

# Содержание

<b>1</b>	<b>Алгоритм ретрекинга</b>	<b>1</b>
1.1	Восстановление параметров морской поверхности. . . . .	6
<b>2</b>	<b>Моделирование процесса измерения</b>	<b>8</b>

## 1. Алгоритм ретрекинга

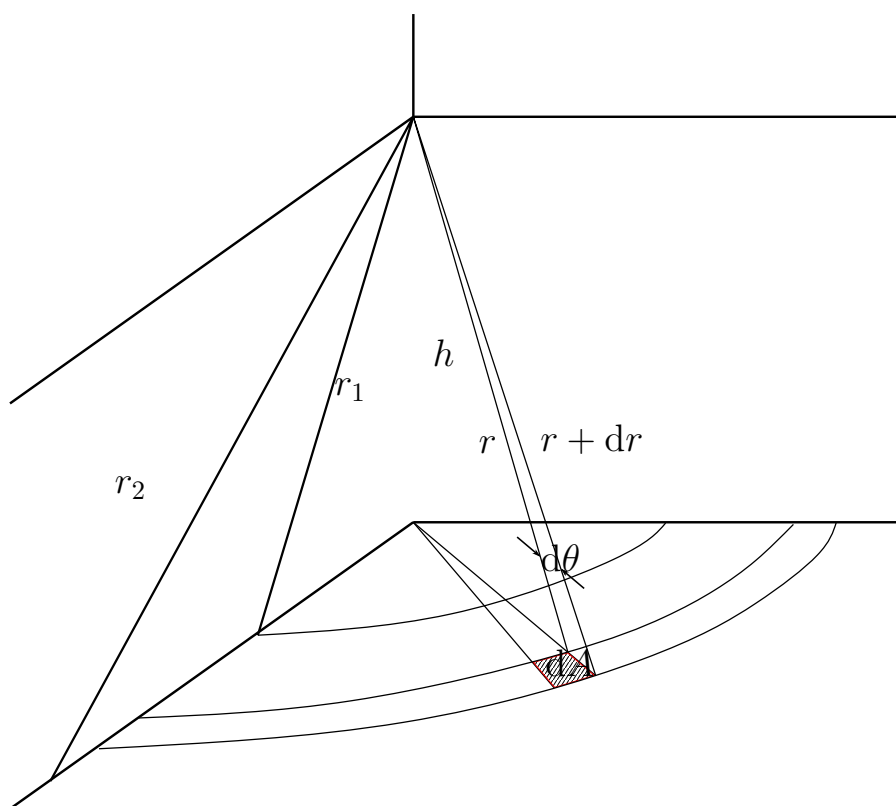


Рис. 1: Геометрия задачи вычисления отклика радиолокатора на плоскую поверхность с учетом отклонения антенны от надира.

Посчитаем теоретически отклик плоской морской поверхности  $P_{FS}$  на сигнал с радиолокатора. Предполагаем известными диаграмму направленности  $G(\theta)$ , мощность излученной энергии как функцию времени  $P(t)$  и длину волны излучения  $\lambda$ .

Рассматривая малую плоскую площадку  $m$ , мы можем составить уравнение, описывающее отраженную от неё мощность из следующих четырех множителей:

$$P_{FS_m} = \frac{P(t - \frac{2r_m}{c})G_m}{4\pi r_m^2} \cdot \sigma_m^o A_m \cdot \frac{1}{4\pi r_m^2} \cdot \frac{G_m \lambda^2}{4\pi} = \frac{P(t - \frac{2r_m}{c})G_m^2 \lambda^2 \sigma_m^o}{(4\pi)^3 r_m^4}, \quad (1)$$

где  $r_m$  – расстояние от радара до рассеивающей площадки,  $\sigma_m^o$  – удельная эффективная площадь рассеяния площадки,  $G_m$  – диаграмма направленности антенны в направлении на рассеивающую площадку,  $A_m$  – площадь площадки.

Первый множитель в уравнении (1) соответствует плотности мощности излучаемого сигнала. Второй множитель характеризует энергию падающего излучения, которая переизлучается в направлении приемника, то есть эффективную площадь рассеяния. Третий множитель характеризует рассеяние в пространстве переизлученной мощности из-за сферичности волны. Четвертый коэффициент это апертура антенны.

