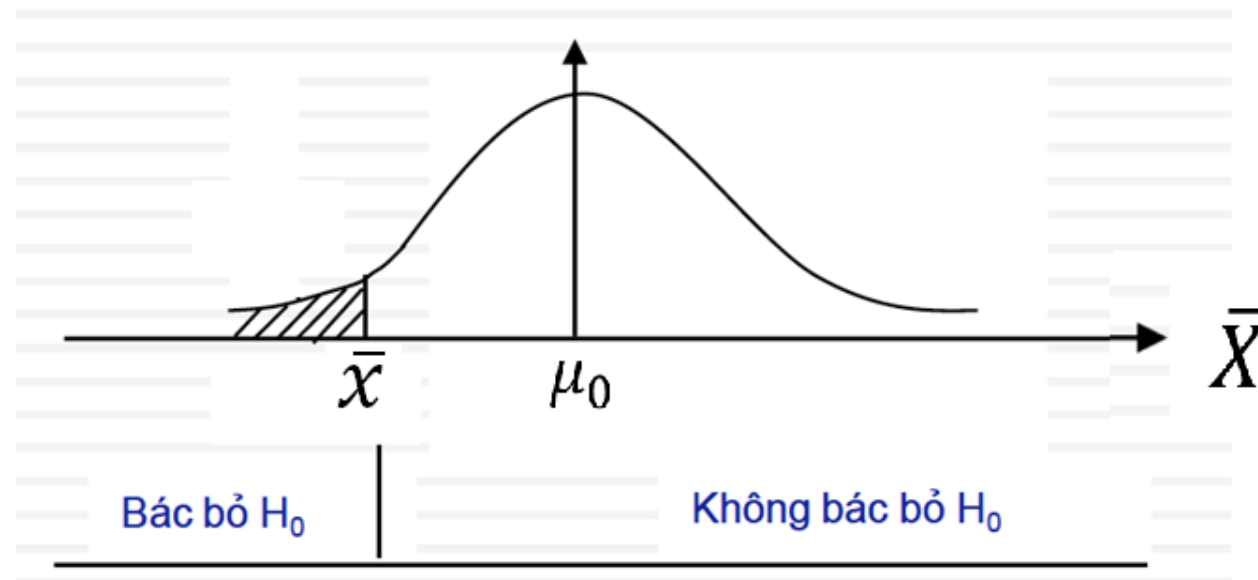
$$P - value = P(\bar{X} \geq \bar{x})$$

Kiểm định giả thuyết “thay đổi nhỏ hơn”

