

1. Общие понятия

Рассмотрим ряд общих понятий, описывающих возвышения взволнованной морской поверхности в рамках теории случайных пространственно-временных полей. Представим возвышения поверхности в виде суммы гармонических бегущих волн с независимыми фазами:

$$\xi(\vec{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(\vec{\kappa}_n) e^{i(\omega_n t + \vec{\kappa}_n \vec{r} + \psi_n)}, \quad (1)$$

где ψ_n – случайная фаза, равномерно распределенная в интервале от 0 до 2π , $A_n(\vec{\kappa}_n)$ – комплексная амплитуда гармоники с волновым числом $\vec{\kappa}_n$ и временной частотой ω_n , связанной с $\vec{\kappa}_n$ известным дисперсионным соотношением, полученным в [?]

$$\omega(\kappa) = \sqrt{\kappa g + \alpha \kappa^3},$$

где g – ускорение свободного падения, α – коэффициент, полученный из экспериментов.

Корреляционную функцию $K_\xi(\vec{r}, t)$ поля $\xi(\vec{r}, t)$ определим стандартным образом [?].

$$K_\xi[\vec{r}_1, \vec{r}_2, t_1, t_2] = \langle \xi(\vec{r}_1, t_1) \xi^*(\vec{r}_2, t_2) \rangle \quad (2)$$

Поле высот в нашей задаче считаем стационарным в широком смысле, то есть $K_\xi[\vec{r}_1, \vec{r}_2, t_1, t_2] = K_\xi[\vec{\rho} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \tau = t_2 - t_1]$. Будем считать, гармоники независимыми друг от друга, а значит перекрестные члены в уравнении (2) занулятся. Корреляционную функцию поверхности (1) несложно посчитать

$$K_\xi[\vec{\rho}, \tau] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n^2}{2} e^{i(\vec{\kappa}_n \vec{\rho} + \omega_n \tau)} \quad (3)$$

Для решения задачи моделирования отраженного от морской поверхности импульса достаточно рассматривать мгновенный снимок моделируемой поверхности, в момент отражения а значит можно положить $\tau = \text{const} = 0$ и тогда $K_\xi[\rho, \tau] = K_\xi[\rho]$.

В этом случае справедлива формула Винера-Хинчина [?]

$$S_\xi(\vec{k}) \int_{-\infty}^{\infty} K_\xi[\vec{\rho}] e^{-i\vec{\kappa}\vec{\rho}} d\rho. \quad (4)$$

Будем считать, что спектр морского волнения можно представить в виде функции с разделяющимися переменными, где $S_\xi(\kappa)$ определяет зависимость спектральной мощности от волнового числа, а функция $\Phi(\kappa, \varphi)$ – зависимость от азимутального угла. мощности от волнового числа

$$S_\xi(\vec{\kappa}) = S_\xi(\kappa)\Phi(\kappa, \varphi),$$

где $\kappa = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}$, $\varphi = \arctg \frac{\kappa_x}{\kappa_y}$. Для удобства, угловое распределение нормируется так, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\kappa, \varphi) d\varphi = 1$$

Для моделирования будет использоваться спектр волнения, который получен в работе [?] и приведен в разделе отчета 2.1.

2. Двумерная модель поверхностного волнения

В соответствии с предыдущим разделом, для моделирования случайной поверхности $\xi(\vec{r}, t)$ будем использовать её представление в виде суперпозиции плоских волн с различными частотами и случайными фазами ψ_{nm} , бегущих под разными азимутальными углами φ_m [?]:

$$\xi(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M A_n(\kappa_n) \cdot F_m(\kappa_n, \varphi_m) \cos(\omega_n t + \vec{\kappa} \vec{r} + \psi_{nm}), \quad (5)$$

где ψ_{nm} – случайная фаза, равномерно распределенная в интервале от 0 до 2π (см. рис. 1). В соответствии с центральной предельной теоремой [?]. Амплитуда n -ой гармоники A_n есть мощность на интервале $\Delta\kappa_n$, которая вычисляется по спектру моделируемой поверхности $S_\xi(\kappa)$ (см. (3) и (4)).

