Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет имени Н. И. Лобачевского
Радиофизический факультет

Численное моделирование морской поверхности

Работу выполнил:
Понур К.А.

Научный руководитель:
Караев В.Ю.

29 мая 2020 г.

Введение

Цели:

1. Изучить принципы моделирования морской поверхности.
2. Оптимизировать существующие алгоритмы.

Актуальность работы:

1. Тестирование и разработка алгоритмов восстановления океанографической информации
2. Оценка возможностей новых радиолокаторов
3. Постановка численных экспериментов, в частности накопление статистических данных

Одномерное моделирование

Одномерную поверхность представим как:

$$\zeta(r,t) = \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot \cos(k_i r + \psi_i), \tag{1}$$

где ψ_i – случайная фаза, a_i – амплитуда i-ой гармоники
Корреляционная функция такого поля запишется как:

$$\widetilde{M}(\rho) = \sum_{0}^{N} b_i \cos(k_i \rho)$$

Рис.: Пример расположения спектральных компонент

АКФ реального поля:

$$M(\rho) = \int_0^{\infty} S(k) \cos(k\rho)\, \mathrm{d}k\,, \tag{2}$$

$S(k)$ – спектр морской поверхности
k_i – абсцисса спектральной компоненты

Эквидистантное расположение

Рис.: Корреляционные функции высот и уклонов при эквидистантном расположении узлов. $U = 10\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $N = 256$
Узлы задаются выражением

$$k_i = \Delta k \cdot i \tag{3}$$

$$b_i = \int\limits_{(i-1)\Delta k}^{i\Delta k} S(k)\,\mathrm{d}k - \text{амплитуда спектральной компоненты}$$

Эквидистантное расположение

При очень большом числе гармоник период функций корреляции всё ещё недостаточно большой

Рис.: Корреляционные функции высот и уклонов при эквидистантном расположении узлов. $U = 10\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $N = 10^5$

Неэквидистантное расположение

Рис.: Корреляционные функции высот и уклонов при логарифмическом расположении узлов. $U = 10\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $N = 256$

Узлы задаются выражением

$$k_i = 10^{i\Delta k} \tag{4}$$

$$b_i = \int\limits_{10^{(i-1)\Delta k}}^{10^{i\Delta k}} S(k)\,\mathrm{d}k - \text{амплитуда спектральных компонент}$$

«Отбеливание» спектра

Предположим, что гармонические составляющие при больших ρ складываются «некогерентным» образом. То есть мощность шума определяется как

$$\sigma_{noise}^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{b_i^2}{2} \tag{5}$$

В области малых ρ гармоники суммируются «когерентно» и соответствующая мощность равна

$$\widetilde{M}^2(0) = \left(\sum_{i=1}^{N} b_i \right)^2 \tag{6}$$

Введем функцию, характеризующую относительную мощность шумов

$$Q = \frac{\sigma_{noise}^2}{\widetilde{M}^2(0)} \tag{7}$$

«Отбеливание» спектра

Минимизируем величину (7), решая систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial b_1} = 0 \\ \quad\vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial b_N} = 0, \end{cases} \qquad \text{где } \frac{\partial Q}{\partial b_i} = \frac{b_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{N} b_i\right)^2} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} b_i^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{N} b_i\right)^3} \tag{8}$$

Она сводится к следующей системе $b_i \sum\limits_{i=1}^{N} b_i - \sum\limits_{i=1}^{N} b_i^2 = 0$

Частным результатом решения является $b_1 = b_2 = \cdots = b_N$.

$$\text{Для высот:} \quad b_i = b_1 = \frac{M(0)}{N} = \frac{1}{N} \int\limits_0^{\infty} S(k)\,\mathrm{d}k \tag{9}$$

$$\text{Для наклонов:} \quad b_i^{\theta} = b_1^{\theta} = \frac{M^{\theta}(0)}{N} = \frac{1}{N} \int\limits_0^{\infty} k^2 S(k)\,\mathrm{d}k \tag{10}$$

