

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

На правах рукописи

О. А. Шмонин

Шмонин Олег Андреевич

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ ДВУМЕРНОГО УГЛОВОГО РАЗРЕШЕНИЯ
ИСТОЧНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ В АДАПТИВНЫХ АНТЕННЫХ СИСТЕМАХ**

1.3.4 – Радиофизика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., проф. Флаксман А.Г.

Нижний Новгород – 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Глава 1. Синтез двумерного метода оценки угловых координат источников излучения на основе метода минимального многочлена	22
1.1. Модель и свойства принимаемого сигнала.....	22
1.2. Метод минимального многочлена	32
1.3. Оценка угловых координат источников излучения на плоскости	43
1.4. Оценка угловых координат источников в пространстве.....	47
1.5. Результаты моделирования	64
1.6. Заключение по первой главе	71
Глава 2. Метод минимального многочлена при наличии пространственно-распределённой помехи.....	73
2.1. Свойства векторного пространства при наличии помехи.....	73
2.2. Подход на основе обобщённой проблемы собственных чисел	75
2.3. Подход на основе обеляющего преобразования	77
2.4. Результаты моделирования	81
2.5. Заключение по второй главе.....	88
Глава 3. Оценка угловых координат целей в МИМО радаре при наличии отражений от земной поверхности.....	90
3.1. Принцип работы МИМО радара и модель сигнала.....	90
3.2. Виртуальная антенная решётка и критерии её существования	95
3.3. Влияние отражения от земной поверхности на точность оценки углового положения при нарушении критериев виртуальной антенной решётки.....	105
3.4. Особенности применения метода минимального многочлена в автомобильном МИМО радаре.....	108

3.5. Результаты натурного эксперимента.....	115
3.6. Заключение по третьей главе	124
Заключение.....	126
Список сокращений.....	129
Список литературы.....	130

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации

В современном мире происходит интенсивное развитие технологий, направленных на повышение безопасности и уровня жизни человека. Особое внимание в этом процессе уделяется автоматизированным и автоматическим системам, способным решать задачи без участия человека или существенно облегчить их решение. К числу таковых можно отнести беспилотные автомобили, различного рода роботизированные системы, системы контроля дорожного, морского и воздушного движения.

Ключевым элементом в работе таких систем является своевременное получение и обработка информации от множества различных источников: баз данных, датчиков и сенсоров, других автоматических устройств и т.д. Особую роль здесь играют радио и радиотехнические системы, позволяющие получать информацию об окружающей обстановке, а также осуществлять её передачу. К числу таких средств можно отнести всевозможные радиолокационные и радионавигационные системы, а также системы беспроводной коммуникации, включая мобильную связь и системы беспроводного доступа к сети интернет.

В ходе своей работы данные средства часто решают задачу оценки числа и углов прихода волновых фронтов. Помимо этого, задача локализации источников сигнала возникает также в акустике и других областях науки и техники [1-5].

Растущие требования к эффективности указанных выше систем ведут к необходимости постоянного совершенствования методов оценки угловых координат источников сигнала, синтезу и разработке которых посвящена настоящая диссертация.

Среди радиолокационных систем стоит отдельно выделить автомобильные радары. Данное направление сейчас активно развивается, о чём свидетельствует множество научных публикаций, а также повышенный интерес крупных промышленных компаний к теоретическим и практическим исследованиям на дан-

ную тему [6-15]. Современные автомобильные радары разрабатываются в диапазоне 77 Гц, что соответствует миллиметровому диапазону длин волн. Работа в данном диапазоне даёт ряд преимуществ по сравнению с более низкими частотами и оптическим диапазоном. Такие радары имеют компактные размеры, что позволяет удобно размещать их на бампере или кузове автомобиля; в силу большой доступной полосы сигнала и малой длины волн обладают существенным разрешением по дальности и скорости; менее подвержены влиянию погодных условий (дождь и туман), и имеют больший радиус действия, чем устройства оптического диапазона.

Автомобильные радары являются частью системы ADAS (Advanced Driver-Assistance Systems), а также беспилотных автомобилей, и одним из основных источников информации о дорожной обстановке для них. В связи с этим, вопрос оценки угловых координат целей для автомобильных радаров встаёт особенно остро.

С одной стороны, в условиях плотного автомобильного трафика разделение целей только по дальности и скорости является недостаточным, и необходимо обеспечить высокое разрешение и точность оценки угловых координат. С другой стороны, требуется уменьшить габариты и стоимость радара, а значит и число приёмных трактов, т.к. устройство должно быть доступно для массового потребителя. В качестве компромисса применяются небольшие цифровые приёмные антенные решётки (AP) и сверхразрешающие алгоритмы оценки угловых координат. Дополнительным решением является применение технологии MIMO, позволяющей формировать виртуальную приёмную AP, размеры и разрешающая способность которой превосходят аналогичные параметры реальной решётки.

Однако специфика автомобильного радара, накладывает дополнительные ограничения на используемые решения. Во-первых, алгоритму сверхразрешения доступно относительно небольшое число выборок сигнала AP. Это вызвано быстрым изменением дорожной обстановки, а также желанием производителя уменьшить объём памяти устройства (стоимость продукта). Во-вторых, алгоритм сверх-

разрешения должен обладать низкой вычислительной сложностью. Данное требование связано с наличием большого количества целей, угловое положение которых требуется определить, и необходимостью уменьшить стоимость продукта за счёт использования более простого вычислительного устройства (DSP, FPGA). В-третьих, автомобильный радар работает в условиях наличия отражения от земной поверхности, что влияет на оценку угловых координат цели. Наконец, ввиду наличия вокруг радара большого числа других источников излучения (помехи) и рассеивателей, большинство известных методов оценки углового положения теряют свою эффективность.

Стоит отметить, что постоянный рост требований к точности позиционирования дорожных объектов ведёт к необходимости оценки двух угловых координат (азимута и угла места), что является острой проблемой ввиду слабой разработанности темы оценки двухмерных угловых координат близкорасположенных источников излучения.

В связи с обозначенным кругом проблем, вопрос разработки новых и эффективных двухмерных сверхразрешающих алгоритмов оценки числа и угловых координат источников излучения является особенно актуальным. Кроме того существует необходимость чётко прояснить возможность использования виртуальной антенной решётки MIMO радара в условиях наличия отражения от земной поверхности.

В радиосвязи оценка угловых координат источников излучения сигнала (передатчиков) может использоваться для формирования направленных каналов связи с объектами, положение которых быстро меняется и требуется постоянная корректировка диаграммы направленности (ДН) приёмной антенны. Применительно к системам беспроводного доступа к сети интернет (Wi-Fi) и мобильной связи данный вопрос стал особенно актуальным с переходом к миллиметровому диапазону длин волн в стандартах IEEE 802.11ad, IEEE 802.11ay (60 ГГц), а также 5G NR (28 ГГц). В данном диапазоне канал связи обладает явно выраженным лучевым характером распространения сигнала, т.е. описывается приближением ге-

метрической оптики. Многочисленные исследования показывают, что в этом случае можно выделить несколько доминирующих путей распространения сигнала, которые характеризуются определёнными направлениями [16-18]. В данных условиях оценка и слежение за углами прихода сигнала является одним из способов формирования актуальной ДН АР и поддержания высокой скорости передачи данных [19, 20]. Кроме того, для борьбы с эффектом блокировки луча, ведущего к потере соединения, в ряде работ [21, 22], а также в последнем стандарте IEEE 802.11ay [23] рекомендуется оценивать и следить за несколькими возможными направлениями передачи. В совокупности со всем сказанным применение массивных прямоугольных антенных решёток в данных системах связи также делает актуальным задачу разработки эффективных методов оценки числа и направлений прихода (двухмерных угловых координат) волновых фронтов.

Степень разработанности темы диссертации

Вопрос оценки угловых координат источников излучения с помощью адаптивных АР активно рассматривается в научно-исследовательском сообществе уже несколько десятилетий. На данный момент можно выделить целый ряд методов, которые получили широкое практическое применение и могут быть названы классическими. Описанию данных методов и их различных модификаций посвящен целый ряд фундаментальных работ: [1, 24-28].

Наиболее простым является метод сканирования главным лучом ДН АР (beamforming) [26, 28], который также известен как метод Фурье [27] и метод Бартлетта [2, 25]. Суть данного метода заключается в сканировании пространства с помощью весового вектора АР, максимизирующего мощность принимаемого сигнала для выбранного направления прихода волны. Направление, в котором принимаемая мощность максимальна, выбирается в качестве оценки углового положения источника. Для линейных и планарных эквидистантных АР данный метод может быть реализован с помощью дискретного преобразования Фурье, с чем и связано одно из его названий.

К достоинствам метода Фурье стоит отнести его простоту, в том числе возможность реализации с помощью набора управляемых фазовращателей и единственного приёмного устройства (позволяет снизить стоимость оборудования). Также следует отметить тот факт, что метод реализует максимально-правдоподобную оценку угловой координаты в случае одного источника излучения, в том числе в двухмерном случае. К недостаткам данного метода можно отнести его низкую эффективность при пеленгации нескольких источников излучения. Это связано в первую очередь с наличием боковых лепестков ДН АР, а также с фундаментальным ограничением на разрешающую способность (предел разрешения Релея). Только источники, разнесённые более чем на ширину главного лепестка ДН АР, могут быть разрешены [28]. Методы, которые позволяют различить и оценить угловое положение источников излучения, расстояние между которыми менее предела Релея, называют сверхразрешающими [25, 26, 28 - 32].

Другим подходом, который становится вновь актуальным в связи с активным внедрением фазированных АР в системы связи миллиметрового диапазона, является метод моноимпульсной пеленгации [19, 20, 28, 33-36]. В его основе лежит сравнение сигналов в нескольких приёмных каналах, для каждого из которых формируется индивидуальная ДН. При этом рассматриваются как варианты одновременного (когерентного) приёма [19, 33-35], так и возможность последовательного переключения каналов [20, 28, 36].

Малое число используемых приёмных каналов является неоспоримым преимуществом данного метода, т.к. требует малых аппаратных затрат на его реализацию. Кроме того, в случае фазированных АР данный метод более удобен на практике по сравнению с методом Фурье благодаря более крутой пеленгационной характеристике. При соответствующем выборе ДН метод также позволяет оценивать двухмерные координаты источников излучения [37]. Недостатки данного метода схожи с недостатками метода Фурье и связаны с трудностями при оценке угловых координат нескольких источников излучения. Обычно угловое разрешение источников излучения в методах моноимпульсной пеленгации ограничено пред-

лом разрешения Релея. Однако при когерентном приёме ряд алгоритмов обладает возможностью сверхразрешения двух источников [34, 35]. Вопросу оценки числа источников излучения для моноимпульсного метода пеленгации посвящена работа [36].

Среди алгоритмов сверхразрешения наиболее известны методы Кейпона, MUSIC (MULTiple SIgnal Classification) и ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques) [25-28, 38-40].

Метод Кейпона, который в англоязычной литературе также упоминается как MVDR (Minimum Variance Distortionless Response Estimator) [25-27, 38], по своей идеологии близок к методу Фурье. Однако в его основе лежит критерий минимума полной принимаемой мощности при фиксированном коэффициенте передачи для заданного направления, что эквивалентно максимизации отношения сигнал/шум. Именно этот критерий используется при формировании весовых векторов АР в процессе сканирования. Физический смысл заключается в том, что сформированный весовой вектор подавляет сигнал от всех источников излучения, кроме источников имеющих заданное угловое положение. Именно этим и обуславливается эффект сверхразрешения метода Кейпона.

Относительно достоинств и недостатков данного метода можно отметить следующее. Разрешающая способность метода Кейпона превосходит предел Релея и главным образом зависит от мощности источников сигнала и размеров АР. Кроме того, в силу своего физического смысла метод рабастен к незначительным нарушениям сигнальной модели (искажения волнового фронта, слабые помехи). К недостаткам данного метода стоит отнести тот факт, что при сколь угодно длинной временной выборке входного процесса (объёме накапливающей статистики) разрешающая способность метода ограничена. Иными словами, метод не позволяет разделять сколь угодно близкие источники при точно известной корреляционной матрице сигнала (в отличие от других методов сверхразрешения, рассматриваемых далее). Оценка двухмерных угловых координат источников излучения с

помощью метода Кейпона возможна, но требует существенных затрат, связанных с вычислением и поиском пиков разрешающей функции.

Вскоре после появления метода Кейпона был предложен так называемый метод «теплового шума», основанный на анализе свойств собственного шума адаптивной АР при приёме сигнала с оптимальным весовым вектором [41]. В действительности, выражения для разрешающих функций данных методов отличаются только степенью обратной корреляционной матрицы (КМ): в методе Кейпона используется первая степень, а в методе «теплового шума» - вторая. В работах [32, 42, 43] предложено обобщение метода Кейпона, содержащее в выражении более высокую степень n обратной КМ ($n > 2$). Показано, что с ростом степени n разрешающая способность метода увеличивается, а при стремлении n к бесконечности метод становится эквивалентен проекционному методу MUSIC. Однако стоит отметить, что увеличение степени n ведёт к росту вычислительной сложности алгоритма, а также увеличению ошибки, возникающей при обращении плохо обусловленной оценки КМ.

Методы MUSIC и ESPRIT можно выделить в класс, так называемых, «геометрических» методов, т.к. в их основе лежит интерпретация сигнала, принятого АР, как вектора некоторого N -мерного линейного пространства [39, 40]. Важную роль в таком представлении играет фазирующий вектор источника излучения, который определяется как вектор комплексных амплитуд плоской волны, пришедшей с направления данного источника. Как правило, фазирующие вектора разных источников излучения линейно независимы и определяют базис, так называемого, сигнального подпространства. Ортогональное дополнение к сигнальному подпространству называют шумовым. Соответственно, сигнальная составляющая вектора принятого сигнала лежит только в сигнальном подпространстве, а шумовая – во всём векторном пространстве. Помимо указанных особенностей векторного представления сигнала, в методах MUSIC и ESPRIT так же используется то свойство КМ принятого сигнала, что собственные вектора, соответствующие наименьшему собственному числу, определяют базис шумового подпространства,

а все остальные – сигнального. Отличие методов ESPRIT и MUSIC заключается в том, что первый использует собственные вектора сигнального подпространства и факт наличия взаимно однозначного преобразования между его базисами, а второй – свойство ортогональности базиса шумового подпространства любому фазирующему вектору источников сигнала. Стоит отметить, что в методах MUSIC и ESPRIT размерность сигнального подпространства является входным параметром, и на практике определяется с помощью критериев AIC (Akaike's Information Criterion) или MDL (Minimum Description Length) [25, 28, 44-46].

К достоинствам данных «геометрических» методов стоит отнести возможность эффективной пеленгации нескольких источников излучения; высокую разрешающую способность (сколь угодно близкие источники могут быть разрешены при точно известной КМ сигнала); высокую точность оценки угловых координат источников излучения. Среди недостатков данных методов можно указать чувствительность к нарушению параметрической модели сигнала (искажения волнового фронта, присутствие помехи), а также низкую эффективность при короткой выборке входного процесса (малом объёме накопленной статистики).

Метод минимального многочлена, который лежит в основе данной работы, был впервые предложен в работе [31]. По своей идеологии он близок к методу MUSIC, однако не использует напрямую собственное разложение КМ. Вместо этого, оценка числа источников излучения и шумового подпространства строится на основе свойств минимального многочлена КМ.

Одним из главных достоинств метода минимального многочлена является тот факт, что для оценки свойств минимального многочлена используется статистически обоснованная процедура на основе критерия минимума СКО. Полученная на её основе оценка проектора на шумовое подпространства в этом смысле является оптимальной, что даёт возможность эффективно оценивать параметры источников излучения даже в условиях короткой выборки сигнала. Кроме того, в отличии от методов MUSIC и ESPRIT, метод минимального многочлена оценивает число и угловое положение целей в рамках единой вычислительной процедуры.

К недостаткам данного метода имеет смысл отнести проблему вычислительной устойчивости при большом числе источников излучения.

Одномерная задача сверхразрешения, когда угловое положение источника излучения определяются одной координатой, например, азимутом ϕ , является традиционной и хорошо изученной. Для оценки угловой координаты в методах Кейпона, MUSIC и минимального многочлена строится так называемая псевдоспектральная функция (пространственный спектр), пики которой соответствуют угловым положениям источников излучения [25, 26, 28, 31, 47]. Данный подход требует достаточно больших вычислительных затрат, связанных с расчетом пространственного спектра и локализацией его максимумов. Метод ESPRIT, который является обобщением фазового метода пеленгации, позволяет сразу получить численные значения оценок угловых координат источников сигналов, однако в классическом виде может быть применён только к определённому типу АР [25, 28].

Для метода MUSIC существует корневой подход к пеленгации (Root MUSIC), который не требует вычисления псевдоспектральной функции, а использует для оценки угловой координаты процедуру поиска корней полинома, построенного на основе этой функции [25, 28]. Корневой вариант метода минимального многочлена был предложен в [48]. В [49] приведены экспериментальные результаты определения угловых положений близко расположенных источников излучения для методов минимального многочлена и MUSIC. Результаты моделирования и экспериментов показывают, что корневой подход обладает лучшей разрешающей способностью и точностью оценки угловых координат по сравнению с псевдоспектральным [28, 48, 49]. Кроме того, для АР достаточно малого размера, корневой подход позволяет производить оценку углов аналитически, что существенно упрощает его реализацию и уменьшает вычислительную сложность [49]. К недостаткам корневого метода можно отнести то, что в классическом виде он применим только для линейных эквидистантных АР. Однако в работе [50] предложен подход на основе аппроксимации пространственного спектра конечным

рядом Фурье (Fourier Domain Music Method), который позволяет применить корневой метод к неравномерной линейной АР [28].

Дополнительным способом уменьшить вычислительные затраты является лучевой подход (Beamspace MUSIC), в котором вместо выходного вектора АР используется выходной вектор диаграммообразующей схемы, имеющий меньшую размерность [51]. Однако при этом помимо размерности векторного пространства сужается и область поиска угловых координат источников излучения.

Двумерная задача сверхразрешения значительно усложняется по сравнению с одномерной. В этом случае АР должна иметь две размерности, а положение каждого источника сигнала определяться двумя координатами: азимутальным углом φ и углом места θ . Как следствие, вычислительная сложность псевдоспектральных алгоритмов существенно возрастает из-за необходимости двумерного поиска. В литературе приведены различные подходы к решению этой проблемы, главным образом для метода MUSIC. В [52] предложен алгоритм построения двумерного псевдоспектра с адаптивным шагом. Другой подход основан на последовательной оценке координат [53, 54]. На первом этапе азимутальные углы источников измеряются с помощью одномерного пространственного спектра, а затем полученные оценки применяются для поиска пиков двумерного псевдоспектра по второй координате. Таким образом, алгоритм сверхразрешения здесь применяется дважды: вначале для строк АР, а потом для всей решётки целиком. Третий подход, сочетает в себе решение двух одномерных задач (определение азимутов и углов места источников) и задачи формирования пар из полученных оценок координат [55]. Для решения этих одномерных задач может быть применён, в том числе, корневой подход.

Корневой подход, хорошо зарекомендовавший себя для одномерного случая, кажется привлекательным в качестве альтернативы двумерным псевдоспектральным алгоритмам. Однако прямая замена двумерного пространственного спектра соответствующим полиномом от двух независимых переменных приводит к нетривиальной вычислительной задаче. Исследованию данного вопроса для

метода Root MUSIC, в частности, посвящены работы [56, 57]. Другие алгоритмы, не требующие вычисления псевдоспектра и основанные на методе ESPRIT, рассмотрены в [58, 59].

Краеугольным камнем для всех «геометрических» алгоритмов сверхразрешения является вопрос коррелированных источников излучения. В этом случае часть сигнальных собственных чисел КМ выходного процесса АР близка к шумовым собственным числам, что приводит к трудностям при разделении сигнального и шумового подпространств. В предельном случае полностью когерентных источников излучения сигнальное подпространство вырождается, т.е. число сигнальных собственных чисел перестаёт быть равным числу источников излучения, а «геометрические» методы сверхразрешения в их классическом виде перестают работать. Для борьбы с негативным влиянием корреляции источников излучения в работах [60, 61] представлены и изучены алгоритмы прямого, обратного и двойного пространственного сглаживания (forward, backward and forward-backward spatial smoothing) [25, 28]. Для коэффициента декорреляции, в этом случае, существуют аналитические выражения. Применению данных алгоритмов совместно с методом минимального многочлена для решения одномерной задачи пеленгации посвящен ряд работ [47-49]. Также в литературе рассматривается подход, основанный на приведении КМ сигнала к теплицевой матрице [28], однако отмечается, что положительная определённость КМ в этом случае может быть нарушена.

Ещё одним важным аспектом для алгоритмов оценки угловых координат источников излучения является эффективность их работы на фоне пространственно-распределённой помехи.

Модификация алгоритма Фурье, основанная на максимизации ОСШП (отношение сигнал / шум-помеха) для заданного направления прихода сигнала, была получена во второй половине XX века. В этом случае сканирующий весовой вектор АР выражается уравнением Винера-Хопфа в матричной форме [62]. На практике оно может быть реализовано путём умножения вектора выходного процесса АР на обратную КМ шума и помехи. К полученному сигналу далее применяется

стандартный алгоритм Фурье. Стоит отметить, что в таком виде данное решение не является оптимальным. Максимально правдоподобная оценка угла места достигается при сканировании весовым вектором, нормированным на величину, зависящую от фазирующего вектора. Однако, как и классический алгоритм сканирования главным лепестком ДН АР, данный метод имеет проблемы с оценкой угловых координат нескольких источников излучения, а также существенно ограничен в разрешающей способности.

Альтернативным вариантом реализации оптимального сканирующего алгоритма является применение метода Бартлетта совместно с обеляющим преобразованием [62] и учётом искажения волнового фронта.

В работе [63] предложен метод максимально правдоподобной классификации сигналов, позволяющий оценивать направление и амплитуду плоского волнового фронта на фоне помехи, имеющей КМ неполного ранга и волновой фронт, отличный от плоской волны. В отличие от упомянутого выше сканирующего алгоритма и большинства методов, рассматриваемых далее, данный алгоритм не требует предварительной оценки КМ помехи, что весьма полезно для задач пеленгации, когда оценить КМ помехи отдельно от КМ сигнала не представляется возможным. Однако, для эффективной работы алгоритма на практике необходима информация о числе источников помехи. Способу оценки числа источников помехи на основе функции правдоподобия посвящена работа [64]. В работах [63, 64] отмечается, что предлагаемый в них метод обладает высокой эффективностью и превосходит по точности многие известные алгоритмы. В качестве недостатка данного метода можно указать относительно высокую вычислительную сложность, связанную с расчётом значений функции правдоподобия.

В работе [39] описывается подход, позволяющий обобщить методы ESPRIT и MUSIC на случай произвольной КМ шума. В данном подходе традиционное спектральное разложение полной КМ сигнала заменяется спектральным разложением для пучка, состоящего из полной КМ и КМ шума (обобщённая проблема собственных чисел и векторов) [65, 66].

Метод минимального многочлена ранее рассматривался исключительно в условиях некоррелированных собственных шумов приёмных устройств антенных элементов и отсутствия внешней помехи. При этом подход, описанный в [39], не может быть применён к методу минимального многочлена непосредственно.

Как было упомянуто ранее, помимо методов сверхразрешения дополнительным способом повысить качество и точность оценки числа и угловых координат вторичных источников излучения в радиолокации является применение технологии MIMO, которая сейчас активно развивается в этой области [11-13, 67-69]. Данная технология позволяет существенно повысить эффективность радиолокационной системы, и в частности, увеличить разрешающую способность по угловым координатам [11, 68, 70].

В MIMO радаре используется несколько разнесённых передающих и приемных антенн, при этом между каждой парой формируются независимые каналы передачи зондирующего сигнала. Разделение каналов осуществляется аналогично разделению информационных потоков в системах радиосвязи: по частоте, по времени или с помощью временных кодов [11, 14, 71, 72]. При этом стараются обеспечить ортогональность сигналов, излучаемых различными антеннами, для устранения интерференции между приемными каналами. На приёмной стороне взаимно ортогональные сигналы могут быть разделены различными способами, например, с помощью согласованных фильтров [11, 68].

Одной из важных особенностей MIMO радара является возможность применения концепции виртуальной приёмной АР. Если имеется N_{tx} передающих и N_{rx} приёмных антенных элементов, то на выходах согласованных фильтров в каждом приёмнике выделяется N_{tx} различных сигналов. Таким образом, общее количество приёмных каналов составляет $N_v = N_{tx} \times N_{rx}$. Данный набор можно представить в виде выходов приёмных элементов некоторой АР, которую принято называть виртуальной. Положение виртуальных элементов определяется с помощью свертки двух антенных массивов: приёмного и передающего [11, 68, 73]. Регулируя положения приёмных и передающих антенн, можно управлять свойствами

виртуального антенного массива. При этом, как правило, положение антенн выбирается так, чтобы виртуальная приёмная АР имела существенно большую апертуру по сравнению с реальной.

Концепция виртуальной АР позволяет применять традиционные методы оценки угловых координат целей, в том числе перечисленные выше методы сверхразрешения. Вопрос применимости такой концепции для свободного пространства, когда существует только один прямой путь между радаром и целью, широко освещён в литературе [11, 68, 73]. Однако, ряд радиолокационных систем, например, трёх координатные автомобильные радары, предназначены для работы над поверхностью земли и при этом должны определять не только азимут, но и угол места цели. В этом случае вопрос применимости концепции виртуальной АР исследуется в рамках данной работы.

Цель работы

Целью данной работы является синтез новых сверхразрешающих методов оценки числа и двумерных угловых координат источников излучения на основе метода минимального многочлена, эффективно работающих в условиях пространственно-распределенной помехи, а также обоснование применимости данных методов в МИМО радаре при наличии отражений от земной поверхности.

Задачи диссертационной работы

1. Разработка, теоретическое обоснование и исследование свойств сверхразрешающих методов для оценки числа, азимута и угла места источников излучения с помощью прямоугольной АР на основе метода минимального многочлена.
2. Обобщение метода минимального многочлена для пеленгации источников сигнала при наличии пространственно-распределенной помехи.
3. Теоретическое обоснование применимости концепции виртуальной АР и разработанных методов для оценки угловых координат целей в МИМО радаре при наличии отражений от земной поверхности.

4. Экспериментальное исследование эффективности метода минимального многочлена при разрешении близких целей в автомобильном МИМО радаре при наличии отражений от земной поверхности.

Методология и методы исследования

При решении поставленных задач использовались методы статистической радиофизики, высшей алгебры, векторного анализа и теории матриц, а также математическое и численное моделирование, натурный эксперимент.

Научная новизна

1. Синтезированы и теоретически обоснованы сверхразрешающие методы оценки числа, азимута и угла места источников излучения с помощью прямоугольной АР на основе метода минимального многочлена с применением корневого и псевдоспектрального подходов. Исследована эффективность предложенных методов.
2. Теоретически обоснована возможность точного вычисления коэффициентов (1.4.27) полинома (1.4.22) двухмерного корневого метода с применением преобразования Фурье на основе конечного числа значений исходного полинома (1.4.8).
3. Предложены улучшения базовой части метода минимального многочлена, позволяющие снизить вычислительные затраты на его реализацию.
4. Для случая двухстрочной (двухстолбцовой) АР предложен новый упрощённый корневой подход для оценки угловых координат источников.
5. Предложено три варианта обобщения метода минимального многочлена на случай пеленгации источников сигнала на фоне пространственно-распределенной помехи. Показана строгая математическая эквивалентность предложенных подходов. Исследована эффективность данного метода.
6. Теоретически исследована возможность применения концепции виртуальной АР в МИМО радаре при наличии отражения от земной поверхности. Сформулированы два формальных критерия виртуальной АР и аналитически показано их выполнение или нарушение для всех возможных случаев

взаимного расположения приёмников и передатчиков. Полученные результаты подтверждены численным моделированием.

7. Проведена экспериментальная проверка эффективности метода минимального многочлена при оценке числа и угловых координат близкорасположенных целей с помощью виртуальной антенной решётки автомобильного МИМО радара при наличии отражений от земной поверхности.

Теоритическая и практическая значимость

Рассматриваемые в рамках диссертации вопросы были поставлены в ходе научно-исследовательских проектов, посвященных разработке алгоритмов оценки угловых координат целей для автомобильных радаров миллиметрового диапазона длин волн, инициированных производителями данного продукта. В связи с этим, представленные в данной работе результаты и разработанные алгоритмы имеют непосредственную практическую значимость. Кроме того, полученные результаты могут быть применены и в иных областях, таких как радионавигация, радиолокация и радиосвязь, где возникает задача оценки угловых координат источников излучения.

Обоснованность и достоверность

Обоснованность и достоверность научных положений и выводов, сформулированных в диссертации, подтверждается их сравнением с результатами, полученными с помощью математического и численного моделирования, натурного эксперимента, с опубликованными результатами для частных случаев, а также отсутствием противоречий результатов диссертации известным положениям теории статистической радиофизики.

Апробация результатов работы и публикации

Представленные в рамках данной работы результаты прошли апробацию на следующих конференциях и семинарах:

- XXI научная конференция по радиофизике (Н. Новгород, ННГУ, 2017)
- III научно-техническая конференция «Радиолокация. Теория и практика» (Н. Новгород, ННИИРТ, 2017)

- XXIV научно-техническая конференция «Информационные системы и технологии» (Н. Новгород, НГТУ, 2018)
- XII всероссийской научно-техническая конференция «Радиолокация и радиосвязь» (Москва, ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, 2018)
- XXII научная конференция по радиофизике (Н. Новгород, ННГУ, 2018)
- XXIII научная конференция по радиофизике (Н. Новгород, ННГУ, 2019)
- VI международная конференция «Инжиниринг & Телекоммуникации – En&T 2019» (Долгопрудный, МФТИ, 2019)
- XXIV научная конференция по радиофизике (Н. Новгород, ННГУ, 2020).
- Открытый семинар «Современные методы сверхразрешения в радиолокации и связи» (Н. Новгород, ННГУ, 2019)

По теме диссертации опубликовано четырнадцать работ. Из них девять в трудах международных, всероссийских и региональных конференций: [74-82]; пять в рецензируемых журналах, включенных в перечень ВАК [83] и индексируемых в SCOPUS [48, 49, 84, 85].

Положения, выносимые на защиту

1. Разработанный двумерный корневой метод минимального многочлена, позволяет эффективно выполнять оценку числа и угловых координат близко расположенных источников излучения.
2. Выполненное обобщение метода минимального многочлена на случай пеленгации источников сигнала на фоне пространственно-распределённой помехи существенно улучшает качество сверхразрешения и оценки угловых координат.
3. Предложенные критерии виртуальной АР позволяют формализовать задачу применимости данной концепции в условиях наличия отражений от земной поверхности. Результаты анализа предложенных критериев для различных конфигураций реальных антенных решёток MIMO радара показывают, что для правильной оценки угловых координат целей необходимо, чтобы либо

приёмные, либо передающие элементы реальной антенной решётки имели одинаковую высоту.

4. Результаты натурного эксперимента подтверждают, что метод минимально-го многочлена позволяет эффективно разрешать близкорасположенные цели в автомобильном ММО радаре при наличии отражений от земной поверхности.

ГЛАВА 1. СИНТЕЗ ДВУМЕРНОГО МЕТОДА ОЦЕНКИ УГЛОВЫХ КООРДИНАТ ИСТОЧНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА МИНИМАЛЬНОГО МНОГОЧЛЕНА

В первой главе диссертации предлагается обобщение сверхразрешающего метода минимального многочлена на случай двумерной оценки угловых координат источников излучения (азимута и угла места). Рассматривается базовая часть метода минимального многочлена, аспекты его практической реализации, направленные на снижение вычислительной сложности, и способ замены итеративной вычислительной процедуры на аналитическое решение в случае малого числа источников излучения. Исследуются псевдоспектральный и корневой варианты алгоритма, их вычислительная сложность и эффективность в сравнении с методом MUSIC. Предлагается новый упрощённый корневой алгоритм для двухстрочной (двухстолбцовой) АР.

Основные результаты, представленные в данной главе, опубликованы в [48, 49, 74, 75, 80, 82, 85].

1.1. Модель и свойства принимаемого сигнала

1.1.1. Модель принимаемого сигнала

Рассмотрим АР, состоящую из N одинаковых элементов. Будем полагать, что источники излучения находятся в дальней зоне АР, т.е. $r_0 \gg D^2/\lambda_w$, где r_0 – расстояние от источника излучения до АР, D – размер апертуры АР, λ_w – длина волны [86]. Кроме того, будем полагать, что каждый источник излучения является узкополосным, т.е. принимаемый от него сигнал $u_n(t)$ на n -ном элементе АР можно представить как

$$u_n(t) = a(t - \tau_n) \cos(2\pi f_0(t - \tau_n) + \psi(t - \tau_n)), \quad (1.1.1)$$

где t – время; f_0 – несущая частота сигнала; τ_n – задержка распространения до n -ого элемента АР; $a(t)$ и $\psi(t)$ - медленно меняющиеся амплитуда и фаза излучающего сигнала, которые определяют ширину полосы $\Delta f \ll f_0$ его частотного спектра [87]. В дальнейшем мы будем использовать аналитическую (комплексную) форму записи сигнала $\tilde{u}_n(t)$, в которой действительная часть определяется выражением (1.1.1), а мнимая - преобразованием Гильберта от него [87]:

$$\tilde{u}_n(t) = \tilde{a}(t - \tau_n) \exp\{-i2\pi f_0 \tau_n\} \exp\{i2\pi f_0 t\}, \quad (1.1.2)$$

где $\tilde{a}(t) = a(t) \exp \psi(t)$ – комплексная огибающая сигнала, а $u_n(t) = \operatorname{Re}[\tilde{u}_n(t)]$.

Применимально к АР, условие узкополосности накладывает дополнительное ограничение, связанное с тем, что для любых антенных элементов n и m значение комплексной огибающей сигнала $\tilde{a}(t)$ должно быть одинаковым, т.е.

$$\max_{n,m} (\tau_n - \tau_m) \leq \frac{D}{c} \ll T \approx \frac{1}{\Delta f}, \quad (1.1.3)$$

где c – скорость распространения сигнала в среде; T – характерное время изменения комплексной огибающей сигнала.

Полагая, что указанные выше условия выполнены, представим (1.1.2) в виде выражения для плоской волны

$$\tilde{u}_n(t) = \tilde{a}(t - r_1/c) \exp\{i(2\pi f_0 t - \vec{k}\vec{r}_n)\}, \quad (1.1.4)$$

где \vec{k} – волновой вектор, \vec{r}_n – вектор координат n -ого элемента в системе отсчёта источника излучения; r_1 – длина вектора \vec{r}_1 . Пусть \vec{p}_n – вектор координат n -ого элемента АР в системе координат первого элемента, тогда $\vec{r}_n = \vec{r}_1 + \vec{p}_n$, и мы можем переписать (1.1.4) следующим образом

$$\tilde{u}_n(t) = \alpha(t) s_n(\vec{v}) \exp\{i2\pi f_0 t\}, \quad (1.1.5)$$

$$\alpha(t) = \tilde{a}(t - r_1/c) \exp\{-i\vec{k}\vec{r}_1\}, \quad (1.1.6)$$

$$s_n(\vec{v}) = \exp\left\{i \frac{2\pi}{\lambda_w} \vec{v} \cdot \vec{\rho}_n\right\}, \quad (1.1.7)$$

где $\alpha(t)$ – комплексная амплитуда сигнала на первом антенном элементе; s_n – фазирующий множитель; \vec{v} – единичный вектор направления на источник излучения со стороны АР. Взаимная ориентация введённых векторных величин проиллюстрирована на Рисунке 1.1.

