Содержание

1. Алгоритм ретрекинга

Рис. 1: Геометрия отклика от плоской поверхности.

Посчитаем теоретически отклик плоской морской поверхности P_{FS} на сигнал с радиолокатора с известной диаграммой направленности $G(\theta, hueta)$.

Форма функции P_{FS} ...

Из работы [1]

$$P_{FS}(t) = \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3 L_p} \int\limits_{(A)} \frac{\delta\big(t - \frac{2r}{c}\big) G^2(\theta, \omega) \sigma^o(\psi, \varphi)}{r^4} \mathrm{d}A$$

где λ – длина волны радиолокатора L_p – ~~набег в две стороны~~ $\delta(t - \frac{2r}{c})$ – дельта функция $G(\theta, \omega)$ – диаграмма направленности r – расстояние от спутника и элементарной рассеивающей поверхностью

Элемент поверхности можно записать как $\mathrm{d}A = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\psi$, однако нам нужна только θ как функция ρ и φ для интегрирования по углу. Используя тригонометрию, получим

$$\cos\theta = \frac{\cos\xi + \frac{\rho}{h}\sin\xi\cos(\tilde{\varphi} - \varphi)}{\sqrt{q + (\frac{\rho}{h})^2}}$$

Диаграмму направленности аппроксимируем следующей функцией

$$G(\theta) \approx G_0 e^{-\frac{2}{\gamma}\sin^2\theta}$$

с учетом $r = \sqrt{h^2 + \rho^2}$

$$P_{FS}(t) = \frac{G_0^2\lambda^2}{G_0^2\lambda^2(4\pi)^3 L_p h^4} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} \frac{\delta\big(t - \frac{2h}{c}\sqrt{1+\varepsilon^2}\big)}{(1+\varepsilon^2)^2} \sigma^o(\psi)$$
$$\cdot \exp\left\{-\frac{4}{\gamma}\left[1 - \frac{\cos^2\xi}{1+\varepsilon^2}\right] + b + a\cos(\tilde{\varphi} - \varphi) - b\sin^2(\tilde{\varphi} - \varphi)\right\} \mathrm{d}\varphi \rho \mathrm{d}\rho,$$

где $\varepsilon = \frac{\rho}{h}$, $a = \frac{4\varepsilon}{\gamma}\frac{\sin 2\xi}{(1+\varepsilon^2)}$, $b = \frac{4\varepsilon^2}{\gamma}\frac{\sin^2\xi}{(1+\varepsilon^2)}$,

поскольку интегрирование идет по полному периоду косинуса и синуса, то мы можем игнорировать $\tilde{\varphi}$. Разложим в ряд экспоненту, пользуясь малостью b

$$e^{-b\sin^2\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^2 b^n \sin^{2n}\varphi}{n!}$$

Браун в своей работе [2] вычислил этот интеграл и показал, что он равен

$$P_{FS} = \frac{G_0^2\lambda^2 c}{4(4\pi)^2 L_p h^3} \cdot \frac{\sigma^o(\psi)}{(\frac{ct}{2h})^3} \cdot \exp\left\{-\frac{4}{\gamma}\left[\cos^2\xi - \frac{\cos 2\xi}{(\frac{ct}{2h})^2}\right]\right\}$$
$$\cdot (1+\varepsilon^2)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1)} \left[\left(\frac{ct}{2h}\right)^2 - 1 \tan\xi\right]^n$$
$$\cdot I_n\left(\frac{4}{\gamma}\sqrt{\frac{c\tau}{n}}\sin 2\xi\right), \text{ при } t \geq 2h/c$$