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^2} &= S_\xi(\vec{\kappa}) e^{i\vec{\kappa}\vec{\rho}} d\vec{\kappa} = \frac{1}{(2\pi)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_\xi(\kappa) \Phi(\varphi) \kappa e^{i\vec{\kappa}\vec{\rho}} d\kappa d\varphi = \\ &\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa S_\xi(\kappa) e^{i\vec{\kappa}\vec{\rho}} d\kappa = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(A_n(\vec{k}_n))^2}{2} e^{i\vec{\kappa}_n \vec{\rho}} \end{aligned}$$

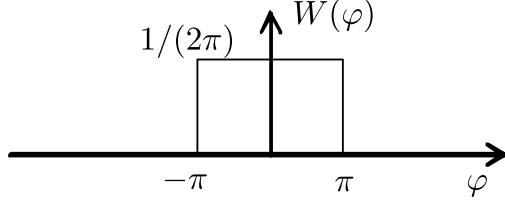


Рис. 1: Плотность вероятности случайной фазы φ .

$$A_n(\kappa_n) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int_{\Delta\kappa_n} 2\kappa S_\xi(\kappa) \cdot d\kappa}$$

При достаточно большом $n \rightarrow \infty$ ($\Delta\kappa_n \rightarrow 0$) можно интегрировать прямоугольником

$$A_n(\kappa_n) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2\kappa S_\xi(\kappa_n) \Delta\kappa_n}$$

с погрешностью, пропорциональной $\Delta A_n \sim \sqrt{\frac{d\kappa S_\xi(\kappa)}{d\kappa} \Delta\kappa_n^2}$.

Введем новое обозначение для удобства $S(\kappa_n) \equiv \kappa_n S_\xi(\kappa_n)$.

Аналогично вычислению амплитуд, можно вычислить азимутальное распределение F_m следующим образом:

$$F_{nm}(\kappa_n, \varphi_m) = \sqrt{\int_{\Delta\varphi_m} \Phi_\xi(\kappa_n, \varphi) d\varphi},$$

где $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{M}$ – шаг по азимутальному углу. При малом шаге $\Delta\varphi$ с ошибкой, пропорциональной $\Delta F_{nm} \sim \frac{d\Phi(\kappa_n, \varphi)}{d\varphi} \Delta\varphi^2$, можно перейти к соотношению

$$F_{nm}(\kappa_n, \varphi_m) = \sqrt{\Phi_\xi(\kappa_n, \varphi_m) \cdot \Delta\varphi_m}$$

Такой подход является одним из самых простых и эффективных, но у него есть существенный недостаток – моделируемая поверхность получается симметричной, хотя реальная поверхность асимметрична: передний склон волны более крутой и короткий относительно заднего склона. Кроме того, площадь гребней меньше площади впадиг, что также отражается при таком моделировании. Эти отличия модельной поверхности от морской поверхности не позволяют смоделировать так называемые поправки на состояние морской поверхности [?]-[?].

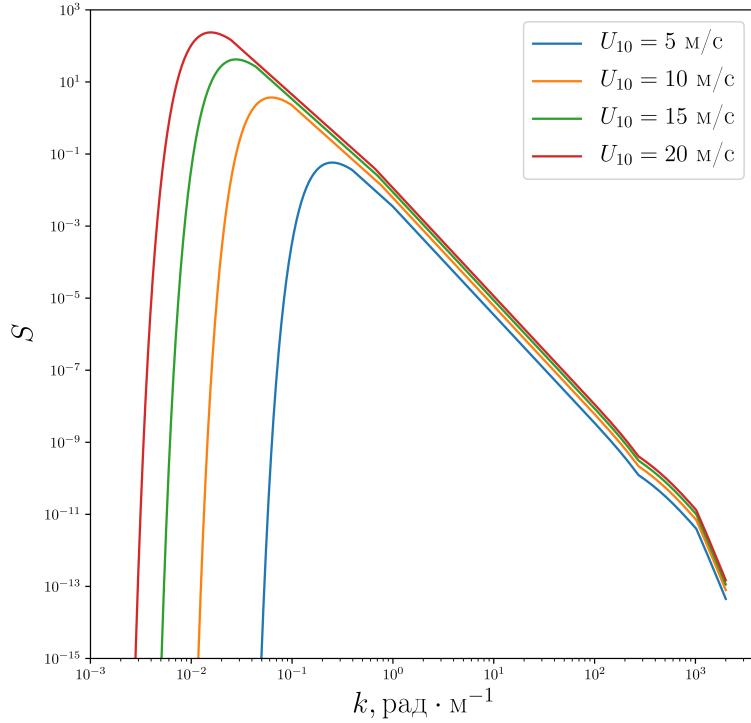


Рис. 2: Спектр высот $S(k)$ при меняющейся скорости ветра

Графики $S(\kappa)$ и $\Phi_\xi(\kappa)$ для наглядности изображены на рис. 2 и рис. ?? соответственно. Далее κ_m будет называться ордината максимума функции $S(\kappa)$. Стоит заметить, что с ростом скорости ветра число используемых гармоник, необходимых для получения одинакового качества моделирования, возрастает. Это обусловлено тем, что растет интервал волновых чисел κ , на котором определен спектр волнения. На рис.() показаны корреляционные функции волнения с разным числом гармоник в случае равномерного выбора шага. На рис. ?? изображены поверхности, построенные по формуле (5).