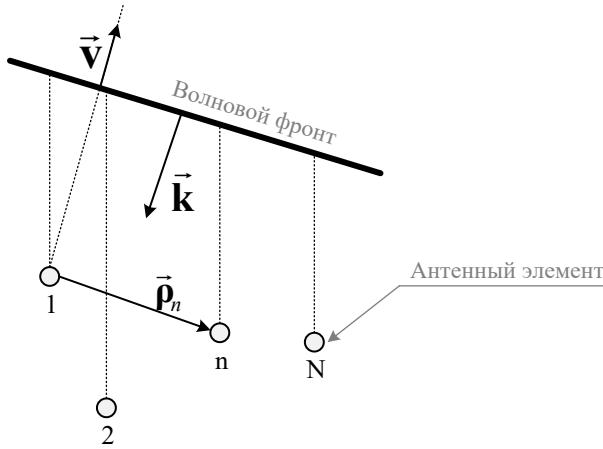


Рисунок 1.1 – Постановка задачи для вычисления фазирующего множителя АР

Рассмотрим две частные конфигурации АР, которые часто встречаются на практике: линейную эквидистантную и прямоугольную решётки. В первом случае будем полагать, что элементы расположены вдоль оси Y, а во втором – в плоскости YZ (см. Рисунок 1.2). В случае линейной эквидистантной решётки будем полагать, что задача является плоской и угловое положение источника излучения определяется только азимутальным углом φ . В случае прямоугольной АР – двумя углами: азимутом φ и углом места θ . Тогда для линейной эквидистантной АР с периодом d :

$$s_n(\varphi) = \exp\left\{i \frac{2\pi}{\lambda_w} d(n-1) \sin \varphi\right\}. \quad (1.1.8)$$

Для прямоугольной АР:

$$s_n(\varphi, \theta) = \exp \left\{ i \frac{2\pi}{\lambda_w} [d_h(n_h - 1) \sin \varphi \cos \theta + d_v(n_v - 1) \sin \theta] \right\}, \quad (1.1.9)$$

где индекс элемента $n = (n_h - 1)N_v + n_v$; n_h – индекс элемента вдоль оси Y (по горизонтали); n_v – индекс элемента вдоль оси Z (по вертикали); N_h и N_v – число элементов в строке и столбце решётки, а d_h и d_v – соответствующие периоды решётки.

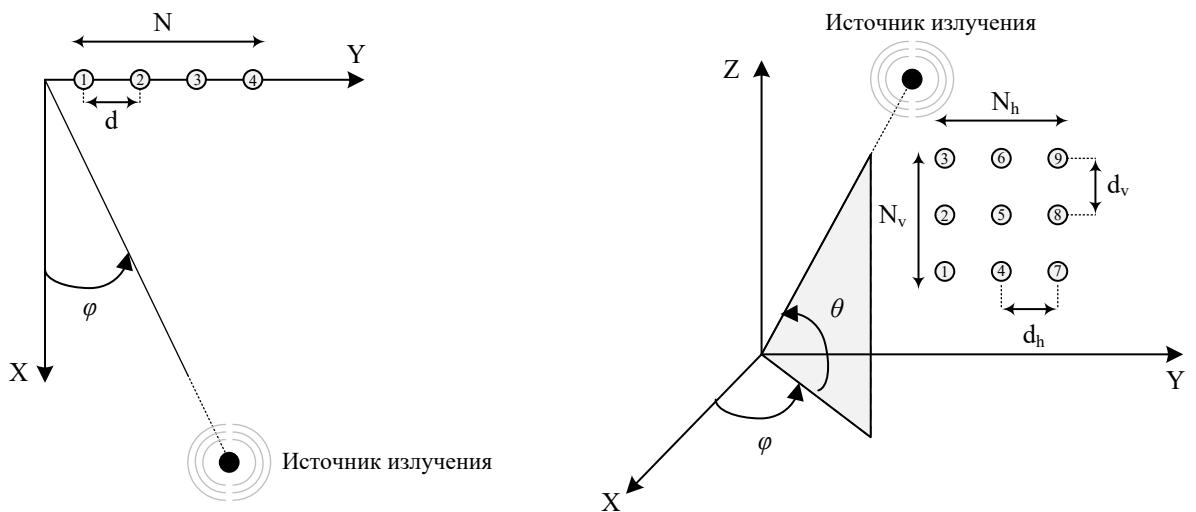


Рисунок 1.2 – Системы координат для линейной и прямоугольной АР

В ходе дальнейшего изложения мы будем опускать высокочастотную составляющую в (1.1.5) и работать только с комплексной амплитудой сигнала, действительную и мнимую часть которого следует интерпретировать как выходные сигналы квадратурного приёмника. Кроме того, перейдём в систему дискретного времени, в которой отсчёты сигнала можно считать некоррелированными, т.е. частота дискретизации $F_{smp} \ll \Delta f$ [88]. В этом случае комплексную амплитуду сигнала x_n , принимаемого n -ным элементом от J источников излучения, можно представить следующим образом:

$$x_n(l) = \sum_{q=1}^J \alpha_q(l) s_n(\vec{v}_q) + \xi_n, \quad (1.1.10)$$

где q – индекс источника излучения; ξ_n – собственный шум приёмника. Комплексную амплитуду каждого источника излучения и собственный шум приёмника будем полагать комплексными гауссовскими случайными процессами с нулевым средним и заданной дисперсией (мощностью). Также, без ограничения общности будем полагать мощность собственного шума равной единице.

1.1.2. Векторное представление сигнала

Комплексные амплитуды сигналов, принимаемых элементами АР, можно также записать в векторном виде:

$$\mathbf{x}(l) = \sum_{q=1}^J \alpha_q(l) \mathbf{s}(\vec{\mathbf{v}}_q) + \boldsymbol{\xi} = \mathbf{S}\mathbf{a}(l) + \boldsymbol{\xi}, \quad (1.1.11)$$

где элементы векторов $\mathbf{s}(\vec{\mathbf{v}})$ и $\mathbf{x}(l)$ определяются выражениями (1.1.7) и (1.1.10) соответственно; $\boldsymbol{\xi}$ - вектор собственных шумов приёмников; $\mathbf{s}(\vec{\mathbf{v}}_q)$ является столбцом матрицы \mathbf{S} с индексом q , а $\alpha_q(l)$ - элементом вектора $\mathbf{a}(l)$ соответственно. Вектор $\mathbf{s}(\vec{\mathbf{v}})$ называют **фазирующим вектором**.

Вектор сигнала и фазирующие вектора источников являются элементами N -мерного векторного пространства над полем комплексных чисел. При этом фазирующие векторы источников излучения обычно являются линейно независимыми и образуют базис некоторого подпространства, которое называют **сигнальным**. Название связано с тем, что сигнальная составляющая вектора $\mathbf{x}(l)$ всегда принадлежит данному подпространству, т.к. представляется в виде линейной комбинации фазирующих векторов источников. Однако стоит отметить, что шумовой вектор $\boldsymbol{\xi}$ также имеет проекцию на сигнальное подпространство, т.к. мощность шумов приёмника, как правило, распределена равномерно по всему векторному пространству (случаю, когда данное условие не выполняется, посвящена Глава 2). Соответственно, существует прямое ортогональное дополнение к сигнальному подпространству, в котором содержится только шумовая составляющая сигнала, и которое называют **шумовым**.

В рамках данной работы рассматриваются линейная и плоская эквидистантные АР. Покажем, что для данных решёток выполняется свойство линейной независимости фазирующих векторов источников.

Начнём доказательство со случая линейной эквидистантной АР, элементы фазирующего вектора которой определяются выражением (1.1.8). Введём понятие обобщённого угла

$$\psi = 2\pi \frac{d}{\lambda_w} \sin \varphi, \quad -\pi < \psi < \pi \quad (1.1.12)$$

Пусть существует $J \leq N$ источников излучения с различными обобщёнными углами. Для линейной независимости системы фазирующих векторов \mathbf{S} необходимо и достаточно чтобы порядок базисного минора данной системы равнялся числу векторов [89]. Выделим верхний минор матрицы \mathbf{S} и покажем, что он является базисным, т.е. отличен от нуля.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{j\psi_1} & e^{j\psi_2} & \dots & e^{j\psi_J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j(J-1)\psi_1} & e^{j(J-1)\psi_2} & \dots & e^{j(J-1)\psi_J} \end{vmatrix} \quad (1.1.13)$$

Данный определитель является определителем Вандермонда и его значение вычисляется по формуле [89]:

$$\Delta = \prod_{1 \leq m < n \leq J} (e^{j\psi_n} - e^{j\psi_m}) = \prod_{1 \leq m < n \leq J} e^{j\psi_n} (1 - e^{j(\psi_m - \psi_n)}). \quad (1.1.14)$$

Данное выражение обращается в ноль тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, т.е.

$$(1 - e^{j(\psi_m - \psi_n)}) = 0 \Leftrightarrow (\psi_m - \psi_n) = 2\pi q, \quad (1.1.15)$$

где q – целое число.

Учитывая в (1.1.15) тот факт, что все источники имеют различные обобщённые углы, а так же ограничение на их значение, получаем, что равенство ну-

лю сомножителей в (1.1.14) невозможно. Следовательно, определитель (1.1.13) отличен от нуля и фазирующие вектора линейно независимы.

Максимальное число линейно независимых векторов не превышает числа элементов АР. Также в зависимости от периода АР могут существовать «эквивалентные» направления прихода волн (дифракционные максимумы ДН). Для этих направлений фазирующие вектора s неразличимы. Например, для линейной эквидистантной АР, чтобы обеспечить «уникальность» фазирующих векторов s необходимо наложить условие (1.1.16) на период, либо ограничить сектор обзора пространства шириной ДН элементов АР.

$$\frac{d}{\lambda_w} |\sin \theta| < \frac{1}{2} \quad (1.1.16)$$

Перейдём к плоской АР, элементы фазирующего вектора для которой определяются выражением (1.1.9). В этом случае обобщённые углы записываются следующим образом:

$$\psi = 2\pi \frac{d_h}{\lambda_w} \sin \varphi \cos \theta, \quad \eta = 2\pi \frac{d_v}{\lambda_w} \sin \theta, \quad -\pi < \psi, \eta < \pi. \quad (1.1.17)$$

При нумерации элементов решётки, заданной в (1.1.9), первые N_v элементов фазирующего вектора связаны с первым столбцом АР. Если $J \leq N_v$, то базисный минор выглядит следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{j\eta_1} & e^{j\eta_2} & \dots & e^{j\eta_J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j(J-1)\eta_1} & e^{j(J-1)\eta_2} & \dots & e^{j(J-1)\eta_J} \end{vmatrix}, \quad (1.1.18)$$

что приводит к аналогичному решению как и (1.1.13). Если $J \leq N_h$, то можно изменить нумерацию антенн так, что первые N_h элементов фазирующего вектора будут связаны с первой строкой АР. Тогда мы получим определитель (1.1.13) в качестве базисного минора и опять приходим к выводу о линейной независимости фазирующих векторов. Наконец, если оба ограничения на число источников излу-

чения не выполняются, то сделать общий вывод о линейной независимости фазирующих векторов не представляется возможным.

Рассмотрим следующий пример. Пусть $J = (N_v + 1)$ и для всех источников излучения $\psi_1 = \dots = \psi_J = \psi$. При этом для любых различных n и m выполняется условие $\eta_n \neq \eta_m$. Тогда систему фазирующих векторов \mathbf{S} можно представить в виде:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_v(\eta_1) & \mathbf{s}_v(\eta_2) & \cdots & \mathbf{s}_v(\eta_J) \\ e^{j\psi} \mathbf{s}_v(\eta_1) & e^{j\psi} \mathbf{s}_v(\eta_2) & \cdots & e^{j\psi} \mathbf{s}_v(\eta_J) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j(N_h-1)\psi} \mathbf{s}_v(\eta_1) & e^{j(N_h-1)\psi} \mathbf{s}_v(\eta_2) & \cdots & e^{j(N_h-1)\psi} \mathbf{s}_v(\eta_J) \end{bmatrix}, \quad (1.1.19)$$

где $\mathbf{s}_v(\eta)$ - фазирующий вектор первого столбца АР. Как было показано выше, только N_v таких векторов являются линейно независимыми. Тогда $\mathbf{s}_v(\eta_J) = \beta_1 \mathbf{s}_v(\eta_1) + \dots + \beta_{N_v} \mathbf{s}_v(\eta_{N_v})$, и из (1.1.19) видно, что последний столбец представляется в виде линейной комбинации остальных фазирующих векторов. Следовательно, в этом случае фазирующие вектора источников излучения являются линейно зависимыми. Если исключить условие $\psi_1 = \dots = \psi_J = \psi$, фазирующие векторы могут стать линейно независимыми, но сделать теоретически обоснованный вывод в этом случае затруднительно. Таким образом, в общем случае мы можем гарантировать линейную независимость только $J \leq \min(N_v, N_h)$ различных фазирующих векторов.

Способность фазирующих векторов образовывать базис некоторого подпространства позволяет оценивать угловое положение источников радиоизлучения. Для этого необходимо некоторым образом выделить сигнальное подпространство из полного множества векторов размерности ($N \times 1$) и восстановить в нём базис фазирующих векторов. Стоит отметить, что для успешного восстановления базиса фазирующих векторов источников в линейной АР необходимо и достаточно, что бы $J < N$. Для прямоугольной АР достаточным условием является $J < \min(N_v, N_h)$. В

противном случае нельзя гарантировать единственность базиса фазирующих векторов в сигнальном подпространстве, а следовательно – успешность пеленгации.

1.1.3. Свойства собственного подпространства корреляционной матрицы

Построим КМ принятого сигнала (1.1.11). Учтём статистическую независимость сигналов источников излучения и собственного шума приёмных устройств. Также будем полагать стационарность выходного процесса АР. В этом случае

$$\mathbf{M} = \langle \mathbf{x}\mathbf{x}^H \rangle = \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{S}^H + \mathbf{E}, \quad (1.1.20)$$

где $\mathbf{B} = \langle \mathbf{a}(l)\mathbf{a}(l)^H \rangle$ – КМ источников излучения; \mathbf{E} – единичная КМ собственного шума; $\langle \cdot \rangle$ – усреднение по статистическому ансамблю (математическое ожидание) и $(\cdot)^H$ – эрмитово сопряжение.

Рассмотрим некоторые свойства собственных чисел и собственных векторов КМ. Покажем, что если в пространстве находятся $J < N$ источников, коэффициенты взаимной корреляции которых отличны от единицы и фазирующие вектора линейно независимы, то ранг матрицы $\mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{S}^H$ равен числу источников J .

Так как коэффициенты взаимной корреляции источников отличны от единицы, то $\text{rank}(\mathbf{B}) = J$ [88]. В силу линейной независимости фазирующих векторов источников излучения $\text{rank}(\mathbf{S}) = J$. Запишем оценку снизу для ранга матрицы $\mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{S}^H$, используя неравенство Фробениуса и неравенство Сильвестра [90]:

$$\text{rank}(\mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{S}^H) \geq \text{rank}(\mathbf{S}\mathbf{B}) + \text{rank}(\mathbf{B}\mathbf{S}^H) - \text{rank}(\mathbf{B}), \quad (1.1.21)$$

$$\text{rank}(\mathbf{B}\mathbf{S}^H) = \text{rank}(\mathbf{S}\mathbf{B}) \geq \text{rank}(\mathbf{S}) + \text{rank}(\mathbf{B}) - J = J, \quad (1.1.22)$$

$$\text{rank}(\mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{S}^H) \geq J. \quad (1.1.23)$$

С другой стороны, ранг произведения матриц не превосходит рангов сомножителей [89], т.е.

$$\text{rank}(\mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{S}^H) \leq J. \quad (1.1.24)$$

Из неравенств (1.1.23) и (1.1.24) следует справедливость доказываемого утверждения. Также из полученного результата следует, что КМ \mathbf{M} имеет $(N - J)$ собственных чисел равных единице, и J собственных чисел, отличных от неё. Действительно, матрица \mathbf{SBS}^H является эрмитовой и неотрицательно определённой по построению. Соответственно, все её собственные числа вещественны и неотрицательны [65]. Пусть $\chi \geq 0$ и \mathbf{u} - собственное число и собственный вектор матрицы \mathbf{SBS}^H соответственно. Тогда, $\lambda = (1 + \chi)$ и \mathbf{u} – собственное число и собственный вектор матрицы \mathbf{M} , т.е.

$$\mathbf{Mu} = \mathbf{SBS}^H\mathbf{u} + \mathbf{Eu} = (\chi + 1)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}. \quad (1.1.25)$$

Как было показано выше, ранг матрицы \mathbf{SBS}^H равен J . Следовательно, раз мерность её ядра равна $(N - J)$. Она имеет $(N - J)$ нулевых собственных чисел и J отличных от нуля [65, 91]. Тогда из выражения (1.1.25) следует, что матрица \mathbf{M} имеет $(N - J)$ собственных чисел равных единице, и J действительных положительных собственных чисел, отличных от неё.

Покажем, что собственные вектора КМ \mathbf{M} , соответствующие различным от единицы собственным числам, являются базисом сигнального подпространства.

Пусть собственный вектор \mathbf{u} матрицы \mathbf{M} соответствует собственному числу λ , отличному от единицы. Как показано ранее, это возможно только тогда, когда собственное число χ матрицы \mathbf{SBS}^H отлично от нуля, т.е.

$$\mathbf{SBS}^H\mathbf{u} = \chi\mathbf{u} \neq \mathbf{0}. \quad (1.1.26)$$

Также введём новый вектор

$$\mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_J]^T = \mathbf{BS}^H\mathbf{u}. \quad (1.1.27)$$

В силу (1.1.26) видно, что вектор \mathbf{c} отличен от нулевого. Тогда вектор \mathbf{u} можно представить в виде линейной комбинации фазирующих векторов источников:

$$\mathbf{u} = \sum_{q=1}^J c_q \mathbf{s}(\bar{\mathbf{v}}_q). \quad (1.1.28)$$

Таким образом, собственный вектор \mathbf{u} является линейной комбинацией фазирующих векторов, а, следовательно, принадлежит сигнальному подпространству.

С другой стороны, собственные векторы матрицы \mathbf{M} линейно независимы и ортогональны в силу её эрмитовости [65, 91]. При этом число собственных векторов, соответствующих собственным числам, отличным от единицы, равно J , что совпадает с размерностью сигнального подпространства. Следовательно, собственные вектора, соответствующие отличным от единицы собственным числам КМ \mathbf{M} , образуют базис сигнального подпространства. Соответствующие собственные числа и вектора называют **сигнальными**, а каждый фазирующий вектор источника излучения представляется в виде линейной комбинации сигнальных собственных векторов КМ.

Собственные векторы матрицы \mathbf{M} , соответствующие единичным собственным числам, по остаточному принципу принадлежат шумовому подпространству. В силу ортогональности собственных векторов матрицы \mathbf{M} , шумовое подпространство ортогонально сигнальному.

Приведённые выше особенности КМ используются методами сверхразрешения при определении числа и угловых координат источников излучения.

1.2. Метод минимального многочлена

Метод минимального многочлена основан на свойствах КМ, описанных в разделе 1.1. Однако в отличие от других «геометрических» методов, таких как MUSIC и ESPRIT, он не подразумевает поиска собственных чисел и собственных векторов КМ непосредственно. Вместо этого в данном методе оцениваются параметры минимального многочлена корреляционной матрицы на основе критерия минимума СКО и статистически обоснованной пороговой техники. Оценённые параметры используются для получения оптимальной оценки проектора на шумо-

вое подпространство. Последнее также подразумевает, что метод минимального многочлена, в отличие от других методов, позволяет произвести оценку числа и угловых координат источников излучения в рамках единой вычислительной процедуры.

Впервые данный метод был предложен в [31], основываясь на результатах, представленных в [92]. Дальнейшее развитие метод получил для одномерного случая в работах [47-49].

В рамках данного раздела рассмотрена базовая часть метода минимального многочлена, предложенная в [31, 92]. Она включает в себя оценку параметров минимального многочлена корреляционной матрицы, числа источников излучения и проектора на шумовое подпространство. Базовая часть является общей для одномерного [47-49] метода минимального многочлена и предлагаемого в настоящей диссертации метода двухмерной пеленгации [85].

Кроме того, для двухмерной пеленгации предполагается использование решёток с большим числом антенных элементов. Ввиду этого, в рамках данной работы разработаны новые подходы к практической реализации базовой части метода минимального многочлена, направленные на уменьшение вычислительной сложности. Кроме того, предложен способ замены итеративной вычислительной процедуры, рассматриваемой в [31], на аналитическое решение.

1.2.1. Случай точно известно корреляционной матрицы

Собственные числа КМ (1.1.20) отличные от единицы, как правило, различны между собой. Это утверждение справедливо практически всегда. Исключение составляет ситуация, когда мощности источников равны, а их фазирующие вектора ортогональны. Вероятность возникновения такого специфического случая на практике крайне мала, поэтому считается, что КМ имеет J различных сигнальных собственных чисел, где J – число источников излучения [25, 28].

Согласно теореме Гамильтона-Кэли КМ \mathbf{M} удовлетворяет своему характеристическому многочлену [65]. Без ограничения общности для собственных чисел КМ положим: $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_J > \lambda_{J+1} = 1$. Тогда выполняется равенство

$$(\mathbf{M} - \lambda_1 \mathbf{E})^{m_1} (\mathbf{M} - \lambda_2 \mathbf{E})^{m_2} \dots (\mathbf{M} - \lambda_{J+1} \mathbf{E})^{m_{J+1}} = \mathbf{0}. \quad (1.2.1)$$

Из приведённого выражения можно построить минимальный многочлен КМ, положив для всех корней единичную кратность [92]:

$$(\mathbf{M} - \lambda_1 \mathbf{E})(\mathbf{M} - \lambda_2 \mathbf{E}) \dots (\mathbf{M} - \lambda_{J+1} \mathbf{E}) = \mathbf{0}. \quad (1.2.2)$$

Разделим полученное равенство на произведение собственных чисел КМ, которое отлично от нуля, и обозначим $\gamma_q = \lambda_q^{-1}$. В итоге получим альтернативную форму записи минимального многочлена:

$$(\mathbf{E} - \gamma_1 \mathbf{M})(\mathbf{E} - \gamma_2 \mathbf{M}) \dots (\mathbf{E} - \gamma_{J+1} \mathbf{M}) = \mathbf{0}. \quad (1.2.3)$$

Из представленных выражений видно, что минимальный многочлен КМ несёт в себе информацию о числе источников излучения $J = m - 1$, где m – степень многочлена. Кроме того, на его основе может быть построена матрица-проектор на шумовое подпространство, используемая для оценки угловых координат источников излучения. В этом случае используется то свойство сигнала, что любой вектор шумового подпространства ортогонален фазирующему векторам источников. При этом фазирующие вектора для любых других направлений прихода сигнала будут иметь ненулевую проекцию на шумовое подпространство, т.к. не могут быть представлены в виде линейной комбинации только базисных векторов сигнального подпространства (см. раздел 1.1.2).

Рассмотрим множители в выражении (1.2.3). Каждый из этих множителей аннулирует собственные вектора КМ, соответствующие заданному собственному числу:

$$(\mathbf{E} - \gamma_k \mathbf{M}) \mathbf{u}_m = (1 - \gamma_k \lambda_m) \mathbf{u}_m = (1 - \gamma_k \cdot \gamma_m^{-1}) \mathbf{u}_m. \quad (1.2.4)$$

Проектор на шумовое подпространство должен аннулировать все вектора сигнального подпространства и выполнять функции тождественного оператора для векторов шумового подпространства [65]. Как было показано в разделе 1.1.3, фазирующие векторы источников представляются в виде линейной комбинации собственных векторов КМ, соответствующих J наибольшим собственным числам. Соответственно, шумовому подпространству соответствует наибольший из параметров γ (минимальное λ). На основе выражения (1.2.4) может быть построен соответствующий линейный оператор

$$\mathbf{P} = \left[\prod_{k=1}^J (\mathbf{E} - \gamma_k \mathbf{M}) \right] \left[\prod_{k=1}^J \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{J+1}} \right) \right]^{-1}. \quad (1.2.5)$$

Нетрудно видеть, что линейный оператор \mathbf{P} обладает всеми свойствами, присущими проектору на шумовое подпространство [65, 91].

1.2.2. Случай оценённой корреляционной матрицы

На практике точная КМ сигнала (1.1.20) неизвестна, поэтому приходится работать с её максимально правдоподобной оценкой (выборочной КМ) [62]:

$$\hat{\mathbf{M}} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{x}(l) \mathbf{x}^H(l). \quad (1.2.6)$$

В силу конечности числа выборок L оценка КМ является случайной и имеет N различных собственных чисел. Минимальный многочлен выборочной КМ совпадает с её характеристическим многочленом и не несёт в себе информацию о числе источников излучения. Для оптимальной оценки параметров минимального многочлена точной КМ на основе выборочной КМ в [31, 92] предложен статистически обоснованный подход.

Построим матричный функционал, который имеет смысл квадратичной ошибки аппроксимации минимального многочлена оценённой КМ матричным многочленом степени n :

$$I_n = \min_{\hat{\gamma}_k} Sp \left(\prod_{k=1}^n [\mathbf{E} - \hat{\gamma}_k \hat{\mathbf{M}}]^2 \right). \quad (1.2.7)$$

Для поиска параметров аппроксимации $\hat{\gamma}_k$ можно построить и решить итерационным путём систему нелинейных уравнений [31]. Продифференцируем выражение по параметру $\hat{\gamma}_k$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\gamma}_q} Sp \left(\prod_{k=1}^n [\mathbf{E} - \hat{\gamma}_k \hat{\mathbf{M}}]^2 \right) = -2 \cdot Sp \left(\hat{\mathbf{M}} (\mathbf{E} - \hat{\gamma}_q \hat{\mathbf{M}}) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq q}}^n [\mathbf{E} - \hat{\gamma}_k \hat{\mathbf{M}}]^2 \right) = 0. \quad (1.2.8)$$

Из полученного равенства прямо следует выражение для итерационного поиска параметров аппроксимации, предложенного в [31]:

$$\hat{\gamma}_q = Sp \left(\hat{\mathbf{M}} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq q}}^n [\mathbf{E} - \hat{\gamma}_k \hat{\mathbf{M}}]^2 \right) \cdot Sp^{-1} \left(\hat{\mathbf{M}}^2 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq q}}^n [\mathbf{E} - \hat{\gamma}_k \hat{\mathbf{M}}]^2 \right). \quad (1.2.9)$$

В качестве нулевого приближения при итерационной процедуре следует брать вычисленные параметры $\hat{\gamma}_k$ для функционала I_{n-1} . При этом параметр $\hat{\gamma}_1$ для функционала I_1 может быть получен аналитически из формулы (1.2.9):

$$\hat{\gamma}_1 = Sp(\hat{\mathbf{M}}) \cdot Sp^{-1}(\hat{\mathbf{M}}^2), \quad n=1; \quad (1.2.10)$$

$$I_1 = N - Sp^2(\hat{\mathbf{M}}) \cdot Sp^{-1}(\hat{\mathbf{M}}^2). \quad (1.2.11)$$

Практика показывает, что итерационный процесс сходится быстро и для получения удовлетворительного результата достаточно 4-7 итераций [31, 47].

Для определения степени минимального многочлена КМ следует произвести последовательный перебор по параметру $n = 1, \dots, N$. Если при некотором значении n выполняется условия $I_n < Th$ и $I_{n-1} > Th$, то оценка степени минимального многочлена m полагается равной n . Порог метода минимального многочлена рекомендуется выбирать в окрестности среднего значения метрики I_1 при условии

отсутствия на входе полезного сигнала. Если в системе присутствует только собственный шум, то среднее значение метрики I_1 рассчитывается по формуле [92]:

$$\langle I_1 | J = 0 \rangle = \frac{N^2 - 1}{N + L}. \quad (1.2.12)$$

При этом СКО данной метрики равно

$$\sigma_1 = \sqrt{2} \frac{\sqrt{N^2 - 1}}{N + L} \sqrt{1 + (2N^2 - 3)/NL}. \quad (1.2.13)$$

Для определения числа и пеленгации слабых источников излучения на фоне собственного шума авторами метода рекомендуется выбирать порог в виде

$$Th = \frac{N^2 - 1}{N + L} + k\sigma_1, \quad (1.2.14)$$

где параметр k регулирует вероятность ложной тревоги [31, 92]. При $k = 3$ вероятность ложной тревоги будет близка к нулю [93].

При наличии априорной информации о существовании источников сигнала большой мощности для повышения эффективности метода сверхразрешения значение порога может быть скорректировано. Для этого можно использовать следующую информацию [74]. В случае одного источника ($J = 1$) степень минимального многочлена КМ **М** равна двум ($m = 2$). Если аппроксимировать этот многочлен многочленом первой степени, то СКО аппроксимации будет близка (снизу) к величине $I_1 = N - 1$. При двух источниках ($J = 2$) степень минимального многочлена увеличивается до трех ($m = 3$), а СКО аппроксимации минимального многочлена многочленом первой степени будет близка (снизу) к величине $I_1 = N - 1$. Если аппроксимировать этот многочлен многочленом второй степени, то СКО уменьшится и будет близка (снизу) к величине $I_2 = N - 2$. Приведенные оценки тем точнее, чем больше мощность источников. Соответственно, если согласно постановке задачи нам требуется разрешить два мощных источника излучения, то значение порога следует выбирать в интервале $N - 3 < Th < N - 2$ [74]. Наличие

подобной априорной информации позволяет снизить чувствительность метода к неточностям заданной модели сигнала и шума.

1.2.3. Практические аспекты реализации

Непосредственное применение формулы (1.2.9) при имплементации метода минимального многочлена ведёт к высоким вычислительным затратам, т.к. требует выполнение множества матричных умножений на каждой итерации решения системы нелинейных уравнений. На практике данная система может быть приведена к скалярному виду

$$\hat{\gamma}_q = \left[Sp(\hat{\mathbf{M}}) + \sum_{k=1}^{2n-2} c_{k,q} Sp(\hat{\mathbf{M}}^{k+1}) \right] \cdot \left[Sp(\hat{\mathbf{M}}^2) + \sum_{k=1}^{2n-2} c_{k,q} Sp(\hat{\mathbf{M}}^{k+2}) \right]^{-1}, \quad (1.2.15)$$

$$\begin{aligned} c_{1,q} &= -2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq q}}^n \hat{\gamma}_k, \\ c_{2,q} &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq q}}^n \hat{\gamma}_k \hat{\gamma}_k + 4 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq q}}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq q \\ m \neq k}}^n \hat{\gamma}_k \hat{\gamma}_m, \\ &\dots \\ c_{(2n-2),q} &= (-1)^{2n-2} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq q}}^n \hat{\gamma}_k^2. \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

Выражения для коэффициентов $c_{k,q}$ совпадают с формулами Виета для набора корней $(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots, \hat{\gamma}_{q-1}, \hat{\gamma}_{q-1}, \hat{\gamma}_{q+1}, \hat{\gamma}_{q+1}, \dots, \hat{\gamma}_n, \hat{\gamma}_n)$ [94]. Из выражения (1.2.15) видно, что операцию матричного умножения требуется применить только для нахождения степеней КМ. Аналогично можно преобразовать выражение (1.2.5) для проектора на шумовое подпространство:

$$\hat{\mathbf{P}} = \left[\mathbf{E} + \sum_{k=1}^J \tilde{c}_k \hat{\mathbf{M}}^k \right] \left[1 + \sum_{k=1}^J \tilde{c}_k \gamma_{J+1}^{-k} \right]^{-1}, \quad (1.2.17)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_1 &= -(\hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 + \dots + \hat{\gamma}_{m-1}), \\
\tilde{c}_2 &= \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_3 + \dots + \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_{m-1} + \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3 + \dots + \hat{\gamma}_{m-2} \hat{\gamma}_{m-1}, \\
&\dots \\
\tilde{c}_{m-1} &= (-1)^{m-1} \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \dots \hat{\gamma}_{m-1}.
\end{aligned} \tag{1.2.18}$$

Здесь имеет смысл отметить два аспекта. Во-первых, в выражении (1.2.15) фигурирует только след степени КМ, являющийся скалярной величиной. Хранить при этом сами матрицы $\hat{\mathbf{M}}^k$ имеет смысл только для $k < N$, чтобы в дальнейшем использовать их при вычислении проектора (1.2.17). Во-вторых, вычисление степеней матрицы можно проводить рекуррентно $\hat{\mathbf{M}}^k = \hat{\mathbf{M}}^{k-1} \hat{\mathbf{M}}$, что требует хранения только последней вычисленной матрицы. При этом для каждого нового значения n при расчёте метрик метода минимального многочлена требуется дополнительно вычислить только две новые степени $\hat{\mathbf{M}}^{2n-1}$ и $\hat{\mathbf{M}}^{2n}$.

Несмотря на существенное уменьшение вычислительной сложности ядра метода минимального многочлена при переходе от (1.2.9) к (1.2.15), процедура поиска параметров γ_k всё ещё остаётся численной. Кроме того, вычислительная сложность формул (1.2.16) экспоненциально растёт с увеличением номера гипотезы о числе источников излучения. В связи с этим возникает вопрос, можно ли произвести дальнейшее упрощение вычислительной процедуры и получить аналитические решения для параметров $\hat{\gamma}_k$.

Для ответа на этот вопрос раскроем скобки в выражении (1.2.7) и произведём замену переменных по формулам Виета:

$$I_n = \min_{a_k} Sp \left(\left[\mathbf{I} + \sum_{k=1}^n a_k \hat{\mathbf{M}}^k \right]^2 \right), \tag{1.2.19}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= -(\hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 + \dots + \hat{\gamma}_n), \\
a_2 &= \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_3 + \dots + \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_n + \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3 + \dots + \hat{\gamma}_{n-1} \hat{\gamma}_n, \\
&\dots \\
a_n &= (-1)^n \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \dots \hat{\gamma}_n.
\end{aligned} \tag{1.2.20}$$

Представленная замена переменных является взаимно-однозначным преобразованием, Якобиан которого отличен от нуля [95]. Следовательно, выражения (1.2.7) и (1.2.19) являются эквивалентными.

Что бы найти минимум функционала (1.2.19) продифференцируем его по параметрам a_k и из необходимого условия экстремума получим систему линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^n b^{(k+q)} a_k + b^{(q)} = 0 \quad (q = 1, 2, \dots, n), \quad (1.2.21)$$

где $b^{(q)} = Sp(\hat{\mathbf{M}}^q)$. При этом само значение функционала вычисляется на основе решения данной системы следующим образом:

$$I_n = N + 2 \sum_{k=1}^n a_k b^{(k)} + \sum_{q=1}^n a_q \left(\sum_{k=1}^n a_k b^{(k+q)} \right), \quad (1.2.22)$$

или с учётом (1.2.21)

$$I_n = N + \sum_{k=1}^n a_k b^{(k)}. \quad (1.2.23)$$

В силу того, что замена переменных (1.2.20) была произведена с помощью формул Виета, параметры γ являются решениями следующего полинома [94]:

$$\hat{\gamma}^n + a_1 \hat{\gamma}^{n-1} + a_2 \hat{\gamma}^{n-2} + \dots + a_n = 0. \quad (1.2.24)$$

Для важных на практике случаев малого числа источников излучения $J \leq 3$ ($n \leq 4$) полином (1.2.24) и система (1.2.21) имеют аналитическое решение [94], что даёт возможность отказаться от итеративного поиска (1.2.9) или (1.2.15). Приведём, для примера, аналитическое решение для параметров γ в случае $n = 2$:

$$a_1 = \frac{b^{(2)} b^{(3)} - b^{(1)} b^{(4)}}{b^{(2)} b^{(4)} - b^{(3)} b^{(3)}}; \quad a_2 = \frac{b^{(1)} b^{(3)} - b^{(2)} b^{(2)}}{b^{(2)} b^{(4)} - b^{(3)} b^{(3)}}; \quad (1.2.25)$$

$$\hat{\gamma}_1 = 0.5 \left(-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2} \right); \quad \hat{\gamma}_2 = 0.5 \left(-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2} \right). \quad (1.2.26)$$

Для случаев $n > 4$ согласно теореме Абеля-Руффини аналитического решения не существует [96], но представленный подход к ядру метода минимального многочлена можно развить следующим образом. Матрица \mathbf{B} системы (1.2.21) является симметричной, но в общем случае не является положительно определенной. Для решения данной системы можно применить метод квадратного корня, в котором используется представление $\mathbf{B} = \mathbf{H}\mathbf{D}\mathbf{H}^T$, где \mathbf{H} – нижняя треугольная матрица, а \mathbf{D} – диагональная матрица [97, 98]. Элементы этих матриц вычисляются как

$$H_{ij} = \frac{1}{D_j} \left(B_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} H_{ik} H_{jk} D_k \right), \quad j < i, \quad (1.2.27)$$

$$D_i = B_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} H_{ik}^2 D_k; \quad H_{ii} = 1; \quad B_{ij} = b^{(i+j)}. \quad (1.2.28)$$

В общем случае решение системы можно разбить на три последовательных этапа, предполагающих решение двух линейных систем с треугольными матрицами и одной с диагональной:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = -\mathbf{b}; \quad \mathbf{D}\mathbf{v} = \mathbf{u}; \quad \mathbf{H}^T \mathbf{a} = \mathbf{v}; \quad (1.2.29)$$

где $\mathbf{b} = [b^{(1)} \quad b^{(2)} \quad \dots \quad b^{(n)}]^T$ и $\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]^T$. Стоит отметить, что структура матрицы \mathbf{B} для метрик с индексами $(n-1)$ и n отличается только добавлением дополнительных строки и столбца. Из (1.2.27) видно, что в этом случае $(n-1)$ первых строк матриц \mathbf{H} и \mathbf{D} также совпадают. Следовательно, при переходе от I_{n-1} к I_n необходимо досчитать только одну строку матрицы \mathbf{H} и один элемент матрицы \mathbf{D} . Из этого также следует, что сохраняются первые $(n-1)$ элементов векторов \mathbf{u} и \mathbf{v} . Следовательно, необходимо найти только u_n, v_n и решить третью систему в (1.2.29), матрица которой имеет треугольный вид.

