

# Содержание

<b>1</b>	<b>Алгоритм ретрекинга</b>	<b>1</b>
1.1	Восстановление параметров морской поверхности. . . . .	5

## 1. Алгоритм ретрекинга

Рис. 1: Геометрия отклика от плоской поверхности.

Посчитаем теоретически отклик плоской морской поверхности  $P_{FS}$  на сигнал с радиолокатора с известной диаграммой направленности  $G(\theta, \omega)$ .

Форма функции  $P_{FS}$  ...

Из работы [1]

$$P_{FS}(t) = \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3 L_p} \int_{(A)} \frac{\delta(t - \frac{2r}{c}) G^2(\theta, \omega) \sigma^o(\psi, \varphi)}{r^4} dA$$

где  $\lambda$  – длина волны радиолокатора  $L_p$  – набег в две стороны  $\delta(t - \frac{2r}{c})$  – дельта функция  $G(\theta, \omega)$  – диаграмма направленности  $r$  – расстояние от спутника и элементарной рассеивающей поверхностью

Элемент поверхности можно записать как  $dA = \rho d\rho d\psi$ , однако нам нужна только  $\theta$  как функция  $\rho$  и  $\varphi$  для интегрирования по углу. Используя тригонометрию, получим

$$\cos \theta = \frac{\cos \xi + \frac{\rho}{h} \sin \xi \cos(\tilde{\varphi} - \varphi)}{\sqrt{q + (\frac{\rho}{h})^2}}$$

Диаграмму направленности аппроксимируем следующей функцией

$$G(\theta) \approx G_0 e^{-\frac{2}{\gamma} \sin^2 \theta}$$

с учетом  $r = \sqrt{h^2 + \rho^2}$

$$P_{FS}(t) = \frac{G_0^2 \lambda^2}{G_0^2 \lambda^2 (4\pi)^3 L_p h^4} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\delta\left(t - \frac{2h}{c} \sqrt{1 + \varepsilon^2}\right)}{(1 + \varepsilon^2)^2} \sigma^o(\psi) \cdot \exp\left\{-\frac{4}{\gamma} \left[1 - \frac{\cos^2 \xi}{1 + \varepsilon^2}\right] + b + a \cos(\tilde{\varphi} - \varphi) - b \sin^2(\tilde{\varphi} - \varphi)\right\} d\varphi \rho d\rho,$$

где  $\varepsilon = \frac{\rho}{h}$ ,  $a = \frac{4\varepsilon}{\gamma} \frac{\sin 2\xi}{(1+\varepsilon^2)}$ ,  $b = \frac{4\varepsilon^2}{\gamma} \frac{\sin^2 \xi}{(1+\varepsilon^2)}$ ,

поскольку интегрирование идет по полному периоду косинуса и синуса, то мы можем игнорировать  $\tilde{\varphi}$ . Разложим в ряд экспоненту, пользуясь малостью  $b$

$$e^{-b \sin^2 \varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^n \sin^{2n} \varphi}{n!}$$

Браун в своей работе [2] вычислил этот интеграл и показал, что он равен

$$P_{FS} = \frac{G_0^2 \lambda^2 c}{4(4\pi)^2 L_p h^3} \cdot \frac{\sigma^o(\psi)}{\left(\frac{ct}{2h}\right)^3} \cdot \exp\left\{-\frac{4}{\gamma} \left[\cos^2 \xi - \frac{\cos 2\xi}{\left(\frac{ct}{2h}\right)^2}\right]\right\} \cdot (1 + \varepsilon^2)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(n + 1)} \left[\left(\frac{ct}{2h}\right)^2 - 1 \tan \xi\right]^n \cdot I_n\left(\frac{4}{\gamma} \sqrt{\frac{c\tau}{n}} \sin 2\xi\right), \text{ при } t \geq 2h/c$$