«Отбеливание» спектра

Потребуем сопряжения в нуле всех производных функций $\widetilde{M}(\rho)$ и $M(\rho)$. Для функции корреляции стационарной случайной функции $M(\rho)$ справедливо

$$M'_\rho = \frac{\partial^2 M(\rho)}{\partial \rho^2} = \int\limits_0^\infty k^2 S(k) \cos(k\rho)\,\mathrm{d}k \tag{11}$$

А значит можно переписать наше требование в виде

$$\sum_{i=1}^{N} b_i k_i^{2p} = \int\limits_0^\infty k^{2p} S(k)\,\mathrm{d}k\,, p = 1, 2, \ldots, N. \tag{12}$$

Решать такую систему довольно сложно, поэтому потребуем выполнение более простого равенства

$$\sum_{i=1}^{N} b_i k_i^{2} = \int\limits_0^\infty k^{2} S(k)\,\mathrm{d}k \tag{13}$$

Детерминированное расположение узлов

Для наклонов:

$$k_i = \sqrt{\frac{N}{\int\limits_0^\infty k^2 S(k)\,\mathrm{d}k} \cdot \int\limits_{\Delta k_i} k^4 S(k)\,\mathrm{d}k}$$

Для высот:

$$k_i = \sqrt{\frac{N}{\int\limits_0^\infty S(k)\,\mathrm{d}k} \cdot \int\limits_{\Delta k_i} k^2 S(k)\,\mathrm{d}k}$$

Рис.: Расположении узлов по методу «отбеливания» спектра для наклонов и высот соответственно. $U = 10\,\frac{\text{м}}{c}$, $N = 25$

Сравнение методов

Рис.: Корреляционные функции высот и уклонов при расположении узлов по методу «отбеливания» спектра для уклонов. $U = 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $N = 256$

Узлы задаются выражением

$$k_i = \sqrt{\frac{N}{\int\limits_0^\infty k^2 S(k)\,\mathrm{d}k}} \cdot \int\limits_{\Delta k_i} k^4 S(k)\,\mathrm{d}k \tag{14}$$

Двумерные функции корреляции

Для статистически однородного и стационарного поля справедливо следующее выражение для его корреляционной функции:

$$M(\vec{\rho}) = \iint\limits_{(\infty)} S(\vec{k}) \cos\left(\vec{k}\vec{\rho}\right) \mathrm{d}\vec{k}\,, \tag{15}$$

где $S(\vec{k})$– волновой спектр морской поверхности. Корреляционную функцию наклонов морской поверхности определим как

$$M_\theta(\vec{\rho}) = \iint\limits_{(\infty)} k^2 \cdot S(\vec{k}) \cos\left(\vec{k}\vec{\rho}\right) \mathrm{d}\vec{k} \tag{16}$$

Предположим, что переменные разделяются $S(\vec{k}) = S(k)\Phi_k(\varphi)$, $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{k_y}{k_x}$, а функция распределения нормирована на единицу $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_k \, \mathrm{d}\varphi = 1$

Двумерная модель поверхностного волнения

Представим морскую поверхность в виде суммы синусоид с детерминированными амплитудами и случайными фазами:

$$\zeta(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} A_n(k_n) \cdot \Phi_{k_n m}(\varphi_m) \cos\Big(\omega_n t + \vec{k}_n \vec{r} + \psi_{nm}\Big), \qquad (17)$$

ψ_{nm} – случайная фаза, A_n – амплитуда n-ой гармоники. Амплитуда, которая является мощностью на интервале Δk_n, вычисляется по спектру моделируемой поверхности

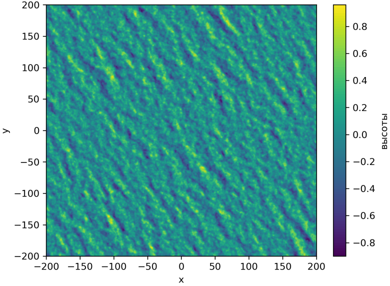
$$A_n(k_n) = \sqrt{2S(k_n)\Delta k_n} \qquad (18)$$