$$H_0: \mu = \mu_0$$

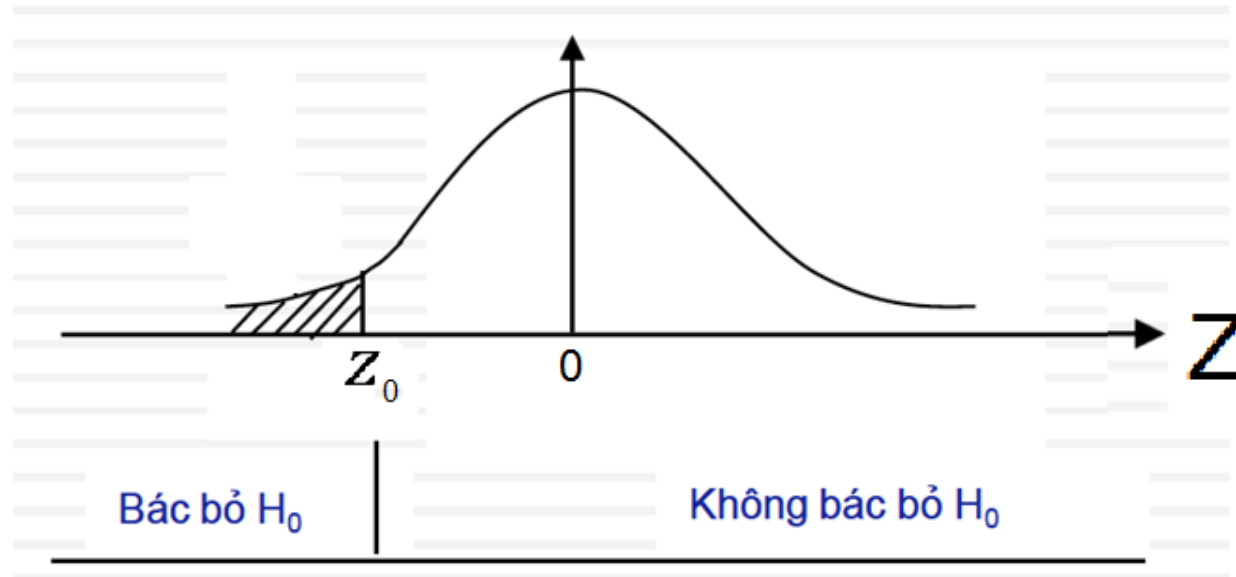
$$H_a: \mu < \mu_0$$

- » P-value là mức ý nghĩa nhỏ nhất mà vẫn có thể bác bỏ được H_0 .
- » Kiểm định 1 phía



$$P - value = P(\bar{X} \leq \bar{x})$$

Kiểm định giả thuyết “thay đổi nhỏ hơn”



Tính giá trị: $z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

$P - value = P(Z < z_0)$

Bài tập

1. Một người nông dân sử dụng 1 loại phân bón mới cho 1 vườn táo và thu được 2356kg trên một 100 cây. Biết rằng mức trung bình khi chưa sử dụng loại phân bón mới này là 26kg/1 cây với độ lệch chuẩn là 5,2kg. Tính p-value của giả thuyết sản lượng của cây táo bị giảm đi do loại phân bón này.
2. Sau khi thay đổi giám đốc mới, nhà máy sản xuất thép ghi nhận sản lượng trong 100 ngày, có trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu lần lượt là 820 tấn và 50 tấn. Tính p-value của giả thuyết rằng sản lượng bình quân hàng ngày của nhà máy hiện tại giảm đi so với mức sản lượng trung bình 892 tấn/ngày đã được ghi nhận cách đây 1 năm.

Bài tập

3. (Thí dụ 16, trang 107) Từ một tập hợp chính có trung bình μ (chưa biết) người ta lấy ra một mẫu có kích thước $n=140$ và tính được trung bình mẫu $\bar{x}= 18.5$ và độ lệch tiêu chuẩn mẫu $s=6.8$. Sử dụng phương pháp p-giá trị hãy kiểm định giả thiết:

» $H_0: \mu = 19.4$

» $H_a: \mu < 19.4$

Trường hợp cỡ
mẫu nhỏ hoặc
chưa biết
phương sai
tổng thể

Phương sai chưa biết

» Nếu phương sai của quần thể chưa biết, có thể được ước lượng bằng phương sai mẫu.

- Trung bình mẫu:
- Phương sai mẫu:

$$\bar{x} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

» Nếu phương sai của quần thể chưa biết và tập mẫu nhỏ ($n < 30$)

- \bar{X} có phân bố Student với $(n-1)$ bậc tự do; kì vọng μ và phương sai $\sigma_{\bar{x}}^2 = s^2/n$.

Bài tập

1. Một nhóm nghiên cứu công bố rằng trung bình một người vào siêu thị A tiêu hết 140 ngàn đồng. Chọn một mẫu ngẫu nhiên gồm 50 người mua hàng, ta tính được số tiền trung bình họ tiêu là 154 nghìn với độ lệch tiêu chuẩn là 62 nghìn. Sử dụng phương pháp p-giá trị hãy kiểm tra xem công bố của nhóm nghiên cứu có đúng hay không? Mức ý nghĩa 0.02.
2. Một công ty có hệ thống máy tính có thể xử lý 1200 hóa đơn trong một giờ. Công ty mới nhập một hệ thống máy tính mới. Hệ thống này khi chạy kiểm tra trong 40 giờ cho thấy số hóa đơn được xử lý trung bình trong 1 giờ là 1260 với độ lệch tiêu chuẩn là 215. Sử dụng phương pháp p-giá trị hãy nhận định xem hệ thống mới có tốt hơn hệ thống cũ hay không? Mức ý nghĩa 0.05.