и  $P_{FS} = 0$  при  $t < 2h/c$

Это выражение можно упростить, переходя к новому времени  $\tau = t - 2h/c$ , где  $2h/c$  – время задержки между излучением и приемом сигнала. Учитывая, что в масштабах спутниковой альтиметрии  $\frac{c\tau}{h} \ll 1$ , получим

$$P_{FS}(\tau) = \frac{G_0^2 \lambda^2 c \sigma^o(\psi_0)}{4(4\pi)^2 L_p h^3} \exp\left\{-\frac{4}{\gamma} \sin^2 \xi - \frac{4c}{\gamma h} \tau \cos 2\xi\right\} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(n + 1)} \left[\sqrt{\frac{c\tau}{h}} \tan \xi\right]^n I_n\left(\frac{4}{\gamma} \sqrt{\frac{c\tau}{h}} \sin 2\xi\right) \text{ при } \tau \geq 0 \quad (1)$$

и  $P_{FS} = 0$ , при  $\tau < 0$

Рассмотрим теперь отдельно сумму из уравнения (1). Если переобозна-

чить  $Y = \frac{4}{\gamma} \sqrt{\frac{c\tau}{h}} \sin 2\xi$ , то сумма примет вид

$$I_0(Y) \cdot \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(n + 1)} \cdot \frac{I_n(Y)}{I_0(Y)} \left[ \frac{\gamma Y}{8 \cos^2 \xi} \right]^n \right\}$$

Поскольку  $Y \ll 1$  и  $\xi \ll 1$ , то множитель  $\left[ \frac{\gamma Y}{8 \cos^2 \xi} \right]^n$  будет быстро сходиться к нулю. Следовательно сумму  $n$  слагаемых мы можем приближенно заменить лишь одним слагаемым при  $n = 0$ .

$$P_{FS}(\tau) = \frac{G_0^2 \lambda^2 c \sigma^o(\psi_0)}{4(4\pi)^2 L_p h^3} \exp \left\{ -\frac{4}{\gamma} \sin^2 \xi - \frac{4c}{\gamma h} \tau \cos 2\xi \right\} \cdot I_0 \left( \frac{4}{\gamma} \sqrt{\frac{c\tau}{h}} \sin 2\xi \right) \text{ при } \tau \geq 0 \quad (2)$$

Зная отклик плоской морской поверхности на сигнал с радиовысотометра мы можем перейти к вычислению отклика на взволнованную морскую поверхность. С точки зрения физики, различия будут в том, что теперь не вся поверхность может отражать сигнал в нужном направлении, а только зеркально ориентированные площадки на поверхности. С радиотехнической точки зрения, взволнованная морская поверхность является линейным фильтром с импульсной переходной характеристикой  $q(t)$ . Тогда отклик взволнованной поверхности можно вычислить выполняя свертку

$$P_{RS}(t) = q(z) * P_{FS}(t) \quad (3)$$

Результирующая форму импульса будет сверткой функции отклика на плоскую поверхность  $P_{FS}$  и функции распределения зеркальных площадок  $q$

$$P(\tau) = \frac{c}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} q \left( \frac{c\tau}{2} - \frac{c\tilde{\tau}}{2} \right) P_{FS}(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau}$$

Функция  $P_{FS}$  изменяется гораздо медленнее функции плотности зеркальных точек  $q$ , а значит можно записать приближенное равенство

$$P \approx \begin{cases} P_{FS}(0) \int_0^{\infty} \frac{c}{2} q \left( \frac{c\tau}{2} - \frac{c\tilde{\tau}}{2} \right) d\tilde{\tau}, & \text{при } \tau < 0 \\ P_{FS}(\tau) \int_0^{\infty} \frac{c}{2} q \left( \frac{c\tau}{2} - \frac{c\tilde{\tau}}{2} \right) d\tilde{\tau}, & \text{при } \tau > 0 \end{cases}$$

Согласно теореме о среднем, при большом на-на-на мы можем предположить распределение Гауссовым

$$\frac{c}{2}q\left(\frac{c\tau}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\frac{2\sigma_s^2}{c}\right)}} \exp\left\{-\frac{\tau^2}{2\pi\left(\frac{2\sigma_s^2}{c}\right)^2}\right\} \quad (4)$$

Посчитав свертку, получаем, что

$$P(\tau) \approx P_{FS}(\tau) \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{c\tau}{2\sqrt{2}\sigma_s}\right)\right]$$