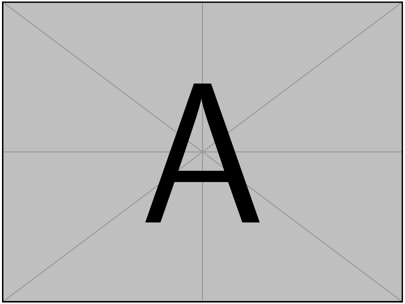
Φ_{nm} – азимутальное распределение, вычисляемое следующим образом:

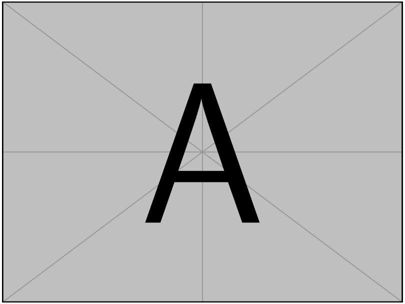
$$\Phi_{nm}(k_n, \varphi_m) = \sqrt{\Phi(k_n, \varphi_m)\Delta\varphi}, \qquad (19)$$

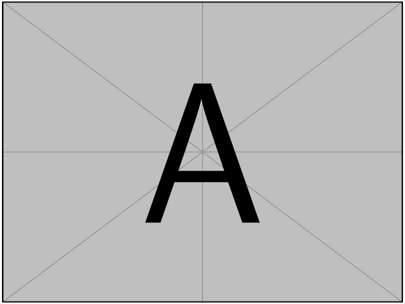
$\Delta\varphi$ – шаг по углу.