Критерием качества моделирования, а также оптимального выбора числа гармоник была выбрана близость следующих корреляционных функций высот:

$$K[\rho] = \int_{-\infty}^{\infty} S(\kappa) \cos(\kappa\rho) d\kappa \quad (6)$$

$$\tilde{K}(\rho) = \sum_{n=1}^{N} \frac{A_n^2}{2} \cos(\kappa_n \rho)$$

3. Метод «отбеливания» спектра.

Для оптимизации времени построения поверхности и уменьшения количества гармоник без уменьшения качества моделирования, предлагается использовать следующий метод.

Предположим, что при больших ρ гармонические составляющие корреляционной функции не зависят друг от друга и мы можем пренебречь их взаимной корреляцией. Тогда мощность «шума» функции $\tilde{K}(\rho)$ определяется выражением $\sigma_{\text{шум}}^2 = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \left(\frac{A_i^2}{2} \right)^2 \equiv \sum_{n=1}^N \frac{b_i^2}{2}$.

В областях малых ρ , напротив, гармоники должны сильно взаимодействовать и соответствующая мощность равна $\tilde{K}^2(0) = \left(\sum_{n=1}^N b_i \right)^2$ (см. (6)).

Образуем величину

$$Q = \frac{\sigma_{\text{шум}}^2}{\tilde{K}^2(0)},$$

которая характеризует относительную мощность шумов. Минимум этой величины находится путём решения системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial b_i} &= 0, \text{ для } i = 1, 2, \dots, N. \\ \frac{b_i \left(\sum_{n=1}^N b_i \right)^2 - 2 \sum_{n=1}^N b_i \sum_{n=1}^N \frac{b_i^2}{2}}{\left(\sum_{n=1}^N b_i \right)^4} &= 0 \end{aligned}$$

Частным результатом её решения является $b_1 = b_2 = \dots = b_N$.

Спектр модельного поля при этом имеет близкий к белому вид, а выравнивание амплитуд спектральных компонент поля $S(\kappa)$ сводится к разбиению области определения спектра $[\kappa_{min}, \kappa_{max}]$ на участки $\Delta\kappa_i$, интегралы по которым от функции $S(\kappa)$ имеют одно и тоже значение $b_i = b_0 = \frac{\sigma^2}{N}$.

Заметим теперь, что рассуждая о способах разбиения интервала частот $[\kappa_{min}, \kappa_{max}]$ на участки $\Delta\kappa_i$ мы оставляли нерешенным вопрос о выборе расположения гармоник κ_i внутри этих участков. Обычно κ_i ставится у правой границы ячейки $\Delta\kappa_i$. При этом, однако, оказывается, что модельная корреляционная функция плохо совпадает с экспериментальной корреляционной

функцией в области малых ρ . Для достижения лучшего согласия следует потребовать сопряжения всех производных (от первого до N -го порядка) функций $\tilde{K}[\rho]$ и $K[\rho]$ при $\rho = 0$. Поскольку $K'[\rho] = \frac{\partial^2 K[\rho]}{\partial \rho^2}$, это условие эквивалентно требованию сопряжения моментов спектра модельного и реального полей, которое записывается в виде

$$\sum_{n=1}^N b_i \kappa_i^{2p} = \int_0^\infty \kappa^{2p} S(\kappa) d\kappa,$$

Полученная система N уравнений для N неизвестных κ_i не имеет общего решения и потому может анализироваться лишь численно. Чтобы упростить решение нашей задачи, потребуем облегченного, по сравнению с предыдущим, условия сопряжения вторых моментов модельного и реального спектров высот

$$b_i \kappa_i^2 = \int_{\Delta \kappa_i} \kappa^2 S(\kappa) d\kappa,$$

где $b_i = A_i^2/2$

Из него непосредственно следует правило нахождения узлов κ_i

$$\kappa_i = \sqrt{\frac{2}{A_i^2}} \int_{\Delta \kappa_i} \kappa^2 S(\kappa) d\kappa. \quad (7)$$