Для того, чтобы найти полную мощность переизлученного сигнала от интересующей нас поверхности, разобьем всю поверхность на элементарные площадки  $dA$  и проинтегрируем по ним

$$P_{FS}(t) = \frac{\lambda^2 \langle \sigma^o \rangle}{(4\pi)^3} \int \frac{P(t - \frac{2r}{c})G^2(r, \theta, \varphi)}{r^4} dA$$

Из геометрии задачи (см. рис. 1) задачи можно найти связь между азимутальным углом  $\theta$ , полярными углами  $\varphi$ ,  $\tilde{\varphi}$  и отклонением антенны от положения надира

$$\cos \theta = \frac{\cos \xi + \frac{\rho}{h} \sin \xi \cos(\tilde{\varphi} - \varphi)}{\sqrt{1 + (\frac{\rho}{h})^2}} \quad (2)$$

Поскольку боковые лепестки по мощности гораздо меньше главного лепестка, то пренебрежем ими и положим диаграмму направленности равной следующей функции

$$G(\theta) = G_0 e^{-\frac{2}{\gamma} \sin^2 \theta} \quad (3)$$

Подставим (2) в (3), учтем, что элемент поверхности можно записать как  $dA = \rho d\rho d\psi$  и тогда интеграл преобразуется к виду

с учетом  $r = \sqrt{h^2 + \rho^2}$

$$P_{FS}(t) = \frac{G_0^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 h^4} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{P\left(t - \frac{2h}{c} \sqrt{1 + \varepsilon^2}\right)}{(1 + \varepsilon^2)^2} \sigma^o(\psi) \cdot \exp\left\{-\frac{4}{\gamma} \left[1 - \frac{\cos^2 \xi}{1 + \varepsilon^2}\right] + b + a \cos(\tilde{\varphi} - \varphi) - b \sin^2(\tilde{\varphi} - \varphi)\right\} d\varphi \rho d\rho,$$

где  $\varepsilon = \frac{\rho}{h}$ ,  $a = \frac{4\varepsilon \sin 2\xi}{\gamma (1 + \varepsilon^2)}$ ,  $b = \frac{4\varepsilon^2 \sin^2 \xi}{\gamma (1 + \varepsilon^2)}$ , в рамках наших задач, нас не будет интересовать абсолютное значение мощности, а то его вид её зависимости от времени.

Браун в своей работе [?] вычислил этот интеграл и показал, что он равен

$$P_{FS} = \frac{G_0^2 \lambda^2 c}{4(4\pi)^2 L_p h^3} \cdot \frac{\sigma^o(\psi)}{\left(\frac{ct}{2h}\right)^3} \cdot \exp\left\{-\frac{4}{\gamma} \left[\cos^2 \xi - \frac{\cos 2\xi}{\left(\frac{ct}{2h}\right)^2}\right]\right\} \cdot (1 + \varepsilon^2)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(n + 1)} \left[\left(\frac{ct}{2h}\right)^2 - 1 \tan \xi\right]^n \cdot I_n\left(\frac{4}{\gamma} \sqrt{\frac{c\tau}{n}} \sin 2\xi\right), \text{ при } t \geq 2h/c$$

и  $P_{FS} = 0$  при  $t < 2h/c$

Это выражение можно упростить, переходя к новому времени  $\tau = t - 2h/c$ , где  $2h/c$  – время задержки между излучением и приемом сигнала. Учитывая, что в масштабах спутниковой альтиметрии  $\frac{c\tau}{h} \ll 1$ , получим

$$P_{FS}(\tau) = \frac{G_0^2 \lambda^2 c \sigma^o(\psi_0)}{4(4\pi)^2 L_p h^3} \exp\left\{-\frac{4}{\gamma} \sin^2 \xi - \frac{4c}{\gamma h} \tau \cos 2\xi\right\} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(n + 1)} \left[\sqrt{\frac{c\tau}{h}} \tan \xi\right]^n I_n\left(\frac{4}{\gamma} \sqrt{\frac{c\tau}{h}} \sin 2\xi\right) \text{ при } \tau \geq 0 \quad (4)$$

и  $P_{FS} = 0$ , при  $\tau < 0$

Рассмотрим теперь отдельно сумму из уравнения (4). Если переобозначить  $Y = \frac{4}{\gamma} \sqrt{\frac{c\tau}{h}} \sin 2\xi$ , то сумма примет вид

$$I_0(Y) \cdot \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(n + 1)} \cdot \frac{I_n(Y)}{I_0(Y)} \left[\frac{\gamma Y}{8 \cos^2 \xi}\right]^n\right\}$$