Bài tập

3. Một công ty sản xuất pin tuyên bố rằng pin của họ có tuổi thọ trung bình là 21.5 giờ. Một cơ quan kiểm tra chất lượng kiểm tra 6 chiếc pin của công ty và thu được số liệu sau đây về tuổi thọ của 6 chiếc pin này:

19, 18, 22, 20, 16, 25.

Sử dụng phương pháp p-giá trị hãy kiểm tra xem kết quả này có xác nhận là quảng cáo của công ty là đúng hay không? Mức ý nghĩa được chọn là 5%.

4. Một bản nghiên cứu thông báo rằng mức tiêu dùng hàng tháng của một sinh viên là 420 nghìn đồng. Để kiểm tra, người ta chọn ngẫu nhiên 16 sinh viên và tìm được trung bình mỗi tháng họ tiêu 442 nghìn đồng với độ lệch tiêu chuẩn là 60 nghìn đồng.

Sử dụng phương pháp p-giá trị hãy kiểm định xem kết luận của bản thông báo có thấp hơn sự thật hay không? Mức ý nghĩa là 5%.

Thí dụ

- » Một loại cây nào đó trong điều kiện bình thường có chiều cao trung bình là 10 inches. Người ta muốn thử xem một nguyên tố vi lượng A có ảnh hưởng đến chiều cao của cây không. Trong một vườn thí nghiệm trồng 48 cây này có bón thêm nguyên tố vi lượng A, ta tính được chiều cao trung bình là 10,3 với độ lệch tiêu chuẩn 2,3. Sử dụng phương pháp p-giá trị, hãy kết luận xem nguyên tố vi lượng A có làm tăng chiều cao của cây hay không? Mức ý nghĩa là 5%.

Đề thi cũ

- » Giả sử trong một cuộc thử nghiệm về nhận biết mùi vị bia có 100 người tham gia. Mỗi người được uống một cốc bia 333 và phải chỉ ra đây có phải bia 333 không. Kết quả thống kê cho thấy trong 100 người tham gia, 46 người nhận biết sai. Có một nhận định là thực ra những người tham gia thử nghiệm đều nhận biết hoàn toàn ngẫu nhiên. Hãy kiểm định nhận định trên bằng các bước sau:
- » Phát biểu các giả thuyết cần kiểm định.
- » Tính P-value và kết luận.

Nội dung

- » Phương pháp P-giá trị
- » Kiểm định giả thuyết về giá trị của nhiều xác suất
- » So sánh hai giá trị trung bình
- » So sánh hai tỉ lệ

Kiểm định giả thuyết về giá trị của nhiều xác suất

» Ví dụ:

Gieo một con xúc sắc 600 lần. Số lần ra của từng mặt được cho trong bảng:

1	2	3	4	5	6	Tổng
106	92	97	105	88	112	600

Có thể coi con xúc sắc đó là cân đối hay không? Mức ý nghĩa là 5%.

» Phương pháp kiểm định (1 phía):

- H_0 : tần số lý thuyết \hat{n}_i và tần số quan sát n_i xấp xỉ nhau.
- Giá trị kiểm định “khi bình phương”

$$T = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i}$$

- Nếu H_0 đúng và nếu các tần số lý thuyết ≥ 5 thì T sẽ có phân bố xấp xỉ phân bố χ^2 với $k-1$ bậc tự do.
- Bác bỏ H_0 khi T lớn một cách có ý nghĩa.