Формула (7) выведена для спектра высот поверхностного волнения. Когда возникает необходимость моделирования уклонов, то необходима сделать замену переменной $S(\kappa) \rightarrow k^2 S(\kappa)$, чтобы получить формулу для нахождения правила расположения гармоник для уклонов

$$\kappa_i = \sqrt{\frac{2}{A_i^2}} \int_{\Delta \kappa_i} \kappa^4 S(\kappa) d\kappa. \quad (8)$$

Такой способ выбора расположения гармоник, как нетрудно убедиться, обеспечивает сопряжение корреляционных функций реального и модельного полей по второй производной в нуле, или, иначе говоря, равенство дисперсий кривизн этих полей.

Из рис. 5 и 6 видно, что нельзя такой метод, если задача требует одновременного точного моделирования высот и уклонов поверхности.

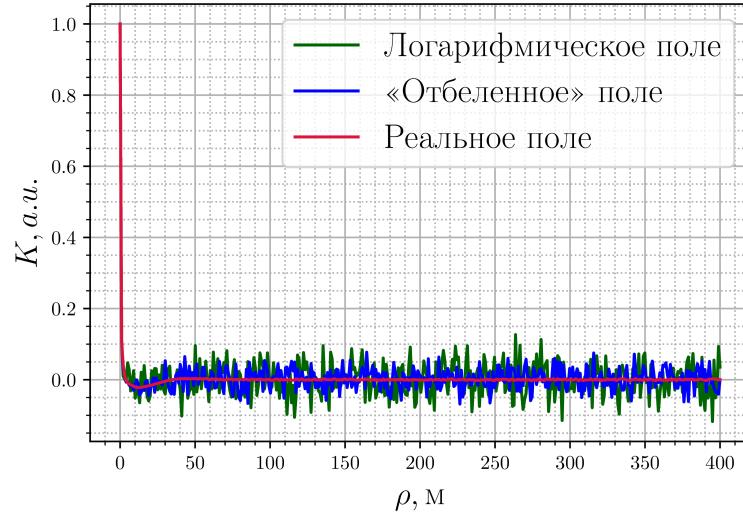


Рис. 3: Расположение гармоник по методу «отбеливания» спектра наклонов.

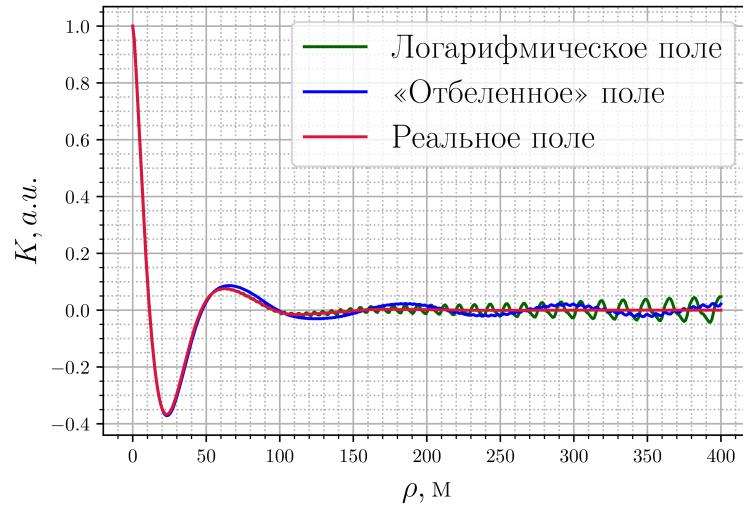


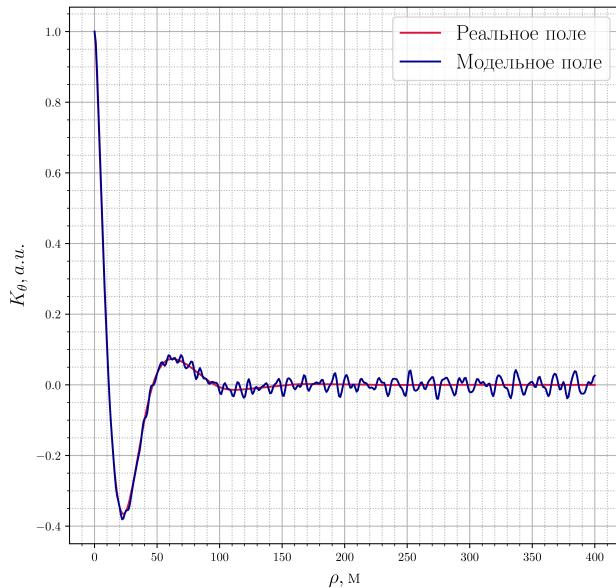
Рис. 4: Расположение гармоник по методу «отбеливания» спектра высот.