Поскольку  $Y \ll 1$  и  $\xi \ll 1$ , то множитель  $\left[\frac{\gamma Y}{8 \cos^2 \xi}\right]^n$  будет быстро сходиться к нулю. Следовательно сумму  $n$  слагаемых мы можем приближенно заменить лишь одним слагаемым при  $n = 0$ .

$$P_{FS}(\tau) = \frac{G_0^2 \lambda^2 c \sigma^o(\psi_0)}{4(4\pi)^2 L_p h^3} \exp\left\{-\frac{4}{\gamma} \sin^2 \xi - \frac{4c}{\gamma h} \tau \cos 2\xi\right\} \cdot I_0\left(\frac{4}{\gamma} \sqrt{\frac{c\tau}{h}} \sin 2\xi\right) \text{ при } \tau \geq 0 \quad (5)$$

Можно прибегнуть к ещё одному упрощению и разложить в ряд функцию Бесселя в уравнении (5):

$$I_0(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta^2}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{n!}\right)^2, \text{ где } \zeta = \frac{4}{\gamma} \sqrt{\frac{c\tau}{h}} \sin 2\xi$$

согласно статье [?] можно оставить только два первых члена разложения, которые, в свою очередь, совпадают с разложением экспоненты

$$I_0(\zeta) \approx 1 + \frac{\zeta^2}{4} = e^{\frac{\zeta^2}{4}}$$

Тогда функция  $P_{FS}$  примет вид

$$P_{FS}(\tau) = A \exp\left\{-\frac{4}{\gamma} \sin^2 \xi\right\} \exp\left\{-\frac{4c}{\gamma h} (\cos 2\xi - \sin^2 2\xi) \tau\right\} \quad (6)$$

Зная отклик плоской морской поверхности на сигнал с радиовысотометра мы можем перейти к вычислению отклика на взволнованную морскую поверхность. С точки зрения физики, различия будут в том, что теперь не вся поверхность может отражать сигнал в нужном направлении, а только зеркально ориентированные площадки на поверхности. С радиотехнической точки зрения, взволнованная морская поверхность является линейным фильтром с импульсной переходной характеристикой  $q(t)$ . Тогда отклик взволнованной поверхности можно вычислить выполняя свертку

$$P_{RS}(t) = q(t) * P_{FS}(t) \quad (7)$$

Результирующая форму импульса будет сверткой функции отклика на плоскую поверхность  $P_{FS}$  и функции распределения зеркальных площадок  $q$

$$P(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\tau - \tilde{\tau}) P_{FS}(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau}$$

Стоит заметить, что из-за малого значения параметра  $\xi$  и масштаба задачи  $(c\tau)/h \ll 1$  функция  $P_{FS}$  изменяется гораздо медленнее функции плотности зеркальных точек  $q$ , а значит можно записать приближенное равенство

$$P \approx \begin{cases} P_{FS}(0) \int_0^{\infty} q(\tau - \tilde{\tau}) d\tilde{\tau}, & \text{при } \tau < 0 \\ P_{FS}(\tau) \int_0^{\infty} q(\tau - \tilde{\tau}) d\tilde{\tau}, & \text{при } \tau > 0 \end{cases}$$

Поскольку корреляция между соседними площадками мала, а количество площадок велико, то согласно центральной предельной теореме мы можем положить распределение  $q$  гауссовым

$$q(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\frac{2\sigma_s^2}{c}\right)}} \exp\left\{-\frac{\tau^2}{2\pi\left(\frac{2\sigma_s^2}{c}\right)^2}\right\} \quad (8)$$

Напоследок, следует учесть, что наш приемник (радиолокатор) тоже является линейной системой с некоторой импульсной характеристикой  $P_T(t)$ . Поэтому необходимо к уравнению (7) добавить ещё одну свертку. В работе (??) показано, что отклик радиолокатора имеет гауссовую форму

$$P_T(\tau) \sim \exp\left\{-\frac{\tau^2}{2\sigma_p^2}\right\}, \quad (9)$$

где  $\sigma_p = \frac{1}{\sqrt{2\ln 2}}T \approx 0.425T$ ,  $T$  – временное разрешение антенны, по порядку величины обычно равное  $T \sim 10$  нс.