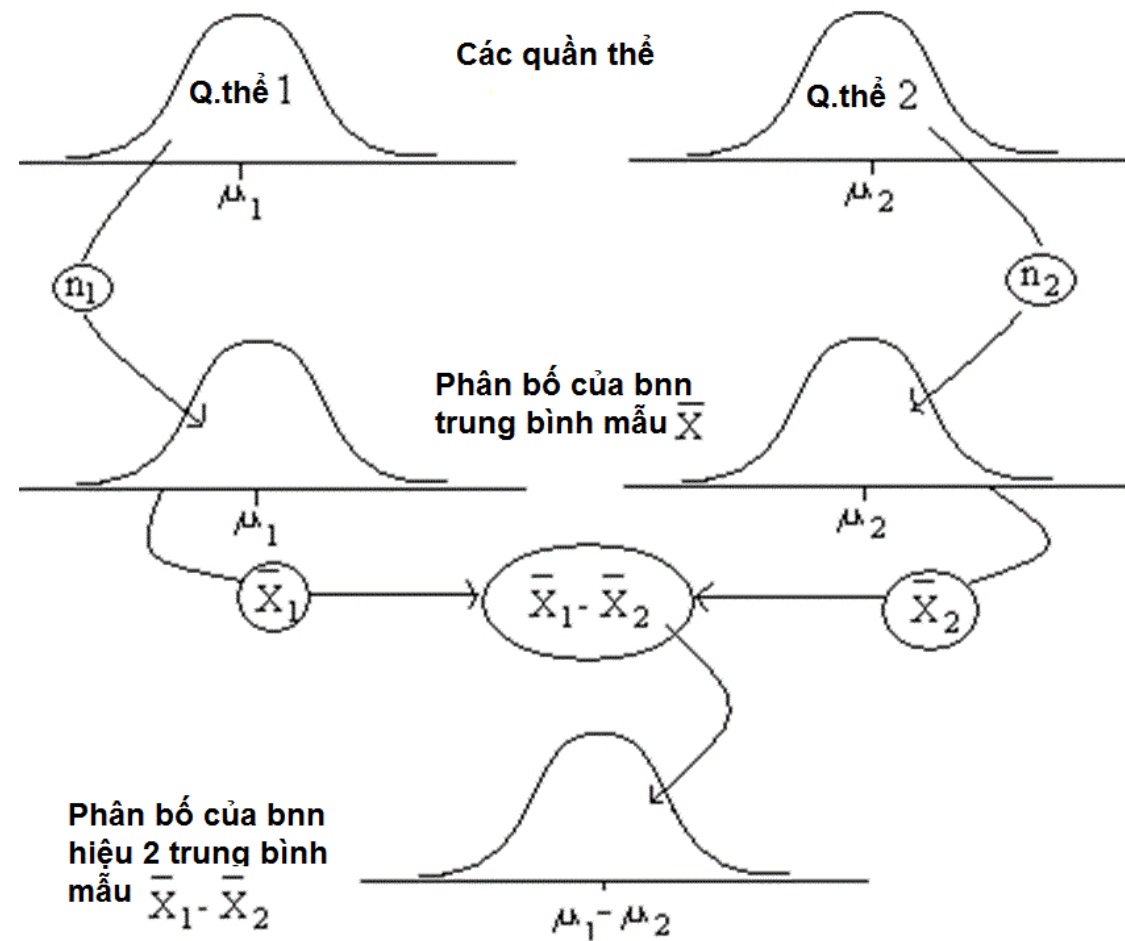
» Chi tiết Chương 4 – Tiết 5 (tr.111)

Kiểm định giả thuyết với 2 mẫu

So sánh sự khác biệt giữa hai quần thể.

- » So sánh hai giá trị trung bình
 - Kiểm định xem có sự khác biệt về điểm thi môn xác suất thống kê giữa sinh viên nữ và sinh viên nam?
 - Kiểm định xem có sự khác biệt về tuổi thọ trung bình của 2 loại pin do công ty A và công ty B sản xuất?
- » So sánh hai tỉ lệ
 - Kiểm định xem có sự khác biệt về tỉ lệ cử tri nam và tỉ lệ cử tri nữ bầu cho ứng viên A hay không?
 - Kiểm định xem công thức mới đưa vào có làm tăng tỉ lệ người yêu thích Coca-Cola hay không?