Для такой задачи необходима рассмотреть другую функцию относительных шумов Q , например

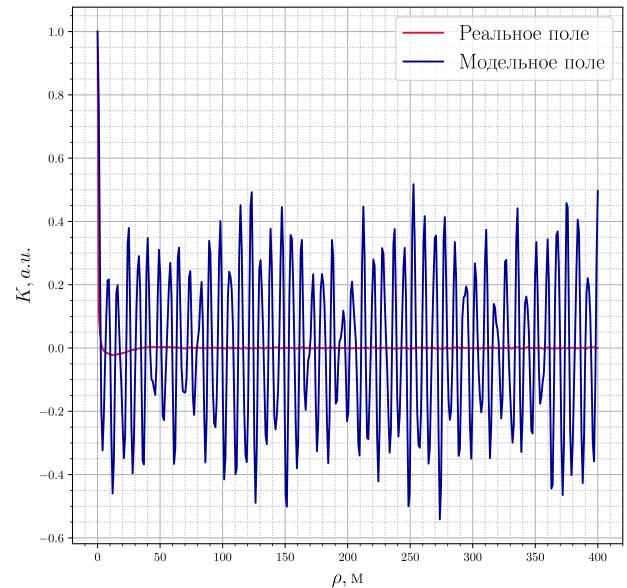
$$Q = \frac{(\sigma_{\text{шум}}^{\text{н}})^2}{(\tilde{K}^{\text{н}}(0))^2} + \frac{(\sigma_{\text{шум}}^{\text{в}})^2}{(\tilde{K}^{\text{в}}(0))^2}, \quad (9)$$

где индексы «н» и «в» соответствуют наклонам и высотам. Учитывая то, что оба слагаемых в уравнении (9) вещественны и положительны, то экстремум функции Q можно найти, зная экстремум каждого слагаемого по отдельности.

Тогда, гармоники, определяющие минимум первого слагаемого описыва-



(a)



(b)

Рис. 5: Корреляционные функции высот (а) и уклонов (б) при расположении гармоник по методу «отбеливания» спектра по формуле (7)

ются формулой (7), а минимум второго – формулой (8).