Тогда, результирующий импульс будет равен

$$P(t) = P_{FS}(t) * q(t) * P_T(t) \quad (10)$$

В свертке (10), с учетом (6),(9) и (8), каждый множитель представляет собой экспоненту. Свертку от трех экспонент не трудно посчитать аналитически.

Получаем окончательную формулу для сигнала на приемнике радиолокатора

$$P(t) = Ae^{-v}(1 + \operatorname{erf}(u)), \quad \text{где} \quad (11)$$

$$A = A_0 \exp \left\{ \frac{-4}{\gamma} \sin^2 \xi \right\},$$

$$u = \frac{t - \alpha \sigma_c^2}{\sqrt{2} \sigma_c},$$

$$v = \alpha \left( t - \frac{\alpha}{2} \sigma_c^2 \right),$$

в которых

$$\alpha = \delta - \frac{\beta^2}{4} = \frac{4}{\gamma} \cdot \frac{c}{h} \left( \cos 2\xi - \frac{\sin^2 2\xi}{\gamma} \right),$$

$$\gamma = \frac{\ln 2}{2} \sin^2 \theta_{-3dB},$$

$$\sigma_c^2 = \sigma_p^2 + \frac{\sigma_s^2}{c^2},$$

$\xi \ll 1$  – малое отклонение антенны от надира,  $\theta_{-3dB}$  – ширина диаграммы направленности антенны на уровне  $-3dB$ ,  $h$  – высота радиолокатора над поверхностью земли,  $c$  – скорость света в вакууме,  $\sigma_s^2$  – дисперсия высот взволнованной морской поверхности.

График функции (11) изображен на рис. 2.

### 1.1. Восстановление параметров морской поверхности.

Зная зависимость принятого сигнала от параметров взволнованной морской поверхности, мы можем восстанавливать их по форме импульса. Это можно сделать, аппроксимируя практический импульс теоретической формулой и извлекая из получившегося графика необходимые коэффициенты.

Браун в своей работе вывел формулу, описывающего форму импульса в предположении гауссовой плотности вероятности зеркальных площадок на морской поверхности.

Однако решать подобную задачу для формулы (11) довольно сложно из-за сложной зависимости восстанавливаемых параметров и в их большом количестве. Это может приводить к большим вычислительным ошибкам даже при большом соотношении сигнал-шум.



Рис. 2: Качественная форма импульса с обозначением основных параметров.

Поэтому для решения задачи ретрекинга предлагается, использовать менее физичную, но более наглядную запись формулы (11)

$$P(t) = A \exp\left\{S_T\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right\} \left(1 + \operatorname{erf} \frac{t - \tau}{\sigma_L}\right), \text{ где} \quad (12)$$

$S_T$  – коэффициент наклона заднего фронта импульса,  $\tau$  – эпоха  $\sigma_L$  – ширина переднего фронта импульса,

**Поиск наклона заднего фронта.** Формула (15), хороша тем, что можно найти некоторые коэффициенты, не прибегая к сложным методам оптимизации. После прохождения пика импульса, функция ошибок становится медленно меняющейся функцией и можно записать равенство

$$P(t) = 2A \exp\left\{S_T\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right\}, \text{ при } t > t_{max}, \quad (13)$$

где  $t_{max}$  – ордината пика импульса.

Логарифмируя (13)

$$\ln P(t) = \ln 2A + S_T\left(t - \frac{\tau}{2}\right) = S_T t + \text{const}$$

мы получаем линейную функцию времени. Значит, построив логарифм формы импульса при  $t > t_{max}$  и найдя коэффициент наклона получившейся прямой мы можем найти наклон заднего фронта  $S_T$ . Подобная процедура проведена на рис.??

**Поиск ширины переднего фронта.** Как видно из рис.??, при  $t < t_{max}$  функция ошибок  $\text{erf}\left(\frac{t-\tau}{\sigma_L}\right)$  ведет себя быстрее экспоненты, а значит можно написать приближенное равенство

$$P(t) \approx A \left( 1 + \text{erf} \frac{t - \tau}{\sigma_L} \right) \quad (14)$$

Аппроксимируя импульс при  $t < t_{max}$  формулой (14) мы получим оценку коэффициентов  $A$ ,  $\tau$ ,  $\sigma_L$ .

Имея оценки параметров аппроксимации по различным участкам функции  $P(t)$  мы можем использовать формулу (15) для всего импульса

$$P(t) = A \exp \left\{ S_T \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \right\} \left( 1 + \text{erf} \frac{t - \tau}{\sigma_L} \right). \quad (15)$$

с начальными условиями для параметров  $A, S_T, \tau, \sigma_L$ , полученных на предыдущих этапах.