So sánh hai giá trị trung bình



So sánh hai giá trị trung bình

» Biến ngẫu nhiên về khác biệt giữa mẫu 1 và mẫu 2 sẽ có phân bố chuẩn với

□ Kỳ vọng:

$$\mu_{\overline{X1}-\overline{X2}} = \mu_{\overline{X1}} - \mu_{\overline{X2}}$$

□ Phương sai:

$$\sigma^2_{\overline{X1}-\overline{X2}} = \sigma^2_{\overline{X1}} + \sigma^2_{\overline{X2}} = \frac{\sigma^2_1}{n1} + \frac{\sigma^2_2}{n2}$$

$$\sigma_{\overline{X1}-\overline{X2}} = \sqrt{\frac{\sigma^2_1}{n1} + \frac{\sigma^2_2}{n2}}$$

» $n1$, và $n2$ là kích thước của mẫu từ quần thể 1 và quần thể 2

» σ_1 và σ_2 là độ lệch chuẩn của quần thể 1 và quần thể 2.

» Lưu ý: σ_1 và σ_2 có thể được ước lượng từ độ lệch chuẩn của mẫu lấy từ quần thể 1 và quần thể 2 nếu kích thước mẫu ≥ 30 .

Kiểm định giả thuyết trung bình của hai quần thể khác nhau

» Kiểm định giả thuyết trung bình của quần thể 1 và quần thể 2 khác nhau:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$$

» Tính giá trị kiểm định z:

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_{H_0}}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

Kiểm định giả thuyết trung bình của hai quần thể khác nhau

Bài tập

» Kiểm định giả thuyết có sự khác biệt giữa điểm của các bạn nam và các bạn nữ với mức ý nghĩa 5%.

Quần thể	Điểm	Độ lệch chuẩn	Kích thước mẫu
Nam	6.5	0.5	50
Nữ	6.0	0.7	30

$$\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sigma^2_{\bar{X}_1} + \sigma^2_{\bar{X}_2} = \frac{\sigma^2_1}{n_1} + \frac{\sigma^2_2}{n_2}$$
$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma^2_1}{n_1} + \frac{\sigma^2_2}{n_2}}$$
$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_{H_0}}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$$

Kiểm định giả thuyết trung bình của hai quần thể

Bài tập

» Kiểm định giả thuyết lương công ty A hơn lương công ty B tối thiểu là 3 triệu với mức ý nghĩa 5%.

Quần thể	Lương	Độ lệch chuẩn	Kích thước mẫu
Công ty A	12t	1.5	100
Công ty B	8.5t	1.2	64

$$\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sigma^2_{\bar{X}_1} + \sigma^2_{\bar{X}_2} = \frac{\sigma^2_1}{n_1} + \frac{\sigma^2_2}{n_2}$$