Из выражения (1.2.17) так же видно, что коэффициенты \tilde{c}_k , используемые при вычислении матрицы-проектора, являются коэффициентами полинома, корни которого совпадают с корнями полинома (1.2.24) за исключением максимального.

Следовательно, нет необходимости вычислять все корни полинома (1.2.24), а достаточно найти его максимальный корень и исключить, понизив степень полинома по схеме Горнера [99].

Наибольший вклад в вычислительную сложность для всех представленных выше вариантов ядра метода минимального многочлена даёт операция возведение КМ в степень, которая требует порядка N^3 комплексных умножений. В случае оценённой КМ (1.2.6) и $L < 0.5N$, что часто имеет место на практике, рационально реализовать вычисление степеней КМ следующим образом:

$$\widehat{\mathbf{M}}^{k+1} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L [\widehat{\mathbf{M}}^k \mathbf{x}(l)] \mathbf{x}^H(l). \quad (1.2.30)$$

Число комплексных умножений в этом случае сокращается до $2N^2L$. Кроме того, при вычислении метрик минимального многочлена требуется рассчитать все степени КМ до $2(J+1)$ включительно, что требует порядка $2N^2L(2J+1)$ комплексных умножений. При этом все они находятся под операцией взятия следа матрицы, а при расчёте проектора на шумовое подпространство используются только первые J степеней.

След степени КМ можно представить следующим образом:

$$Sp(\widehat{\mathbf{M}}^k) = \frac{1}{L^k} Sp[(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)^k] = \frac{1}{L^k} Sp[(\mathbf{X}^H\mathbf{X})^k] = Sp(\widehat{\mathbf{R}}^k), \quad (1.2.31)$$

где $\mathbf{X} = [\mathbf{x}(1) \quad \mathbf{x}(2) \quad \dots \quad \mathbf{x}(L)]$, а матрица $\widehat{\mathbf{R}}$ имеет размер ($L \times L$) и является матрицей Грамма для векторов принятого сигнала

$$\widehat{\mathbf{R}} = \frac{1}{L} \mathbf{X}^H \mathbf{X}. \quad (1.2.32)$$

Для оценки всех степеней матрицы $\widehat{\mathbf{R}}$ необходимо выполнить порядка $(2J+1)L^3$ комплексных умножений. В силу эквивалентности рассмотренных подходов к ядру метода минимального многочлена, матрица $\widehat{\mathbf{M}}$ может быть заменена во всех выражениях на матрицу $\widehat{\mathbf{R}}$, за исключением формул для расчёта проектора на шумовое подпространство. Данная модификация является особенно полез-

ной в случае плоских АР при решении задачи двумерной пеленгации, т.к. число антенных элементов N в этом случае может существенно превосходить число выборок векторов сигнала L .

1.3. Оценка угловых координат источников излучения на плоскости

Одномерная задача оценки угловых координат источников излучения с помощью метода минимального многочлена была ранее исследована в [31, 47-49]. В данном разделе мы приведём краткое описание подходов к одномерной пеленгации и примеры их работы.

Для оценки угловых координат источников излучения в методе минимального многочлена используется свойство точного проектора на шумовое подпространство (1.2.5) аннулировать фазирующие вектора источников излучения

$$f(\varphi) = \|\mathbf{Ps}(\varphi)\|^2 = \mathbf{s}^H(\varphi) \mathbf{P}^H \mathbf{Ps}(\varphi) = 0. \quad (1.3.1)$$

Однако в реальной ситуации, когда КМ сигнала оценивается по конечному числу временных выборок, точный проектор на шумовое подпространство \mathbf{P} заменяется в (1.3.1) его оценкой $\hat{\mathbf{P}}$, и равенство выполняется только приблизительно. В этом случае вводят два типа допущений, ведущих к различным вариантам метода минимального многочлена: псевдоспектральному и корневому.

В псевдоспектральном методе минимального многочлена накладывается жёсткое требование на вид фазирующего вектора $\mathbf{s}(\varphi)$, элементы которого определяются (1.1.7), однако допускается приблизительное равенство нулю в (1.3.1). В этом случае строится псевдоспектральная разрешающая функция

$$\mu(\varphi) = (\mathbf{s}^H(\varphi) \hat{\mathbf{P}}^H \hat{\mathbf{P}} \mathbf{s}(\varphi))^{-1}, \quad (1.3.2)$$

пики которой соответствуют угловому положению источников излучения. Пример разрешающей функции для линейной эквидистантной АР при достаточно мощных источниках излучения представлен на Рисунке 1.3.

В корневом методе минимального многочлена в выражении (1.3.1) требуется строгое равенство нулю, однако допускается искажение амплитуд элементов

фазирующего вектора источников. В стандартном виде корневой подход к пеленгации применяется для линейных эквидистантных АР, однако при некоторой модификации может быть применён для линейной решётки произвольной конфигурации [50].

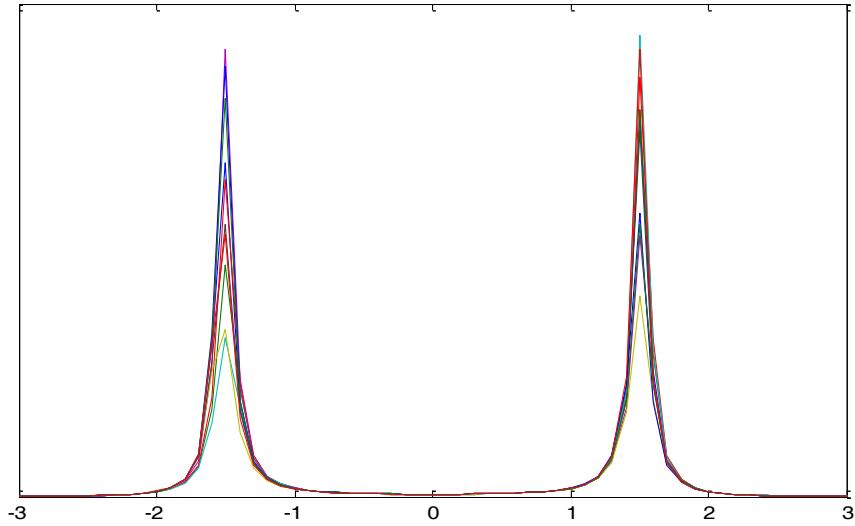


Рисунок 1.3 – Разрешающая функция $\mu(\varphi)$. Результаты моделирования ($N = 20$; $L = 10$; $d = 0.5\lambda$; $J = 2$; $\varphi = \pm 1.5^\circ$; ОСШ = 30 дБ).

В случае линейной эквидистантной АР элементы фазирующего вектора определяются выражением (1.1.8). Выполним в (1.3.1) замену переменных

$$z = \exp\left\{i \frac{2\pi}{\lambda_w} d \sin \varphi\right\}, \quad (1.3.3)$$

и получим полином степени $2(N-1)$:

$$f(z) = \mathbf{s}^H(z) \tilde{\mathbf{P}}^H \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{s}(z) = 0, \quad (1.3.4)$$

$$f(z) = \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} p_n z^n; \quad p_n = \sum_{k=1}^{N-n} \tilde{\mathbf{P}}_{k,k+n}; \quad \tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}^H \tilde{\mathbf{P}}; \quad p_{-n} = p_n^*; \quad n \geq 0. \quad (1.3.5)$$

Данный полином обладает свойством инверсии корней относительно единичной окружности на комплексной плоскости. Корни, соответствующие источникам излучения (сигнальные корни), в случае точного проектора на шумовое

подпространство имеют двойную кратность и лежат непосредственно на единичной окружности. Если проектор на шумовое подпространство построен с использованием оценённой КМ, то каждый сигнальный корень двойной кратности распадается на два инверсных корня, лежащих в непосредственной близости от единичной окружности. Данный факт служит критерием отбора сигнальных корней среди всех корней полинома (1.3.5).

Таким образом, для реализации корневого метода минимального многочлена необходимо оценить число источников излучения J и проектор на шумовое подпространство с помощью ядра метода. Затем построить полином (1.3.5) и найти его корни. На комплексной плоскости среди корней отобрать J лежащих внутри либо вне единичной окружности и наиболее близких к ней. Угловое положение источников излучения оценивается с помощью обратной к (1.3.3) замены переменных [48]

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{\arg z \cdot \lambda_w}{2\pi d}\right), \quad (1.3.6)$$

где $\arg z$ – фаза комплексного числа z .

На Рисунке 1.4 для сравнения представлены примеры независимых реализаций для псевдоспектральной функции (1.3.2) и корней полинома (1.3.5). Видно, что в абсолютном большинстве случаев псевдоспектральный метод минимального многочлена не разрешает источники излучения, несмотря на правильную оценку числа источников излучения. В тоже время, корневой вариант метода успешно их разделяет. Представленные в [48] результаты исследований показывают, что корневой метод минимального многочлена обладает лучшей разрешающей способностью по сравнению с псевдоспектральным. Данный результат объясняется тем, что псевдоспектральный метод рассматривает значение функции $f(z)$ только на единичной окружности в комплексной плоскости. При этом неточности в оценке проектора на шумовое подпространство ведут к раздвоению и смещению экстремумов этой функции с единичной окружности в стороны, т.е. возможной

потере разрешения псевдоспектрального метода. В то же время данные экстремумы успешно находятся корневым методом минимального многочлена, что позволяет оценить угловое положение источников излучения.

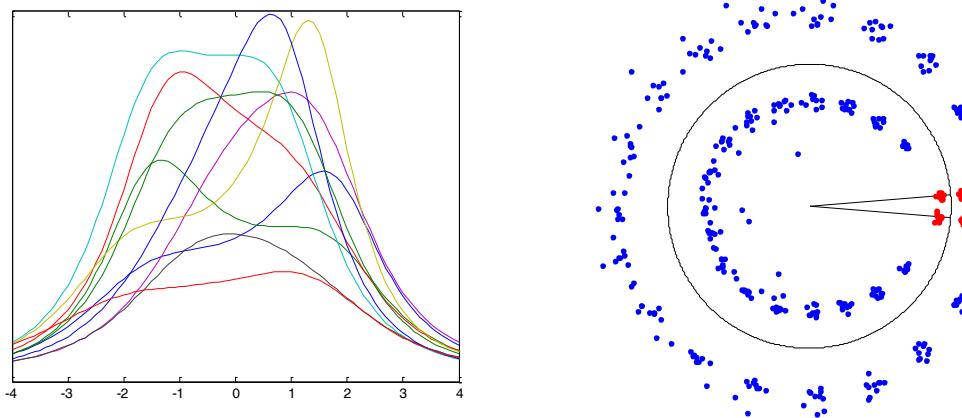


Рисунок 1.4 – Псевдоспектральная разрешающая функция и положение корней разрешающей функции на комплексной плоскости. Результаты моделирования ($N = 20$; $L = 10$; $d = 0.5\lambda$; $J = 2$; $\varphi = \pm 1.5^\circ$; ОСШ = 2.5 дБ; 8 независимых реализаций).

Кроме того, в [49] предложен модифицированный корневой метод минимального многочлена, в котором полином $f_1(z)$ является «усечённым» и имеет степень $N-1$:

$$f_1(z) = \hat{\mathbf{P}}_1^H \hat{\mathbf{P}} \mathbf{s}(z), \quad (1.3.7)$$

где $\hat{\mathbf{P}}_1$ – первый столбец матрицы $\hat{\mathbf{P}}$. Данная модификация является особенно актуальной для практического применения алгоритма в системах с небольшим числом N антенных элементов, так как при $N \leq 5$ корни полинома $f_1(z)$ могут быть найдены аналитически [94]. Пример положения корней полинома для четырёхэлементной антенной решётки в случае двух источников излучения представлен на Рисунке 1.5 (экспериментальные результаты).

Эффективность модифицированного корневого метода минимального многочлена исследована в ходе натурного эксперимента с помощью автомобильного ММО радара миллиметрового диапазона длин волн. Результаты представлены в разделе разделе 3.5 и [49]. Алгоритм показал высокую разрешающую способность

(по сравнению с методом Root MUSIC/MDL) и точность оценки угловых координат.

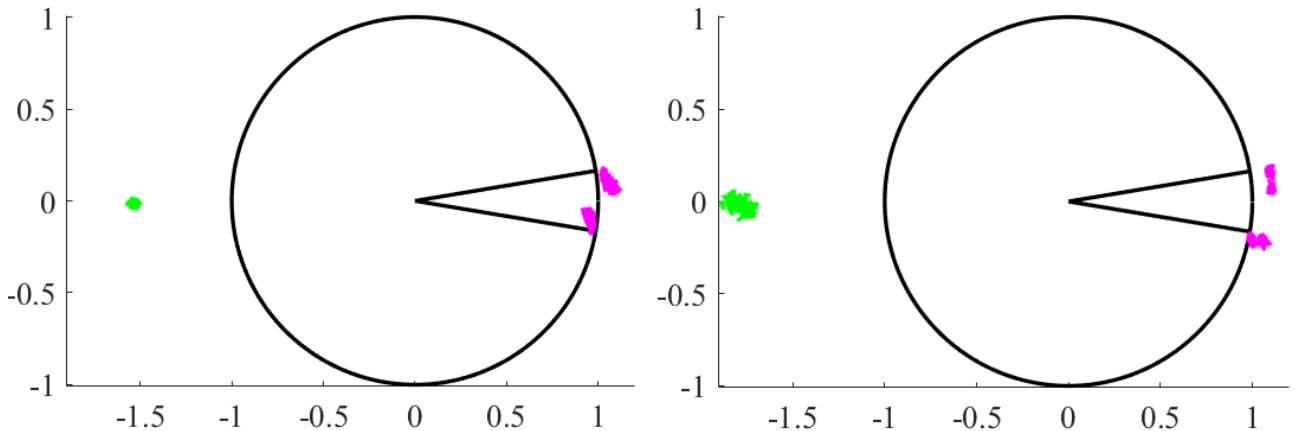


Рисунок 1.5 – Корни усечённого полинома $f_1(z)$, полученные для нескольких реализаций входного процесса в ходе натурного эксперимента при $N = 4$ и $J = 2$. Зелёным цветом выделен – шумовой корень, фиолетовым – сигнальные корни. Для сравнения построены радиальные лучи имеющие аргумент, соответствующий истинному положению источников излучения [49].

1.4. Оценка угловых координат источников в пространстве

Двумерная оценка угловых координат источников излучения значительно усложняется, по сравнению с одномерным случаем. В первую очередь это связано с увеличением числа степеней свободы системы, и как следствие, вычислительной сложности алгоритмов.

При решении задачи оценки угловых координат источников в пространстве можно рассмотреть, аналогично одномерной задаче на плоскости, два подхода: псевдоспектральный и корневой. Однако реализация данных подходов для двухмерной задачи значительно отличается.

1.4.1. Псевдоспектральный алгоритм

Как было указано ранее, в псевдоспектральном методе минимального многочлена допускается приблизительное равенство нулю оценки проекции фазирующего вектора источника на шумовое подпространство $\|\widehat{\mathbf{Ps}}(\varphi_q, \theta_q)\|^2 \approx 0$. Двухмерная разрешающая функция в этом случае выглядит следующим образом:

$$\mu(\varphi, \theta) = (\mathbf{s}^H(\varphi, \theta) \widehat{\mathbf{P}}^H \widehat{\mathbf{Ps}}(\varphi, \theta))^{-1}, \quad (1.4.1)$$

где элементы фазирующего вектора $\mathbf{s}(\varphi, \theta)$ определены в (1.1.7) для произвольной и в (1.1.9) для прямоугольной АР. Пики разрешающей функции соответствуют угловым координатам источников излучения. Пример разрешающей функции, полученной для выборочной корреляционной матрицы, представлен на Рисунке 1.6.

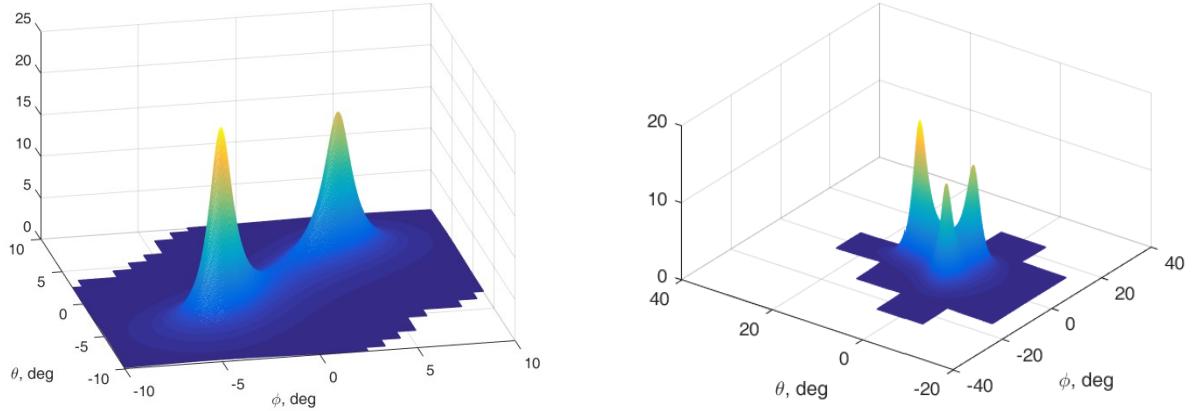


Рисунок 1.6 – Двухмерная разрешающая функция псевдоспектрального метода минимального многочлена (результат моделирования) в случае двух (слева) и трёх (справа) источников излучения. $N_v=N_h=5$; $d_v = d_h = 0.5\lambda_w$; $L = 10$.

Если проектор на шумовое подпространство оценён точно, то для разрешающей функции справедливо следующее утверждение:

$$\begin{cases} \forall q: \mu(\varphi_q, \theta_q) \rightarrow \infty \\ \forall q, \varphi \neq \varphi_q, \theta \neq \theta_q: \mu(\varphi, \theta) < \infty, \end{cases} \quad (1.4.2)$$

где (φ_q, θ_q) – координаты q -того источника излучения. Иными словами, для угловых координат (φ, θ) , соответствующих источникам излучения, разрешающая функция стремится к бесконечности, а для всех остальных – принимает конечные значения.

Первая часть утверждения следует напрямую из равенства нулю проекции фазирующего вектора источника на шумовое подпространство. Вторая часть утверждения следует из линейной независимости фазирующих векторов источников излучения, доказанной для прямоугольной АР в разделе 1.1.2. Действительно, если предположить, что для некоторого направления, отличного от направления

на источник излучения, разрешающая функция стремится к бесконечности, то это значит, что соответствующий фазирующий вектор полностью лежит в сигнальном подпространстве. Следовательно, он может быть разложен в базисе фазирующих векторов источников излучения, что противоречит положению о линейной независимости фазирующих векторов.

Рассмотрим случай одного источника излучения. При данных условиях точная КМ $\mathbf{M} = \nu \mathbf{s}_0 \mathbf{s}_0^H + \mathbf{E}$ и проектор на шумовое подпространство $\mathbf{P} = \mathbf{E} - N^{-1} \mathbf{s}_0 \mathbf{s}_0^H$, где $\mathbf{s}_0 = \mathbf{s}(\varphi_0, \theta_0)$ – фазирующий вектор источника. Фазирующий вектор для прямоугольной АР можно представить в виде произведения Кронекера \otimes фазирующих векторов первой строки и первого столбца решётки $\mathbf{s}(\varphi, \theta) = \mathbf{s}_h(\psi) \otimes \mathbf{s}_v(\eta)$, где ψ и η – обобщённые углы, определённые в (1.1.17). Тогда псевдоспектральная функция представляется следующим образом:

$$\mu(\psi, \eta) = N \left(N^2 - |\mathbf{s}^H \mathbf{s}_0|^2 \right)^{-1} = N \left(N^2 - |\mathbf{s}_h^H \mathbf{s}_{h0}|^2 |\mathbf{s}_v^H \mathbf{s}_{v0}|^2 \right)^{-1} \geq \frac{1}{N}. \quad (1.4.3)$$

Для прямоугольной эквидистантной АР данное выражение принимает вид:

$$\mu(\psi, \eta) = \frac{1}{N} \left(1 - \frac{\sin^2(0.5N_h(\psi - \psi_0))}{N_h^2 \sin^2(0.5(\psi - \psi_0))} \frac{\sin^2(0.5N_v(\eta - \eta_0))}{N_v^2 \sin^2(0.5(\eta - \eta_0))} \right)^{-1}. \quad (1.4.4)$$

Из (1.4.3) видно, что чем больше АР, тем меньше значение разрешающей функции для направлений, отличных от направления на источник излучения. При этом для направлений, существенно отличающихся от направления на источник излучения, $\mu(\psi, \eta) \approx N^{-1}$. С другой стороны, значение в скобках в (1.4.4) является гладкой функцией, которая равна разности единицы и выражения для нормированной ДН АР. Результаты моделирования показывают, что данное свойство разрешающей функции сохраняется и для оценённого проектора на шумовое подпространство, поэтому его можно использовать для оптимизации вычислений.

Поиск J наибольших локальных максимумов пространственного спектра $\mu(\varphi, \theta)$ требует вычислений значений функций на двумерной сетке, периоды ко-

торой определяются желаемой точностью оценки угловых координат источников сигналов. Это приводит к существенным вычислительным затратам в случае достаточно узкого луча АР и широкого диапазона возможных значений угловых координат. В качестве решения проблемы в [80] предложен двухэтапный псевдоспектральный подход. Первый этап включает в себя поиск области малых значений гладкой функции $f(\phi, \theta) = 1/\mu(\phi, \theta)$ по грубой сетке (см. Рисунок 1.7, слева). Например, можно задать уровень $f(\phi, \theta) = N/2$, что как видно из выражения (1.4.4) должно выделить области вокруг источников излучения, размеры которых определяются шириной главного лепестка ДН АР. При этом шаг сетки можно выбрать равным половине или четверти ширины главного лепестка ДН. На втором этапе в локализованной области выполняется поиск пиков функции $\mu(\phi, \theta)$ либо минимумов $f(\phi, \theta)$ с шагом, определяемым требуемой точностью пеленгации (см. Рисунок 1.7, справа).

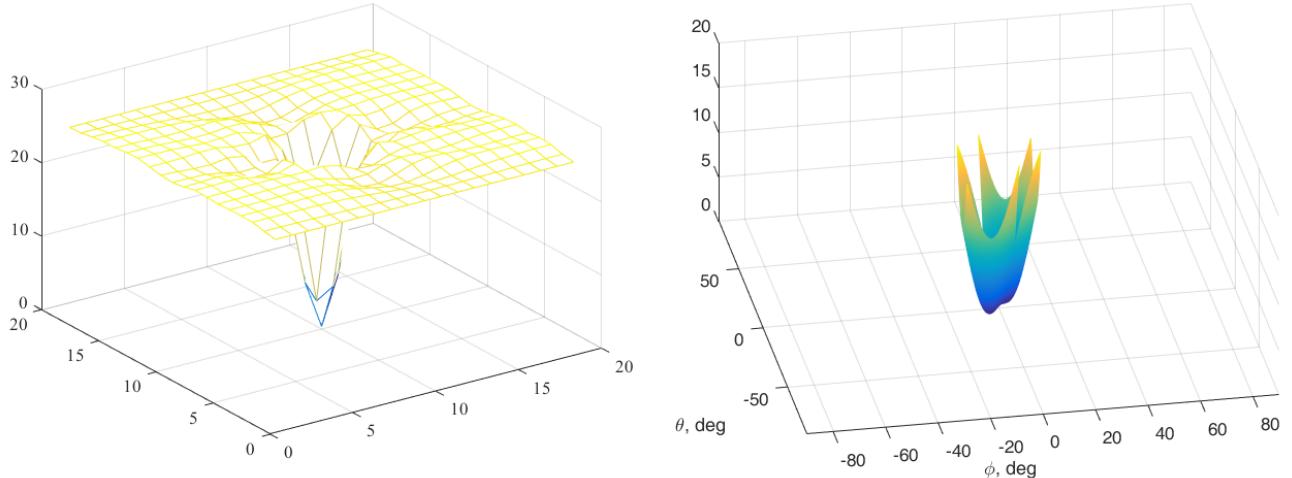


Рисунок 1.7 – Примеры разрешающих функций для двухэтапного псевдоспектрального метода минимального многочлена (результаты моделирования). Слева – инверсный пространственный спектр, вычисленный на грубой сетке. Справа – инверсный пространственный спектр, вычисленный с требуемой дискретизацией в требуемой области.

$$N_v=N_h=5; d_v = d_h = 0.5\lambda_w; L = 10.$$

Стоит отметить, что первый этап процедуры поиска пиков псевдоспектра близок по своему смыслу к методу Фурье [25, 28]. Поэтому, данный этап можно заменить непосредственно сканированием главным лепестком ДН АР.

1.4.2. Корневой алгоритм

В своём изначальном виде двухмерный корневой подход к пеленгации источников излучения применим только к прямоугольной АР. В отличие от псевдоспектрального метода минимального многочлена, корневой метод допускает искажение амплитуд элементов фазирующего вектора источника, однако требует строгое равенства $\|\widehat{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{s}}(\varphi_q, \theta_q)\|^2 = 0$, где $\tilde{\mathbf{s}}(\varphi_q, \theta_q)$ – искаженный фазирующий вектор $\mathbf{s}(\varphi_q, \theta_q)$. Перейдём в (1.1.9) к обобщённым угловым координатам (ψ, η) , определённых в (1.1.17), и выполним замену переменных:

$$y = \exp\{i\psi\}; \quad z = \exp\{i\eta\}. \quad (1.4.5)$$

Данная замена приводит к матричному представлению полинома от двух переменных (y, z) вида:

$$f(y, z) = (\mathbf{y}^{-1} \otimes \mathbf{z}^{-1}) \widetilde{\mathbf{P}} (\mathbf{y} \otimes \mathbf{z}) = 0, \quad (1.4.6)$$

где $\widetilde{\mathbf{P}} = \widehat{\mathbf{P}}^H \widehat{\mathbf{P}}$, векторы $\mathbf{y} = [1, y, \dots, y^{N_v-1}]^T$, $\mathbf{z} = [1, z, \dots, z^{N_h-1}]^T$, $\mathbf{y}^{-1} = [1, y^{-1}, \dots, y^{-N_v+1}]$, $\mathbf{z}^{-1} = [1, z^{-1}, \dots, z^{-N_h+1}]$.

В общем случае полином (1.4.6) имеет бесконечное множество решений. Однако с учётом его физического смысла, задача может быть сведена к последовательному решению двух полиномов, полученных на его основе [56, 57]. Для этого разобьем матрицу $\widetilde{\mathbf{P}}$ на квадратные блоки $\widetilde{\mathbf{P}}_{pq}$ размером $N_v \times N_v$. В результате из (1.4.6) получим, что

$$f(y, z) = \mathbf{z}^{-1} \left(\sum_{p=1}^{N_h} \sum_{q=1}^{N_h} y^{q-p} \widetilde{\mathbf{P}}_{pq} \right) \mathbf{z} = \mathbf{z}^{-1} \mathbf{F}(y) \mathbf{z}. \quad (1.4.7)$$

На первом этапе следует отыскать корни полинома $f(y) = \det|\mathbf{F}(y)|$ степени $2(N_h - 1)N_v$. Его свойства аналогичны одномерному случаю (см. раздел 1.3), а именно:

- корни полинома инверсны относительно единичной окружности на комплексной плоскости;
- при точно известном проекторе на единичной окружности лежат те и только те корни полинома, аргумент которых соответствует обобщённым углам ψ источников излучения (сигнальные корни).

Справедливость данных утверждений будет доказана далее. Сигнальные корни для каждого источника излучения имеют двойную кратность. При использовании оценки проектора на шумовое подпространство два сигнальных корня одного источника излучения теряют кратность и «разъезжаются», оставаясь при этом близкими к единичной окружности.

Для вычисления коэффициентов полинома $f(y)$ можно применить следующую вычислительную процедуру. Каждый элемент матрицы $\mathbf{F}(y)$ является полиномом степени $(2N_h - 2)$ от переменной y , т.е. представляет собой сумму $(2N_h - 1)$ слагаемых. Воспользуемся свойствами определителя и представим $\det|\mathbf{F}(y)|$ в виде суммы $(2N_h - 1)^{N_v}$ определителей [94]:

$$f(y) = \det|\mathbf{F}(y)| = \sum_{p_1=-N_h+1}^{N_h-1} \sum_{p_2=-N_h+1}^{N_h-1} \dots \sum_{p_{N_v}=-N_h+1}^{N_h-1} y^{p_1+p_2+\dots+p_{N_v}} \det|\mathbf{F}_{p_1, p_2, \dots, p_{N_v}}|, \quad (1.4.8)$$

где элементами q -ой строки матрицы $\mathbf{F}_{p_1, p_2, \dots, p_{N_v}}$ являются коэффициенты при y^{p_q} в q -ой строке матрицы $\mathbf{F}(y)$. Суммируя в (1.4.7) коэффициенты перед одинаковыми степенями y , получим искомый полином.

Вычислив корни полинома $f(y)$, следует воспользоваться свойством сигнальных корней и отобрать из них J наиболее близких к единичной окружности, лежащих внутри либо вне её. Каждый отобранный корень y_q затем подставляется в полином (1.4.7), который имеет размерность $2(N_v - 1)$. Среди корней полинома отбирается один наиболее близкий к единичной окружности и формируется пара (y_q, z_q) , которая соответствует определённому источнику излучения. Угол места и азимут каждого источника вычисляются путём обратной замены

$$\theta = \arcsin \left[\frac{\arg(z)\lambda_w}{2\pi d_v} \right]; \quad \varphi = \arcsin \left[\frac{\arg(y)\lambda_w}{2\pi d_h \cos \theta} \right], \quad (1.4.9)$$

где $\arg(\cdot)$ – аргумент комплексного числа.

Математическое обоснование представленного корневого метода в случае точно известного проектора на шумовое подпространство (т.е. при $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}$) выглядит следующим образом. Вернёмся к выражению (1.4.6) и представим замену переменных (1.4.5) в ином виде:

$$\tilde{f}(y, z) = (\mathbf{y}^{-1} \otimes \mathbf{z}^H) \mathbf{P} (\mathbf{y} \otimes \mathbf{z}) = 0, \quad (1.4.10)$$

$$\tilde{f}(y, z) = \mathbf{z}^H \left(\sum_{p=1}^{N_h} \sum_{q=1}^{N_h} y^{q-p} \mathbf{P}_{pq} \right) \mathbf{z} = \mathbf{z}^H \mathbf{F}(y) \mathbf{z}. \quad (1.4.11)$$

Если $y_0 = \exp\{i\psi_0\}$, то $\mathbf{y}^{-1} = \mathbf{y}^H = \mathbf{s}_{h0}^H$, где $\mathbf{s}_{h0} \equiv \mathbf{s}_h(\psi_0)$ – фазирующий вектор строки АР. Выражение (1.4.11) представляет собой квадратичную форму. В тоже время, $\tilde{f}(y_0, z)$ имеет смысл квадрата длины проекции вектора $\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{s}_{h0} \otimes \mathbf{z}$ на шумовое подпространство. Следовательно, квадратичная форма $\tilde{f}(y_0, z) \geq 0$ неотрицательно определена, а её минимальное значение пропорционально наименьшему собственному числу эрмитовой матрицы $\mathbf{F}(y_0)$ и квадрату нормы вектора \mathbf{z} [65]. Если обобщённый угол ψ_0 соответствует какому-либо источнику сигнала, то существует такой угол η_0 , что $\tilde{f}(y_0, z(\eta_0)) = 0$. Следовательно, матрица $\mathbf{F}(y_0)$ имеет нулевое собственное число и определитель $\det|\mathbf{F}(y_0)| = 0$. В ином случае, $\det|\mathbf{F}(y_0)| \neq 0$.

Докажем последнее утверждение следующим образом. Пусть столбцами матрицы \mathbf{S}_v являются фазирующие векторы источников для столбца АР и столбцами матрицы \mathbf{S}_h являются фазирующие векторы источников для строк АР. Тогда матрица $\mathbf{S}_{h \times s} = \mathbf{S}_h \otimes \mathbf{S}_v$ содержит в себе фазирующие векторы для всех возможных комбинаций вертикальных η и горизонтальных ψ обобщённых углов источников

излучения, включая реальные фазирующие векторы источников излучения. Составим оператор \mathbf{B} , который осуществляет проекцию вектора на подпространство W_B

$$\mathbf{B} = \mathbf{E} - \mathbf{S}_{h \times s} \left(\mathbf{S}_{h \times s}^H \mathbf{S}_{h \times s} \right)^{-1} \mathbf{S}_{h \times s}^H. \quad (1.4.12)$$

Данное подпространство является ортогональным дополнением к линейной оболочке столбцов матрицы $\mathbf{S}_{h \times s}$, которая включает в себя сигнальное подпространство. Следовательно, подпространство W_B является частью шумового подпространства. Тогда если некоторый вектор имеет ненулевую проекцию на подпространство W_B , то он также имеет ненулевую проекцию и на шумовое подпространство, т.е. $\|\mathbf{P}\tilde{\mathbf{s}}\|^2 \geq \|\mathbf{B}\tilde{\mathbf{s}}\|^2$. Преобразуем последовательно выражение (1.4.12):

$$\mathbf{B} = \mathbf{E} - (\mathbf{S}_h \otimes \mathbf{S}_v) \left((\mathbf{S}_h^H \otimes \mathbf{S}_v^H) (\mathbf{S}_h \otimes \mathbf{S}_v) \right)^{-1} (\mathbf{S}_h^H \otimes \mathbf{S}_v^H), \quad (1.4.13)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{E} - (\mathbf{S}_h \otimes \mathbf{S}_v) (\mathbf{S}_h^H \mathbf{S}_h \otimes \mathbf{S}_v^H \mathbf{S}_v)^{-1} (\mathbf{S}_h^H \otimes \mathbf{S}_v^H), \quad (1.4.14)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{E} - (\mathbf{S}_h \otimes \mathbf{S}_v) \left((\mathbf{S}_h^H \mathbf{S}_h)^{-1} \otimes (\mathbf{S}_v^H \mathbf{S}_v)^{-1} \right) (\mathbf{S}_h^H \otimes \mathbf{S}_v^H), \quad (1.4.15)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{E} - \left(\mathbf{S}_h (\mathbf{S}_h^H \mathbf{S}_h)^{-1} \mathbf{S}_h^H \right) \otimes \left(\mathbf{S}_v (\mathbf{S}_v^H \mathbf{S}_v)^{-1} \mathbf{S}_v^H \right) \quad (1.4.16)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{E} - \mathbf{P}_h \otimes \mathbf{P}_v, \quad (1.4.17)$$

где \mathbf{P}_h и \mathbf{P}_v - проекторы на подпространства, базис которых задан столбцами матриц \mathbf{S}_h и \mathbf{S}_v соответственно (сигнальные подпространства для строки и столбца АР).