Изображение поверхностей

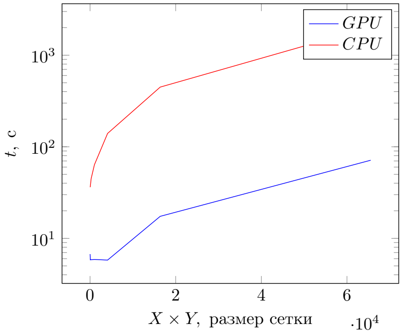


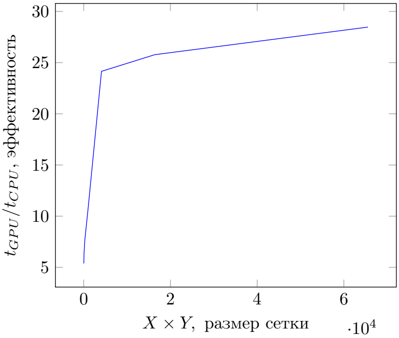




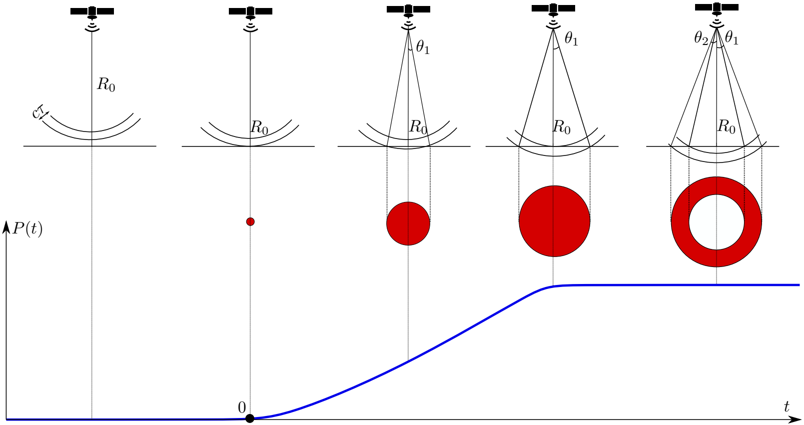


Увеличение производительности

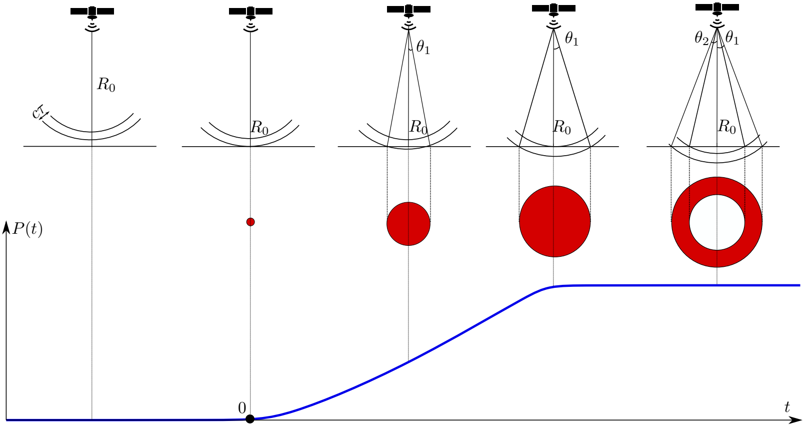




Моделирование отраженного импульса



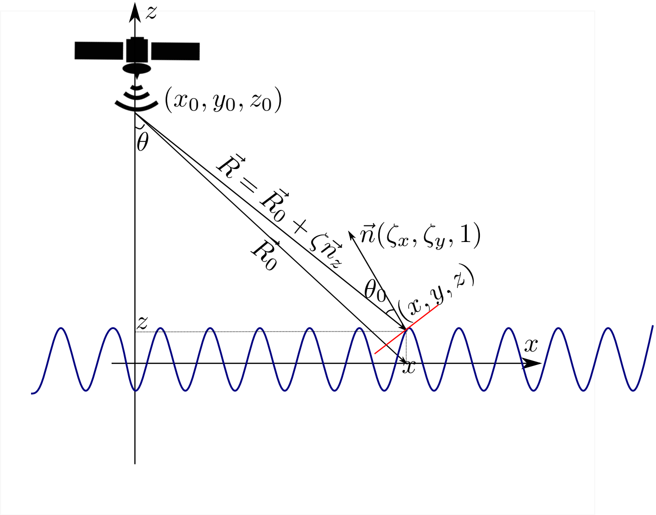
Моделирование отраженного импульса



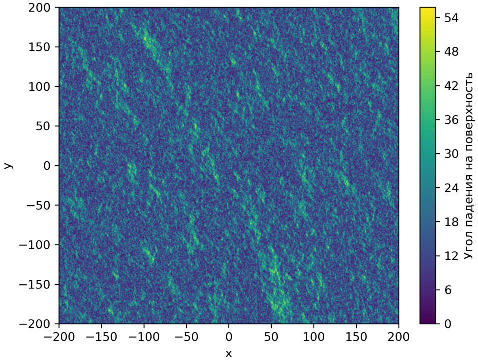
$$brownformule \qquad (20)$$

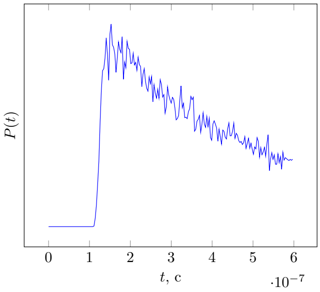
$$iceformule \qquad (21)$$

Моделирование отраженного импульса



Моделирование отраженного импульса





Форма импульса