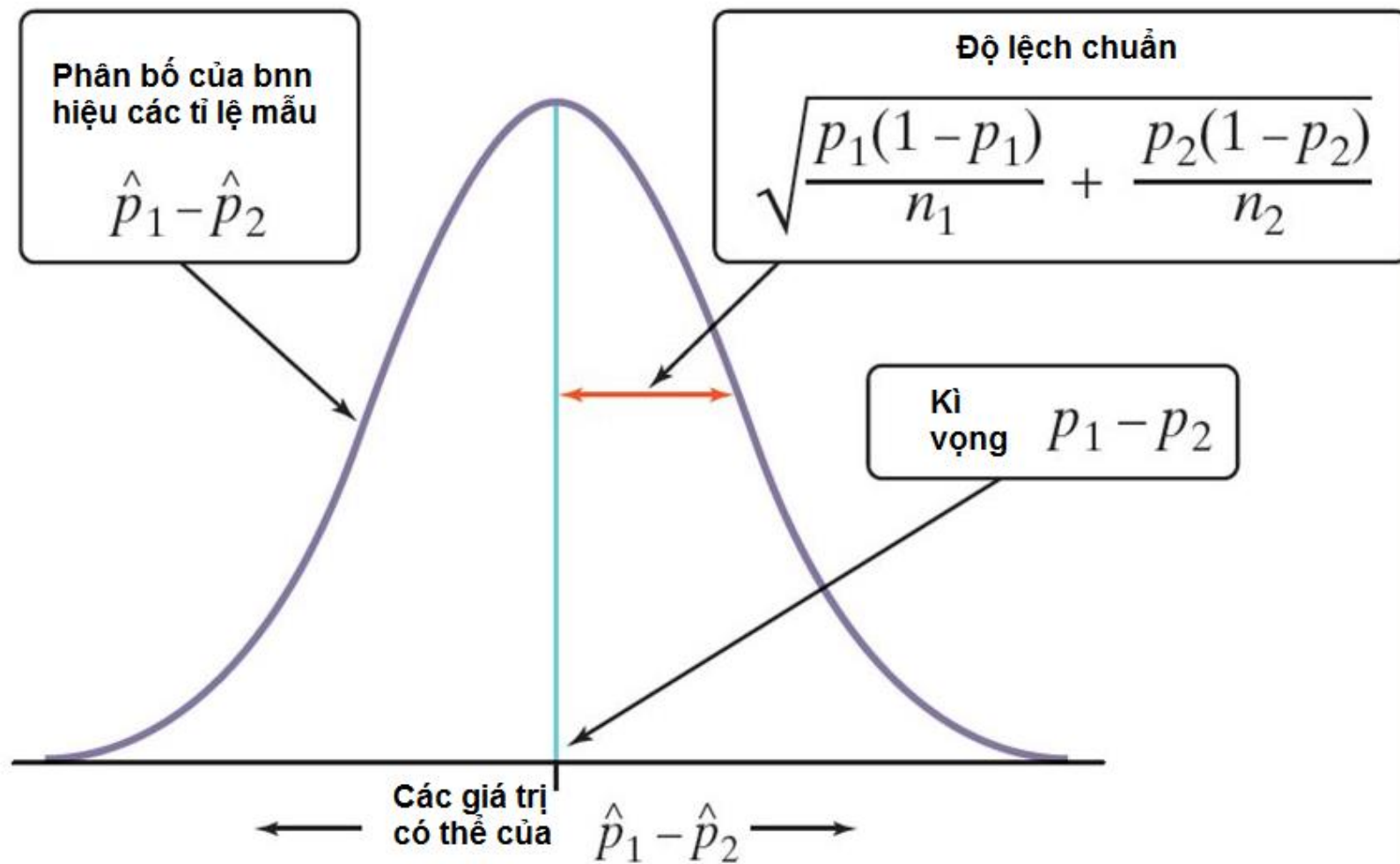
$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma^2_1}{n_1} + \frac{\sigma^2_2}{n_2}}$$

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_{H_0}}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$$

So sánh hai tỉ lệ

\hat{p}_1 : tỉ lệ mẫu từ quần thể 1

\hat{p}_2 : tỉ lệ mẫu từ quần thể 2



Kiểm định giả thuyết tỉ lệ của hai quần thể khác nhau

- » Kiểm định giả thuyết trung bình của quần thể 1 và quần thể 2 khác nhau:

$$H_0: p_1 = p_2$$

$$H_a: p_1 \neq p_2$$

- » Tính giá trị kiểm định z:

$$Z = \frac{(\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2) - (p_1 - p_2)_{H_0}}{\sigma_{(\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2)}} = \frac{(\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2)}{\sqrt{\widehat{p}(1 - \widehat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

- » \widehat{p} ước lượng từ việc nhập 2 mẫu. (tr.158)
- » Chú ý: kí hiệu \widehat{p} ở slides là kí hiệu **f** trong giáo trình

Bài tập

- » Công ty Coca-Cola đang nghiên cứu cải tiến công thức. Công thức cũ khi cho 500 người dùng thử có 130 người thích. Công thức mới khi cho 1000 người dùng thử có 300 người thích. Hãy kiểm định xem công thức mới có làm tăng tỉ lệ người ưa thích Coca-Cola hay không? Mức ý nghĩa là 1%.

$$\begin{aligned} z &= \frac{(\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2) - (p_1 - p_2)_{H0}}{\sigma_{(\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2)}} \\ &= \frac{(\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2)}{\sqrt{\widehat{p}(1 - \widehat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \end{aligned}$$