уравнений

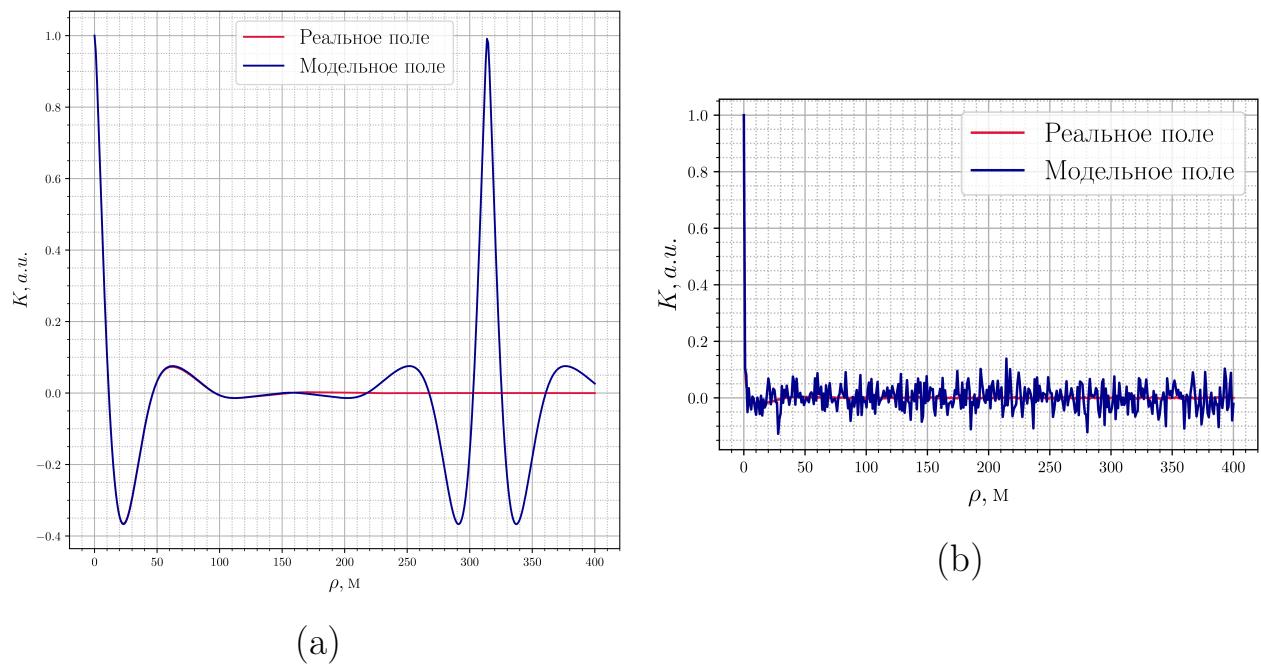


Рис. 6: Корреляционные функции высот (а) и уклонов (б) при расположении гармоник по методу «отбеливания» спектра по формуле (8)

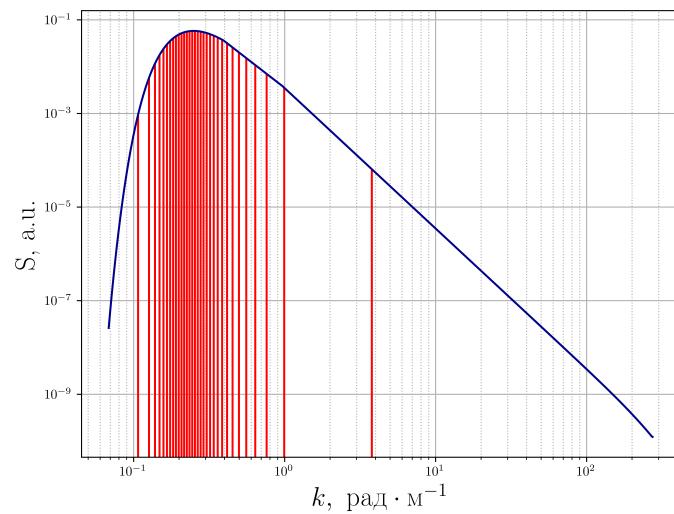


Рис. 7

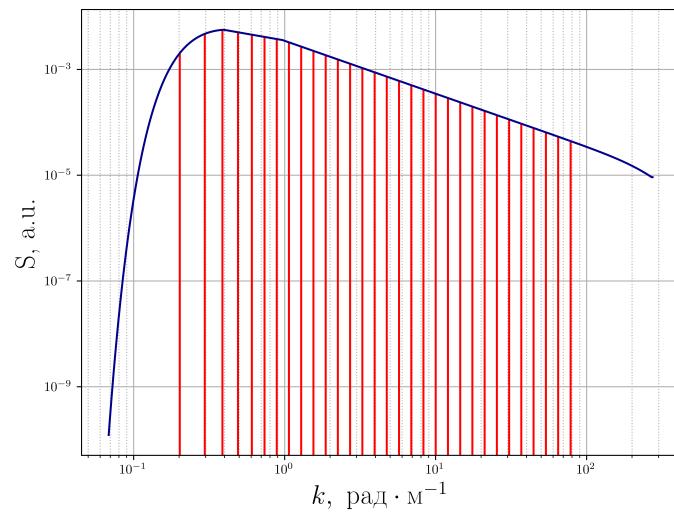


Рис. 8

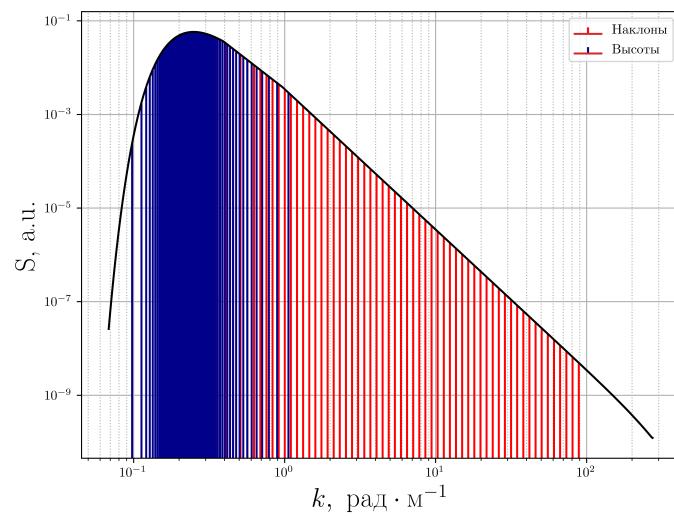


Рис. 9