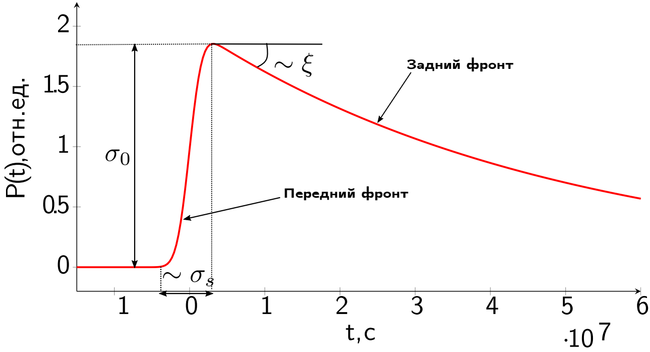
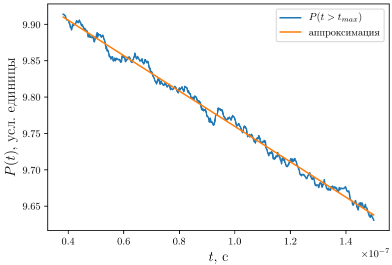
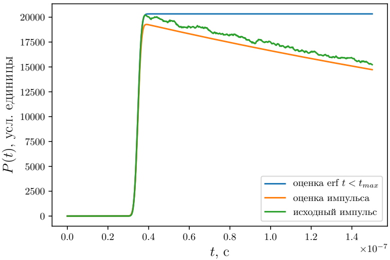
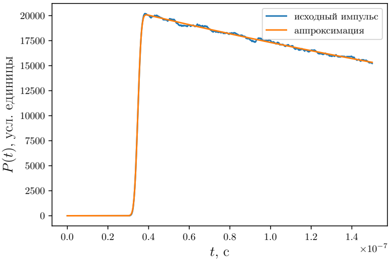


Рис.: Качественная форма импульса с обозначением основных параметров.

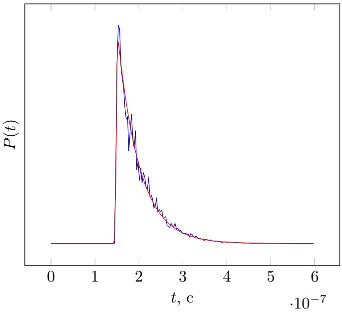
Алгоритм ретрекинга

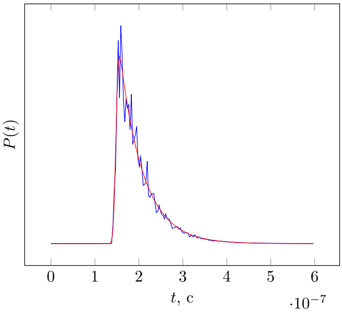


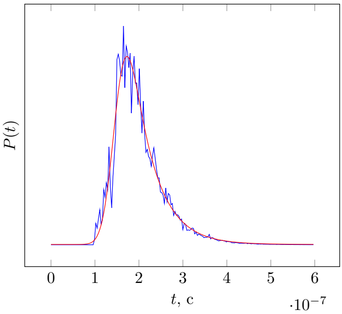




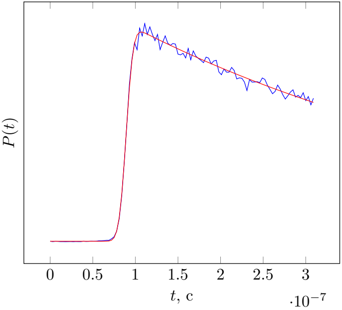
Ретрекинг модельных импульсов

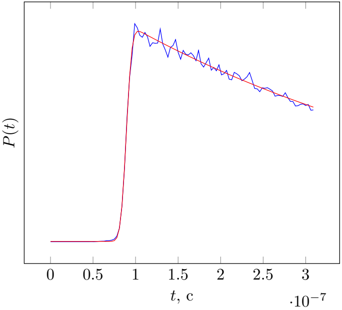


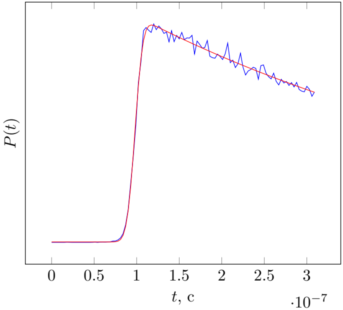




Ретрекинг импульсов с Jason-3







Заключение