Рассмотрим вектор $\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{s}_{h0} \otimes \mathbf{z}$ и найдём квадрат его проекции на подпространство W_B :

$$\|\mathbf{B}\tilde{\mathbf{s}}\|^2 = \tilde{\mathbf{s}}^H \mathbf{B} \tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{s}_{h0}^H \mathbf{s}_{h0} \otimes \mathbf{z}^H \mathbf{z} - \left(\mathbf{s}_{h0}^H \mathbf{P}_h \mathbf{s}_{h0} \right) \otimes \left(\mathbf{z}^H \mathbf{P}_h \mathbf{z} \right), \quad (1.4.18)$$

$$\|\mathbf{B}\tilde{\mathbf{s}}\|^2 = \tilde{\mathbf{s}}^H \mathbf{B} \tilde{\mathbf{s}} = N_h \|z\|^2 - \|\mathbf{P}_h \mathbf{s}_{h_0}\|^2 \|\mathbf{P}_v \mathbf{z}\|^2. \quad (1.4.19)$$

В силу того, что норма проекции вектора на некоторое подпространство меньше либо равна нормы самого вектора, а вектор \mathbf{s}_{h_0} не принадлежит сигнальному подпространству, для любого ненулевого вектора \mathbf{z} получим:

$$\tilde{f}(y_0, z) = \|\mathbf{P}\tilde{\mathbf{s}}\|^2 \geq \|\mathbf{B}\tilde{\mathbf{s}}\|^2 > 0. \quad (1.4.20)$$

Следовательно, все собственные числа матрицы $\mathbf{F}(y_0)$ строго больше нуля и $\det|\mathbf{F}(y_0)| \neq 0$. Таким образом, мы показали, что на единичной окружности лежат те и только те корни полинома $f(y) = \det|\mathbf{F}(y)|$, аргумент которых соответствует обобщённому углу одного из источников излучения.

Теперь покажем, что если y_0 – корень полинома $f(y)$, то $1/y_0^*$ – также корень. Данное утверждение означает инверсию корней полинома относительно единичной окружности на комплексной плоскости. Пусть $f(y_0) = \det|\mathbf{F}(y_0)| = 0$, тогда

$$(\det|\mathbf{F}(y_0)|)^* = \det \left| \sum_{p=1}^{N_h} \sum_{q=1}^{N_h} (y_0^*)^{q-p} \tilde{\mathbf{P}}_{pq}^H \right| = \det \left| \sum_{p=1}^{N_h} \sum_{q=1}^{N_h} \left(\frac{1}{y_0^*} \right)^{p-q} \tilde{\mathbf{P}}_{qp} \right| = \det \left| \mathbf{F} \left(\frac{1}{y_0^*} \right) \right| = 0. \quad (1.4.21)$$

Второе равенство в данном выражении следует из свойства эрмитовости матрицы $\tilde{\mathbf{P}}$. Отметим, что здесь матрица $\tilde{\mathbf{P}}$ может быть как точным, так и оценённом проектором на шумовое подпространство.

Рассмотренный выше корневой алгоритм представляет в первую очередь теоретический интерес, т.к. его реализация на практике практически не возможна ввиду колossalной вычислительной сложности (1.4.8).

1.4.3. Корневой алгоритм с применением преобразования Фурье

Необходимость вычисления большого количества определителей в (1.4.8), число которых экспоненциально зависит от числа элементов АР, делает описанный выше подход трудно реализуемым на практике. Однако задача может быть

существенно упрощена при аппроксимации полинома $f(y) = \det|\mathbf{F}(y)|$ конечным рядом Фурье [50, 57].

Вернёмся к замене (1.4.5) и заметим, что сложная функция $f(y(\psi))$ периодична по обобщённому углу ψ . Следовательно, её можно разложить в ряд Фурье на интервале $\psi \in (-\pi; \pi)$ [87]

$$f(y(\psi)) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} F_p e^{ip\psi} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} F_p y^p. \quad (1.4.22)$$

При этом коэффициенты разложения вычисляются как

$$F_p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y(\psi)) \exp\{-ip\psi\} d\psi. \quad (1.4.23)$$

На практике можно ограничить ряд (1.4.22) конечным числом слагаемых, а интеграл в выражении (1.4.23) аппроксимировать конечной суммой.

$$f(y(\psi)) \approx \sum_{p=-K}^K F_p e^{ip\psi} = \sum_{p=-K}^K F_p y^p. \quad (1.4.24)$$

$$F_p \approx \frac{\Delta\psi}{2\pi} \sum_{q=-K}^K f(y(q\Delta\psi)) \exp\{-ipq\Delta\psi\} \quad (1.4.25)$$

где $\Delta\psi = 2\pi/(2K+1)$. Можно видеть, что при стремлении $K \rightarrow \infty$ приблизительные равенства в (1.4.24) и (1.4.25) становятся точными, а сумма в (1.4.25) заменяется интегралом [50]. На практике величина K выбирается соразмерно степени аппроксимируемого полинома [50], т.е. в нашем случае можно положить $K = (N_h - 1)N_v$.

В действительности, можно показать, что при $K \geq (N_h - 1)N_v$ равенство в выражении (1.4.25) является точным, т.е. ошибка аппроксимации отсутствует. Как следует из (1.4.8) разложение функции $f(y(\psi))$ в комплексный ряд Фурье содержит степени комплексной экспоненты от $-(N_h - 1)N_v$ до $(N_h - 1)N_v$ включительно, т.е.

число ненулевых слагаемых в (1.4.22) заведомо конечно. Тогда подставляя (1.4.22) в (1.4.24), получим

$$\frac{\Delta\psi}{2\pi} \sum_{q=-K}^K \sum_{h=-(N_h-1)N_v}^{(N_h-1)N_v} F_h \exp\{i(h-p)q\Delta\psi\} = \frac{1}{2K+1} \sum_{h=-(N_h-1)N_v}^{(N_h-1)N_v} F_h \frac{\sin(\pi(h-p))}{\sin\left(\frac{\pi}{2K+1}(h-p)\right)}. \quad (1.4.26)$$

В силу конечности ряда (1.4.22) выполняется неравенство $|h-p| \leq 2(N_h-1)N_v$. Следовательно, если $K \geq (N_h-1)N_v$, то знаменатель в выражении обращается в ноль только при условии $h = p$. В то же время числитель всегда равен нулю. Таким образом, все слагаемые при $h \neq p$ обращаются в ноль. Вычисляя предел при $h \rightarrow p$, получим

$$\begin{cases} F_p = \frac{\Delta\psi}{2\pi} \sum_{q=-K}^K f(y(q\Delta\psi)) \exp\{-ipq\Delta\psi\}, & |p| \leq (N_h-1)N_v, \quad K \geq (N_h-1)N_v \\ F_p = 0, & |p| > (N_h-1)N_v \end{cases}, \quad (1.4.27)$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, мы заменяем полином $f(y) = \det|\mathbf{F}(y)|$ полиномом (1.4.24). Для нахождения коэффициентов последнего требуется вычислить $(2K+1)$ определителей $\det|\mathbf{F}(e^{iq\Delta\psi})|$ и выполнить дискретное преобразование Фурье, что значительно упрощает вычислительную задачу. Корни полинома (1.4.24) также обладают симметрией относительно единичной окружности (доказательство аналогично (1.4.21)), а для отбора сигнальных корней применяется та же процедура, что и для стандартного корневого подхода [50, 57].

На Рисунке 1.8 представлен пример положения корней полиномов (1.4.22) и (1.4.7) на комплексной плоскости для 64-х элементной квадратной АР, полученный с помощью численного моделирования. На рисунках сплошной линией изображена единичная окружность, а пунктирными – лучи, аргументы которых равняются истинным обобщённым углам источников излучения. Красным жирным

кружком выделены выбранные сигнальные корни. Отметим, что правая картинка для корней z соответствует одному из отобранных корней y .

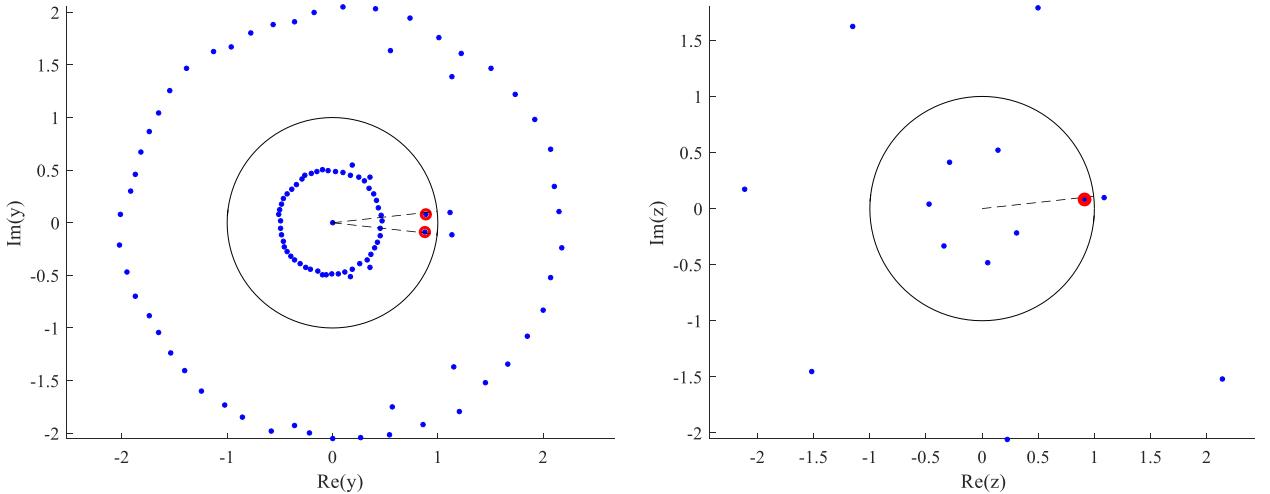


Рисунок 1.8 – Пример положения корней разрешающей функции на комплексной плоскости (результат моделирования). $N_v=N_h=8$; $d_v=d_h=0.5\lambda_w$; $L = 10$. Мощность источников равнялась 5 дБ относительно мощности собственного шума.

На Рисунке 1.9 представлена разрешающая функция псевдоспектрального двухмерного метода минимального многочлена (1.4.1) для аналогичных условий. Из рисунков видно, что при конкретных заданных условиях моделирования корневой метод смог разрешить близкие источники излучения, а псевдоспектральный нет. Более подробно эффективность данных методов исследована в разделе 1.5.

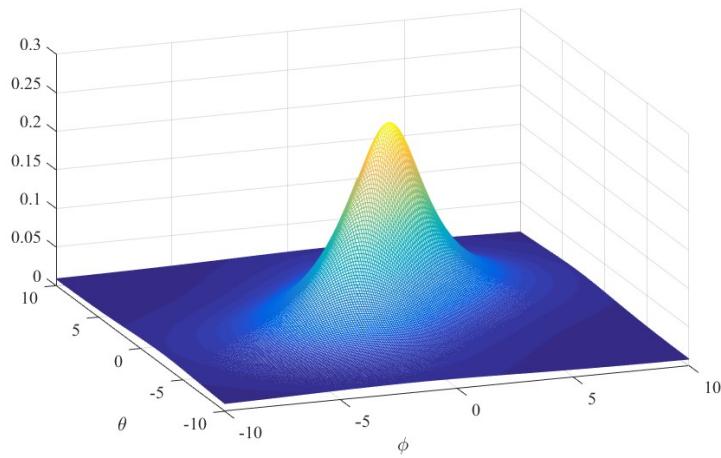


Рисунок 1.9 – Двухмерная разрешающая функция псевдоспектрального метода минимального многочлена (результат моделирования) для условий эксперимента аналогичных Рисунку 1.8.

1.4.4. Упрощённый корневой алгоритм для двухстрочной антенной решётки

Если АР состоит из двух строк и произвольного числа столбцов или из двух столбцов и произвольного числа строк, то можно построить корневой алгоритм, не требующий расчёта определителей, как это имеет место в (1.4.8) и (1.4.25).

Рассмотрим для конкретности двухстрочную АР ($N_v = 2$, N_h – произвольно). В определении (1.1.9) элементов фазирующего вектора индексы антенн упорядочены вдоль столбцов решётки снизу-вверх и слева-направо (см. Рисунок 1.2). Изменим порядок нумерации элементов, упорядочив их вдоль строк слева-направо и снизу-вверх. Формально это выражается в умножении фазирующего вектора на матрицу перестановки \mathbf{Q} . Тогда формула (1.4.6) принимает вид

$$f(y, z) = \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 z^{q-p} (\mathbf{y}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_{pq} \mathbf{y}) = f_{-1}(y) z^{-1} + f_0(y) + f_1(y) z = 0, \quad (1.4.28)$$

где $\bar{\mathbf{P}}_{pq}$ – блоки матрицы $\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{Q}^H \mathbf{P} \mathbf{Q}$. Можно убедиться, что полином (1.4.28), как и в одномерном случае (см. раздел 1.3) обладает свойством инверсии корней, т.е. если $f(y, z) = 0$, то $f(1/y^*, 1/z^*) = 0$. Действительно,

$$f_{-1}^*(y) = (\mathbf{y}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_{21} \mathbf{y})^H = \mathbf{y}^H \bar{\mathbf{P}}_{21}^H (\mathbf{y}^{-1})^H = \mathbf{y}^H \bar{\mathbf{P}}_{12} (\mathbf{y}^{-1})^H = f_1(1/y^*), \quad (1.4.29)$$

$$f_0^*(y) = (\mathbf{y}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_{11} \mathbf{y} + \mathbf{y}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_{22} \mathbf{y})^H = \mathbf{y}^H \bar{\mathbf{P}}_{11} (\mathbf{y}^{-1})^H + \mathbf{y}^H \bar{\mathbf{P}}_{22} (\mathbf{y}^{-1})^H = f_0(1/y^*), \quad (1.4.30)$$

$$0 = f^*(y, z) = f_1(1/y^*) (1/z^*) + f_0(1/y^*) + f_{-1}(1/y^*) z^* = f(1/y^*, 1/z^*). \quad (1.4.31)$$

Выражение (1.4.28) при умножении на z превращается в квадратное уравнение, зависящее от параметра y . Предположим, что $\bar{\mathbf{P}}$ – точный проектор на шумовое подпространство, а y – соответствует какому либо источнику излучения. В этом случае квадратное уравнение (1.4.28), имеет два кратных корня, лежащих на единичной окружности. Воспользовавшись формулой Виета для суммы корней полинома [94], найдем, что

$$z = -0.5 f_0(y) / f_1(y). \quad (1.4.32)$$

Подставим полученное решение в уравнение (1.4.28) и получим полином степени $(4N_h - 4)$, зависящий только от одной переменной y , в виде

$$f_0^2(y) - 4f_{-1}(y)f_1(y) = 0. \quad (1.4.33)$$

Данный полином также обладает свойством инверсии корней относительно единичной окружности $|y| = 1$. Так в силу выражений (1.4.29) и (1.4.30) получим

$$0 = (f_0^2(y) - 4f_{-1}(y)f_1(y))^* = f_0^2(1/y^*) - 4f_1(1/y^*)f_{-1}(1/y^*). \quad (1.4.34)$$

В силу построения полинома (1.4.33) корни, соответствующие источникам излучения при точно известном проекторе лежат на единичной окружности. Предположим, что на единичной окружности лежит корень, аргумент которого отличен от обобщённого угла какого-либо источника излучения. Выражение (1.4.33) является дискриминантом уравнения (1.4.28). Следовательно, корень по з является кратным и в силу свойства инверсии корней (1.4.31) лежит на единичной окружности. Это значит, что существует некоторый фазирующий вектор, определяемый полученными корнями, отличный от фазирующих векторов источников и не имеющий проекции на шумовое подпространство. Следовательно, данный вектор лежит в сигнальном подпространстве и может быть разложен в базисе фазирующих векторов источников. Однако это противоречит свойству линейной независимости различных фазирующих векторов, доказанном в разделе 1.1.2. Таким образом, наше предположение не верно и на единичной окружности при точно известном проекторе на шумовое подпространство лежат те и только те корни полинома (1.4.33), которые соответствуют источникам излучения (сигнальные корни).

На практике при использовании оценки проектора на основе выборочной КМ сигнальные корни «разъезжаются» относительно единичной окружности. В этом случае среди корней полинома следует отобрать J наиболее близких к единичной окружности, лежащих внутри, либо вне её. Далее с помощью (1.4.32) формируется набор пар (y_p, z_p) , соответствующих источникам излучения. На их

основе азимуты и углы места источников излучения вычисляются путём обратной замены (1.4.9).

Пример положения корней полинома (1.4.33) на комплексной плоскости представлен на Рисунке 1.10. Сплошной черной линией на рисунке построена единичная окружность. Пунктирные лучи, выходящие из её центра, соответствуют геометрическому месту точек, аргумент которых равен обобщённому горизонтальному углу ψ источников излучения. Жирным красным кружком отмечены выбранные сигнальные корни.

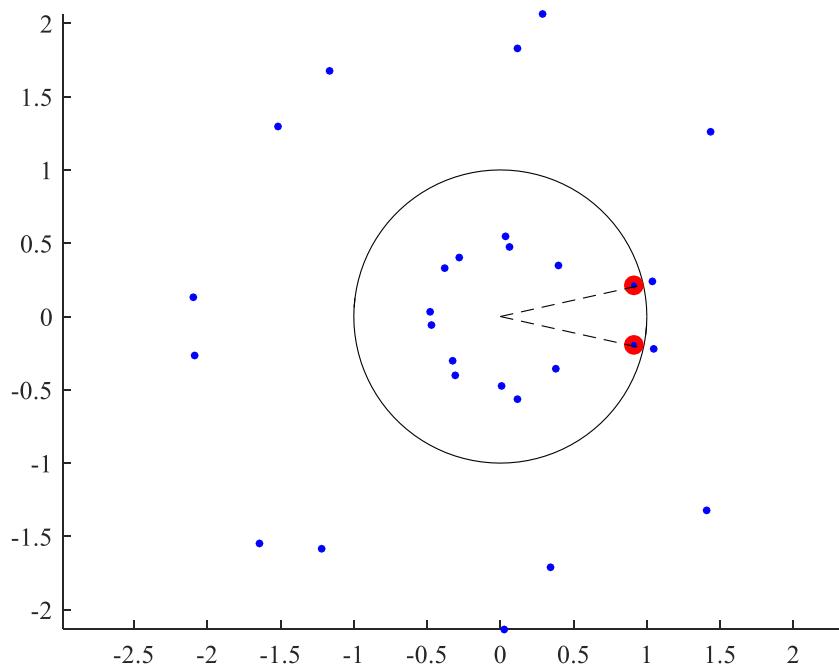


Рисунок 1.10 – Пример положения корней полинома (1.4.33) на комплексной плоскости (результат моделирования). $N_v=2$; $N_h=8$; $d_v = d_h = 0.5\lambda_w$; $L = 10$. Мощность источников равнялась 10 дБ относительно мощности собственного шума.

1.4.5. Анализ вычислительной сложности

Вычислительная сложность алгоритма является краеугольным камнем, определяющим возможность его применения на практике. Данный вопрос особенно актуален при оценке угловых координат источников излучения в пространстве, т.к. увеличение числа искомых параметров и размеров АР ведёт к существенному росту сложности вычислительной процедуры по сравнению с одномерным случаем. В связи с этим, необходимо проанализировать вычислительную сложность рассмотренных алгоритмов и выделить наилучший вариант.

Псевдоспектральный метод. Будем проводить вычисление пространственного спектра (1.4.1) на сетке обобщённых углов $-\pi < \psi < \pi$ и $-\pi < \eta < \pi$ (см. (1.1.17)). В этом случае количество точек в сетке определяется как $(N_v N_h / \Delta^2)$, где Δ – шаг сканирования в единицах ширины главного лепестка ДН. Для вычисления значения псевдоспектра (1.4.1) в каждой точке требуется $(N_v^2 N_h^2 + N_v N_h)$ комплексных умножений. Дополнительно необходимо порядка $N_v N_h$ операций для поиска его пиков. Таким образом, асимптотическая сложность построения пространственного спектра составляет $O(N_v^3 N_h^3)$ комплексных умножений.

Корневой метод. При прямой реализации двумерного корневого подхода (1.4.7), (1.4.8) необходимо вычислить $(2N_h - 1)^{N_v}$ определителей. Сложность вычисления одного определителя оценивается как $O(N_v^3)$ операций [97]. Полином (1.4.8) имеет степень $2(N_h - 1)N_v$. Поиск его корней может быть произведён с помощью QR-алгоритма для соответствующей матрицы Фробениуса [91, 97]. Сложность этой процедуры оценивается как $O(N_v^3 N_h^3)$ операций комплексного умножения. Дополнительно для отобранных J корней полинома (1.4.8) требуется найти коэффициенты и парные корни полинома (1.4.7), что требует дополнительно $O(JN_v^3 + JN_v^2 N_h)$ операций. Таким образом, общая сложность может быть оценена как $O(N_v^3 N_h^{N_v} + N_v^3 N_h^3)$ комплексных умножений. Отметим, что алгоритм можно перестроить так, что сначала будут найдены z , а затем уже на их основе y . В этом случае сложность будет оцениваться как $O(N_h^3 N_v^{N_h} + N_v^3 N_h^3)$ операций.

Корневой подход с применением преобразования Фурье. При использовании аппроксимации первого полинома рядом Фурье (1.4.24) сложность вычисления его коэффициентов (1.4.25) составляет $O(N_h N_v^4 + N_h^2 N_v^3)$. При этом в силу того, что степени полиномов остаются те же, вычислительные затраты на поиск их корней остаются без изменений. Общая сложность алгоритма оценивается как

$O(N_h N_v^4 + N_h^3 N_v^3)$ комплексных умножений. Аналогично, изменив порядок вычисления переменных z и y в алгоритме, получим сложность $O(N_v N_h^4 + N_h^3 N_v^3)$.

Корневой подход для двухстрочной (двухстолбцовой) АР. Предложенное частное решение для двухстрочной АР не требует поиска значений определителей. Перемножение «малых» полиномов в выражении (1.4.33) требует $O(N_h^2)$ операций, а поиск его корней $O(N_h^3)$ комплексных умножений.

На Рисунке 1.11 приведена зависимость вычислительной сложности R (необходимого числа комплексных умножений) этих алгоритмов от числа столбцов N_h АР. Сплошные линии соответствуют числу строк $N_v = 2$, пунктирные – $N_v = 6$. Кривые I (красные) построены для псевдоспектрального алгоритма при $\Delta = 0.1$. Кривые II и III (синие и фиолетовые) соответствуют корневому подходу без применения преобразования Фурье (1.4.8) и с применением преобразования Фурье (1.4.24), соответственно. Кривая IV (черная) построена для предложенного нового корневого алгоритма (1.4.33). Видно, что корневой подход с применением преобразования Фурье (в произвольном случае) и предложенный новый корневой подход (1.4.33) для $N=2$ обладают наименьшей вычислительной сложностью.

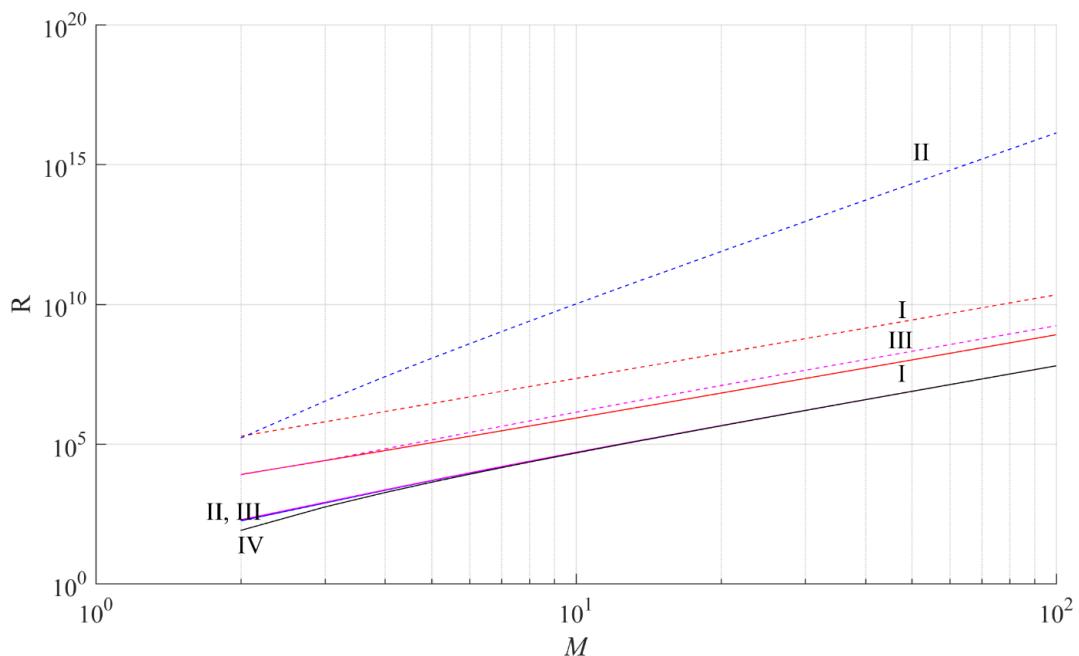


Рисунок 1.11 – Зависимость вычислительной сложности алгоритмов от числа столбцов АР при фиксированном числе строк

1.5. Результаты моделирования

Оценка, анализ и сравнение эффективности двумерных алгоритмов сверхразрешения были проведены с помощью численного моделирования. Модель сигнала была реализована в соответствии с (1.1.11). Комплексные амплитуды $a_q(t)$ источников сигналов полагались некоррелированными между собой гауссовыми случайными величинами с нулевым средним и мощностью v . Вектор ξ определялся независимым по элементам аддитивным белым гауссовым шумом, мощность которого полагалась единичной для каждого элемента решётки.

Моделирование проводилось для методов: минимального многочлена и MUSIC с применением корневого и псевдоспектрального подходов к пеленгации. Оценка числа источников излучения для метода MUSIC производилась с помощью критерия MDL [25]. В соответствии с этим критерием за оценку числа источников принимается положение минимума модифицированной функции правдоподобия по переменной J равной

$$F_{MDL}(J) = L(C - J)[\lg f_1(J) - \lg f_2(J)] + f_3(J) \quad (1.5.1)$$

где функции $f_1(J)$ и $f_2(J)$ представляют собой соответственно арифметическое и геометрическое среднее ненулевых шумовых собственных чисел выборочной КМ $\hat{\mathbf{M}}$, а так называемая «штрафная» функция равна $f_3(J) = 0.5J(2C - J)\lg L$. При моделировании величина C полагалась равной числу ненулевых собственных чисел. Оценка числа источников для метода минимального многочлена проводилась с помощью алгоритма, описанного в разделе 1.2.

В качестве метрик эффективности алгоритмов были выбраны следующие величины: вероятность правильной оценки числа источников излучения p , среднеквадратические отклонения (СКО) σ оценок измерения азимута и угла места, а также модуль ϵ систематических ошибок измерения этих углов. Вычисление средних значений и СКО оценки угловых координат источников проводилась для мощностей, при которых вероятность p правильной оценки числа источников превышала 0.8.

При моделировании рассматривались два сценария. В первом сценарии исследовалась квадратная АР ($N_v = 8, N_h = 8, d_v = 0.5\lambda_w, d_h = 0.5\lambda_w$). Угловое положение источников было задано $\varphi_1 = \theta_1 = -2^\circ, \varphi_2 = \theta_2 = +2^\circ$, что соответствует нормированному к ширине ДН угловому расстоянию между источниками $\Delta\zeta = 0.45$. Результаты моделирования для этого сценария приведены на Рисунках 1.12 - 1.14. Кривая I соответствует корневому варианту метода минимального многочлена с применением преобразования Фурье к исходному полиному (см. раздел 1.4.3). Кривая II соответствует псевдоспектральному варианту метода минимального многочлена (см. раздел 1.4.1). Кривые III и IV соответствуют корневому и псевдоспектральному вариантам метода MUSIC. На Рисунке 1.13 и Рисунке 1.14 ошибки азимута отложены сплошной линией и отмечены буквой «-а», ошибки угла места – пунктиром и отмечены буквой «-е». Шаг сетки для расчёта пространственного спектра для обоих методов равнялся 0.1° . Оценка КМ производилась по $L = 10$ временным выборкам. Для каждого значения мощности ν источника выполнялось 10000 независимых экспериментов.

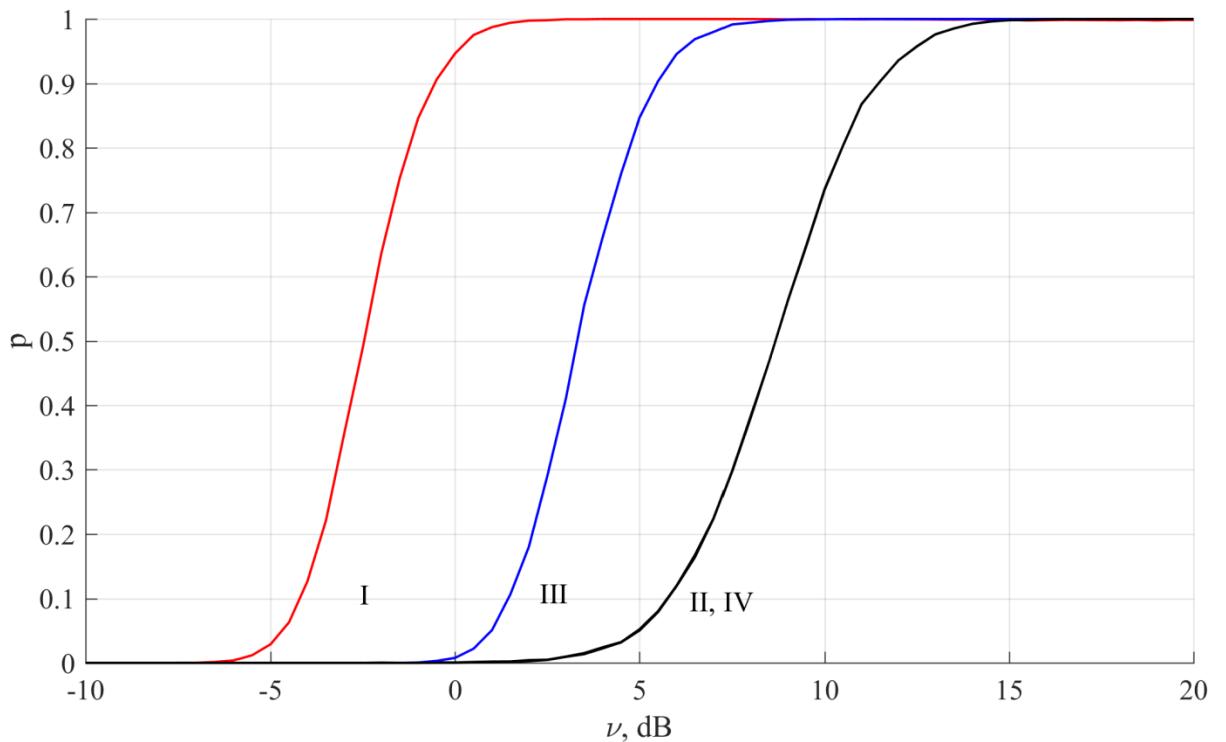


Рисунок 1.12 – Вероятность правильной оценки числа источников в зависимости от мощности источников излучения ($N_v = N_h = 8$).

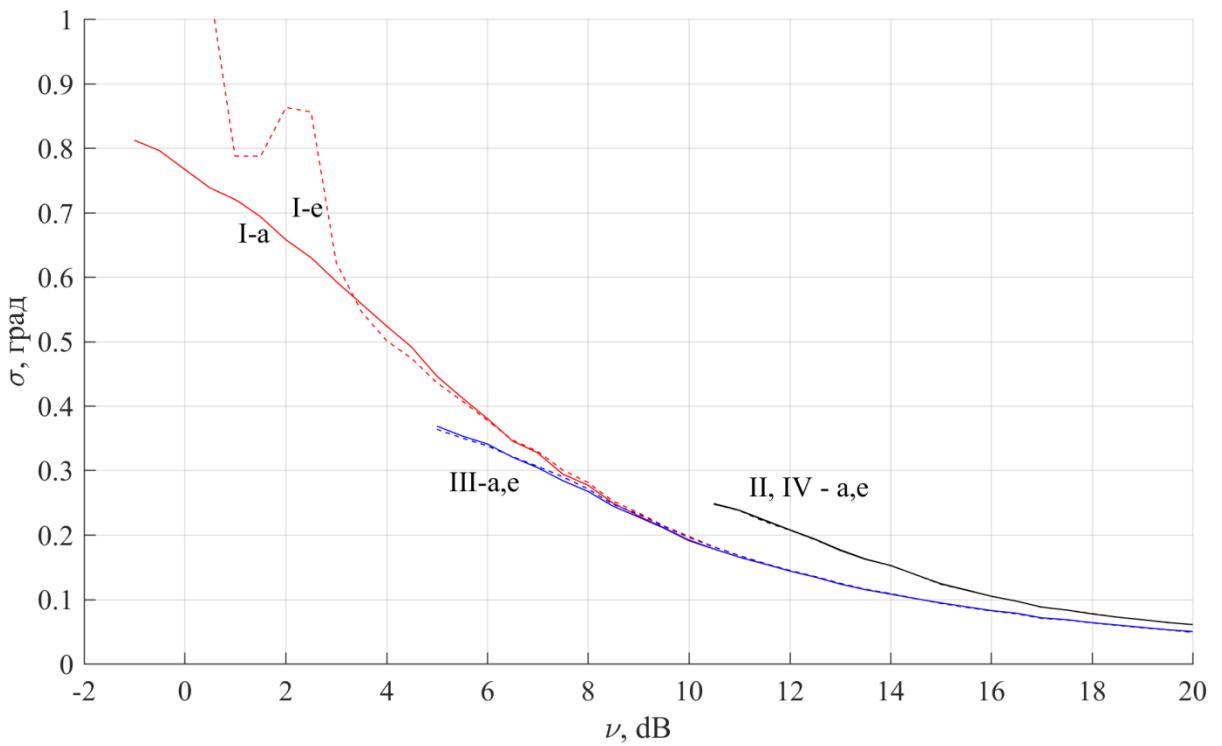


Рисунок 1.13 – СКО оценки угловых координат источников по азимуту «-а» и углу места «-е» в зависимости от мощности источников излучения ($N_v = N_h = 8$).

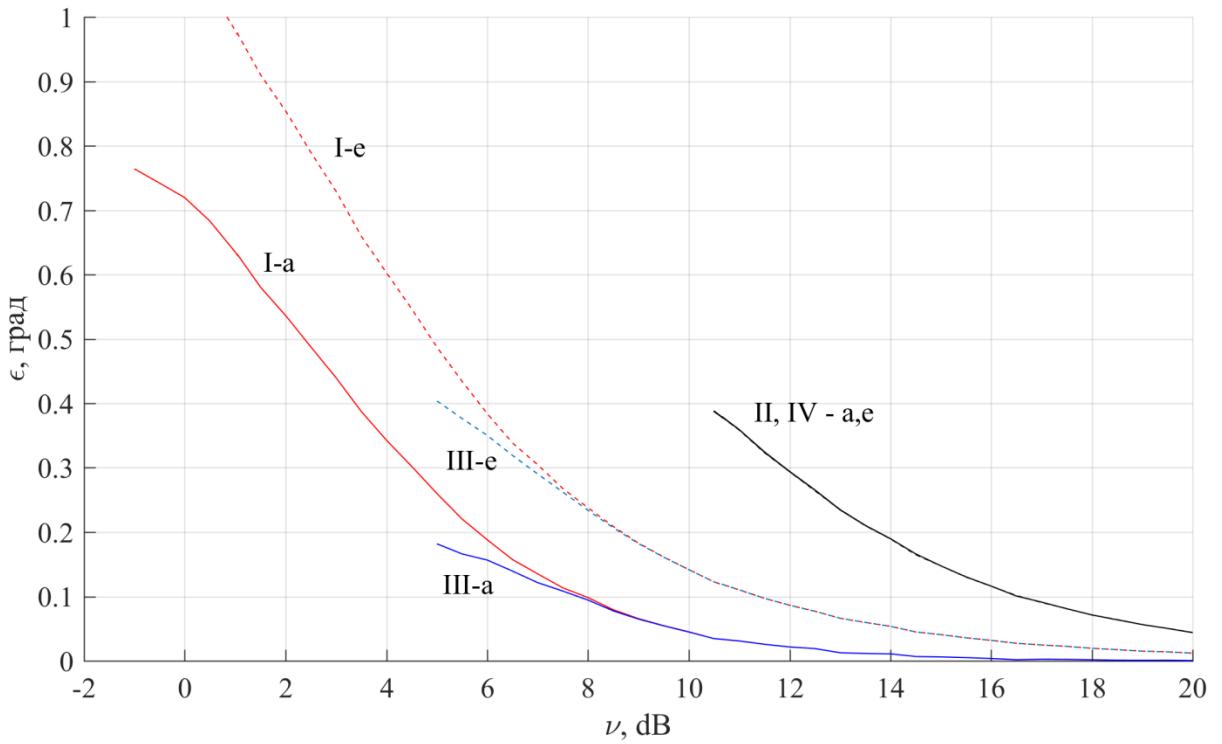


Рисунок 1.14 – Систематическая ошибка оценки угловых координат источников по азимуту «-а» и углу места «-е» в зависимости от мощности источников излучения ($N_v = N_h = 8$).