и $P_{FS} = 0$ при $t < 2h/c$

Это выражение можно упростить, переходя к новому времени $\tau = t - 2h/c$, где $2h/c$ – время задержки между излучением и приемом сигнала. Учитывая, что в масштабах спутниковой альтиметрии $\frac{c\tau}{h} \ll 1$, получим

$$P_{FS}(\tau) = \frac{G_0^2\lambda^2 c\sigma^o(\psi_0)}{4(4\pi)^2 L_p h^3} \exp\left\{-\frac{4}{\gamma}\sin^2\xi - \frac{4c}{\gamma h}\tau\cos 2\xi\right\}$$
$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1)} \left[\sqrt{\frac{c\tau}{h}}\tan\xi\right]^n I_n\left(\frac{4}{\gamma}\sqrt{\frac{c\tau}{h}}\sin 2\xi\right) \text{ при } \tau \geq 0 \quad (1)$$

и $P_{FS} = 0, \text{ при } \tau < 0$

Рассмотрим теперь отдельно сумму из уравнения (1). Если переобозначить $Y = \frac{4}{\gamma}\sqrt{\frac{c\tau}{h}}\sin 2\xi$, то сумма примет вид

$$I_0(Y)\cdot\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1)}\cdot\frac{I_n(Y)}{I_0(Y)}\left[\frac{\gamma Y}{8\cos^2\xi}\right]^n\right\}$$

Поскольку $Y \ll 1$ и $\xi \ll 1$, то множитель $\left[\frac{\gamma Y}{8\cos^2\xi}\right]^n$ будет быстро сходиться к нулю. Следовательно сумму n слагаемых мы можем приближенно заменить лишь одним слагаемым при $n = 0$.

$$P_{FS}(\tau) = \frac{G_0^2\lambda^2 c\sigma^o(\psi_0)}{4(4\pi)^2 L_p h^3}\exp\left\{-\frac{4}{\gamma}\sin^2\xi - \frac{4c}{\gamma h}\tau\cos 2\xi\right\} \cdot I_0\left(\frac{4}{\gamma}\sqrt{\frac{c\tau}{h}}\sin 2\xi\right) \text{ при } \tau \geq 0 \quad (2)$$

Зная отклик плоской морской поверхности на сигнал с радиовысотомера мы можем перейти к вычислению отклика на взволнованную морскую поверхность. С точки зрения физики, различия будут в том, что теперь не вся поверхность может отражать сигнал в нужном направлении, а только зеркально ориентированные площадки на поверхности. С радиотехнической точки зрения, взволнованная морская поверхность является линейным фильтром с импульсной переходной характеристикой $q(t)$. Тогда отклик взволнованной поверхности можно вычислить выполняя свертку

$$P_{RS}(t) = q(z) * P_{FS}(t) \quad (3)$$

Результирующая форму импульса будет сверткой функции отклика на плоскую поверхность P_{FS} и функции распределения зеркальных площадок q

$$P(\tau) = \frac{c}{\tau}\int\limits_{-\infty}^{\infty} q\left(\frac{c\tau}{2} - \frac{c\tilde{\tau}}{2}\right)P_{FS}(\tilde{\tau})\,\mathrm{d}\tilde{\tau}$$

Функция P_{FS} изменяется гораздо медленне функции плотности зеркальных точек q, а значит можно записать приближенное равенство

$$P \approx \begin{cases} P_{FS}(0)\int\limits_0^{\infty}\frac{c}{2}q\left(\frac{c\tau}{2} - \frac{c\tilde{\tau}}{2}\right)\mathrm{d}\tilde{\tau}\,, & \text{при } \tau < 0 \\ P_{FS}(\tau)\int\limits_0^{\infty}\frac{c}{2}q\left(\frac{c\tau}{2} - \frac{c\tilde{\tau}}{2}\right)\mathrm{d}\tilde{\tau}\,, & \text{при } \tau < 0 \end{cases}$$

Согласно теореме о среднем, при большом на-на-на мы можем предположить распределение Гауссовым

$$\frac{c}{2}q\Big(\frac{c\tau}{2}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\frac{2\sigma_s^2}{c}\right)}}\exp\left\{-\frac{\tau^2}{2\pi\left(\frac{2\sigma_s^2}{c}\right)^2}\right\} \tag{4}$$