Можно прибегнуть к ещё одному упрощению и разложить в ряд функцию Бесселя в уравнении (2):

$$I_0(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta^2}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{n!}\right)^2, \text{ где } \zeta = \frac{4}{\gamma} \sqrt{\frac{c\tau}{h}} \sin 2\xi$$

согласно статье [3] можно оставить только два первых члена разложения, которые, в свою очередь, совпадают с разложением экспоненты

$$I_0(\zeta) \approx 1 + \frac{\zeta^2}{4} = e^{\frac{\zeta^2}{4}}$$

Тогда функция  $P_{FS}$  примет вид

$$P_{FS}(\tau) = A \exp\left\{-\frac{4}{\gamma} \sin^2 \xi\right\} \exp\left\{-\frac{4c}{\gamma h} (\cos 2\xi - \sin^2 2\xi) \tau\right\} \quad (5)$$

Согласно статье [?] можно связать дисперсию  $\sigma_p$  в (??) с временным разрешением альтиметра  $r_t$ :

$$\sigma_p = \frac{1}{2\sqrt{2 \ln 2}} r_t$$

Согласно работе Брауна [2], мы можем выразить  $FSSR$

Напоследок, следует учесть, что наш приемник (радиолокатор) тоже является линейной системой с некоторой импульсной характеристикой  $P_T(t)$ . Поэтому необходимо к уравнению (3) добавить ещё одну свертку. Тогда, результирующий импульс будет равен

$$P(t) = P_{FS}(t) * q(t) * P_T(t) \quad (6)$$

В свертке (6), с учетом (5), (??) и (4), каждый множитель представляет собой экспоненту. Свертка от трех экспонент несложно считается.

Получаем окончательную формулу для сигнала на приемнике радиолокатора

$$P(t) = Ae^{-v}(1 + \operatorname{erf}(u)), \text{ где} \quad (7)$$

$u = \frac{t - \alpha\sigma_c^2}{\sqrt{2}\sigma_c}$ ,  $v = \alpha(t - \frac{\alpha}{2}\sigma_c^2)$ , в которых  $\alpha = \delta - \frac{\beta^2}{4} = \frac{4}{\gamma} \cdot \frac{c}{h} \left( \cos 2\xi - \frac{\sin^2 2\xi}{\gamma} \right)$   
 $A = A_0 \exp\left\{\frac{-4}{\gamma} \sin^2 \xi\right\}$  и т.д (формула Брауна без изменений, не хочется расписывать все обозначения целиком).

График функции (7) изображен на рис. ??.

## 1.1. Восстановление параметров морской поверхности.

Зная зависимость принятого сигнала от параметров взволнованной морской поверхности, мы можем восстанавливать их по форме импульса. Это можно сделать, аппроксимируя практический импульс теоретической формулой и извлекая из получившегося графика необходимые коэффициенты.

Браун в своей работе вывел формулу, описывающего форму импульса в предположении гауссовой плотности вероятности зеркальных площадок на морской поверхности.

Однако решать подобную задачу для формулы (7) довольно сложно из-за сложной зависимости восстанавливаемых параметров и в их большом количестве. Это может приводить к большим вычислительным ошибкам даже при большом соотношении сигнал-шум.

Поэтому для решения задачи ретрекинга предлагается, использовать менее физичную, но более наглядную запись формулы (7):

$$P(t) = A \exp\left\{S_T\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right\} \left(1 + \operatorname{erf} \frac{t - \tau}{\sigma_L}\right), \text{ где} \quad (8)$$

$S_T$  – коэффициент наклона заднего фронта импульса,  $\tau$  – эпоха  $\sigma_L$  – ширина переднего фронта импульса,

**Поиск наклона заднего фронта** Формула (11), хороша тем, что можно найти некоторые коэффициенты, не прибегая к сложным методам оптимизации. После прохождения пика импульса, функция ошибок становится