Из результатов моделирования видно, что вероятность правильной оценки числа источников излучения $p = 0.8$ достигается для корневого варианта метода

минимального многочлена при мощности v источников на 12 дБ меньше, чем для псевдоспектрального варианта. Это связано с тем, что количество пиков псевдоспектра при небольших мощностях источников может быть меньше их числа, оценённого методом минимального многочлена. Т.е. жесткое ограничение на вид волнового фронта, заданное в псевдоспектральном методе, при малых отношениях сигнал/шум не даёт возможность аппроксимировать принятый сигнал несколькими волновыми фронтами, в соответствии с выявленным числом статистически независимых сигналов. В то же время, возможность незначительно варьировать амплитуду волнового фронта вдоль АР, присутствующая в корневом подходе, позволяет учесть «зашумленность» волнового фронта при аппроксимации и гарантировать разрешение более слабых источников. Отметим, что такой эффект наблюдается и для одномерного случая, а также для метода MUSIC/MDL [25, 28, 48]. Кроме того, метод минимального многочлена обеспечивает выигрыш примерно на 7 дБ по сравнению с критерием MDL для заданной АР.

Данный результат можно объяснить следующим образом. Критерий MDL производит разделение полного набора собственных чисел оценённой КМ на сигнальные и шумовые. Примерное равенство шумовых собственных чисел (равномерное распределение мощности шума в векторном пространстве) является физической интерпретацией основной идеи критерия MDL, при этом качество разделения, кроме всего прочего, существенно зависит от «штрафной» функции f_3 . В случае короткой выборки сигнала, что имеет место в проведённом численном эксперименте, на результат влияют два фактора. Во-первых, КМ имеет не полный ранг и значительная часть собственных чисел равна нулю. Во-вторых, случайный характер оценки КМ приводит к существенному разбросу шумовых собственных чисел, что при малой мощности источников и малом количестве ненулевых собственных чисел затрудняет разделение шумовых и сигнальных чисел по критерию «похожести».

В свою очередь, метод минимального многочлена, также полагая, что шум равномерно распределён в векторном пространстве, проверяет степень соответ-

ствия оценённой КМ гипотезе о наличии определённого количества источников излучения (независимых волновых фронтов). В совокупности со статистически обоснованным критерием такой подход даёт преимущество методу минимального многочлена над критерием MDL в случае короткой выборки или коррелированных источников сигнала [48, 49]. С увеличением числа выборок входного сигнала качество оценки числа источников методом минимального многочлена и критерием MDL становится одинаковым.

Величины ошибок оценки угловых координат для методов минимального многочлена и MUSIC примерно совпадают. При этом точность оценки с помощью корневого подхода превосходит точность оценок, полученных с помощью пространственного спектра, что также характерно и для одномерного случая [48]. Разница в величине систематической ошибки ϵ для азимута и угла места связана с последовательной вычислительной процедурой, т.к. ошибка оценённой «горизонтальной фазы» ψ при подстановке в (1.4.7) влияет на оценку «вертикальной фазы» η , определяющей угол места. При этом для псевдоспектра (1.4.1) такого эффекта не наблюдается.

Во втором сценарии АР представляла собой две строки элементов ($N_v = 2$, $N_h = 8$), а угловые положения источников излучения было задано $\varphi_1 = -\varphi_2 = 4^\circ$, $\theta_1 = -\theta_2 = 10^\circ$, что соответствует $\Delta\zeta \approx 0.63$ от ширины ДН в соответствующем сечении. Прочие параметры и обозначения кривых остались без изменения. Результаты моделирования представлены на Рисунке 1.15, Рисунке 1.16 и Рисунке 1.17. Дополнительная кривая V соответствует предложенному в данной работе варианту корневого подхода метода минимального многочлена для двухстрочной АР (см. раздел 1.4.4).

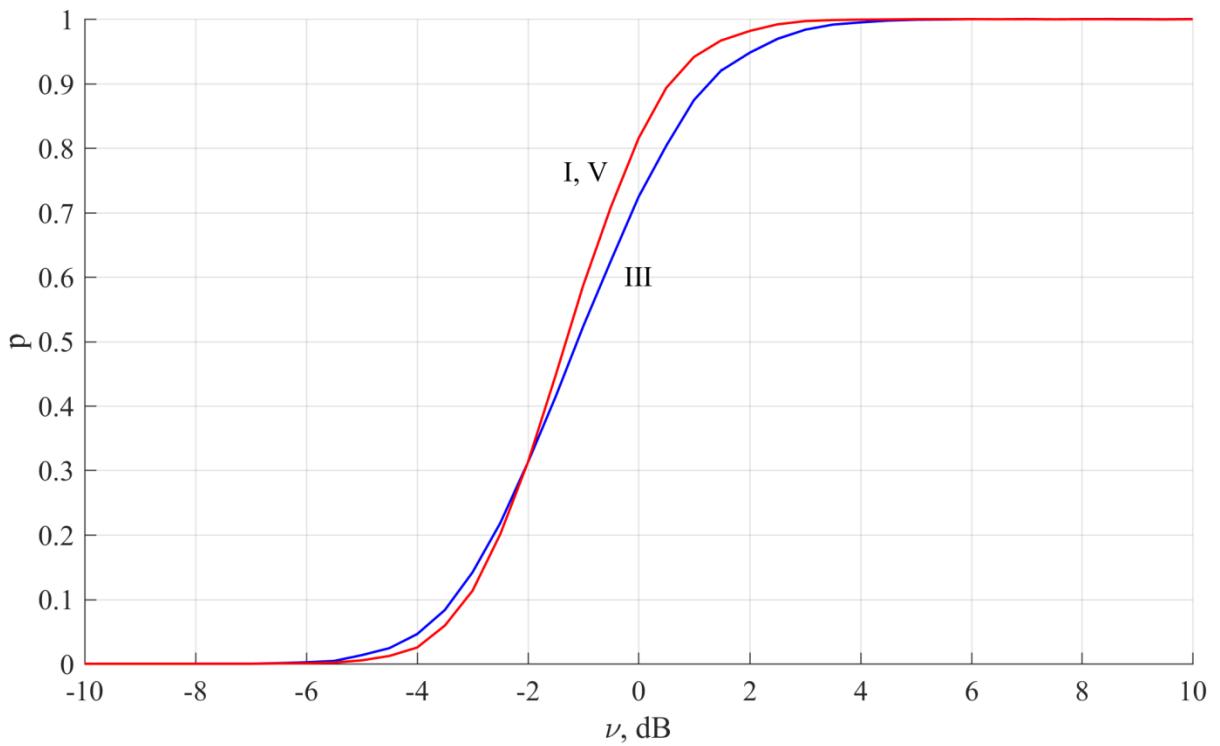


Рисунок 1.15 – Вероятность правильной оценки числа источников в зависимости от мощности источников излучения ($N_v = 2$; $N_h = 8$).

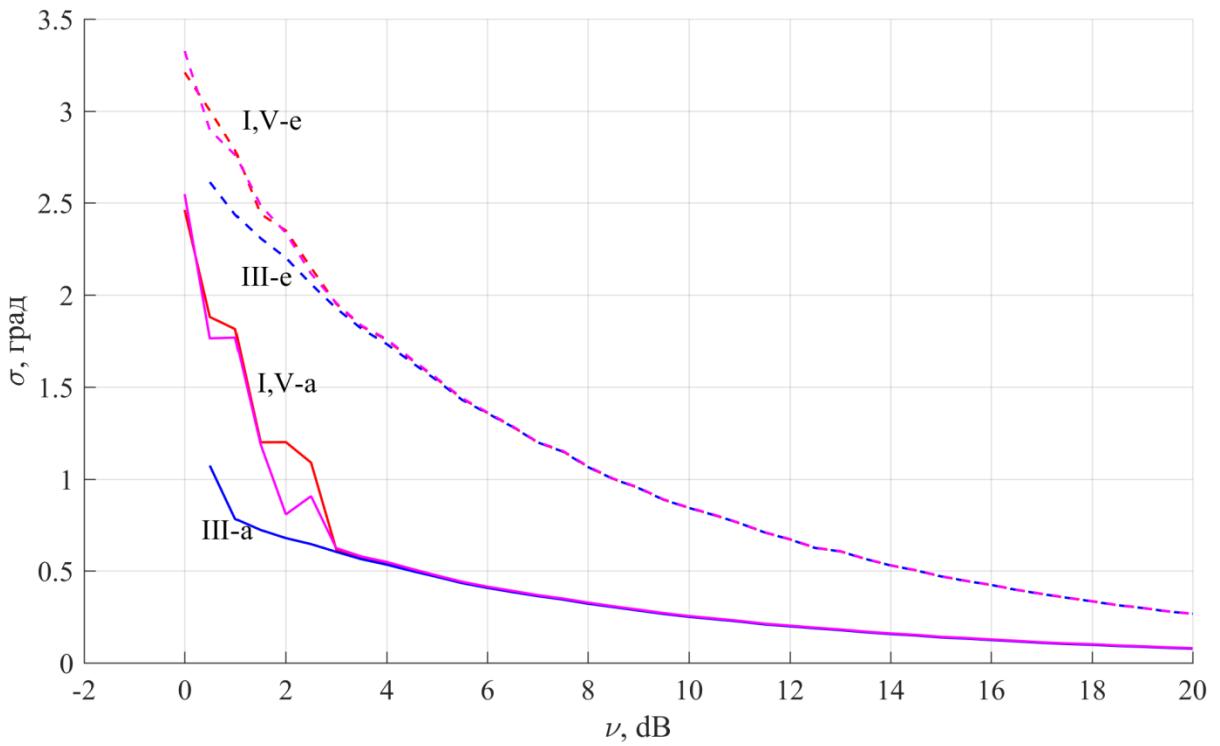


Рисунок 1.16 – СКО оценки угловых координат источников по азимуту «-а» и углу места «-е» в зависимости от мощности источников излучения ($N_v = 2$; $N_h = 8$).

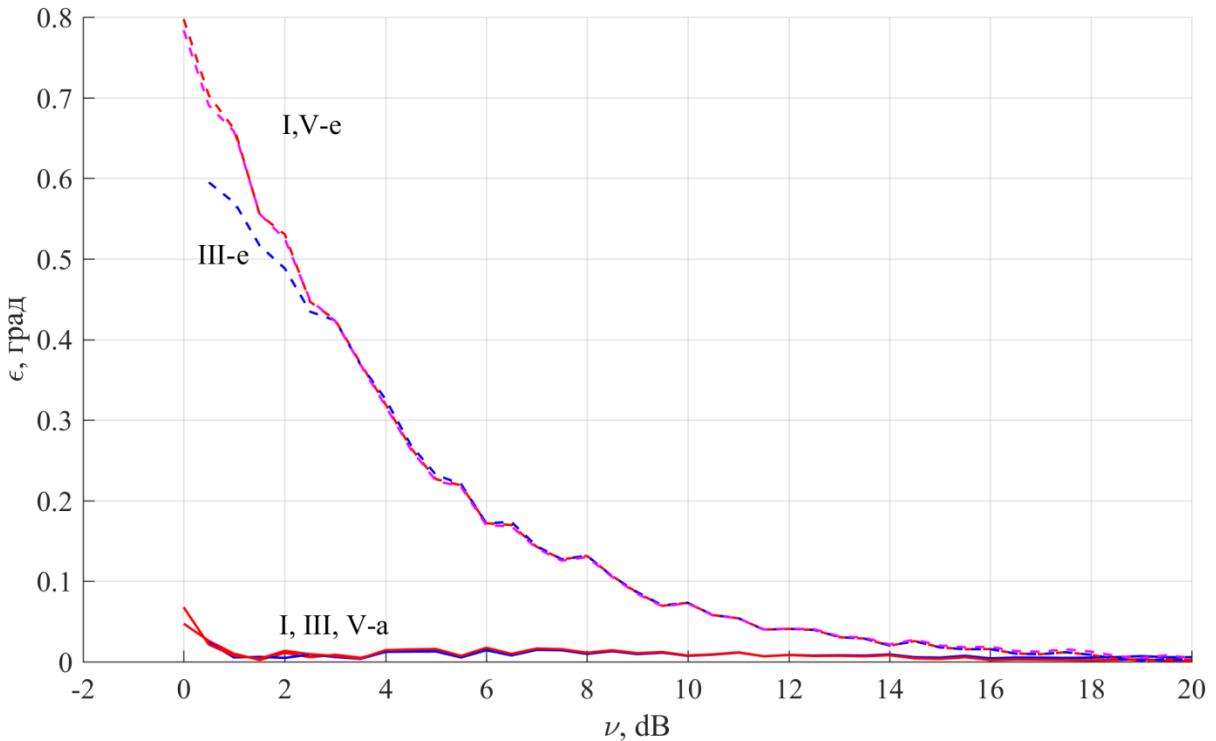


Рисунок 1.17 – Систематическая ошибка оценки угловых координат источников по азимуту «-а» и углу места «-е» в зависимости от мощности источников излучения ($N = 2$; $M = 8$).

Из результатов моделирования видно, что для исследуемой АР вероятность правильной оценки числа источников излучения для метода минимального многочлена и критерия MDL примерно совпадают. Это связано с тем, что относительное число выборок (L/N_vN_h) для данной АР выше, чем в предыдущем сценарии. Точности пеленгации корневыми вариантами методов минимального многочлена и MUSIC практически совпадают, так же как и точности оценок, полученных с помощью корневого подхода с применением преобразования Фурье (1.4.24) и предложенного альтернативного способа построения полинома (1.4.33).

Следует отметить, что помимо мощности источников излучения на качество оценки их числа и угловых координат влияют также размеры АР и число выборок входного процесса. Принятый сигнал является суперпозицией плоских волновых фронтов, которые взаимно однозначно определяют векторное сигнальное подпространство и которые мы пытаемся выявить с помощью описанных методов. Однако шум на конечном интервале наблюдения «размывает» эти фронты, что вносит ошибки в оценки угловых координат и числа источников. С увеличением мощно-

сти источников влияние шума уменьшается, что приводит к более точному результату. С другой стороны, влияние шума можно снизить за счёт накопления статистики, т.е. увеличения числа выборок входного сигнала. При этом мощность шума равномерно распределяется по векторному пространству, а реализации полезного сигнала заполняют все сигнальное подпространство, давая возможность максимально точно распознать волновые фронты, которые его образуют. Наконец, увеличение числа антенных элементов приводит к увеличению полной выходной мощности полезного сигнала. Суммарная мощность шума также увеличивается, но как было отмечено выше, шум распределяется по всему векторному пространству, а мощность полезного сигнала сосредотачивается только в сигнальном подпространстве, размерность которого определяется числом источников, что можно трактовать как увеличение отношения сигнал/шум.

1.6. Заключение по первой главе

В рамках первой главы диссертации рассмотрена двумерная проблема оценки числа и угловых координат (азимута и угла места) близкорасположенных источников сигналов с помощью прямоугольной АР. Основные результаты исследований, представленных в данной главе, заключаются в следующем:

1. Синтезирован двухмерный метод оценки угловых координат источников излучения на основе метода минимального многочлена. Предложены, теоретически обоснованы и исследованы два варианта алгоритма: корневой и псевдоспектральный.
2. Разработаны новые подходы к практической реализации базовой части метода минимального многочлена, направленные на снижение вычислительной сложности в условиях массивных антенных решёток. Предложен способ замены итеративной вычислительной процедуры на аналитическое решение в случае малого числа источников излучения.
3. Проведено сравнение эффективности предложенного двумерного метода минимального многочлена и метода MUSIC, используемого совместно с критерием MDL. Результаты моделирования показывают, что метод мини-

мального многочлена позволяет успешно разрешать близкорасположенные источники излучения. При малом числе выборок входного процесса этот метод превосходит критерий MDL по вероятности правильной оценки числа источников. При правильной оценке числа источников точность оценок угловых координат для синтезированного метода и метода MUSIC практически совпадают.

4. Для случая двухстрочной конфигурации АР с произвольным числом столбцов (или двухстолбцовой конфигурации АР с произвольным числом строк) предложен высокоэффективный упрощённый корневой способ сверхразрешения. Результаты численного моделирования показывают, что предложенный способ не уступает в точности пеленгации корневому подходу, применяемому для АР произвольного размера.
5. Произведена оценка вычислительной сложности рассмотренных алгоритмов. Показано, что для прямоугольной АР с произвольным числом строк и столбцов наименьшей вычислительной сложностью обладает корневой подход к пеленгации с применением преобразования Фурье. Для двухстрочной (или двухстолбцовой) АР наиболее простым и эффективным является предложенный альтернативный способ вычисления разрешающего полинома для корневого подхода.

ГЛАВА 2. МЕТОД МИНИМАЛЬНОГО МНОГОЧЛЕНА ПРИ НАЛИЧИИ ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЁННОЙ ПОМЕХИ

Во второй главе диссертации предлагается обобщение метода минимального многочлена на случай пеленгации источников сигнала при наличии пространственно-распределённой помехи. Рассматриваются два подхода: на основе обобщённой проблемы собственных чисел и обеляющего преобразования. Доказывается математическая эквивалентность предложенных подходов. Исследуется эффективность предложенного алгоритма с помощью численного моделирования.

Основные результаты, представленные в данной главе, опубликованы в [77, 79, 83].

2.1. Свойства векторного пространства при наличии помехи

Рассматриваемая в данной главе сигнальная модель во многом совпадает с моделью, используемой в первой главе настоящей диссертации (см. раздел 1.1). Отличие заключается в том, что в рамках данной главы мы будем рассматривать вектор ξ в (1.1.11) как суммарный вектор собственного шума приёмников и помехи. В связи с этим, положения разделов 1.1.1 и 1.1.2 остаются справедливыми в условиях пространственно-окрашенного шума, т.к. затрагивают только свойства полезного сигнала. В свою очередь, свойства КМ и её собственного подпространства изменяются, что требует их повторного рассмотрения для более общей постановки задачи.

Аналогично (1.1.20) КМ принятого сигнала (1.1.11) может быть представлена в виде

$$\mathbf{M} = \langle \mathbf{x}\mathbf{x}^H \rangle = \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{S}^H + \mathbf{T}_\Sigma, \quad (2.1.1)$$

где \mathbf{B} – КМ источников излучения, столбцами матрицы \mathbf{S} являются фазирующие вектора источников, а \mathbf{T}_Σ - КМ шума и помехи. Можно видеть, что при $\mathbf{T}_\Sigma = \mathbf{E}$ мы получаем рассматриваемую в главе 1 модель собственного шума приёмных

устройств. При наличии помехи матрица \mathbf{T}_Σ отлична от единичной. В этом случае собственные векторы матрицы \mathbf{SBS}^H не являются собственными векторами матрицы \mathbf{M} , как это было в (1.1.25), и сигнальное подпространство не может быть описано базисом собственных векторов КМ. Данная проблема решается с помощью так называемых «обобщённых» собственных чисел и векторов (generalized eigenvalue problem), которая в литературе также связана с регулярным пучком матриц (квадратичных форм) [65, 66].

Общая постановка проблемы обобщённых собственных чисел и векторов выглядит следующим образом:

$$(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{T}_\Sigma) \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (2.1.2)$$

где λ – обобщённое собственное число, а \mathbf{v} – обобщённый собственный вектор. В силу положительной определённости КМ \mathbf{M} и \mathbf{T}_Σ , все обобщённые собственные числа действительны и положительны [65]. Кроме того, выполняются следующие условия [65, 66]:

$$\mathbf{V}^H \mathbf{M} \mathbf{V} = \Lambda; \quad \mathbf{V}^H \mathbf{T}_\Sigma \mathbf{V} = \mathbf{E}, \quad (2.1.3)$$

где на главной диагонали матрицы Λ стоят обобщённые собственные числа, а столбцами матрицы \mathbf{V} являются соответствующие им обобщённые собственные векторы. Последнее условие можно умножить на \mathbf{V} слева и преобразовать к виду

$$(\mathbf{V} \mathbf{V}^H \mathbf{T}_\Sigma - \mathbf{E}) \mathbf{V} = \mathbf{0}. \quad (2.1.4)$$

Так как ранг произведения матриц не превосходит рангов сомножителей [89], а матрица \mathbf{V} имеет полный ранг, то справедливо утверждение

$$\mathbf{V} \mathbf{V}^H \mathbf{T}_\Sigma = \mathbf{E}. \quad (2.1.5)$$

Из (2.1.1) и (2.1.2) следует, что обобщённые собственные векторы для пучков $(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{T}_\Sigma)$ и $(\mathbf{SAS}^H - \vartheta \mathbf{T}_\Sigma)$ совпадают, а обобщённые собственные числа λ и ϑ отличаются на единицу. Последнее утверждение можно записать в матричном виде

$$\mathbf{M}\mathbf{V} = \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{S}^H\mathbf{V} + \mathbf{T}_\Sigma\mathbf{V} = \mathbf{T}_\Sigma\mathbf{V}\Theta + \mathbf{T}_\Sigma\mathbf{V} = \mathbf{T}_\Sigma\mathbf{V}(\Theta + \mathbf{E}) = \mathbf{T}_\Sigma\mathbf{V}\Lambda, \quad (2.1.6)$$

где Θ - диагональная матрица, ненулевые элементы которой равны обобщённым собственным числам ϑ . Учтём (2.1.5) и получим

$$\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{S}^H = \mathbf{T}_\Sigma\mathbf{V}(\Lambda - \mathbf{E})\mathbf{V}^H\mathbf{T}_\Sigma. \quad (2.1.7)$$

Применив к правой части выражения неравенства Сильвестра и Фробениуса [90], учитывая, что ранг произведения матриц меньше либо равен рангу сомножителей [89], а также неравенства (1.1.23) и (1.1.24), получим, что $\text{rank}(\Lambda - \mathbf{E}) = \text{rank}(\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{S}^H) = J$. Следовательно, существует ровно J обобщённых собственных чисел КМ \mathbf{M} отличных от единицы.

С другой стороны, любой вектора $\mathbf{T}_\Sigma\mathbf{v}$ соответствующий $\lambda > 1$ можно представить в виде линейной комбинации фазирующих векторов источников

$$\mathbf{T}_\Sigma\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda - 1} \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{S}^H\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda - 1} \mathbf{S}\mathbf{b}, \quad (2.1.8)$$

где $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{S}^H\mathbf{v}$. Учитывая, что число векторов $\mathbf{T}_\Sigma\mathbf{v}$ соответствующих неединичным обобщённым собственным числам ($\lambda > 1$) равно числу фазирующих векторов источников J , линейную независимость фазирующих векторов источников (см. раздел 1.1.2) и векторов $\mathbf{T}_\Sigma\mathbf{v}$, приходим к выводу, что они задают базис одного и того же подпространства – сигнального. Соответственно, остальные векторы $\mathbf{T}_\Sigma\mathbf{v}$ задают базис шумового подпространства.

2.2. Подход на основе обобщённой проблемы собственных чисел

Первый подход к обобщению метода минимального многочлена основан непосредственно на свойствах КМ и сигнального подпространства, изложенных в разделе 2.1. Из (2.1.2) можно видеть, что обобщённые собственные числа и векторы являются решением спектральной задачи для матрицы $\mathbf{T}_\Sigma^{-1}\mathbf{M}$. Следовательно, для данной матрицы можно составить минимальный многочлен и на его основе произвести оценку числа источников излучения.

$$(\mathbf{E} - \gamma_1 \mathbf{T}_\Sigma^{-1} \mathbf{M})(\mathbf{E} - \gamma_2 \mathbf{T}_\Sigma^{-1} \mathbf{M}) \dots (\mathbf{E} - \gamma_{J+1} \mathbf{T}_\Sigma^{-1} \mathbf{M}) = 0, \quad (2.2.1)$$

В реальной ситуации, когда известны только оценки КМ по конечному числу временных выборок, степень минимального многочлена оценивается так же как описано в разделе 1.2.2. В этом случае метрика минимального многочлена определяется как

$$I_n = \min_{\hat{\gamma}_k} Sp \left(\prod_{k=1}^n [\mathbf{E} - \hat{\gamma}_k \hat{\mathbf{T}}_\Sigma^{-1} \hat{\mathbf{M}}]^2 \right), \quad (2.2.2)$$

а значение параметров $\hat{\gamma}_k$ вычисляются аналогично (1.2.9) или используя альтернативный подход, описанный в разделе 1.2.3. Здесь мы полагаем, что КМ шума и помехи $\hat{\mathbf{T}}_\Sigma$ может быть оценена независимо от полной корреляционной матрицы $\hat{\mathbf{M}}$, используя (1.2.6). Данное предположение часто выполняется на практике, в частности, для радиолокационных систем. Вопрос выбора порога метода минимального многочлена будет рассмотрен далее в разделе 2.3.3.

Для оценки угловых координат источников излучения необходимо построить проектор на шумовое подпространство, который можно составить из множителей вида $(\mathbf{E} - \gamma_m \mathbf{M} \mathbf{T}_\Sigma^{-1})$. Действительно, каждый из данных множителей преобразует векторы базиса сигнального и шумового подпространств следующим образом:

$$(\mathbf{E} - \gamma_m \mathbf{M} \mathbf{T}_\Sigma^{-1}) \mathbf{T}_\Sigma \mathbf{v}_k = (\mathbf{T}_\Sigma \mathbf{v}_k - \gamma_m \mathbf{M} \mathbf{v}_k) = \left(1 - \frac{\gamma_m}{\gamma_k}\right) \mathbf{T}_\Sigma \mathbf{v}_k. \quad (2.2.3)$$

Если $m = k$, то последнее выражение становится равным нулю. Как показано в (2.1.8), любой вектор сигнального подпространства может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{T}_\Sigma \mathbf{v}_k$ для $k = 1 \dots J$, соответствующих наибольшим обобщённым собственным числам (или наименьшим параметрам γ_k). Следовательно, следующий проектор аннулирует векторы сигнального под-

пространства (в том числе и фазирующие векторы источников) и не искажает векторы шумового подпространства:

$$\mathbf{P} = \left[\prod_{m=1}^J (\mathbf{E} - \gamma_m \mathbf{M} \mathbf{T}_\Sigma^{-1}) \right] \left[\prod_{m=1}^J (1 - \gamma_m / \gamma_{J+1}) \right]^{-1}, \quad (2.2.4)$$

где на практике используются оценки КМ и параметров γ_k . Далее угловое положение источников оценивается с помощью корневого или псевдоспектрального подходов, описанных в разделах 1.3 (одномерный случай) и 1.4 (двумерный случай).

2.3. Подход на основе обеляющего преобразования

2.3.1. Описание предлагаемого подхода

Иным подходом, сводящим задачу оценки параметров источников излучения на фоне пространственно-окрашенного шума к ранее рассмотренной задаче оценки числа и угловых координат источников на фоне собственного шума (см. раздел 1.2), является применение обеляющего линейного преобразования сигнала. Общая схема алгоритма в этом случае приведена на Рисунке 2.1.



Рисунок 2.1 – Общая схема подхода на основе обеляющего преобразования

Существуют различные способы построения матрицы D обеляющего преобразования [62, 100, 101]. Некоторые из них будут рассмотрены далее. На выхо-

де обеляющего преобразования мы имеем сигнал $\mathbf{y}(l) = \mathbf{D}^H \mathbf{x}(l)$, КМ которого имеет вид:

$$\mathbf{M}_D = \langle \mathbf{y}(l) \mathbf{y}^H(l) \rangle = \mathbf{D}^H \mathbf{M} \mathbf{D} = \mathbf{D}^H \mathbf{S} \mathbf{B} \mathbf{S}^H \mathbf{D} + \mathbf{D}^H \mathbf{T}_\Sigma \mathbf{D} = \mathbf{D}^H \mathbf{S} \mathbf{B} \mathbf{S}^H \mathbf{D} + \mathbf{E}. \quad (2.3.1)$$

Преобразование \mathbf{D} выбирается взаимно однозначным, поэтому размерности шумового и сигнального подпространства не изменяются. В целом, постановка задачи становится аналогичной описанной в разделе 1.2. Следовательно, представленное в нём решение может быть применено к «обелённому» сигналу для оценки параметров источников излучения. Однако стоит отметить, что обеляющее преобразование искажает фазирующие векторы источников сигнала, как видно из (2.3.1), поэтому для оценки угловых координат источников непосредственно с помощью корневого или псевдоспектрального алгоритма (см. разделы 1.3 и 1.4) проектор на шумовое подпространство (1.2.5) должен быть модифицирован. В результате получим:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{D}^{-1})^H \left[\prod_{m=1}^J (\mathbf{E} - \gamma_m \mathbf{M}_D) \right] \left[\prod_{m=1}^J (1 - \gamma_m / \gamma_{J+1}) \right]^{-1} \mathbf{D}^H. \quad (2.3.2)$$

Рассмотрим преобразование фазирующего вектора источника $\mathbf{s}(\vec{\mathbf{v}})$ с помощью матрицы-проектора (2.3.2). Логика внесённой модификации следующая: сначала вектор $\mathbf{s}(\vec{\mathbf{v}})$ с помощью матрицы \mathbf{D}^H обеляющего преобразования преобразуется в систему координат, в которой заданы «обелённый» сигнал и матричный проектор (1.2.5). Затем с помощью этого проектора находится проекция на шумовое подпространство и, наконец, полученный вектор преобразуется обратно в исходную систему координат умножением на матрицу $(\mathbf{D}^{-1})^H$.

Существует, как минимум, два варианта построения обеляющего преобразования, которое удовлетворяет условию

$$\mathbf{D}^H \mathbf{T}_\Sigma \mathbf{D} = \mathbf{E}. \quad (2.3.3)$$

Первый основан на собственном разложении КМ шума и определяется следующим образом [65]:

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}_\Sigma^{-0.5} = \sum_k \mu_k^{-0.5} \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^H, \quad (2.3.4)$$

где μ_k и \mathbf{u}_k собственные числа и векторы матрицы \mathbf{T}_Σ . Во втором используется разложение Холецкого $\mathbf{T}_\Sigma = \mathbf{R}\mathbf{R}^H$, которое существует в силу положительной определённости КМ, и где \mathbf{R} – нижняя треугольная матрица [102]. В этом случае $\mathbf{D} = (\mathbf{R}^{-1})^H$. В справедливости предложенных способов построения обеляющего преобразования можно убедиться непосредственной подстановкой соответствующих матриц \mathbf{D} в (2.3.3).

2.3.2. Эквивалентность предложенных подходов

В разделах 2.2 и 2.3.1 предложены два различных подхода к обобщению метода минимального многочлена на случай пространственно-окрашенного шума: на основе обобщённой проблемы собственных чисел и обеляющего преобразования. Покажем, что данные подходы являются математически эквивалентными.

Рассмотрим выражение (2.2.2) для метрики I_n метода минимального многочлена, полученное для подхода на основе обобщённой проблемы собственных чисел. Запишем его в следующем виде:

$$I_n = \min_{\gamma_m} Sp(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_1), \quad (2.3.5)$$

$$\mathbf{R}_1 = (\mathbf{E} - \gamma_1 \widehat{\mathbf{T}}_\Sigma^{-1} \widehat{\mathbf{M}})(\mathbf{E} - \gamma_2 \widehat{\mathbf{T}}_\Sigma^{-1} \widehat{\mathbf{M}}) \dots (\mathbf{E} - \gamma_n \widehat{\mathbf{T}}_\Sigma^{-1} \widehat{\mathbf{M}}), \quad (2.3.6)$$

где мы воспользовались свойством коммутативности множителей вида $(\mathbf{E} - \gamma_m \widehat{\mathbf{T}}_\Sigma^{-1} \widehat{\mathbf{M}})$.

Умножим матрицу \mathbf{R}_1 на матрицу \mathbf{D}^{-1} слева и \mathbf{D} справа, что не изменит выражения (2.3.5) т.к. $\mathbf{D}^{-1} \mathbf{D} = \mathbf{E}$ и $Sp(\mathbf{R}_1^2) = Sp(\mathbf{D}^{-1} \mathbf{R}_1^2 \mathbf{D})$ [65]. Кроме того, вставим

между скобками (2.3.6) единичные матрицы $\mathbf{E} = \mathbf{DD}^{-1}$. В итоге, в выражении (2.3.5) матрица \mathbf{R}_1 заменяется на матрицу

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{E} - \gamma_1 \hat{\mathbf{T}}_{\Sigma}^{-1} \hat{\mathbf{M}}) \mathbf{D} \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{E} - \gamma_2 \hat{\mathbf{T}}_{\Sigma}^{-1} \hat{\mathbf{M}}) \mathbf{D} \dots \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{E} - \gamma_m \hat{\mathbf{T}}_{\Sigma}^{-1} \hat{\mathbf{M}}) \mathbf{D}. \quad (2.3.7)$$

Из (2.3.3) получим, что $\hat{\mathbf{T}}_{\Sigma}^{-1} = \mathbf{DD}^H$, и преобразуем (2.3.7) к виду:

$$\mathbf{R}_2 = (\mathbf{E} - \gamma_1 \mathbf{D}^H \hat{\mathbf{M}} \mathbf{D}) (\mathbf{E} - \gamma_2 \mathbf{D}^H \hat{\mathbf{M}} \mathbf{D}) (\mathbf{E} - \gamma_m \mathbf{D}^H \hat{\mathbf{M}} \mathbf{D}) \quad (2.3.8)$$

Учитывая, что $\mathbf{D}^H \mathbf{M} \mathbf{D} = \mathbf{M}_D$ (что верно и для оценённых КМ) получим выражение для метрики минимального многочлена при обеляющем подходе.

$$I_n = \min_{\hat{\gamma}_k} Sp \left[\prod_{k=1}^n (\mathbf{E} - \hat{\gamma}_k \hat{\mathbf{M}}_D)^2 \right] \quad (2.3.9)$$

Следовательно, значения метрик I_n и параметров γ для двух подходов совпадают. Аналогично можно показать, что проекторы (2.2.4) и (2.3.2) также совпадают, что приводит к полной эквивалентности результатов. Действительно,

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}^{-1})^H \prod_{m=1}^J (\mathbf{E} - \gamma_m \hat{\mathbf{M}}_D) \mathbf{D}^H &= \prod_{m=1}^J \left(\mathbf{E} - \gamma_m (\mathbf{D}^{-1})^H \hat{\mathbf{M}}_D \mathbf{D}^H \right) = \\ &= \prod_{m=1}^J \left(\mathbf{E} - \gamma_m (\mathbf{D}^{-1})^H \hat{\mathbf{M}}_D \mathbf{D}^H \right) = \prod_{m=1}^J \left(\mathbf{E} - \gamma_m (\mathbf{D}^{-1})^H \mathbf{D}^H \hat{\mathbf{M}} \mathbf{D} \mathbf{D}^H \right) = \\ &= \prod_{m=1}^J \left(\mathbf{E} - \gamma_m \hat{\mathbf{M}} \hat{\mathbf{T}}_{\Sigma}^{-1} \right) \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Учитывая, что эквивалентность была доказана вне зависимости от способа построения обеляющего преобразования, можно заключить, что результаты для различных преобразований также эквивалентны.