Посчитав свертку, получаем, что

$$P(\tau) \approx P_{FS}(\tau)\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{c\tau}{2\sqrt{2}\sigma_s}\right)\right]$$

Можно прибегнуть к ещё одному упрощению и разложить в ряд функцию Бесселя в уравнении (2):

$$I_0(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta^2}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{n!}\right)^2, \text{ где } \zeta = \frac{4}{\gamma}\sqrt{\frac{c\tau}{h}}\sin 2\xi$$

согласно статье [3] можно оставить только два первых члена разложения, которые, в свою очередь, совпадают с разложением экспоненты

$$I_0(\zeta) \approx 1 + \frac{\zeta^2}{4} = e^{\frac{\zeta^2}{4}}$$

Тогда функция P_{FS} примет вид

$$P_{FS}(\tau) = A\exp\left\{-\frac{4}{\gamma}\sin^2\xi\right\}\exp\left\{-\frac{4c}{\gamma h}\big(\cos 2\xi - \sin^2 2\xi\big)\tau\right\} \tag{5}$$

Согласно статье [**?**] можно связать дисперсию σ_p в (**??**) с временным разрешением альтиметра r_t:

$$\sigma_p = \frac{1}{2\sqrt{2\ln 2}}r_t$$

Согласно работе Брауна [2], мы можем выразить $FSSR$

Напоследок, следует учесть, что наш приемник (радиолокатор) тоже является линейной системой с некоторой импульсной характеристикой $P_T(t)$. Поэтому необходимо к уравнению (3) добавить ещё одну свертку. Тогда, результирующий импульс будет равен

$$P(t) = P_{FS}(t) * q(t) * P_T(t) \tag{6}$$

В свертке (6), с учетом (5),(**??**) и (4), каждый множитель представляет собой экспоненту. Свертка от трех экспонент несложно считается.

Получаем окончательную формулу для сигнала на приемнике радилокатора

$$P(t) = Ae^{-v}(1 + \mathrm{erf}(u)), \text{ где} \tag{7}$$

$u = \frac{t-\alpha\sigma_c^2}{\sqrt{2}\sigma_c}$, $v = \alpha(t - \frac{\alpha}{2}\sigma_c^2)$, в которых $\alpha = \delta - \frac{\beta^2}{4} = \frac{4}{\gamma} \cdot \frac{c}{h}\left(\cos 2\xi - \frac{\sin^2 2\xi}{\gamma}\right)$ $A = A_0 \exp\left\{\frac{-4}{\gamma}\sin^2\xi\right\}$ и т.д (формула Брауна без изменений, не хочется расписывать все обозначения целиком).

График функции (7) изображен на рис. **??**.

1.1. Восстановление параметров морской поверхности.

Зная зависимость принятого сигнала от параметров взволнованной морской поверхности, мы можем восстанавливать их по форме импульса. Это можно сделать, аппроксимируя практический импульс теоретической формулой и извлекая из получившегося графика необхожимые коэффициенты.

Браун в своей работе вывел формулу, описывающего форму импульса в предположении гауссовой плотности вероятности зеркальных площадок на морской поверхности.

Однако решать подобную задачу для формулы (7) довольно сложно из-за сложной зависимости восстанавливаемых параметров и в их большом количестве. Это может приводить к большим вычислительным ошибкам даже при большом соотношении сигнал-шум.

Поэтому для решения задачи ретрекинга предлагается, использовать менее физичную, но более наглядную запись формулы (7):

$$P(t) = A\exp\left\{S_T(t - \frac{\tau}{2})\right\}\left(1 + \mathrm{erf}\,\frac{t-\tau}{\sigma_L}\right), \text{ где} \tag{8}$$

S_T – коэффициент наклона заднего фронта импульса, τ – эпоха σ_L – ширина переднего фронта импульса,

Поиск наклона заднего фронта Формула (11), хороша тем, что можно найти некоторые коэффициенты, не прибегая к сложным методам оптимизации. После прохождения пика импульса, функция ошибок становится

