Компьютерные технологии

Понур К.А. *

18 мая 2021 г.

Задание 20 Используя метод прямоугольников и метод выборочного среднего, вычислите моменты инерции тела сложного объема с неоднородной плотностью при его вращении вокруг трех перпендикулярных осей. Оцените точность и время вычислений в обоих случаях в зависимости от схемы интегрирования.

Оглавление

1 Постановка задачи

Пусть плотность исследуемого тела задается в декартовой системе координат некоторой функцией $\rho(x, y, z)$

1.1 Метод прямоугольников

Наиболее простой метод численного интегрирования заключается в аппроксимации подынтегральной функции $f(x)$ многочленом нулевой степени

исходники (.py, *.tex): https://github.com/kannab98/computer-technologies на каждом элементарном отрезке. Для n элементарных отрезков подобная составная квадратурная формула на линейной координатной сетке с шагом $h = \frac{b-a}{n}$ примет вид

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx h\frac{f(x_0)}{2} + h\frac{f(x_n)}{2} + h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$

Погрешность вычисления интеграла на i-ом элементарном отрезке в таком случае определяется формулой

$$\varepsilon(f) = \frac{\mathrm{d}^2 f(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} \cdot \frac{h^2}{24}(x_i - x_{i-1}),$$

где $\xi_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ – середина рассматриваемого элементарного отрезка.

1.2 Метод Монте-Карло

Сущность метода Монте-Карло состоит в следующем: необходимо найти значение a некоторой изучаемой величины. Для этого выбирают величину x, математическое ожидание которой равно a, т.е.

$$M(X) = a$$

На практике это означает проведение n независимых испытаний и вычисление среднего значения величины x по полученному ансамблю данных

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Величину $\langle x \rangle$ принимают в качестве оценки a^* исходной величины a. Пусть теперь J значение интеграла на интервале $[a, b]$ функции $f(x)$

$$J = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Тогда

$$\langle f(x) \rangle \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

И сам интеграл

$$\langle J \rangle \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

1.3 Adaptive quadrature

Для сравнения с предыдущими методами интегрирования применим более общий метод численного интегрирования Adaptive Quadrature, используемый в библиотеке SciPy [?] на основе Фортран-библиотеке численного интегрирования QUADPACK [?].

В основе метода лежит интерполяции искомой функции $f(x)$ детерминированными полиномами на определенных интервалах, например, полиномами Чебышева или полиномами Лежандра.

2 Реализации на языке Python

В качестве тела достаточно сложного объема был выбран тороид, распологаемый в начале координат и задаваемый параметрическим уравнением в сферической системе координат

$$\begin{cases} x(\varphi, \psi) = (R + r\cos\psi)\cos\varphi \\ y(\varphi, \psi) = (R + r\cos\psi)\sin\varphi \qquad \varphi \in [0, 2\pi), \psi \in [-\pi, \pi), \\ z(\varphi, \psi) = r\sin\psi \end{cases}$$

где φ – азимутальный угол в плоскости xy, ψ – угол элевации, отсчитываемый от оси z. На рис. 1

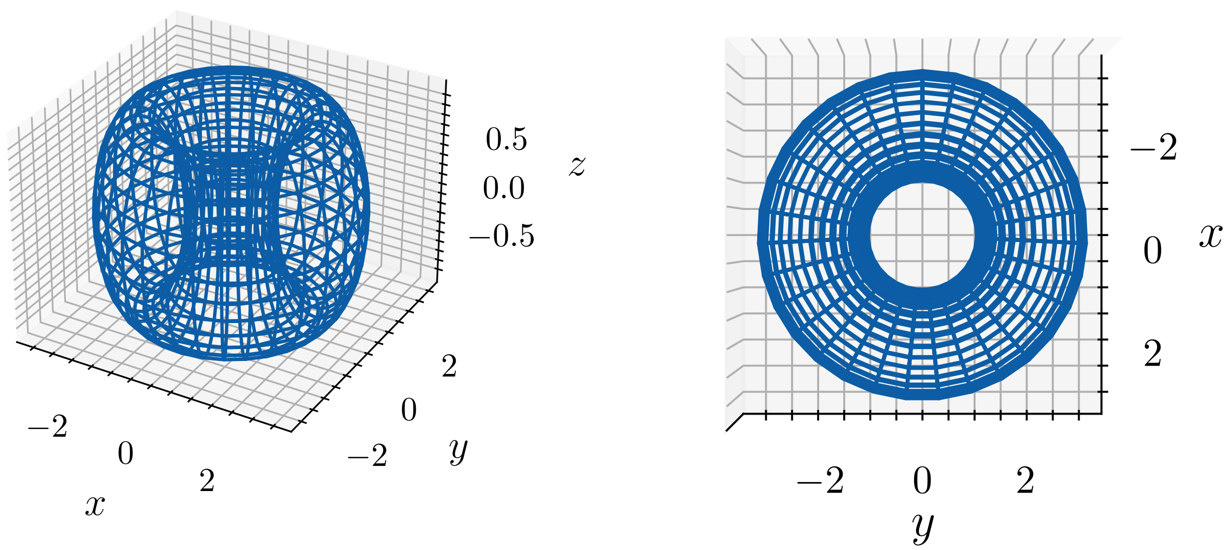

Рис. 1: Тороид с внутренним радиусом $r = 1$ и внешним радиусом $R = 2$