На рисунках ниже продемонстрированы результаты работы этого алгоритма на различных формах импульса (меняются углы отклонения антенны).

**Восстановление параметров поверхности** Не сложно найти связь коэффициентов в формуле (11) и (15):

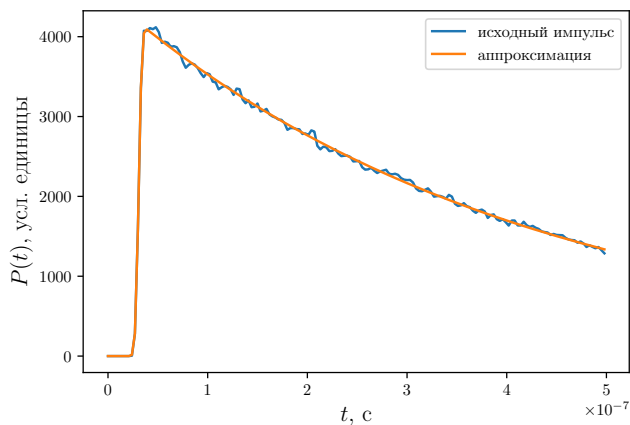
$$\begin{aligned} S_T &= -\alpha, \\ \sigma_L &= \sqrt{2}\sigma_c, \\ \sigma_c^2 &= \sigma_p^2 + \frac{\sigma_s^2}{c^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Из соотношений (16) восстанавливается значение дисперсии высот (высоты значительного волнения). Из амплитуды импульса мы можем узнать сечение обратного рассеяния, которое с помощью различных моделей позволяет оценить скорость приводного ветра.

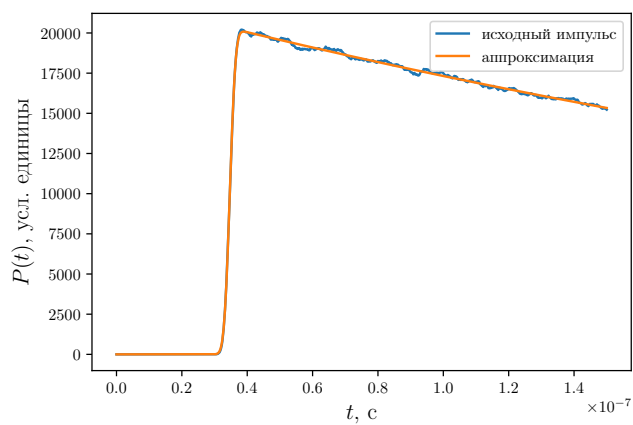
## 2. Моделирование процесса измерения

При малых углах падения механизм обратного рассеяния является квази-зеркальным и отражение происходит на участках волнового профиля, ориентированных перпендикулярно падающему излучению. Тогда в формировании