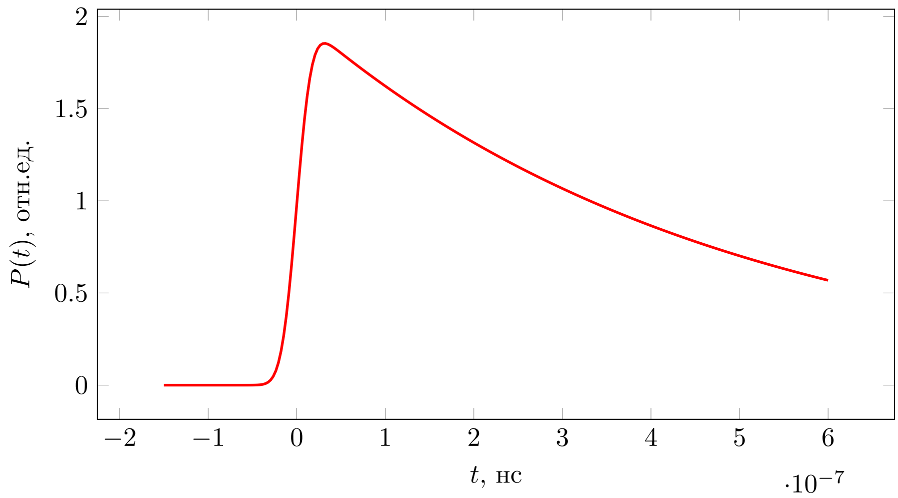


Рис. 2: Качественная форма импульса с обозначением основных параметров.

медленно меняющейся функцией и можно записать равенство

$$P(t) = 2A\exp\Big\{S_T\Big(t - \frac{\tau}{2}\Big)\Big\}, \text{ при } t > t_{max}, \tag{9}$$

где t_{max} – ордината пика импульса.

Логарифмируя (9)

$$\ln P(t) = \ln 2A + S_T(t - \frac{\tau}{2}) = S_T t + \text{const}$$

мы получаем линейную функцию времени. Значит, построив логарифм формы импульса при $t > t_{max}$ и найдя коэффициент наклона получившейся прямой мы можем найти наклон заднего фронта S_T. Подобная процедура проведена на рис.**??**

Поиск ширины переднего фронта Как видно из рис.**??**, при $t < t_{max}$ функция ошибок erf $\left(\frac{t-\tau}{\sigma_L}\right)$ ведет себя быстрее экспоненты, а значит можно написать приближенное равенство

$$P(t) \approx A\left(1 + \text{erf}\,\frac{t-\tau}{\sigma_L}\right) \tag{10}$$

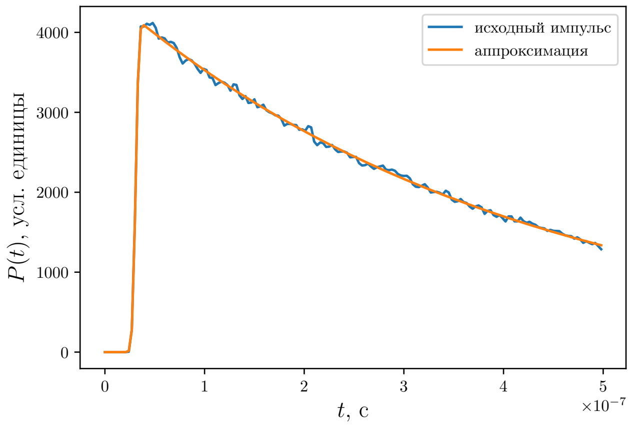
Аппроксимируя импульс при $t < t_{max}$ формулой (10) мы получим оценку коэффициентов $A,\ \tau,\ \sigma_L$.