2.3.3. Выбор порога метода

Рассмотрим случай точно известной КМ помехи. Так же будем полагать, что на вход АР поступает только сигнал помехи. В этом случае КМ принятого сигнала после обеляющего преобразования становится единичной, т.е. мы получили постановку задачи, как и для стандартного метода минимального многочле-

на (см. раздел 1.2). Следуя [92] можно показать в этом случае справедливость выражений (1.2.12), (1.2.13) и (1.2.14). Учитывая эквивалентность предложенных выше подходов к обобщению метода минимального многочлена, получим справедливость данного порога для любого из них.

В случае, когда КМ помехи оценивается по конечному числу выборок помехового сигнала, обеляющее преобразование становится случайным и в силу его нелинейности получить аналитически выражение для порога обобщённого метода минимального многочлена становится затруднительным. Однако практика показывает, что порог, рассчитанный в предположении точно известной КМ помехи, работает и в случае её оценки. Это подтверждается результатами моделирования, приведёнными в данной работе.

2.4. Результаты моделирования

Для оценки эффективности предложенного обобщения метода минимального многочлена было проведено численное моделирование. Рассматривалась линейная эквидистантная АР с числом элементов $N = 10$ и периодом $d = 0.5\lambda_w$. Полная КМ \mathbf{M} оценивалась по $L = 20$ временным выборкам сигнала, как показано в (1.2.6). КМ шума и помехи \mathbf{T}_Σ аналогично оценивалась в отсутствии полезного сигнала по $Q = 100$ временным выборкам. Сигнал полезных источников и помехи моделировался как комплексный узкополосный гауссовский случайный процесс с нулевым средним. Дискретные отсчёты сигнала по времени полагались некоррелированными.

Два точечных узкополосных независимых источника излучения равной мощности располагались на угловых координатах $\pm 4^\circ$. Угловое расстояние между источниками равнялось 0.8 ширины главного лепестка ДН АР. Мощность источников излучения варьировалась в ходе численного моделирования. Собственные шумы приёмных устройств различных элементов АР полагались независимыми. Мощность собственного шума в отдельном элементе задавалась равной 0 дБ.

В качестве показателей эффективности рассматривались следующие метрики:

- вероятность p правильной оценки числа источников излучения, находящихся в угловом секторе ($-14^\circ, 14^\circ$). Данная метрика характеризует качество сверхразрешения метода. Выбранный угловой сектор будем называть «**зоной контроля**» или «**областью контроля**».
- среднее значение оценки угловых координат полезных источников излучения $\langle\varphi\rangle$ при условии $p > 0.8$.
- среднеквадратичное отклонение (СКО) оценки угловых координат полезных источников излучения σ при условии $p > 0.8$.

Для оценки перечисленных выше статистических характеристик для каждого значения мощности полезных источников излучения проводилось 1000 независимых численных экспериментов.

В силу эквивалентности различных подходов к обобщению метода минимального многочлена моделирование проводилось для подхода на основе обеляющего преобразования с применением разложения Холецкого (см. раздел 2.3), как обладающего наименьшей вычислительной сложностью. Эффективность предложенного алгоритма (GMPM, Generalized Minimal Polynomial Method) сравнивалась с эффективностью классического одномерного метода минимального многочлена (MPM) [48], описанного в разделах 1.2 и 1.3. Для обоих алгоритмов применялся корневой подход к пеленгации (1.3.5). Кроме того, результаты для классического метода минимального многочлена были получены в условиях наличия помехи (MPM-I) и в условиях их отсутствия (MPM-NI) для оценки влияния помеховой обстановки на качество работы алгоритма сверхразрешения. Во всех случаях порог метода был установлен равным $Th = 5.28$ в соответствии с (1.2.14).

При проведении численного моделирования внешние распределённые помехи полагались независимыми узкополосными источниками с распределенной по гауссову закону угловой плотностью мощности. Данная модель была предложена для описания угловой дисперсии в канале мобильной связи в городских условиях и хорошо совпадала с результатами реальных измерений [103]. Применительно к задаче пеленгации источников излучения можно считать, что помеха

создается рассеянным на окружающих объектах сигналом, исходящим от точечного радиопередатчика. Для приведённой модели нормированная угловая плотность мощности помехи с эффективной угловой шириной φ_{eff} и угловой координатой φ_0 записывается в виде:

$$W(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi\varphi_{eff}^2}} \exp\left\{-\frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{\varphi_{eff}^2}\right\} \quad (2.4.1)$$

В [104] рассчитан коэффициент корреляции помехи с приведённой угловой плотностью мощности в двух приёмниках, разнесённых на заданное расстояние. Таким образом, элементы КМ помехового сигнала, принимаемого от одного источника помехи мощностью v_I , определяются выражением:

$$\{\mathbf{T}\}_{m,n} = v_I \exp\left\{i2\pi(n-m)\frac{d}{\lambda}\varphi_0\right\} \exp\left\{-\left(\pi(n-m)\frac{d}{\lambda}\varphi_{eff}\right)^2\right\} \quad (2.4.2)$$

Сигнал помехи моделировался как дополнительный аддитивный шум с заданной КМ.

В первой серии численных экспериментов один источник помехи с эффективной шириной 10° имел угловую координату 20° и мощность 10 дБ.

На Рисунке 2.2 представлены оценки угловых координат источников излучения для классического метода минимального многочлена (МРМ-І, слева) и обобщённого метода минимального многочлена (ГМРМ-І, справа). Вдоль горизонтальной оси отложен номер численного эксперимента. Мощность полезных источников излучения равнялась $v = 9$ дБ. Красными точками обозначены источники сигнала в области контроля, при условии, что их количество было верно оценено. Синими точками – источники сигнала в области контроля, при условии, что их количество было оценено с ошибкой. Синими крестиками – оценки углового положения источника сигнала вне области контроля.

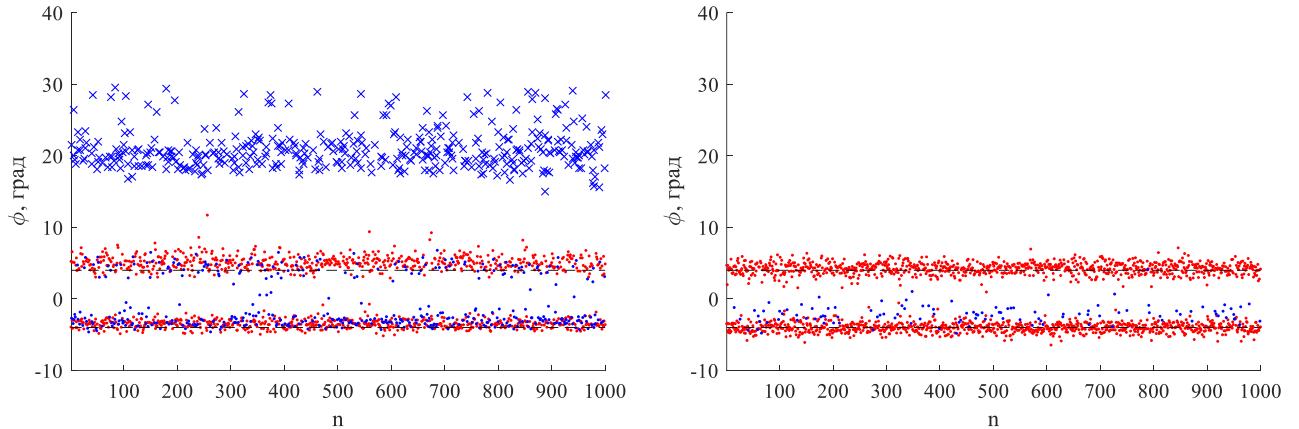


Рисунок 2.2 – Оценки угловых координат источников излучения в отдельных численных экспериментах (МРМ-І – слева, ГМРМ-І – справа)

Из приведённого рисунка видно следующее. Во-первых, для классического метода минимального многочлена часть оценок угловых координат находится вне области контроля, а именно в районе нежелательного помехового источника. Для обобщённого метода минимального многочлена все оценки угловых координат находятся в области «полезных» источников излучения. Во-вторых, по концентрации синих точек в области контроля видно, что обобщённый метод минимального многочлена обладает лучшей разрешающей способностью. В-третьих, оценки угловых координат источников излучения для классического метода минимального многочлена имеют систематическое смещение в сторону помехи (систематическая ошибка). При этом данный негативный эффект отсутствует для обобщённого метода минимального многочлена. Сделанные из Рисунка 2.2 наблюдения подтверждаются результатами, представленными на Рисунке 2.3 и в Таблице 2.1.

На Рисунке 2.3 построены вероятности p разрешения двух «полезных» источников излучения (правильной оценки числа источников в области контроля).

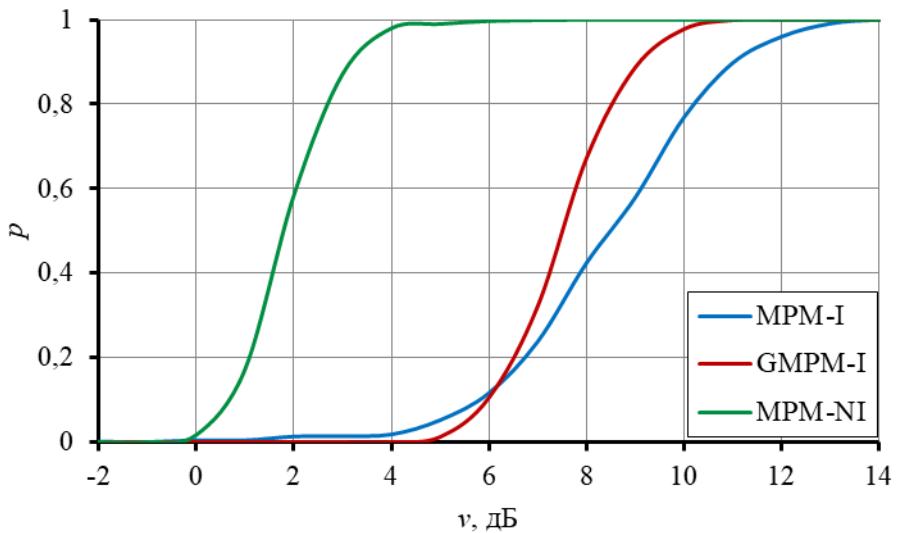


Рисунок 2.3 – Вероятность правильной оценки числа источников сигнала в области контроля

Из графиков видно, что потери в разрешающей способности по уровню $p = 0.8$ для классического метода минимального многочлена (МРМ) при добавлении внешних распределённых источников помехи составляет 8 дБ. Безусловно, данная величина связана с внесением дополнительного шума, т.е. фактическим уменьшением ОСШП. Однако влияние нарушения модели шума на качество разрешения также присутствует. В этом легко убедиться, отметив, что применение предложенного в данной работе обобщённого метода минимального многочлена (GMPM), который учитывает реальную КМ шума и помехи, приводит к выигрышу в 2 дБ по уровню $p = 0.8$ по сравнению с классическим алгоритмом (МРМ).

Результаты, характеризующие точность оценки угловых координат источников сигнала, представлены в Таблице 2.1. Видно, что СКО σ оценки угловых координат для классического и обобщённого методов минимального многочлена практически совпадают при условии, что оба метода имеют вероятность правильной оценки числа источников сигнала в области контроля $p > 0.8$. Однако для предложенного обобщённого метода минимального многочлена существенно слабее выражена систематическая ошибка, связанная со смещением оценок в сторону помехового источника.

Таблица 2.1 – Точность оценки угловых координат источников излучения

ν [дБ]	MPM-NI			MPM-I			GMPM-I		
	$\langle \varphi_1 \rangle$ [град]	$\langle \varphi_2 \rangle$ [град]	σ [град]	$\langle \varphi_1 \rangle$ [град]	$\langle \varphi_2 \rangle$ [град]	σ [град]	$\langle \varphi_1 \rangle$ [град]	$\langle \varphi_2 \rangle$ [град]	σ [град]
9.0	-4.06	4.06	0.21				-4.02	4.26	0.75
11.0	-4.06	4.05	0.16				-4.02	4.18	0.59
13.0	-4.04	4.04	0.12				-4.05	4.15	0.46
15.0	-4.04	4.04	0.11	-3.90	4.29	0.34	-4.04	4.10	0.36
17.0	-4.04	4.04	0.08	-3.95	4.21	0.26	-4.05	4.09	0.28
19.0	-4.04	4.03	0.07	-3.98	4.14	0.21	-4.04	4.06	0.23
21.0	-4.04	4.03	0.05	-3.99	4.10	0.18	-4.03	4.04	0.18
23.0	-4.04	4.04	0.04	-4.01	4.08	0.14	-4.03	4.04	0.14
25.0	-4.04	4.04	0.03	-4.02	4.06	0.10	-4.03	4.03	0.11

Во второй серии численных экспериментов два источника помехи с эффективной шириной 20° и 10° располагались на угловых координатах $\pm 30^\circ$ (см. Рисунок 2.4) и имели мощность 10 дБ каждый.

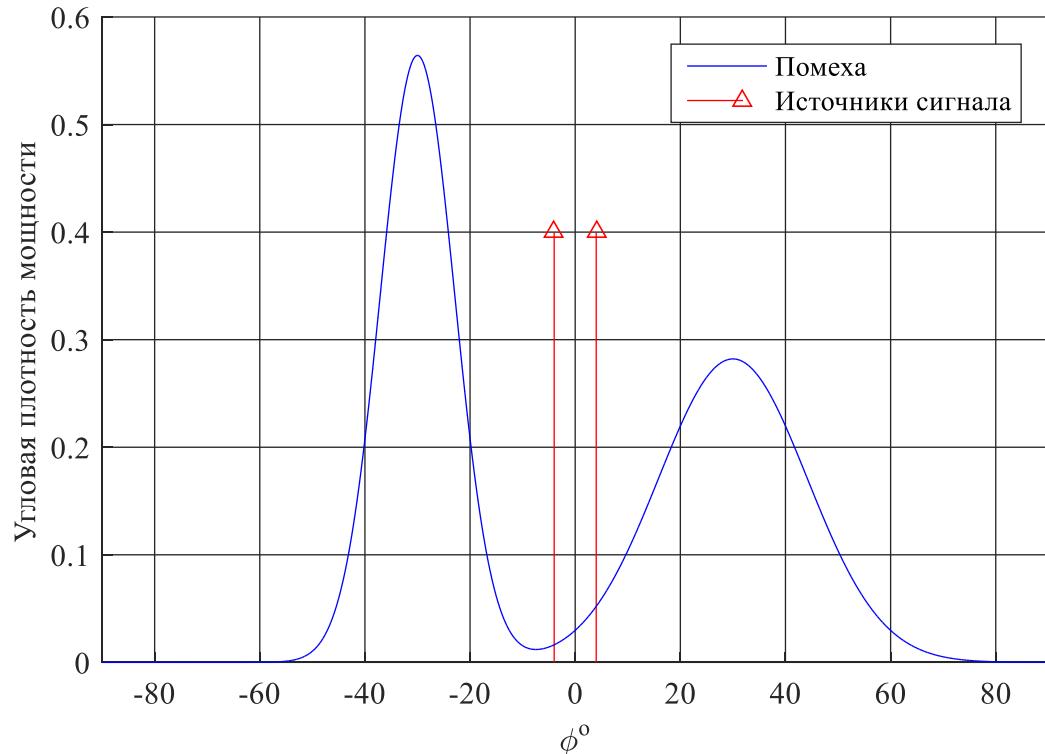


Рисунок 2.4 – Угловая плотность мощности источников сигнала и помехи

На Рисунке 2.5 представлены оценки угловых координат источников излучения для классического метода минимального многочлена (МРМ-І, слева) и

обобщённого метода минимального многочлена (GMPM-I, справа). Мощность полезных источников излучения равнялась $v = 14$ дБ.

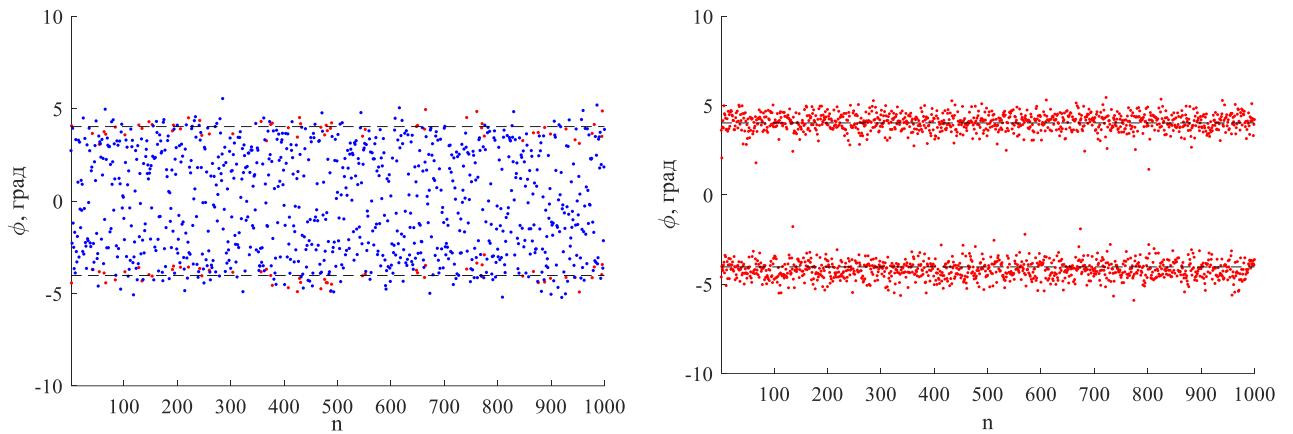


Рисунок 2.5 – Оценки угловых координат источников излучения в отдельных численных экспериментах (MPM-I – слева, GMPM-I – справа)

Как видно из рисунков, добавление ещё одного распределённого источника помехи сделало проблему разрешения «полезных» источников излучения более сложной. Так при заданной мощности источников излучения обобщённый метод минимального многочлена успешно разрешает их в абсолютном большинстве случаев, а классический метод минимального многочлена, не учитывающий наличие помехи, в основном представляет два источника излучения в виде единого объекта.

На Рисунке 2.6 представлены кривые вероятностей разрешения (правильной оценки числа источников сигнала в области контроля) для соответствующих методов.

Из графиков видно, что потери в разрешающей способности по уровню $p = 0.8$ для классического метода минимального многочлена (MPM) при добавлении внешних распределённых источников помехи составляет 14 дБ. При этом применение предложенного в данной работе обобщённого метода минимального многочлена (GMPM) приводит к выигрышу в 6 дБ по уровню $p = 0.8$ по сравнению с классическим алгоритмом (MPM).

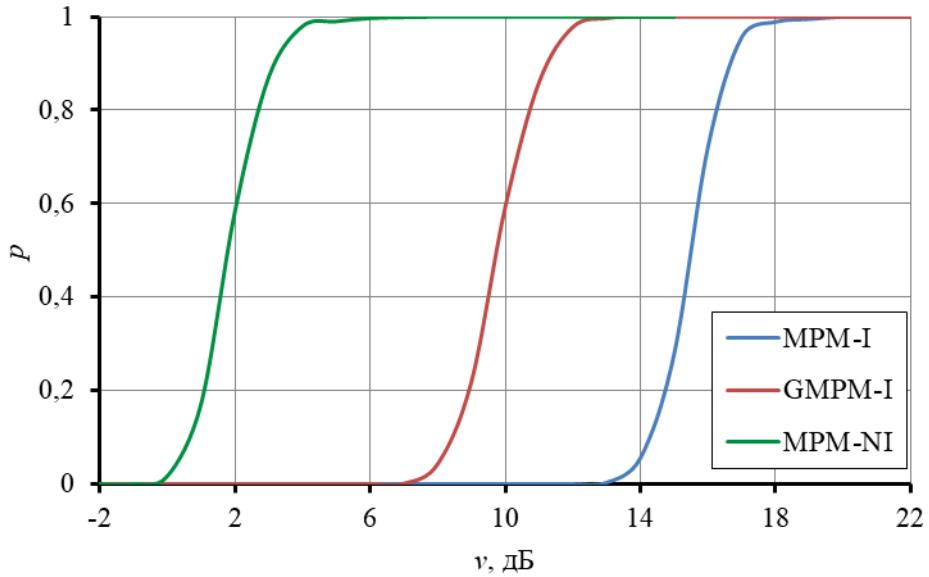


Рисунок 2.6 – Вероятность правильной оценки числа источников сигнала в области контроля

В Таблице 2.2 представлены результаты, характеризующие точность оценки угловых координат источников излучения.

Таблица 2.2 – Точность оценки угловых координат источников излучения

v [дБ]	MPM-NI			MPM-I			GMPM-I		
	$\langle\varphi_1\rangle$ [град]	$\langle\varphi_2\rangle$ [град]	σ [град]	$\langle\varphi_1\rangle$ [град]	$\langle\varphi_2\rangle$ [град]	σ [град]	$\langle\varphi_1\rangle$ [град]	$\langle\varphi_2\rangle$ [град]	σ [град]
11.0	-4.06	4.05	0.16				-4.26	4.07	0.76
13.0	-4.04	4.04	0.12				-4.24	4.11	0.57
15.0	-4.04	4.04	0.11				-4.16	4.09	0.46
17.0	-4.04	4.04	0.08	-4.12	4.01	0.33	-4.13	4.08	0.34
19.0	-4.04	4.03	0.07	-4.09	4.02	0.27	-4.10	4.06	0.27
21.0	-4.04	4.03	0.05	-4.07	4.02	0.21	-4.07	4.05	0.22
23.0	-4.04	4.04	0.04	-4.06	4.04	0.17	-4.06	4.04	0.17
25.0	-4.04	4.04	0.03	-4.05	4.04	0.13	-4.05	4.04	0.13

Из результатов моделирования видно, что точность оценки угловых координат для обоих методов практически совпадает при условии, что число источников сигнала определено верно.

2.5. Заключение по второй главе

В рамках второй главы диссертации рассмотрена проблема оценки числа и угловых координат близкорасположенных источников сигналов на фоне про-

пространственно-распределенной помехи. Основные результаты исследований, представленные в данной главе, заключаются в следующем:

1. Предложено обобщение сверхразрешающего метода минимального многочлена для оценки числа и угловых координат близкорасположенных источников сигналов при наличии пространственно-распределенной помехи. Рассмотрено два варианта обобщения, изменяющие формулы для расчёта метрик метода минимального многочлена и проектора на шумовое подпространство. Первый вариант основан непосредственно на особенностях построения сигнального подпространства в условиях пространственно-окрашенного шума, а второй предполагает применение обеляющего преобразования сигнала и стандартного метода минимального многочлена. Для обоих подходов приведено теоретическое обоснование, а также доказана их эквивалентность.
2. Исследована эффективность нового предложенного алгоритма в сравнении с классическим методом минимального многочлена. Исследование проводилось на основе численного моделирования. Показано, что при наличии пространственно-распределённой помехи применение предложенного алгоритма привело к выигрышу около 2 и 6 дБ в необходимой для разрешения мощности источников сигналов при заданных условиях моделирования в случае одного и двух источников помехи соответственно. Также в случае одного источника помехи предложенный обобщённый метод минимального многочлена позволил существенно снизить величину систематической ошибки. При этом СКО оценки угловых координат с помощью обобщённого и классического методов минимального многочлена практически совпали.

ГЛАВА 3. ОЦЕНКА УГЛОВЫХ КООРДИНАТ ЦЕЛЕЙ В МИМО РАДАРЕ ПРИ НАЛИЧИИ ОТРАЖЕНИЙ ОТ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В третьей главе диссертации рассматривается приложение метода минимального многочлена к решению задачи оценки угловых координат целей в автомобильном МИМО радаре.

Исследуется важный с практической точки зрения случай работы системы в условиях наличия отражений от земной поверхности. Теоретически исследуется вопрос применимости концепции виртуальной АР для оценки угловых координат цели. Формулируются два критерия: равенства сигналов и равенства фазирующих векторов. Проводится теоретический анализ данных критериев, на основе которого формируются требования к положению антенных элементов радара. Исследуется поведение системы при нарушении данных требований.

Рассматриваются особенности применения метода минимального многочлена и его обобщения для виртуальной АР автомобильного МИМО радара. Предлагается модификация двухмерного метода минимального многочлена на основе селекции мнимых целей.

Также в настоящей главе приводятся экспериментальные результаты для оценки числа и угловых координат целей с помощью виртуальной антенной решётки при наличии отражений от земной поверхности, полученные с помощью автомобильного МИМО радара миллиметрового диапазона длин волн.

Основные результаты данной главы опубликованы в [49, 76, 78, 81, 84].

3.1. Принцип работы МИМО радара и модель сигнала

3.1.1. Концепция МИМО радара

Концепция МИМО радара активно развивается и внедряется при проектировании и производстве радиолокационных устройств. В МИМО радаре используются несколько разнесённых передающих и приемных антенн, при этом между каждой парой формируется независимые каналы передачи зондирующего сигнала. Разделение каналов осуществляется аналогично разделению информационных

потоков в системах радиосвязи: по частоте, по времени или с помощью временных кодов [11, 14, 15, 71-72]. При этом необходимо обеспечить ортогональность сигналов, излучаемых различными антеннами для устранения интерференции между приемными каналами. На приемной стороне взаимно ортогональные сигналы могут быть разделены различными способами, например, с помощью согласованных фильтров [11, 68].

При наличии N_{tx} передающих и N_{rx} приемных антенных элементов на выходах согласованных фильтров в каждом приемнике выделяется N_{tx} различных сигналов. Таким образом, общее количество приемных каналов равняется $N_v = N_{tx} \times N_{rx}$.

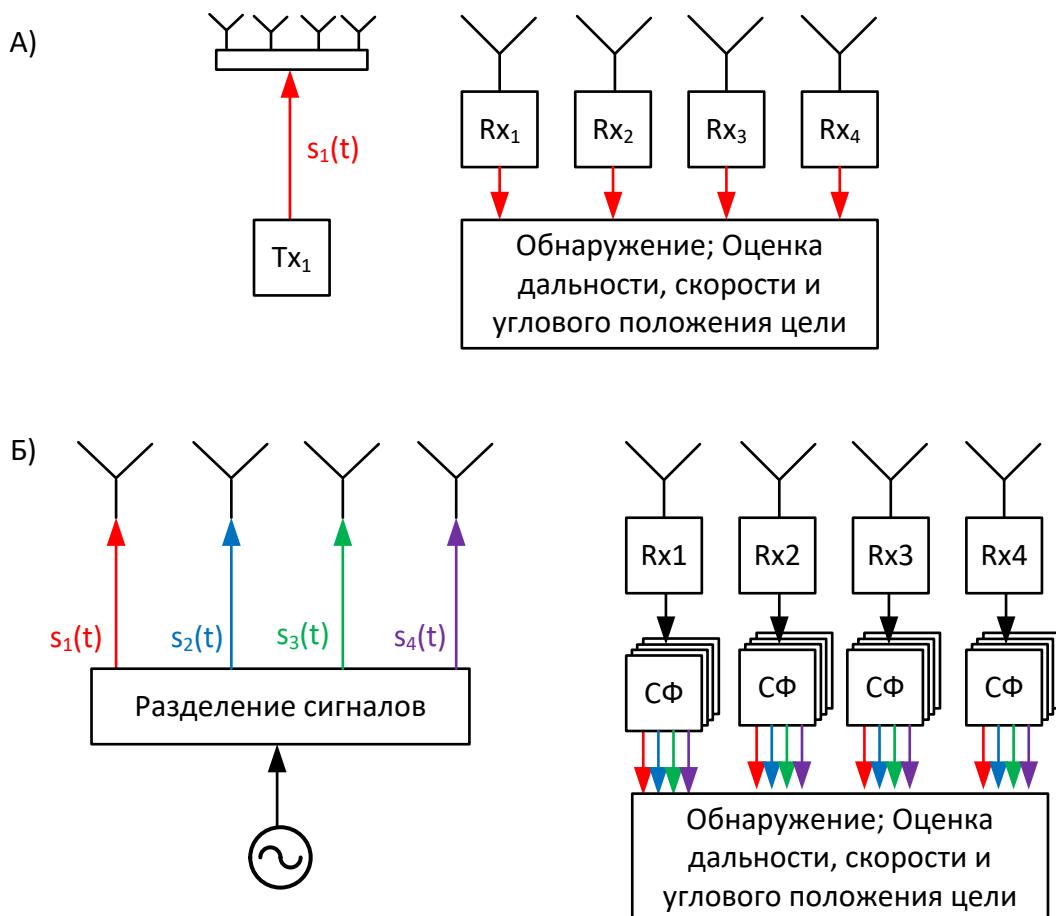


Рисунок 3.1 – Концепции традиционного (А) и МИМО (Б) радаров.
СФ – согласованный фильтр.

Существуют различные подходы к обработке принимаемого вектора сигналов. Например, разделение сигнала передающих антенн позволяет сформировать произвольную эффективную ДН передатчика при фактической обработке сигнала

на стороне приёмника [11]. Данная техника является актуальной, если положение приёмных и передающих антенн совпадает. В другом случае полный набор приёмных каналов можно представить в виде выходов приёмных элементов некоторой АР, которую принято называть виртуальной. Положение виртуальных элементов определяется с помощью свертки двух антенных массивов: приёмного и передающего [11, 68, 73]. Относительные координаты виртуальных приёмных антенн при этом определяются по формуле $\vec{r}_m = \vec{r}_{tx,p} + \vec{r}_{rx,q} - \vec{r}_0$, где $\vec{r}_{tx,p}$ – вектор координат p -ой передающей антенны, $\vec{r}_{rx,q}$ – вектор координат q -ой приемной антенны, \vec{r}_0 – вектор, определяющий начальную точку системы координат, $m = N_{tx}(p - 1) + q$. Регулируя положения приёмных и передающих антенн, можно управлять свойствами виртуального антенного массива. При этом, как правило, положение антенн выбирается так, чтобы виртуальная приёмная АР имела существенно большую апертуру по сравнению с реальной.

Вопросы формирования зондирующего сигнала и его обработки на приёмной стороне для обнаружения, а также оценки дальности и скорости цели, находятся за рамками настоящей работы. Для оценки угла места цели представляет интерес только та составляющая сигнала, которая определяется пространственными путями его распространения и отражает набег фазы между различными антенными элементами. В связи с этим, при дальнейшем рассмотрении вопроса без ограничения общности будем полагать зондирующий сигнал непрерывным и гармоническим.

3.1.2. Модель сигнала

Для построения модели сигнала для МИМО радара, расположенного над поверхностью земли, сделаем несколько предположений. Во-первых, будем полагать, что цель располагается в дальней зоне на расстоянии $r \gg D^2/\lambda_w$, где D – размер апертуры антенной системы, λ_w – длина волны. Следовательно, излучаемый и принимаемый АР сигналы можно представить в виде плоских волн [105].

Во-вторых, примем модель гладкой плоской земной поверхности с коэффициентом R отражения Френеля. При этом будем полагать высоту радара и цели много больше длины волн, что даёт возможность применить лучевой подход [105]. Данная модель хорошо аппроксимирует условия эксплуатации автомобильных ММО радаров миллиметрового диапазона длин волн. Для других сценариев работы радиолокационной системы полученные в рамках данной модели результаты могут рассматриваться качественно.

В рамках сделанных предположений можно выделить четыре пути распространения сигнала, как показано на Рисунке 3.2: прямой путь (LOS–LOS), путь с двойным отражением от поверхности земли (GR–GR) и два пути с одинарным отражением на участках цель – приёмник (LOS–GR) и передатчик – цель (GR–LOS).

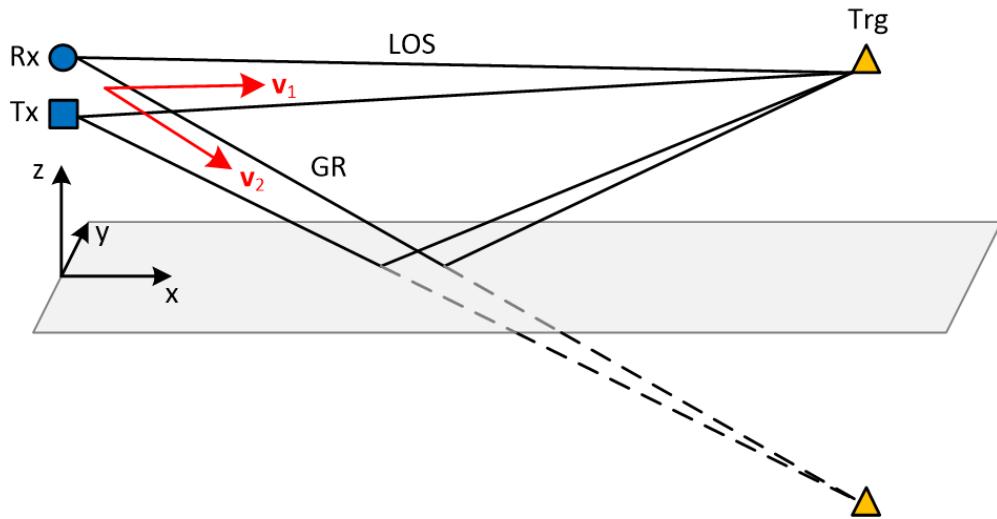


Рисунок 3.2 – Пути распространения сигнала в рамках принятой модели.
Rx – приёмник; Tx – передатчик; Trg – цель.

Рассмотрим комплексную амплитуду $u_1(\vec{r}_{tx}, \vec{r}_{rx})$ гармонического сигнала, распространяющегося по пути LOS–LOS без отражения от земли. Обозначим через \vec{v}_1 единичный вектор прямого направления, определяющий положение цели в системе координат, связанной с радаром (см. Рисунок 3.2). Считая, что передающие и приемные антенны расположены в плоскости YZ, найдем, что

$$u_1(\vec{r}_{tx}, \vec{r}_{rx}) = A r_1^{-2} \exp\{-ik\vec{v}_1 \cdot (\vec{r}_{trg} - \vec{r}_{tx})\} \exp\{ik\vec{v}_1 \cdot (\vec{r}_{rx} - \vec{r}_{trg})\}, \quad (3.1.1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, $\vec{\mathbf{r}}_{trg}$ – вектор координат цели, A – амплитуда, r_1 – расстояние от радара до цели, $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}$ – скалярное произведение векторов $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$. Введём множитель $A_1 = Ar_1^{-2} \exp\{-i2k(\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{r}}_{trg})\}$, не зависящий от положения антенн. Получим

$$u_1(\vec{\mathbf{r}}_{tx}, \vec{\mathbf{r}}_{rx}) = A_1 \exp\{ik(\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{r}}_{tx} + \vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{r}}_{rx})\}, \quad (3.1.2)$$

Аналогичным образом получим выражения для трёх других сигналов u_2 , u_3 и u_4 , распространяющихся по путям GR–GR, LOS–GR и GR–LOS, соответственно:

$$u_2(\vec{\mathbf{r}}_{tx}, \vec{\mathbf{r}}_{rx}) = A_2 \exp\{ik(\vec{\mathbf{v}}_2 \cdot \vec{\mathbf{r}}_{tx} + \vec{\mathbf{v}}_2 \cdot \vec{\mathbf{r}}_{rx})\}, \quad (3.1.3)$$

$$u_3(\vec{\mathbf{r}}_{tx}, \vec{\mathbf{r}}_{rx}) = A_3 \exp\{ik(\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{r}}_{tx} + \vec{\mathbf{v}}_2 \cdot \vec{\mathbf{r}}_{rx})\}, \quad (3.1.4)$$

$$u_4(\vec{\mathbf{r}}_{tx}, \vec{\mathbf{r}}_{rx}) = A_4 \exp\{ik(\vec{\mathbf{v}}_2 \cdot \vec{\mathbf{r}}_{tx} + \vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{r}}_{rx})\}, \quad (3.1.5)$$

где $A_2 = AR^2 r_2^{-2} \exp\{-i2k(\vec{\mathbf{v}}_2 \cdot \vec{\mathbf{r}}_{itrg})\}$, $A_3 = A_4 = ARr_1^{-1} r_2^{-1} \exp\{-ik(\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{r}}_{trg} + \vec{\mathbf{v}}_2 \cdot \vec{\mathbf{r}}_{itrg})\}$, $\vec{\mathbf{r}}_{itrg}$ – вектор координат мнимой цели, полученный с помощью метода отражения, с координатами $(\vec{\mathbf{r}}_{itrg})_x = (\vec{\mathbf{r}}_{trg})_x$, $(\vec{\mathbf{r}}_{itrg})_y = (\vec{\mathbf{r}}_{trg})_y$, $(\vec{\mathbf{r}}_{itrg})_z = -(\vec{\mathbf{r}}_{trg})_z$, $\vec{\mathbf{v}}_2$ – вектор направления на мнимую цель, r_2 – расстояние от радара до мнимой цели. В конечном итоге, суммарный принятый в канале сигнал определяется выражением

$$u(\vec{\mathbf{r}}_{tx}, \vec{\mathbf{r}}_{rx}) = u_1(\vec{\mathbf{r}}_{tx}, \vec{\mathbf{r}}_{rx}) + u_2(\vec{\mathbf{r}}_{tx}, \vec{\mathbf{r}}_{rx}) + u_3(\vec{\mathbf{r}}_{tx}, \vec{\mathbf{r}}_{rx}) + u_4(\vec{\mathbf{r}}_{tx}, \vec{\mathbf{r}}_{rx}), \quad (3.1.6)$$

Кроме того, для дальнейших рассуждений при анализе критериев виртуальной антенной решётки мы будем полагать, что выполнены условия $kD(v_{1x} - v_{2x}) \ll \pi$ и $kD(v_{1y} - v_{2y}) \ll \pi$, где v_{1x}, v_{1y}, v_{2x} и v_{2y} – соответствующие компоненты векторов $\vec{\mathbf{v}}_1$ и $\vec{\mathbf{v}}_2$, D – размер апертуры антенной системы. Данное условие сводится к приблизительному равенству горизонтальных составляющих векторов, т.е. $v_{1x} \approx v_{2x}$ и $v_{1y} \approx v_{2y}$. Физически это значит, что реальная и мнимая цели не разрешимы с помощью горизонтальной антенной решётки. Данное условие с хорошей степенью точности выполняется, если $2D\lambda_w^{-1} h_{rad} r_1^{-1} \sin(2\theta) \ll 1$.