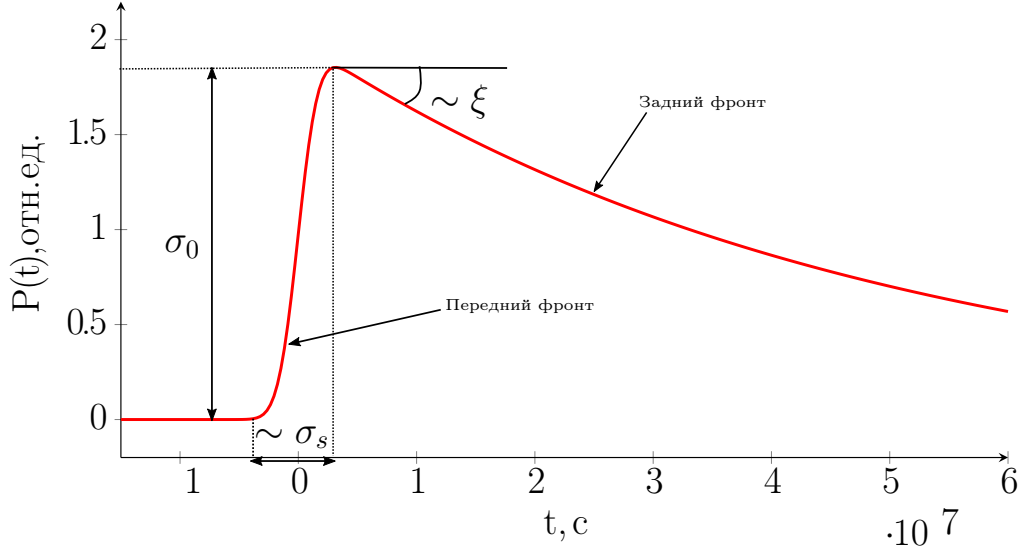


Рис. 2: Качественная форма импульса с обозначением основных параметров.

медленно меняющейся функцией и можно записать равенство

$$P(t) = 2A \exp\left\{S_T\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right\}, \text{ при } t > t_{max}, \quad (9)$$

где  $t_{max}$  – ордината пика импульса.

Логарифмируя (9)

$$\ln P(t) = \ln 2A + S_T\left(t - \frac{\tau}{2}\right) = S_T t + \text{const}$$

мы получаем линейную функцию времени. Значит, построив логарифм формы импульса при  $t > t_{max}$  и найдя коэффициент наклона получившейся прямой мы можем найти наклон заднего фронта  $S_T$ . Подобная процедура проведена на рис.??

**Поиск ширины переднего фронта** Как видно из рис.??, при  $t < t_{max}$  функция ошибок  $\text{erf}\left(\frac{t-\tau}{\sigma_L}\right)$  ведет себя быстрее экспоненты, а значит можно написать приближенное равенство

$$P(t) \approx A\left(1 + \text{erf}\frac{t - \tau}{\sigma_L}\right) \quad (10)$$

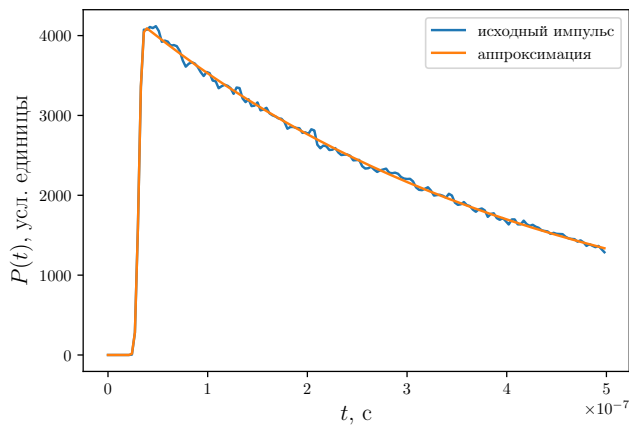
Аппроксимируя импульс при  $t < t_{max}$  формулой (10) мы получим оценку коэффициентов  $A$ ,  $\tau$ ,  $\sigma_L$ .