Имея оценки параметров аппроксимации по различным участкам функции $P(t)$ мы можем использовать формулу (11) для всего импульса

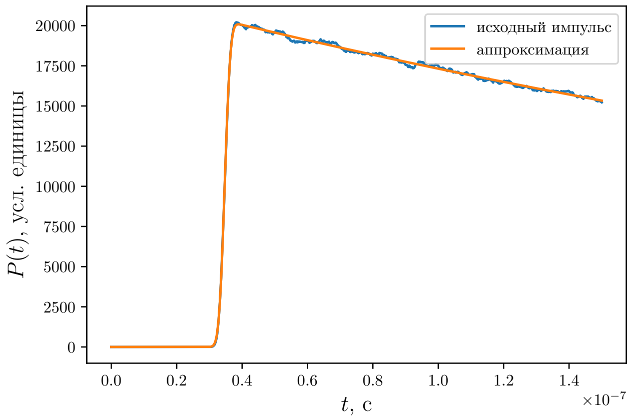
$$P(t) = A\exp\Big\{S_T(t - \frac{\tau}{2})\Big\}\left(1 + \text{erf}\,\frac{t-\tau}{\sigma_L}\right). \tag{11}$$

с начальными условиями для параметров A, S_T, τ, σ_L, полученных на предыдущих этапах.

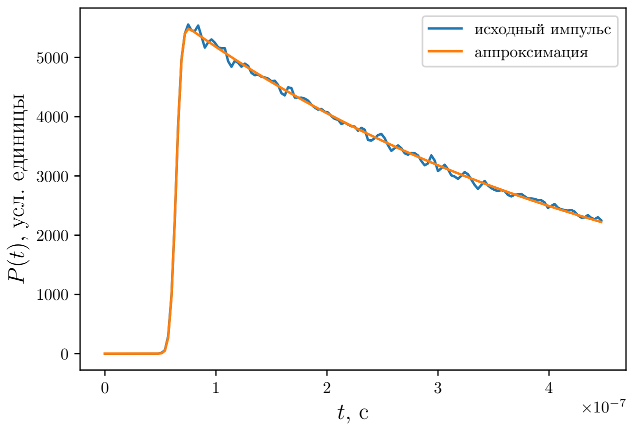
На рисунках ниже продемострированы результаты работы этого алгоритма на различных формах импульса (меняются углы отклонения антенны).



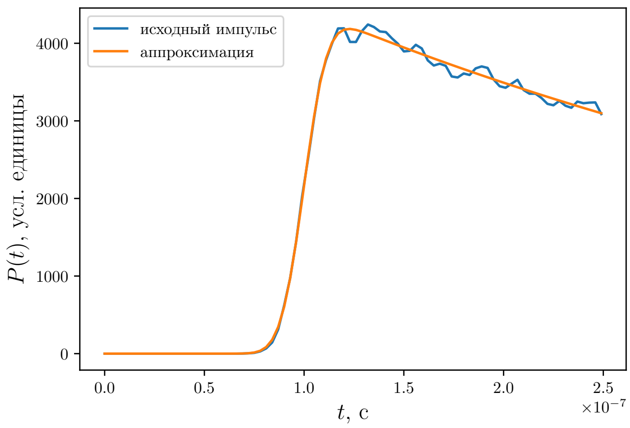
(a) Обработка файла imp08_7.dat



(b) Обработка файла imp_5.dat



(c) Обработка файла imp04_10.dat



(d) Обработка файла imp15a.dat

[4]

Список литературы

[1] Moore R., Williams C. Radar terrain return at near-vertical incidence // Proceedings of the IRE. — 1957. — Vol. 45, no. 2. — P. 228–238.

[2] Brown G. The average impulse response of a rough surface and its applications // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 1977. — Vol. 25, no. 1. — P. 67–74.

[3] Amarouche L., Thibaut P. Improving the Jason-1 ground retracking to better account for attitude effects // Marine Geodesy. — 2004. — Vol. 27, no. 1-2. — P. 171–197.

[4] Басс Ф.Г. и Фукс И. Рассеяние волн на статически неровной морской поверхности. — Москва : Наука, 1972.