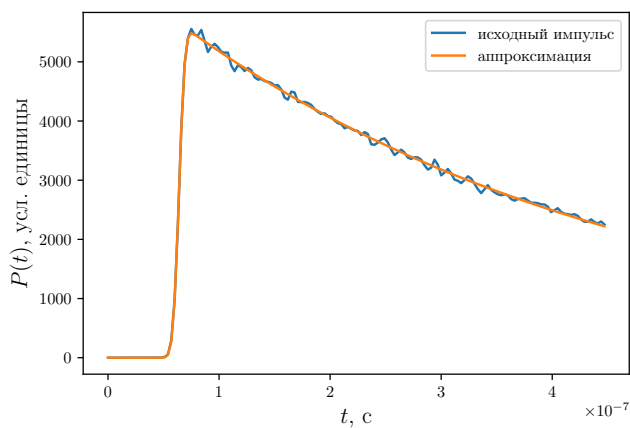




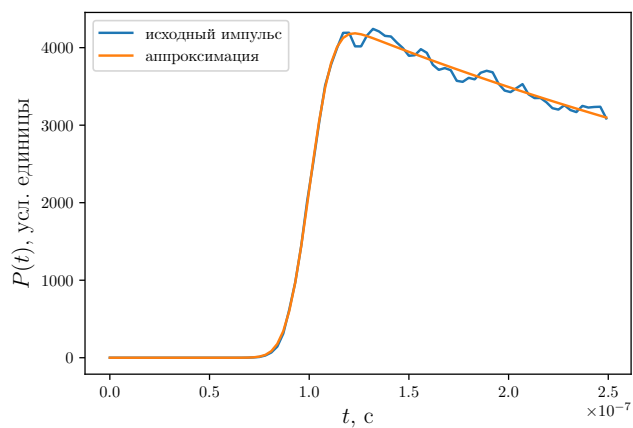
(a) Обработка файла imp08\_7.dat



(b) Обработка файла imp\_5.dat

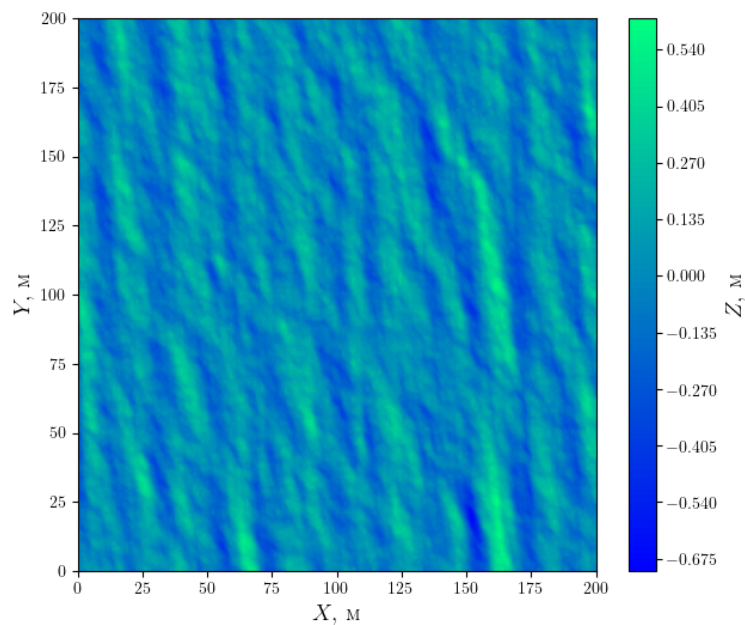


(c) Обработка файла imp04\_10.dat

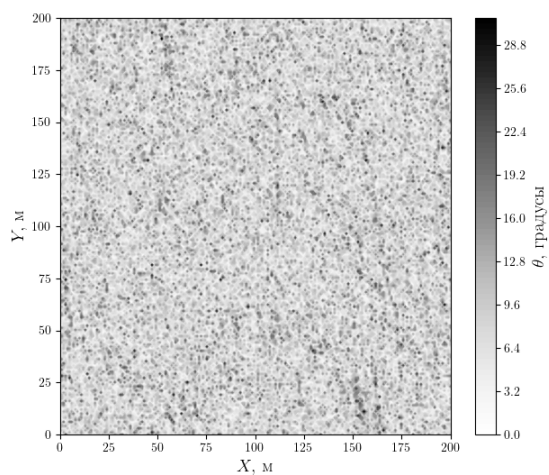


(d) Обработка файла imp15a.dat

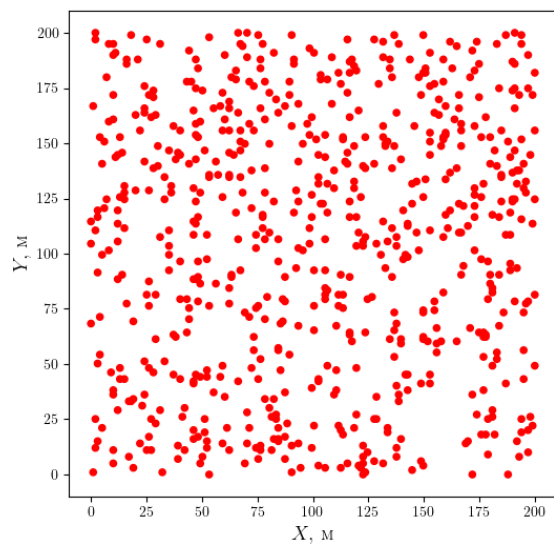
отраженного сигнала будут участвовать только площадки, ориентированные нормально к излучению.



(a) Моделирование поверхности при скорости ветра  $U = 5$  м/с



(b) Локальный угол отражения от поверхности для радиолокатора находящегося на высоте  $H = 1000$  км в точке с координатой (100, 100)



(c) Положение зеркальных точек поверхности 4a для радиолокатора находящегося над точкой (100,100)