Имея оценки параметров аппроксимации по различным участкам функции  $P(t)$  мы можем использовать формулу (11) для всего импульса

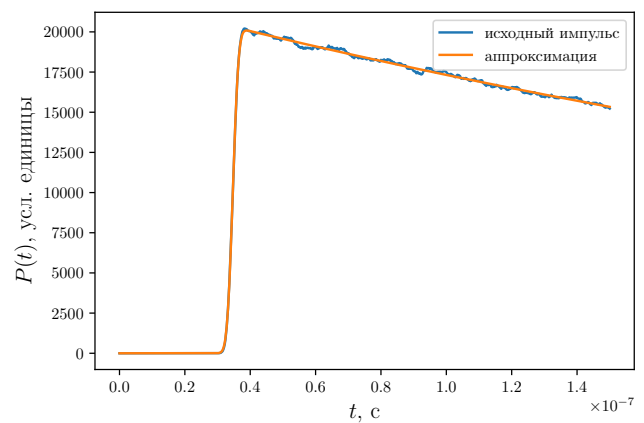
$$P(t) = A \exp\left\{S_T\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right\} \left(1 + \operatorname{erf} \frac{t - \tau}{\sigma_L}\right). \quad (11)$$

с начальными условиями для параметров  $A, S_T, \tau, \sigma_L$ , полученных на предыдущих этапах.

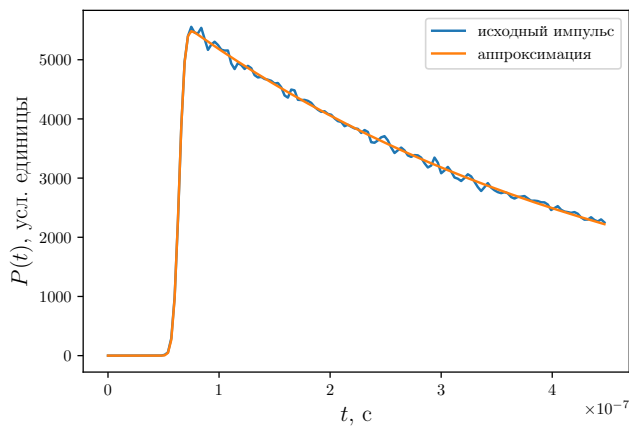
На рисунках ниже продемонстрированы результаты работы этого алгоритма на различных формах импульса (меняются углы отклонения антенны).



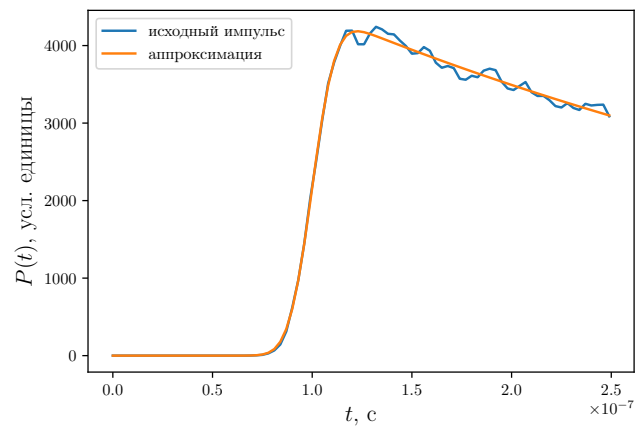
(a) Обработка файла imp08\_7.dat



(b) Обработка файла imp\_5.dat



(c) Обработка файла imp04\_10.dat



(d) Обработка файла imp15a.dat

[4]

## Список литературы

- [1] Moore R., Williams C. Radar terrain return at near-vertical incidence // *Proceedings of the IRE*. — 1957. — Vol. 45, no. 2. — P. 228–238.

- [2] Brown G. The average impulse response of a rough surface and its applications // [IEEE Transactions on Antennas and Propagation](#). — 1977. — Vol. 25, no. 1. — P. 67–74.
- [3] Amarouche L., Thibaut P. Improving the Jason-1 ground retracking to better account for attitude effects // [Marine Geodesy](#). — 2004. — Vol. 27, no. 1-2. — P. 171–197.
- [4] Басс Ф.Г. и Фукс И. Рассеяние волн на статически неровной морской поверхности. — Москва : Наука, 1972.