

# Компьютерные технологии

Понур К.А. \*

4 июня 2021 г.

**Задание 20** Используя метод прямоугольников и метод выборочного среднего, вычислите моменты инерции тела сложного объема с неоднородной плотностью при его вращении вокруг трех перпендикулярных осей. Оцените точность и время вычислений в обоих случаях в зависимости от схемы интегрирования.

## Оглавление

### 1 Постановка задачи

Пусть плотность исследуемого тела задается в декартовой системе координат некоторой функцией  $\rho(x, y, z)$

#### 1.1 Метод прямоугольников

Наиболее простой метод численного интегрирования заключается в аппроксимации подынтегральной функции  $f(x)$  многочленом нулевой степени на каждом элементарном отрезке. Для  $n$  элементарных отрезков подобная составная квадратурная формула на линейной координатной сетке с шагом  $h = \frac{b-a}{n}$  примет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \frac{f(x_0)}{2} + h \frac{f(x_n)}{2} + h \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$

---

\*исходники (\*.py, \*.tex): <https://github.com/kannab98/computer-technologies>

Погрешность вычисления интеграла на  $i$ -ом элементарном отрезке в таком случае определяется формулой

$$\varepsilon(f) = \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} \cdot \frac{h^2}{24}(x_i - x_{i-1}),$$

где  $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$  – середина рассматриваемого элементарного отрезка.

## 1.2 Метод Монте-Карло

Сущность метода Монте-Карло состоит в следующем: необходимо найти значение  $a$  некоторой изучаемой величины. Для этого выбирают величину  $x$ , математическое ожидание которой равно  $a$ , т.е.

$$M(X) = a$$

На практике это означает проведение  $n$  независимых испытаний и вычисление среднего значения величины  $x$  по полученному ансамблю данных

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Величину  $\langle x \rangle$  принимают в качестве оценки  $a^*$  исходной величины  $a$ . Пусть теперь  $J$  значение интеграла на интервале  $[a, b]$  функции  $f(x)$

$$J = \int_a^b f(x) dx$$

Тогда

$$\langle f(x) \rangle \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

И сам интеграл

$$\langle J \rangle \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

## 2 Реализации на языке Python

Прежде чем переходить к телу достаточно сложного объема, программа отлаживалась на простейшем теле для интегрирование – кубе (см. рис. ?? ).

$$\begin{cases} x(\varphi, \psi) = (R + r \cos \psi) \cos \varphi \\ y(\varphi, \psi) = (R + r \cos \psi) \sin \varphi \\ z(\varphi, \psi) = r \sin \psi \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi), \psi \in [-\pi, \pi),$$

где  $\varphi$  – азимутальный угол в плоскости  $xy$ ,  $\psi$  – угол элевации, отсчитываемый от оси  $z$ . На рис. ??

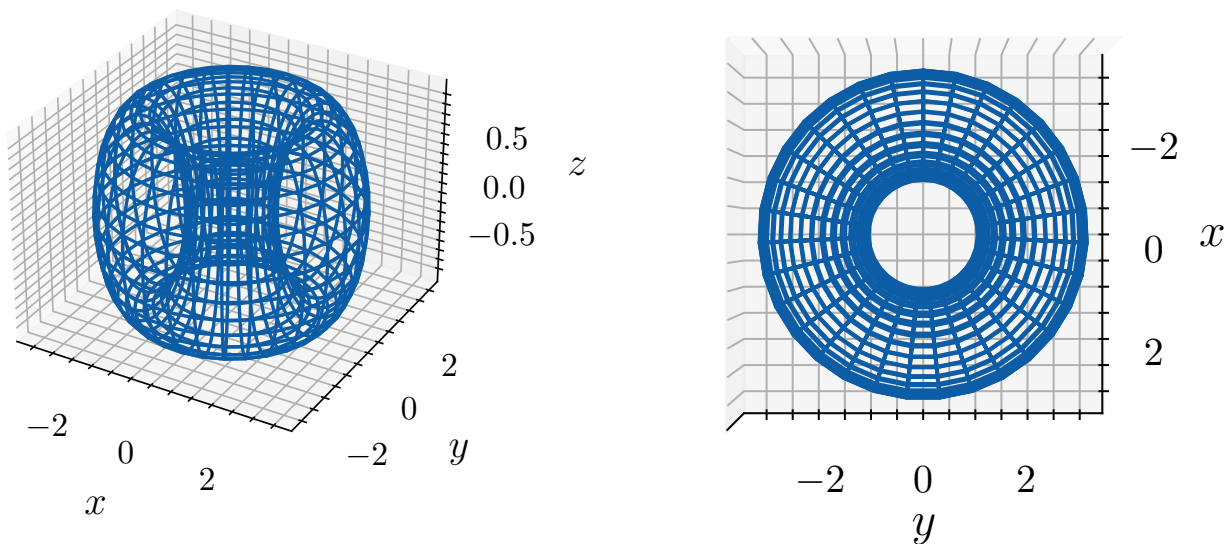
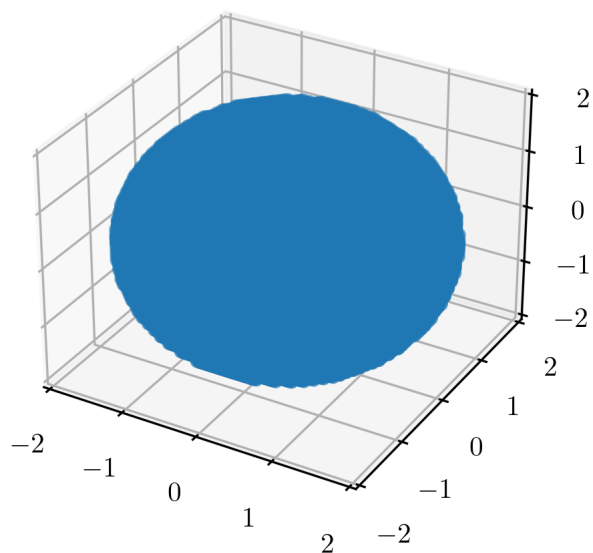


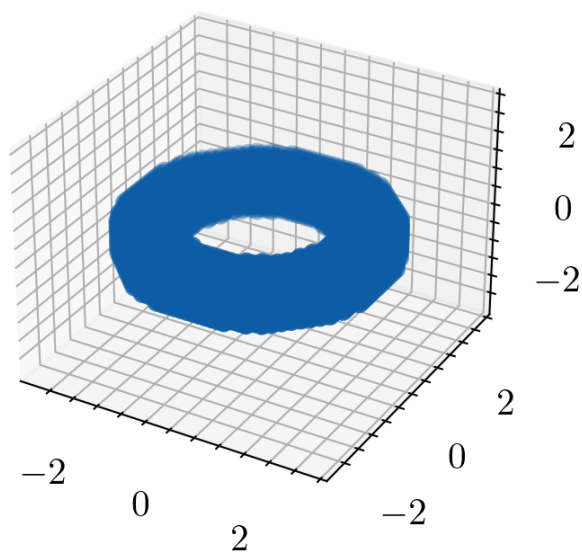
Рис. 1: Торонд с внутренним радиусом  $r = 1$  и внешним радиусом  $R = 2$



(a)



(b)



(c)

Рис. 2: Точки в декартовых координатах, принадлежащие поверхностям (a) куба, (b) сферы, (c) тороида и участвующие в интегрировании