Здесь h_{rad} – высота радара и θ – угол места цели в системе отсчёта радара. Таким образом, сделанное приближение соответствует типичному сценарию работы автомобильного МИМО радара. Для случаев, когда приближение не справедливо, полученные при анализе критериев виртуальной антенной решётки результаты следует рассматривать качественно.

3.2. Виртуальная антенная решётка и критерии её существования

Для дальнейших рассуждений определим два понятия: виртуальная АР и реальная АР МИМО радара. Эти два понятия относятся к разным типам систем. Виртуальная АР представляет собой набор виртуальных приёмных элементов, положение которых определяется формулой свертки (см. 3.1.1). Сигнал, принимаемый таким элементом, определяется коэффициентом передачи в канале между соответствующей передающей антенной и приемной антенной. Под реальной АР будем понимать массив приёмных антенн традиционного радара, в котором используется только одна передающая антенна.

Применяя концепцию виртуальной АР, мы считаем, что принятый ею сигнал имеет общие свойства с сигналом, полученным с помощью такой же реальной решётки. Эти свойства могут быть положены в основу критериев применимости данной концепции. Будем рассматривать два критерия: критерий равенства сигналов и критерий равенства фазирующих векторов. Первый из них является наиболее простым и очевидным, а второй – обусловлен тем, что для решения задачи определения углового положения цели строгое равенство сигналов виртуальной и реальной АР не является необходимым. Важным является лишь возможность представления принятого сигнала в виде суммы плоских волн приходящих с соответствующих направлений [28].

3.2.1. Критерий равенства сигналов

Рассмотрим эталонную антеннную конфигурацию, состоящую из одной передающей и двух приёмных антенн (реальная АР). В этом случае принятый сигнал можно представить в виде вектора:

$$\mathbf{x} = [u(\vec{r}_{tx1}, \vec{r}_{rx1}) \quad u(\vec{r}_{tx1}, \vec{r}_{rx2})]^T. \quad (3.2.1)$$

Заметим, что в случае свободного пространства (коэффициент отражения $R = 0$) сигнал $u(\vec{r}_{tx1}, \vec{r}_{rx1}) = u_1(\vec{r}_{tx1}, \vec{r}_{rx1})$ в (3.1.6) является инвариантом суммы координат приёмника и передатчика. Добавим дополнительную передающую антенну с координатой $\vec{r}_{tx2} = \vec{r}_{tx1} + \vec{r}_{rx2} - \vec{r}_{rx1}$ и удалим вторую приемную антенну (см. Рисунок 3.3). В результате получим виртуальную АР, в которой место второй приемной антенны заняла виртуальная антenna. При этом вектор \mathbf{x}_v принятого сигнала для виртуальной решётки равен вектору \mathbf{x} сигнала (3.2.1) для решётки с реальными приёмными антеннами ($\mathbf{x}_v = \mathbf{x}$).



Рисунок 3.3 – Иллюстрация к критерию равенства сигналов. Слева – реальная приёмная АР, состоящая из двух элементов. Справа – эквивалентная виртуальная приёмная АР. Пунктиром обозначен виртуальный антенный элемент.

Таким образом, критерий равенства сигналов может быть сформулирован следующим образом. Реальная приёмная антenna с координатой $\vec{r}_{rx2} = \vec{r}_{rx1} + \Delta\vec{r}$ может быть заменена виртуальной, тогда и только тогда, когда сигнал, принятый этой антенной, будет равен сигналу, принятому антенной с координатой \vec{r}_{rx1} от передающей антенны с координатой $\vec{r}_{tx2} = \vec{r}_{tx1} + \Delta\vec{r}$. Данный критерий можно представить формально в виде равенства:

$$u(\vec{r}_{tx1}, \vec{r}_{rx1} + \Delta\vec{r}) = u(\vec{r}_{tx1} + \Delta\vec{r}, \vec{r}_{rx1}). \quad (3.2.2)$$

Заметим, что данный критерий всегда выполняется в случае свободного пространства. Это можно проверить подстановкой (3.1.6) в (3.2.2).

3.2.2. Критерий равенства фазирующих векторов

В случае реальной АР вектор \mathbf{x} принятого сигнала (3.2.1) без учёта шума может быть представлен в виде суммы плоских волн, падающих на АР, т.е. разложен в базисе фазирующих векторов [25, 28]. Фазирующий вектор $\mathbf{s}(\vec{v})$ опреде-

ляется как вектор комплексных амплитуд плоской волны, приходящей с некоторого направления \vec{v} (см. раздел 1.1.2), то есть

$$\mathbf{x} = \sum_{q=1}^J c_q \mathbf{s}(\vec{v}_q), \quad (3.2.3)$$

где элементы вектора $\mathbf{s}(\vec{v})$ определены выражением (1.1.7), для определенности $\vec{p}_0 = 0$ и J – размерность сигнального подпространства (число различных направлений прихода волнового фронта).

Таким образом, концепция виртуальной АР применима тогда и только тогда, когда вектор \mathbf{x}_v сигналов, принятых этой решёткой, можно разложить в том же базисе фазирующих векторов, что и вектор \mathbf{x} сигналов, принятых реальной решёткой, то есть

$$\mathbf{x}_v = \sum_{q=1}^J \tilde{c}_q \mathbf{s}(\vec{v}_q), \quad (3.2.4)$$

При этом координаты виртуальных антенных элементов определяются по формуле:

$$\vec{p} = \vec{r}_{tx} + \vec{r}_{rx} - \vec{r}_{tx1} - \vec{r}_{rx1}, \quad (3.2.5)$$

Заметим, что если выполнен критерий (3.2.2) равенства сигналов, то критерий (3.2.4) равенства фазирующих векторов также выполняется.

3.2.3. Ограничения на положение антенных элементов

Как было отмечено ранее, в случае свободного пространства критерий (3.2.2) равенства сигналов всегда выполняется, а потому нет ограничений на положение приёмников и передатчиков, связанных с нарушением сигнальной модели для методов пространственной обработки сигналов. Однако в случае наличия отражения от земли ситуация меняется. Рассмотрим три типа антенных конфигураций МИМО радара.

Конфигурация №1. Все передающие антенны имеют одинаковую высоту ($z_{tx} = \text{const}$), а приёмные – расположены произвольно. В этом случае выполняются оба введённых выше критерия и концепция виртуальной АР применима.

Конфигурация №2. Все приёмные антенны имеют одинаковую высоту ($z_{rx} = \text{const}$), а передающие – расположены произвольно. Для этой конфигурации всегда выполнен критерий (3.2.4) равенства фазирующих векторов, однако критерий равенства сигналов выполняется только при определённых условиях.

Конфигурация №3. В МИМО радаре по высоте разнесены и передающие и приёмные антенны. В этом случае ни один из критериев не выполняется, а применение концепции виртуальной АР приводит к ошибке измерения угловых координат цели.

Доказательство приведённых утверждений представлено в следующих разделах. Однако на основе рассмотренных типов антенных конфигураций МИМО радара можно заключить следующее: для применения концепции виртуальной АР в условиях влияния земли необходимо и достаточно, чтобы элементы хотя бы одного типа (приёмники или передатчики) имели одинаковую высоту.

Представленные выше требования к положению приёмных и передающих антенн также соответствуют соображениям эргonomики и удобства размещения антенных элементов и волноводных линий на мелкогабаритных печатных платах, а потому, как правило, выполняются производителями оборудования. Так в [6] рассматривается реальный прототип автомобильного радара, имеющий реальную АР L-типа. Данная решётка содержит 6 передающих антенн, имеющих одинаковую высоту, а также 8 приёмных антенн, разнесённых по вертикали. В результате формируется виртуальная прямоугольная АР из 48 элементов, для которой выполнены оба критерия существования. Подобная форма антенных систем является одной из самых перспективных для дальнейшего развития автомобильных радаров.

3.2.4. Анализ критерия равенства сигналов

Рассмотрим критерий (3.2.2) равенства сигналов, который запишем в виде разности $\delta = u(\mathbf{r}_{tx1}, \mathbf{r}_{rx1} + \Delta\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}_{tx1} + \Delta\mathbf{r}, \mathbf{r}_{rx1}) = 0$. Из (3.1.1) имеем, что сигналы $u_1(\mathbf{r}_{tx1}, \mathbf{r}_{rx1} + \Delta\mathbf{r})$ и $u_1(\mathbf{r}_{tx1} + \Delta\mathbf{r}, \mathbf{r}_{rx1})$ взаимно уничтожаются. Аналогичный результат для сигнала u_2 следует из (3.1.3). Для вычисления разности для сигналов u_3 и u_4 учтем равенство горизонтальных составляющих векторов $\vec{\mathbf{v}}_1$ и $\vec{\mathbf{v}}_2$ ($v_{1x} \approx v_{2x}$, $v_{1y} \approx v_{2y}$), вынося ненулевой множитель C за скобку

$$\delta = C [\exp\{ik(v_{1z}z_{tx} + v_{2z}z_{rx} + v_{2z}\Delta z)\} + \exp\{ik(v_{2z}z_{tx} + v_{1z}z_{rx} + v_{1z}\Delta z)\} - \exp\{ik(v_{1z}z_{tx} + v_{2z}z_{rx} + v_{1z}\Delta z)\} - \exp\{ik(v_{2z}z_{tx} + v_{1z}z_{rx} + v_{2z}\Delta z)\}] , \quad (3.2.6)$$

$$C = A_3 \exp\{ik(v_{1x}x_{tx} + v_{1x}x_{rx} + v_{1y}y_{tx} + v_{1y}y_{rx} + v_{1x}\Delta x + v_{1y}\Delta y)\} . \quad (3.2.7)$$

Умножим каждое слагаемое в (3.2.6) на $\exp\{-0.5ik(v_{1z}\Delta z + v_{2z}\Delta z)\}$, а для сохранения равенства – всё выражение на $\exp\{+0.5ik(v_{1z}\Delta z + v_{2z}\Delta z)\}$ так, что итоговый множитель равен единице. Воспользовавшись представлением синуса в виде разности комплексных экспонент, получим:

$$\delta = 2iC \sin(\Omega_1 \Delta z) \exp(i\Omega_2 \Delta z) [\exp\{ik(v_{1z}z_{tx} + v_{2z}z_{rx})\} - \exp\{ik(v_{2z}z_{tx} + v_{1z}z_{rx})\}] , \quad (3.2.8)$$

$$\Omega_1 = 0.5k(v_{2z} - v_{1z}); \quad \Omega_2 = 0.5k(v_{2z} + v_{1z}) . \quad (3.2.9)$$

Аналогично умножим (3.2.8) на $\exp\{-0.5ik(v_{1z}z_{tx} + v_{2z}z_{rx} + v_{2z}z_{tx} + v_{1z}z_{rx})\}$ и $\exp\{+0.5ik(v_{1z}z_{tx} + v_{2z}z_{rx} + v_{2z}z_{tx} + v_{1z}z_{rx})\}$ так, чтобы равенство не изменилось. После алгебраических преобразований, применяя представление тригонометрических функций через комплексные экспоненты получим

$$\delta = 4CF(\Delta z, z_{tx1}, z_{rx1}) \sin(\Omega_1 \Delta z) \sin(\Omega_1(z_{tx1} - z_{rx1})) , \quad (3.2.10)$$

$$F(\Delta z, z_{tx1}, z_{rx1}) = \exp\{i\Omega_2(z_{tx1} + z_{rx1} + \Delta z)\} . \quad (3.2.11)$$

Из полученных уравнений видно, что величина δ равняется нулю при произвольном положении цели только в двух случаях: $\Delta z = 0$ и $(z_{tx1} - z_{rx1}) = 0$, где Δz –

разница высот двух передатчиков. Первый случай соответствует конфигурации №1 (см. 3.2.3), когда все передатчики имеют одинаковую высоту, а второй – конфигурации №2, когда все приёмники имеют одинаковую высоту, равную высоте некоторого передатчика $z_{rx} = z_{tx1} = \text{const}$. Для конфигурации №3 в общем случае величина δ отлична от нуля, т.е. критерий равенства сигналов не выполняется.

3.2.5. Анализ критерия равенства фазирующих векторов

Анализ критерия равенства фазирующих векторов включает в себя два этапа. На первом этапе покажем, что критерий выполняется для конфигураций №1 и №2 (см. 3.2.3). На втором – что в остальных случаях (конфигурация №3) критерий не выполняется.

Вначале, рассмотрим реальную АР и покажем, что вектор принятого сигнала может быть представлен в виде линейной комбинации двух фазирующих векторов $\mathbf{s}(\mathbf{v}_1)$ и $\mathbf{s}(\mathbf{v}_2)$, соответствующих реальной цели и её отражению. Для этого сгруппируем сигналы u_1, u_2, u_3, u_4 и найдем $a_1 = u_1 + u_4, a_2 = u_2 + u_3$. Вынося за скобку общий множитель, с учётом (3.2.5) получим следующий результат:

$$a_1 = c_1 \exp\{ik(\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{p}})\}, \quad a_2 = c_2 \exp\{ik(\vec{\mathbf{v}}_2 \cdot \vec{\mathbf{p}})\}, \quad (3.2.12)$$

$$c_1 = (A_1 + A_4 \exp\{i2\Omega_1 z_{tx}\}) \exp\{ik \vec{\mathbf{v}}_1 \cdot (\vec{\mathbf{r}}_{tx1} + \vec{\mathbf{r}}_{rx1})\}, \quad (3.2.13)$$

$$c_2 = (A_2 + A_3 \exp\{-i2\Omega_1 z_{tx}\}) \exp\{ik \vec{\mathbf{v}}_2 \cdot (\vec{\mathbf{r}}_{tx1} + \vec{\mathbf{r}}_{rx1})\}. \quad (3.2.14)$$

Заметим, что величины c_1 и c_2 не зависят от индекса элемента решётки. Сравнивая (3.2.12) с (1.1.7) получим представление (3.1.6) в виде (3.2.3), что и требовалось показать.

Приведённые преобразования можно применить и для конфигурации №1 в силу того, что $z_{tx} = \text{const}$, а следовательно и $c_1 = \text{const}, c_2 = \text{const}$. Таким образом, для этой конфигурации верно (3.2.4) и критерий равенства фазирующих векторов выполняется. Также это следует из того, что для конфигурации №1 всегда выпол-

нен критерий равенства сигналов (см. 3.2.4), что автоматически приводит к выполнению более слабого критерия равенства фазирующих векторов.

Физически полученный результат можно объяснить следующим образом. В реальной АР и виртуальной АР, полученной для конфигурации №1, только приемные антенны имеют разнесение в вертикальной плоскости. Следовательно, вертикальный набег фаз между элементами определяется только обратным сегментом пути (от цели до приемных антенн).

В конфигурации №2 в вертикальной плоскости разнесены только передатчики. Соответственно, вертикальный набег фаз в элементах виртуальной АР зависит только от прямого сегмента пути распространения сигнала (от передающих антенн до цели). Сгруппируем сигналы u_1, u_2, u_3, u_4 и найдем $b_1 = u_1 + u_3$ и $b_2 = u_2 + u_4$. После аналогичных преобразований с учётом того, что $z_{rx} = const$, получим:

$$b_1 = \beta_1 \exp\{ik(\vec{v}_1 \cdot \vec{p})\}, \quad b_2 = \beta_2 \exp\{ik(\vec{v}_2 \cdot \vec{p})\}, \quad (3.2.15)$$

$$\beta_1 = (A_1 + A_3 \exp\{i2\Omega_1 z_{rx}\}) \exp\{ik\vec{v}_1 \cdot (\vec{r}_{tx1} + \vec{r}_{rx1})\}, \quad (3.2.16)$$

$$\beta_2 = (A_2 + A_4 \exp\{-i2\Omega_1 z_{rx}\}) \exp\{ik\vec{v}_2 \cdot (\vec{r}_{tx1} + \vec{r}_{rx1})\}. \quad (3.2.17)$$

Сравнивая выведенные выражения с (1.1.7), получим представление (3.1.6) в виде (3.2.3), то есть критерий (3.2.4) выполняется.

Рассмотрим конфигурацию №3. Покажем, что в этом случае произвести разложение (3.2.4) не представляется возможным. Чтобы получить данное разложение, необходимо найти решение системы линейных уравнений $\mathbf{SC}_v = \mathbf{x}_v$, где $\mathbf{S} = [\mathbf{s}(\mathbf{v}_1) \quad \mathbf{s}(\mathbf{v}_2)]$ – матрица коэффициентов системы, $\mathbf{C}_v = [c_{v1} \quad c_{v2}]^T$ – вектор неизвестных коэффициентов разложения. В соответствии с теоремой Кронекера–Капелли система совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы \mathbf{S} коэффициентов равен рангу расширенной матрицы $[\mathbf{S} \mid \mathbf{x}_v]$ [65, 91], т.е.

$\text{rank}(\mathbf{S}) = \text{rank}([\mathbf{S} | \mathbf{x}_v])$. Докажем, что существует такое множество положений цели, при котором данная система не имеет решений.

Выделим виртуальную подрешётку, состоящую из четырёх элементов, полученных с помощью двух приемных и двух передающих антенн, разнесённых по вертикали. Без ограничения общности далее будем рассматривать её как отдельную МИМО систему, т.к. если для данной подрешётки невозможно произвести разложение по фазирующими векторам, то такое разложение невозможно построить и для всей виртуальной АР.

Примем следующий порядок элементов для вектора принятого сигнала:

$$\mathbf{x}_v = [u(\mathbf{r}_{tx1}, \mathbf{r}_{rx1}) \quad u(\mathbf{r}_{tx1}, \mathbf{r}_{rx2}) \quad u(\mathbf{r}_{tx2}, \mathbf{r}_{rx1}) \quad u(\mathbf{r}_{tx2}, \mathbf{r}_{rx2})]^T. \quad (3.2.18)$$

Для того что бы вычислить ранг матриц \mathbf{S} и $[\mathbf{S} | \mathbf{x}_v]$ необходимо выделить их базисные миноры. Рассмотрим верхний минор $\det(\mathbf{S}_{top2})$ матрицы \mathbf{S} . Данный минор является базисным, т.к. имеет максимальный порядок и отличен от нуля. Действительно,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \exp\{ik(\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{p}}_1)\} & \exp\{ik(\vec{\mathbf{v}}_2 \cdot \vec{\mathbf{p}}_1)\} \\ \exp\{ik(\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{p}}_2)\} & \exp\{ik(\vec{\mathbf{v}}_2 \cdot \vec{\mathbf{p}}_2)\} \\ \exp\{ik(\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{p}}_3)\} & \exp\{ik(\vec{\mathbf{v}}_2 \cdot \vec{\mathbf{p}}_3)\} \\ \exp\{ik(\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{p}}_4)\} & \exp\{ik(\vec{\mathbf{v}}_2 \cdot \vec{\mathbf{p}}_4)\} \end{bmatrix}, \quad (3.2.19)$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{p}}_1 &= \vec{\mathbf{r}}_{tx1} + \vec{\mathbf{r}}_{rx1} - \vec{\mathbf{r}}_{tx1} - \vec{\mathbf{r}}_{rx1} = \mathbf{0} \\ \vec{\mathbf{p}}_2 &= \vec{\mathbf{r}}_{tx1} + \vec{\mathbf{r}}_{rx2} - \vec{\mathbf{r}}_{tx1} - \vec{\mathbf{r}}_{rx1} = \vec{\mathbf{r}}_{rx2} - \vec{\mathbf{r}}_{rx1}, \\ \vec{\mathbf{p}}_3 &= \vec{\mathbf{r}}_{tx2} + \vec{\mathbf{r}}_{rx1} - \vec{\mathbf{r}}_{tx1} - \vec{\mathbf{r}}_{rx1} = \vec{\mathbf{r}}_{tx2} - \vec{\mathbf{r}}_{tx1} \\ \vec{\mathbf{p}}_4 &= \vec{\mathbf{r}}_{tx2} + \vec{\mathbf{r}}_{rx2} - \vec{\mathbf{r}}_{tx1} - \vec{\mathbf{r}}_{rx1} \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

$$\det(\mathbf{S}_{top2}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \exp\{ik \vec{\mathbf{v}}_1 \cdot (\vec{\mathbf{r}}_{rx2} - \vec{\mathbf{r}}_{rx1})\} & \exp\{ik \vec{\mathbf{v}}_2 \cdot (\vec{\mathbf{r}}_{rx2} - \vec{\mathbf{r}}_{rx1})\} \end{vmatrix}, \quad (3.2.21)$$

$$\det(\mathbf{S}_{top2}) = 2i \cdot \exp\{i0.5k(\vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_2) \Delta \vec{\mathbf{r}}_{rx}\} \sin(\Omega_1 \Delta z_{rx}), \quad (3.2.22)$$

где $\Delta\mathbf{r}_{rx} = \mathbf{r}_{rx2} - \mathbf{r}_{rx1}$, $\Delta z_{rx} = z_{rx2} - z_{rx1} \neq 0$, а Ω_1 определена в (3.2.9). Видно, что за исключением конечного числа положений источника, значение определителя отлично от нуля. Следовательно, в общем случае матрица имеет ранг равный двум.

Далее вычислим значение верхнего минора $\det([\mathbf{S} | \mathbf{x}_v]_{top3})$ расширенной матрицы $[\mathbf{S} | \mathbf{x}_v]$. Учтём, что принятый вектор сигнала (3.2.18) может быть представлен в виде суммы векторов $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_4$ аналогично (3.1.6). Тогда из свойств определителя получим [65, 91]:

$$D = \det([\mathbf{S} | \mathbf{x}_v]_{top3}) = D_1 + \dots + D_4, \quad (3.2.23)$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & u_n(\vec{\mathbf{r}}_{tx1}, \vec{\mathbf{r}}_{rx1}) \\ \exp\{ik \vec{\mathbf{v}}_1 \cdot (\vec{\mathbf{r}}_{rx2} - \vec{\mathbf{r}}_{rx1})\} & \exp\{ik \vec{\mathbf{v}}_2 \cdot (\vec{\mathbf{r}}_{rx2} - \vec{\mathbf{r}}_{rx1})\} & u_n(\vec{\mathbf{r}}_{tx1}, \vec{\mathbf{r}}_{rx2}) \\ \exp\{ik \vec{\mathbf{v}}_1 \cdot (\vec{\mathbf{r}}_{tx2} - \vec{\mathbf{r}}_{tx1})\} & \exp\{ik \vec{\mathbf{v}}_2 \cdot (\vec{\mathbf{r}}_{tx2} - \vec{\mathbf{r}}_{tx1})\} & u_n(\vec{\mathbf{r}}_{tx2}, \vec{\mathbf{r}}_{rx1}) \end{vmatrix}. \quad (3.2.24)$$

Заметим, что определитель D_1 равен нулю, так как первая и третья колонки соответствующей матрицы пропорциональны. Аналогично можно показать, что равен нулю и определитель D_2 . Два оставшихся определителя D_3 и D_4 требуют прямого вычисления. Вынесем фактор $u_n(\vec{\mathbf{r}}_{tx1}, \vec{\mathbf{r}}_{rx1})$ за пределы определителя как общий множитель третьей колонки, вычтем третью колонку из первой и второй, после чего разложим определитель по элементам третьей колонки. В итоге получим

$$D_3 = A_3 \exp\{ik((\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{r}}_{tx1}) + (\vec{\mathbf{v}}_2 \cdot \vec{\mathbf{r}}_{rx1}))\} \times (\exp\{ik \vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}_{rx}\} - \exp\{ik \vec{\mathbf{v}}_2 \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}_{rx}\}) \times (\exp\{ik \vec{\mathbf{v}}_2 \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}_{tx}\} - \exp\{ik \vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}_{tx}\}), \quad (3.2.25)$$

$$D_4 = -A_4 \exp\{ik((\vec{\mathbf{v}}_2 \cdot \vec{\mathbf{r}}_{tx1}) + (\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{r}}_{rx1}))\} \times (\exp\{ik \vec{\mathbf{v}}_2 \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}_{rx}\} - \exp\{ik \vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}_{rx}\}) \times (\exp\{ik \vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}_{tx}\} - \exp\{ik \vec{\mathbf{v}}_2 \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}_{tx}\}), \quad (3.2.26)$$

где $\Delta\mathbf{r}_{tx} = \mathbf{r}_{tx2} - \mathbf{r}_{tx1}$, $\Delta\mathbf{r}_{rx} = \mathbf{r}_{rx2} - \mathbf{r}_{rx1}$. Умножая второй множитель в (3.2.25) на $\exp\{-i0.5k(\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}_{rx} + \vec{\mathbf{v}}_2 \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}_{rx})\}$, третий на $\exp\{-i0.5k(\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}_{tx} + \vec{\mathbf{v}}_2 \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}_{tx})\}$, а всё выражение на обратные величины для сохранения равенства, получим:

$$D_3 = G \exp\{ik((\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r}_{tx1}) + (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r}_{rx1}))\}, \quad (3.2.27)$$

$$G = 4A_3E_1 \sin(\Omega_1 \Delta z_{rx}) \sin(\Omega_1 \Delta z_{tx}), \quad (3.2.28)$$

$$E_1 = \exp\{i0.5k(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot (\Delta \mathbf{r}_{tx} + \Delta \mathbf{r}_{rx})\}. \quad (3.2.29)$$

где $\Delta z_{tx} = \Delta z_{tx2} - \Delta z_{tx1}$. Аналогичным образом можно преобразовать (3.2.26) к виду

$$D_4 = -G \exp\{ik((\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r}_{tx1}) + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r}_{rx1}))\}. \quad (3.2.30)$$

В итоге, подставляя (3.2.27) и (3.2.30) в (3.2.23) получим:

$$D = 2iG \sin(\Omega_1 \Delta z_1) \exp\{i0.5k(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{r}_{tx1} + \mathbf{r}_{rx1})\}, \quad (3.2.31)$$

$$|D| = 8|AR| \left| \sin(\Omega_1 \Delta z_{rx}) \sin(\Omega_1 \Delta z_{tx}) \sin(\Omega_1 \Delta z_1) \right|. \quad (3.2.32)$$

где $\Delta z_1 = z_{rx1} - z_{tx1}$.

Видно, что полученный определитель равен нулю при произвольном положении цели в трёх случаях: $\Delta z_{rx} = 0$, $\Delta z_{tx} = 0$, $\Delta z_1 = 0$. Первые два условия для конфигурации №3 не выполняются. Если выполнено последнее условие, то следует изменить индексацию передатчиков, что эквивалентно выбору другого минора в качестве базисного. В результате получим, что определитель D отличен от нуля (базисный минор) за исключением конечного числа вариантов положения цели, а ранг расширенной матрицы в общем случае равен трём. Анализируя выражения (3.2.22) и (3.2.30), приходим к выводу, что существует бесконечное множество положений цели, когда ранги матрицы \mathbf{S} и $[\mathbf{S} | \mathbf{x}_v]$ различны. Следовательно, система не совместна, произвести разложение (3.2.4) не представляется возможным и критерий равенства фазирующих векторов не выполняется.

Физически полученные выводы для конфигурации №3 можно объяснить следующим образом. Вертикальный набег фаз между элементами виртуальной АР определяется и передающими и приемными антеннами. В этом случае проблемы вызваны наличием путей распространения сигнала с однократным отражением. Назовём виртуальной подрешёткой группу элементов, связанных с конкретной передающей антенной радара. Набег фаз внутри подрешётки определяется волн-

вым фронтом от цели до приемных антенн, а между подрешётками – волновым фронтом от передающих антенн до цели. В результате для виртуальной АР происходит «излом» волнового фронта, что приводит к ошибкам определения угла места.

3.3. Влияние отражения от земной поверхности на точность оценки углового положения при нарушении критериев виртуальной антенной решётки

С целью иллюстрации и дальнейшего исследования полученных теоретических результатов было проведено численное моделирование для четырех антенных конфигураций МИМО радара, представленных на Рисунке 3.4. Передающие антенны показаны красными квадратами, реальные приемные – красными кружками, а виртуальные приемные – пунктирными кружками. Приёмные АР во всех конфигурациях состоят из одинакового числа (64) элементов (реальных или виртуальных). В первой конфигурации приём сигнала осуществляется с помощью реальной АР, а во всех остальных – с помощью виртуальной. При этом реальная и виртуальная АР эквивалентны, то есть сигналы, принятые ими в свободном пространстве, равны между собой.

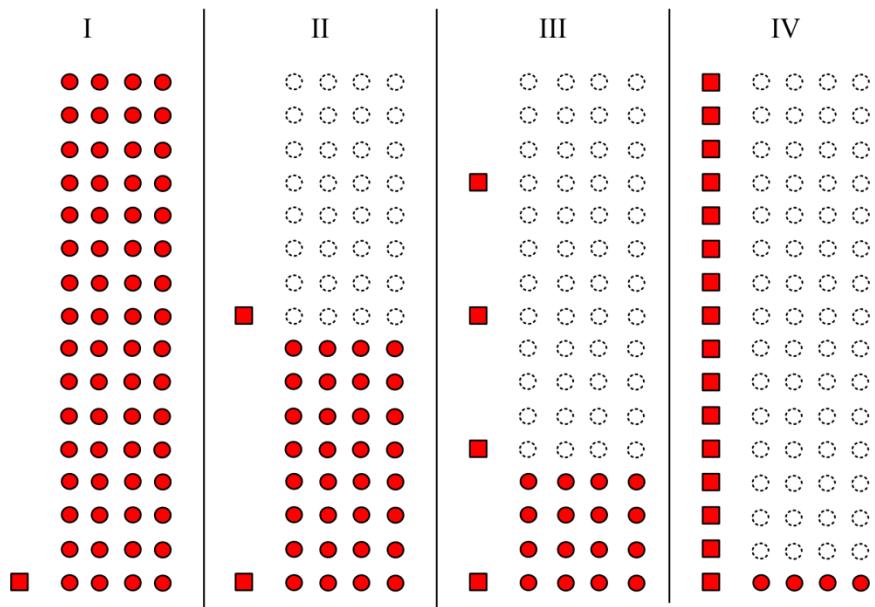


Рисунок 3.4 – Различные конфигурации АР, рассматриваемых при моделировании

Модель сигнала была задана в соответствии с разделом 3.1.2. Для исследования влияния земной поверхности на оценку угловых координат целей был рассмотрен идеализированный случай, т.е. иные факторы, в том числе собственные шумы приёмных устройств, были исключены из рассмотрения.

На Рисунке 3.5 приведены пространственные спектры в зависимости от угла места θ цели, полученные с помощью алгоритма сканирования ДН АР в вертикальной плоскости (метод Фурье) [25, 28] для первой и третьей антенных конфигураций (синяя и красная кривые, соответственно). Период решеток $d = \lambda = 5$ мм. Ширина главного лепестка ДН в вертикальной плоскости составляла 3 градуса по уровню -3 дБ. Высота нижнего передатчика и нижней строки приемных антенн была равна 0.5 м. Дальность до цели составляла 100 м, а её высота – 6.4 м. Коэффициент отражения Френеля $R = -0.9$, собственный шум приемных устройств не учитывался. Отметим, что в исследуемых конфигурациях число приемных антенн в одной строке не оказывает влияния на результат и может быть произвольным.

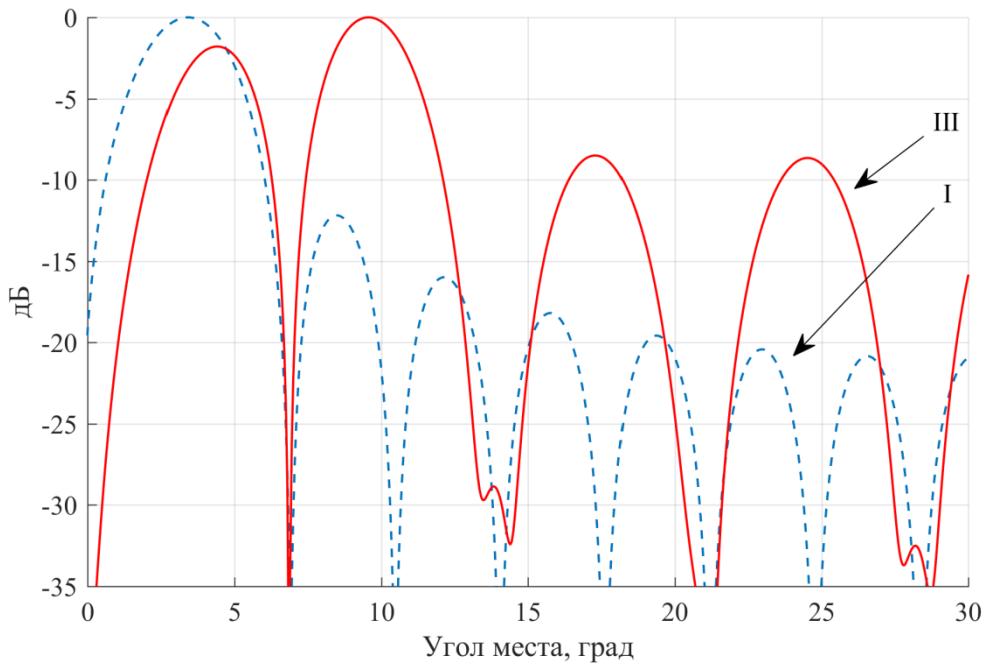


Рисунок 3.5 – Пространственные спектры в зависимости от угла места цели

Видно, что пространственные спектры для реальной АР традиционного радара и виртуальной АР МИМО радара существенно отличаются. При оценке угла места цели по максимуму пространственного спектра с помощью МИМО радара

имеется существенная систематическая ошибка. Данный результат объясняется тем, что для конфигурации №3 не выполняется ни один из критериев реализуемости виртуальной решётки.

Для оценки влияния коэффициента отражения на ошибку измерения угла места цели было проведено численное моделирование по методу Монте-Карло. Параметры модели задавались случайными величинами, равномерно распределёнными в соответствующих диапазонах. Высота нижней передающей антенны задавалась в интервале [0.3 м ÷ 1.0 м]. Смещение высоты нижних приемных антенн относительно нижней передающей антенны лежало в диапазоне [-5 см ÷ 5 см]. Высота и дальность цели случайно вбрасывались в интервалах [0.5 м ÷ 20 м] и [80 м ÷ 120 м], соответственно. На Рисунке 3.6 представлена зависимость среднеквадратичной ошибки (СКО) оценки углового положения цели, полученной по максимуму пространственного спектра, в зависимости от коэффициента R отражения. Для каждого значения R проводилось 10000 независимых численных экспериментов. Номер кривой соответствует номеру антенной конфигурации. Собственные шумы не учитывались.

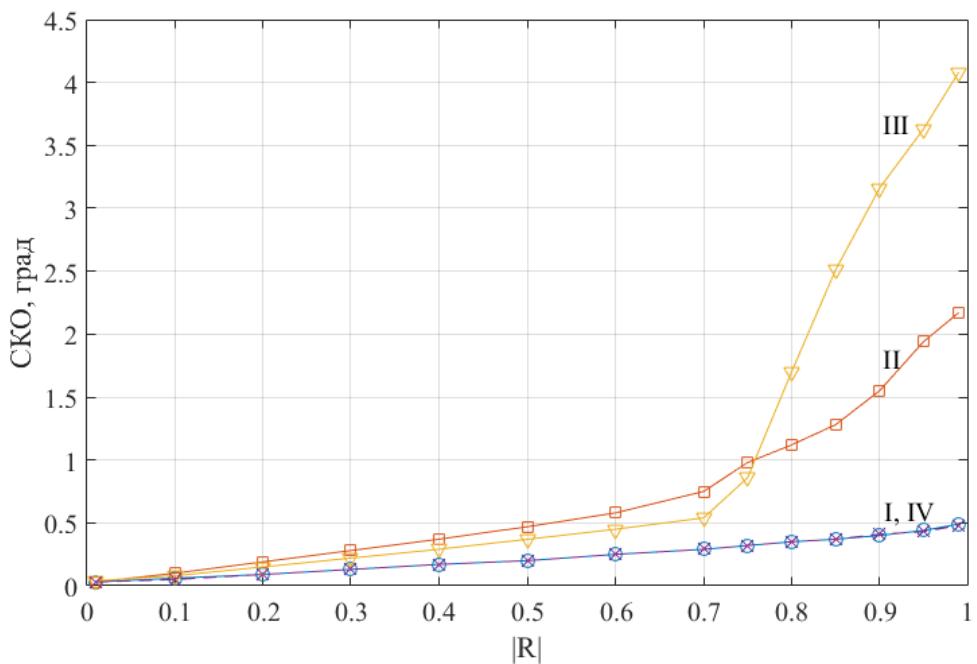


Рисунок 3.6

Сравним ошибки для четвертой конфигурации, которая удовлетворяет критерию равенства фазирующих векторов, и для эталонной (первой) конфигурации, состоящей только из реальных антенн. Видно, что они являются одинаковыми и не превышают 0.5 град. Отметим, что наличие данной ошибки связано с влиянием отраженного от земли луча, т.к. метод Фурье является оптимальным только при наличии одной цели в свободном пространстве [25, 28]. Для второй и третьей антенных конфигураций ни один из критериев не выполняется. Поэтому соответствующая ошибка при всех $|R|$ больше, а при больших $|R|$ ($|R| > 0.7$) ошибка существенно возрастает и достигает нескольких градусов. При этом наибольший рост ошибки наблюдается для конфигурации III. Это объясняется тем фактом, что она содержит наибольшее число порождаемых различными передающими антеннами виртуальных «подрешёток», на стыке которых «ломается» представление сигнала как суммы двух волновых фронтов.

Любой алгоритм пеленгации целей с помощью антенной решётки оценивает в первую очередь обобщённые углы (1.1.17), а затем на их основе вычисляет угловые координаты целей. Горизонтальный обобщённый угол ψ зависит как от азимута, так и угла места цели. Поэтому, найденный из вертикального обобщённого угла η угол места θ необходимо подставить в (1.1.17) для горизонтального обобщённого угла ψ и выразить азимутальный угол φ . Поскольку при наличии отражения от земной поверхности и не выполненных критериях виртуальной антенной решётки угол места θ оценивается с существенной ошибкой, азимутальный угол φ также будет оценён не верно.

3.4. Особенности применения метода минимального многочлена в автомобильном МИМО радаре

3.4.1. Короткая выборка входного сигнала

Одним из основных требований, предъявляемых к алгоритмам оценки угловых координат целей в автомобильных МИМО радарах, является минимальный размер L выборки входного процесса. Данное ограничение связано с динамично

меняющейся дорожной обстановкой, а также требованиями к стоимости продукта. В связи с этим, на практике длина выборки входного процесса может равняться единице ($L = 1$), что приводит к вырождению выборочной КМ.

Другой проблемой является корреляция отраженных от различных целей сигналов, а также корреляция сигналов, распространяющихся по прямому пути и отраженных от земной поверхности. Данная ситуация особенно критична, когда радар и цели неподвижны, т.е. нет случайных изменений в набеге фазы сигнала, связанных с неравномерностью движения и различными неровностями. Наличие коррелированных сигналов, приходящих от различных источников излучения, ведёт к более слабому разбросу сигнала в сигнальном подпространстве и его концентрации вблизи некоторого фиксированного направления в n -мерном пространстве (суперпозиции фазирующих векторов источников). В свою очередь, это приводит к разнесению сигнальных собственных чисел на числовой оси до такой степени, что одно из них начинает сливатся с шумовыми собственными числами. Как следствие, «геометрические» методы сверхразрешения, основанные на свойствах n -мерного линейного пространства, теряют свою эффективность. Случай $L = 1$ можно рассматривать, как случай полностью коррелированных источников, т.к. комплексные амплитуды источников излучения являются константами и связаны линейным преобразованием.

Решение указанных выше проблем осуществляется с помощью методов декорреляции сигналов, например, с помощью пространственного сглаживания. Выделяют три типа пространственного сглаживания: прямое, обратное и двойное [25, 61].

Рассмотрим виртуальную линейную эквидистантную АР. Вектор принятого сигнала \mathbf{x} определяется выражением (1.1.11) и имеет длину N , где N – число элементов виртуальной АР. Элементы фазирующего вектора сигнала при этом определяются (1.1.8). Выделим виртуальную подрешётку с таким же периодом и числом элементов $Q < N$. Пусть она содержит элементы с индексами от 1 до Q . Вектор сигнала, принятый виртуальной подрешёткой в этом случае

$$\mathbf{x}_1 = \sum_{q=1}^J \alpha_q \mathbf{s}_s(\varphi_q) + \boldsymbol{\xi}_1, \quad (3.4.1)$$

где $\mathbf{s}_s(\varphi)$ – фазирующий вектор виртуальной подрешётки. Тогда вектор сигнала, принятый аналогичной подрешёткой, включающей элементы с индексами от m до $(m + Q)$, представляется в виде

$$\mathbf{x}_m = \sum_{q=1}^J \alpha_q \exp\left\{i \frac{2\pi}{\lambda_w} d(m-1)\sin\varphi\right\} \mathbf{s}_s(\varphi_q) + \boldsymbol{\xi}_m. \quad (3.4.2)$$

Всего из каждого вектора сигнала для полной решётки можно сформировать $K = N - Q + 1$ векторов сигнала по всем возможным подрешёткам заданного размера. Видно, что для различных подрешёток сигналы источников излучения имеют различные комплексные амплитуды.

Полученные векторы можно рассматривать в качестве выборок сигнала для эффективной Q -элементной антенной решётки. Таким образом, достигается эффект декорреляции сигналов. В этом случае точная КМ принятого сигнала имеет вид:

$$\mathbf{M}_s = \left\langle \sum_{m=1}^K \mathbf{x}_m \mathbf{x}_m^H \right\rangle = \sum_{m=1}^K \mathbf{M}_m = \mathbf{S} \mathbf{B}_s \mathbf{S}^H + \mathbf{E}, \quad (3.4.3)$$

где \mathbf{M}_m – диагональный блок КМ \mathbf{M} , определённой в (1.1.20), а \mathbf{B}_s – эффективная КМ источников излучения, недиагональные элементы которой меньше соответствующих элементов в матрице \mathbf{B} в (1.1.20). Отметим, что КМ шумовой составляющей сигнала при отсутствии внешних источников шума по-прежнему остается единичной. Вычисления показывают, что для линейной эквидистантной АР коэффициент декорреляции источников излучения с индексами i и j при прямом сглаживании равен [48]

$$\rho_{ij}^{(f)} = \frac{1}{K} \frac{\sin\left(\pi \frac{d}{\lambda_w} (\sin \varphi_i - \sin \varphi_j) K\right)}{\sin\left(\pi \frac{d}{\lambda_w} (\sin \varphi_i - \sin \varphi_j)\right)} \exp\left\{i\pi \frac{d}{\lambda_w} (\sin \varphi_i - \sin \varphi_j)(K-1)\right\}, \quad (3.4.4)$$

т.е. $\{\mathbf{B}_s\}_{ij} = \rho_{ij}^{(f)} \{\mathbf{B}\}_{ij}$.

Как видно, коэффициент декорреляции тем эффективнее, чем большее число подрешёток используется. Однако увеличение числа подрешёток ведёт к уменьшению апертуры и потере разрешающей способности. На практике рекомендуется использовать $Q = 0.7N$ [25, 61]. При этом порог метода минимального многочлена определяется аналогично (1.2.14) в виде [48]:

$$Th = \frac{Q^2 - 1}{Q + LK}. \quad (3.4.5)$$

С другой стороны, из выражения (1.1.8) видно, что

$$\mathbf{s}_s(\varphi) = \exp\left\{i \frac{2\pi}{\lambda_w} d(Q-1) \sin \varphi\right\} \mathbf{J} \mathbf{s}_s^*(\varphi), \quad (3.4.6)$$

где матрица \mathbf{J} называется обменной и осуществляет перестановку строк вектор-столбца в обратном порядке.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.4.7)$$

Таким образом, осуществляя запись вектора \mathbf{x}_m в обратном порядке и выполняя комплексное сопряжение его элементов, можно получить альтернативный набор эффективных выборок сигнала, что приводит к аналогичному по модулю коэффициенту декорреляции [48]. Данный метод называется техникой обратного пространственного сглаживания.

Наконец, совмещая эффективные выборки сигнала для методов прямого и обратного сглаживания получим двойное сглаживание, модуль коэффициента декорреляции которого, усреднённый по фазе коэффициента корреляции, равен [48]

$$\langle |\rho_{ij}^{(fb)}| \rangle = \frac{2}{\pi K} \left| \frac{\sin\left(\pi \frac{d}{\lambda} (\sin \varphi_i - \sin \varphi_j) K\right)}{\sin\left(\pi \frac{d}{\lambda} (\sin \varphi_i - \sin \varphi_j)\right)} \right|, \quad (3.4.8)$$

что примерно в 1.5 раза эффективнее, чем техники прямого или обратного сглаживания по отдельности. Отметим, что в частном случае всегда выполняется неравенство $|\rho_{ij}^{(fb)}| < |\rho_{ij}^{(f)}|$. Порог метода минимального многочлена для случая двойного сглаживания также определяется выражением (3.4.5).

Анализируя выражение (1.1.9) и свойства фазирующего вектора (плоского волнового фронта), используемые в техниках пространственного сглаживания, можно обобщить данные методы для прямоугольной АР. При этом для формирования эффективных выборок следует выбирать прямоугольную antennную подрешётку, а для техники обратного сглаживания осуществлять перестановку комплексно сопряженных элементов вектора принятого сигнала \mathbf{x}_m так, чтобы координаты соответствующих antennных элементов были симметричны относительно центра подрешётки.

3.4.2. Случай пространственно-распределённой помехи

Для виртуальной АР МИМО радара можно применить предложенное во второй главе настоящей работы обобщение метода минимального многочлена на случай пространственно-окрашенного шума. Однако при этом следует учесть особенности архитектуры МИМО радара, а именно тот факт, что внешняя помеха не подвергаются разнесению на стороне передатчика, т.е. их пространственные свойства определяются исключительно приёмной АР.

Рассмотрим для примера МИМО радар с ортогональным кодовым разнесением передатчиков и источник белого шума в качестве распределённой помехи.

Для простоты опустим обработку сигнала, связанную с оценкой дальности и скорости цели и будем полагать, что каждая передающая антenna излучает последовательность импульсов с комплексными амплитудами, записанными в виде вектора \mathbf{w} . Кодовое разделение предполагает ортогональность соответствующих векторов для различных передатчиков, т.е. $\mathbf{w}_q^H \mathbf{w}_p = \delta_{qp}$, где q и p – индексы передающих антенн, а δ_{qp} – символ Кронекера. На приёмном n -ном антенном элементе выделение сигнала q -того передатчика осуществляется как

$$y_{qn} = \mathbf{w}_q^H \mathbf{z}_n, \quad (3.4.9)$$

где \mathbf{z}_n – вектор комплексных амплитуд импульсов принятых n -ным приёмником.

Если предположить, что вектор \mathbf{z}_n содержит только сигнал внешнего источника помехи, то

$$\langle y_{qn} y_{pm}^* \rangle = \mathbf{w}_q^H \langle \mathbf{z}_n \mathbf{z}_m^H \rangle \mathbf{w}_p = \mathbf{w}_q^H \mathbf{E} \mathbf{w}_p T_{mn} = \delta_{qp} \tilde{T}_{mn}, \quad (3.4.10)$$

где \tilde{T}_{mn} определяет пространственную корреляцию помехи между m -тым и n -ным приёмником. Таким образом, при соответствующей индексации элементов виртуальной АР, КМ помехи представима в блочном виде

$$\mathbf{T}_\Sigma = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots \end{bmatrix}, \quad (3.4.11)$$

где каждый блок соответствует определённому передатчику и приёмнику, а $\tilde{\mathbf{T}}$ – КМ помехи для реальной приёмной АР. Следовательно, для применения обобщённого метода минимального многочлена необходимо оценить КМ помехи для реальной приёмной АР и экстраполировать её в КМ для виртуальной АР с помощью (3.4.11).

Не трудно провести аналогичные рассуждения для других методов ортогонального разнесения сигнала передающих антенн (что эквивалентно использованию различных векторов \mathbf{w}).

3.4.3. Метод селекции мнимых целей при наличии отражения от земли

При применении процедуры пространственного сглаживания, описанной в разделе 3.4.1, и прямоугольной АР прямой и отраженный от земной поверхности лучи могут быть разрешены с помощью метода минимального многочлена. При этом отражение сигнала от земной поверхности практически не будет вносить систематической ошибки в оценку угла места цели. Однако, т.к. для двухмерного метода минимального многочлена, предложенного в первой главе настоящей диссертации, цель и её мнимое отражение (см. Рисунок 3.2) представляют собой равнозначные источники вторичного излучения, метод оценки угловых координат целей должен быть дополнен алгоритмом селекции мнимых целей.

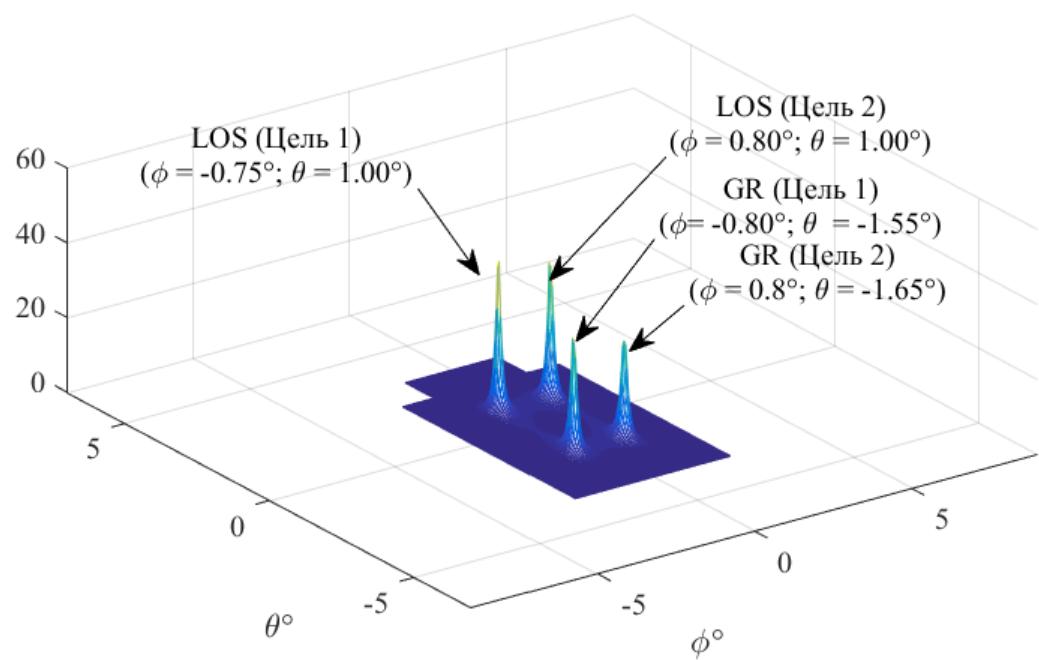


Рисунок 3.7 – Пространственный спектр сигнала, полученный с помощью метода минимального многочлена при численном моделировании МИМО радара. Размеры виртуальной АР $N_v = 9$, $N_h = 12$. ОСШ = 30 дБ. Координаты источников излучения $\phi_{1,2} = \pm 0.8^\circ$, $\theta_{1,2} = 1.0^\circ$.

В качестве характерного признака таковых можно считать отрицательный угол места, особенно если радар размещен на небольшой (относительно дальности)

сти до цели) высоте от земной поверхности. В этом случае может быть применён следующий алгоритм:

1. Группируем цели с близкими азимутальными углами.
2. Для каждой группы выполняем следующие действия:
 - a. Если существуют цели с оценённым углом места в окрестности нулевого значения $|\hat{\theta}| < \theta_b$, то они объединяются в одну цель со средним азимутом и максимальным углом места из оценённых значений.
 - b. Если существует цель с отрицательным оценённым углом места $\hat{\theta} < 0$, то такая цель удаляется из группы.

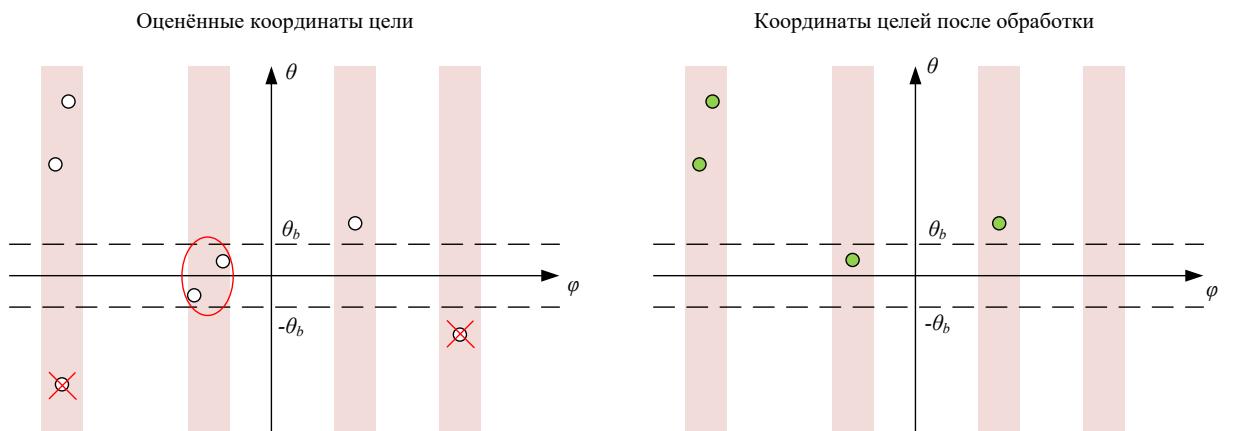


Рисунок 3.8 – Иллюстрация к алгоритму селекции мнимых целей

Величину параметра θ_b рекомендуется выбирать в пределах от 0.5 до 1.5 градусов.

3.5. Результаты натурного эксперимента

Эффективность метода минимального многочлена при оценке угловых координат целей в автомобильном MIMO радаре была исследована в ходе натурного эксперимента [49]. Несущая частота используемого радара составляла 77 ГГц ($\lambda_w = 3.9$ мм). В качестве зондирующего сигнала применялась последовательность импульсов с линейной частотной модуляцией. Разделение различных передающих антенн MIMO системы осуществлялось кодом Уолша длиной четыре [15].

На выходе блока временной обработки сигнала производилось обнаружение целей по критерию постоянной вероятности ложной тревоги, оценка их дальности и скорости. Для каждого отобранного сегмента дальность-скорость формировался вектор сигнала виртуальной антенной решётки, который подавался для дальнейшей обработки на вход алгоритма оценки числа и угловых координат целей. Подробное рассмотрение вопроса временной обработки сигнала и формирования виртуальных приёмных каналов находится за рамками данной работы и описывается в [11, 15]. В качестве алгоритмов оценки числа и угловых координат целей выступали корневой метод минимального многочлена [48, 49] и Root MUSIC [25, 28].

Реальная антенная решётка MIMO радара включала в себя три передающие (Tx) и четыре приёмные (Rx) антенны (см. Рисунок 3.9, слева). Таким образом, полное число виртуальных приёмных каналов составляло 12. Для двух из них положение виртуальных антенных элементов совпадало, а сигналы при обработке усреднялись. Виртуальная решётка данной MIMO системы представлена на Рисунке 3.9 (справа). Виртуальные элементы, соответствующие определённой передающей антенне, выделены одинаковым цветом. Ширина главного луча ДН виртуальной АР по уровню половинной мощности (-3 дБ) составляла $\Delta\varphi_{beam} = 7.7^\circ$.

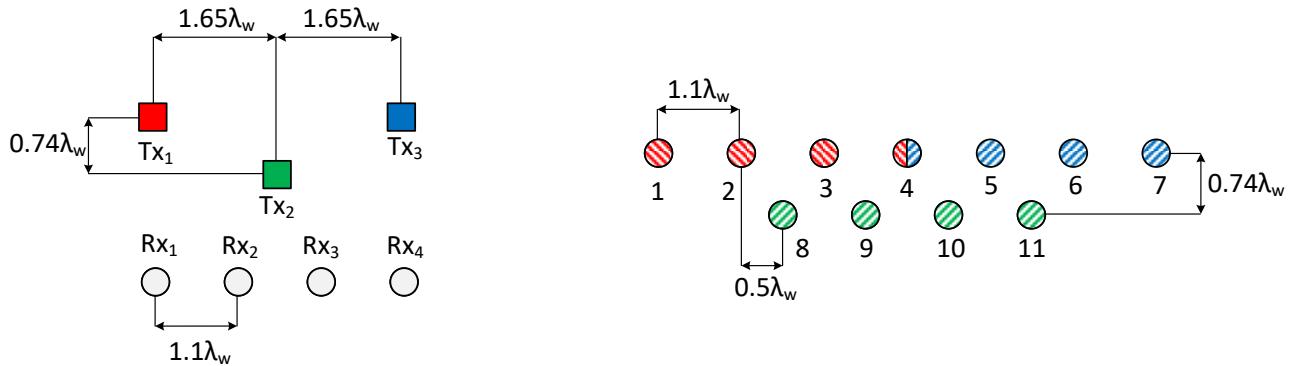


Рисунок 3.9 – Реальная (слева) и виртуальная (справа) антенная решётка MIMO радара.

В силу того, что эксперимент проводился в условиях наличия отражения от земной поверхности, возникает вопрос о применимости концепции виртуальной антенной решётки при обработке сигнала. Для используемой MIMO системы выполнен критерий равенства фазирующих векторов. Следовательно, концепция

виртуальной антенной решётки может быть применена для оценки угловых координат вторичных источников излучения (углов прихода отражённых от целей сигналов).

Как показано в разделе 3.2.5, принимаемый виртуальной антенной решёткой сигнал может быть представлен в виде суперпозиции двух волновых фронтов, приходящих с направлений прямого и отраженного от земли лучей. Ввиду наличия в антенной решётке только двух строк, данные волновые фронты не могут быть разделены в вертикальной плоскости, поэтому производилась оценка только азимутального угла прихода отражённого сигнала. Иными словами, мы рассматривали одномерную задачу, когда каждой цели соответствует только один вторичный источник излучения.

В условиях сверхкороткой выборки сигнала для виртуальной антенной решётки ($L = 1$) применялась техника двойного пространственного сглаживания, описанная в разделе 3.4.1. Антенные элементы со следующими индексами (см. Рисунок 3.9) объединялись в подрешётки: [1 2 3 4]; [2 3 4 5]; [3 4 5 6]; [4 5 6 7]; [8 9 10 11]. Таким образом, формировалось $K = 5$ прямых и столько же обратных эффективных выборок сигнала для линейной эквидистантной антенной решётки с числом элементов $Q = 4$ и периодом $d = 1.1\lambda_w$. Сформированная выборка передавалась на вход одномерному корневому методу минимального многочлена (см. раздел 1.3) с «усечённым» полиномом (1.3.7) и методу Root MUSIC, работающему совместно с критерием MDL [25, 28].

Эксперимент проводился на полигоне с ровной асфальтированной поверхностью (пустая автомобильная парковка). MIMO радар был закреплен на переднем бампере автомобиля (см. Рисунок 3.10) на высоте 0.5 м. В качестве целей (вторичных источников излучения) применялись уголковые отражатели треугольной формы [106], закрепленные на штативах высотой 0.5 м (см. Рисунок 3.11).



Рисунок 3.10 – Положение MIMO радара на корпусе автомобиля.

Эксперимент включал в себя набор из 9 статических (С) и 2 динамических (Д) сценариев. Схема статических сценариев и их параметры представлены на Рисунке 3.11 и в Таблице 3.1. Сценарии отличались расстоянием между двумя уголковыми отражателями D (сценарии С2-С9) и дистанцией R от автомобиля до них. В сценарий С1 присутствовал только один уголковый отражатель.

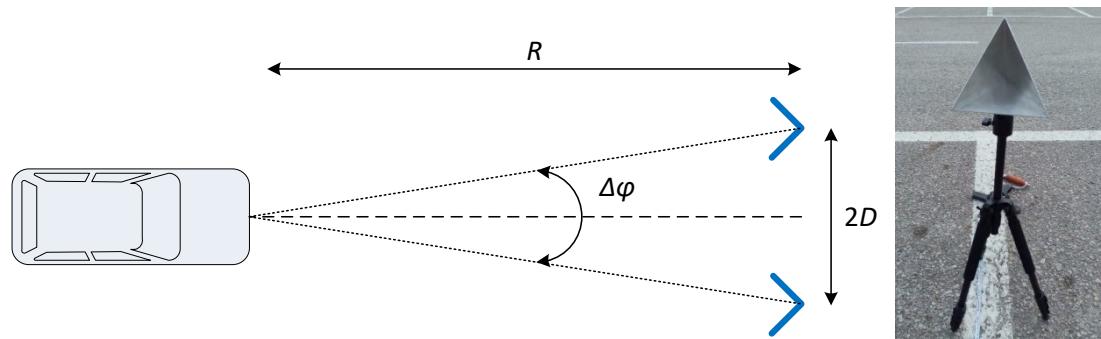


Рисунок 3.11 – Схема статических сценариев С2-С9 и используемый уголковый отражатель

Таблица 3.1 – Параметры статических сценариев

№	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
D , м	-	1.5	1.5	2.0	1.8	1.8	2.0	2.3	2.8
R , м	63	63	63	78	63	63	63	63	63
$\Delta\varphi$	-	2.7°	2.7°	2.9°	3.3°	3.3°	3.7°	4.2°	5.1°
$\delta\varphi$	-	0.35	0.35	0.37	0.42	0.42	0.47	0.54	0.65

Ввиду того, что MIMO радар был закреплен на корпусе автомобиля, юстировка антенной системы так, чтобы уголковые отражатели располагались симмет-

рично относительно нормали к антенной решётке, была выполнена приблизительно. В связи с этим, при обработке результатов вместо непосредственных угловых координат рассматривалось угловое расстояние между вторичными источниками излучения $\Delta\varphi$ и его значение в единицах ширины ДН АР $\delta\varphi = \Delta\varphi / \Delta\varphi_{beam}$. Отметим, что в сценариях С2-С9 угловое расстояние между источниками вторичного излучения было существенно меньше ширины главного лепестка ДН АР.

Результаты независимых экспериментов в каждом сценарии (от 233 до 1063) обрабатывались с помощью методов математической статистики.

Оценка числа вторичных источников излучения производилась с помощью метода минимального многочлена (см. раздел 1.2) и критерия MDL [25, 28, 49]. В Таблице 3.2 приведена доля случаев (в процентном соотношении) когда число вторичных источников излучения оценено верно (т.е. $J = 2$ для сценариев С2-С9). Видно, что во всех сценариях метод минимального многочлена превосходит критерий MDL. Более того, почти во всех случаях метод минимального многочлена даёт верную оценку числа источников. Данный результат обуславливается выбором порога метода минимального многочлена на основе априорной информации о наличии хотя бы одного источника излучения (см. раздел 1.2.2), а также условиями сверхкороткой выборки сигнала виртуальной АР и высокой корреляцией вторичных источников излучения.

Таблица 3.2 – Точность оценки числа источников излучения

Сценарий	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
$\delta\varphi$	0.35	0.35	0.37	0.42	0.42	0.47	0.54	0.65
Метод минимального многочлена, %	100	100	100	100	100	100	100	100
MDL, %	99	63	95	48	–	100	–	64

На Рисунке 3.12 представлены экспериментальные гистограммы для значения метрик (1.2.7) метода минимального многочлена в случае одной цели (слева, сценарий 1) и двух целей (справа, объединённые данные сценариев С2-С9). Также на Рисунке 3.12 пунктирной линией отмечен выбранный порог метода минимального многочлена $Th = 1.5$.

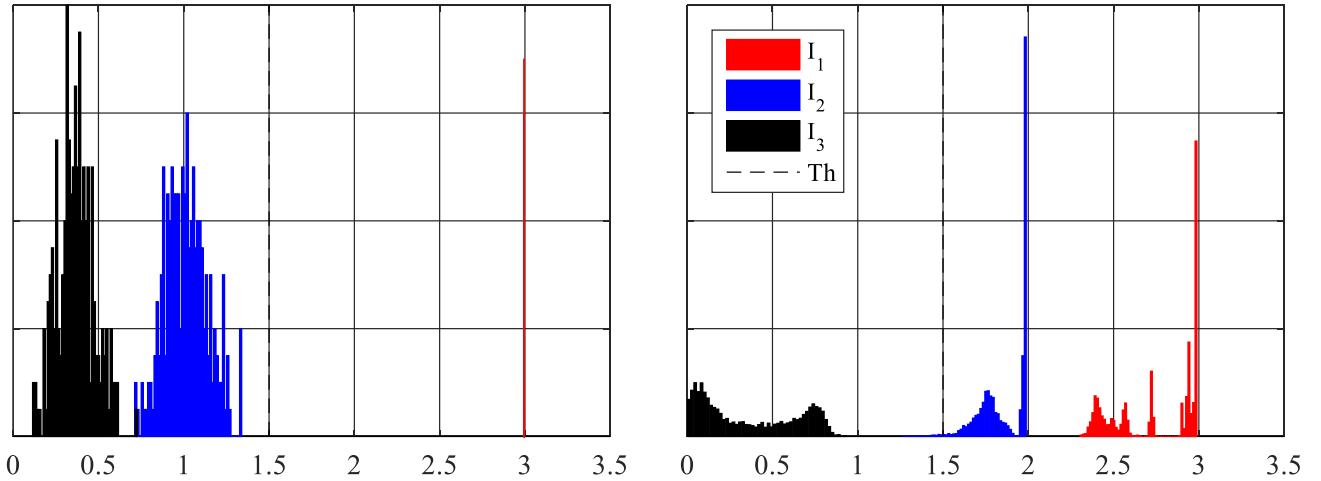


Рисунок 3.12 – Гистограмма значений метрик метода минимального многочлена в случае одного источника излучения (слева, сценарий C1) и двух источников излучения (справа, сценарии C2-C9).

Из представленных гистограмм видно, что в случае одного ($J = 1$) мощного вторичного источника излучения значения метрик I_2 и I_3 всегда лежат ниже порога, а значение метрики I_1 превосходит порог и на единицу меньше числа элементов эффективной AP ($I_1 \approx Q - 1$), как и предсказывается в теории [74].

В случае двух ($J = 2$) мощных источников излучения метрики I_1 и I_2 лежат выше порога в подавляющем числе случаев. При этом $Q - 2 < I_1 < Q - 1$ и $I_2 < Q - 2$, что также соответствует ожидаемым значениям [74]. Метрика I_3 всегда лежит ниже порога, что означает стремящуюся к нулю вероятность ложной тревоги в условиях проведённого эксперимента.

Оценённые в ходе эксперимента средние значения $\langle \cdot \rangle$ и СКО метрик метода минимального многочлена представлены в Таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Средние значения и СКО метрик метода минимального многочлена

	I_1		I_2		I_3	
	$\langle I_1 \rangle$	СКО	$\langle I_2 \rangle$	СКО	$\langle I_3 \rangle$	СКО
$J = 1$	3.0	0.0	1.0	0.1	0.4	0.1
$J = 2$	2.8	0.2	1.9	0.1	0.4	0.3

Оценка угловых координат источников излучения осуществлялась с помощью корневого метода минимального многочлена (см. раздел 1.3) с «усечённым» полиномом (1.3.7) и метода Root MUSIC [25, 28]. Среднее значение угловово-

го разнесения целей $\langle\Delta\varphi\rangle$ и СКО полученные в ходе эксперимента представлены в Таблице 3.4.

Таблица 3.4— Средние значения и СКО углового разнесения целей

Сценарий	Параметры		Корневой метод минимального многочлена		Root MUSIC	
	$\Delta\varphi$	$\delta\varphi$	$\langle\Delta\varphi\rangle$	СКО	$\langle\Delta\varphi\rangle$	СКО
C1	-	-	-	0.04	-	0.05
C2	2.7	0.35	1.76	0.18	1.75	0.18
C3	2.7	0.35	2.63	0.25	2.86	0.10
C4	2.9	0.37	3.70	0.18	3.70	0.18
C5	3.3	0.42	2.24	0.19	2.22	0.18
C6	3.3	0.42	3.29	0.12	-	-
C7	3.7	0.47	3.94	0.07	3.94	0.07
C8	4.2	0.54	4.38	0.05	-	-
C9	5.1	0.65	5.09	0.14	5.25	0.07

Из полученных результатов следует, что средняя ошибка оценки углового разнесения целей, усредненная по сценариям 2–9, составила 0.59° для метода минимального многочлена и 0.68° для корневого метода MUSIC. При этом СКО оценки координат отражателей получились равными 0.16° и 0.14° , соответственно. Различие результатов в разных сценариях можно объяснить разным ОСШ и наличием местных пассивных помех.

В динамических сценариях Д1 и Д2 автомобиль с закреплённым на нём МИМО радаром двигался в направлении уголковых отражателей со скоростью примерно 5 км/ч. Расстояние между уголковыми отражателями равнялось 3 и 4 м в сценариях Д1 и Д2 соответственно. Сигнал виртуальной антенной решётки обрабатывался с помощью корневого метода минимального многочлена с «усечённым» полиномом, а оценённые угловые координаты пересчитывались в декартову систему координат для наглядного представления результата. Полученные в ходе эксперимента треки целей представлены на Рисунке 3.13 и Рисунке 3.14 для сценариев Д1 и Д2 соответственно. На рисунках выделены синим цветом случаи, когда источники излучения успешно разрешались. Фиолетовым – когда нет. Кроме того, для сравнения приведены аналогичные треки, полученные с помощью метода Фурье (сканирование главным лучом ДН АР) [25, 28].

Из полученных результатов следует, что при $R > 22$ м в сценарии Д1 и при $R > 29$ м в сценарии Д2 вторичные источники излучения не разрешались с помощью метода Фурье, т.к. угловое расстояние между ними становилось меньше ширины главного лепестка ДН виртуальной АР. При этом корневой метод минимального многочлена обеспечивал устойчивое разрешение целей до дальностей $R < 63$ м (сценарий Д1) и $R < 66$ м (сценарий Д2), что соответствует угловым расстояниям $\delta\varphi = 0.35$ и $\delta\varphi = 0.45$ в единицах ширины главного лепестка ДН АР.

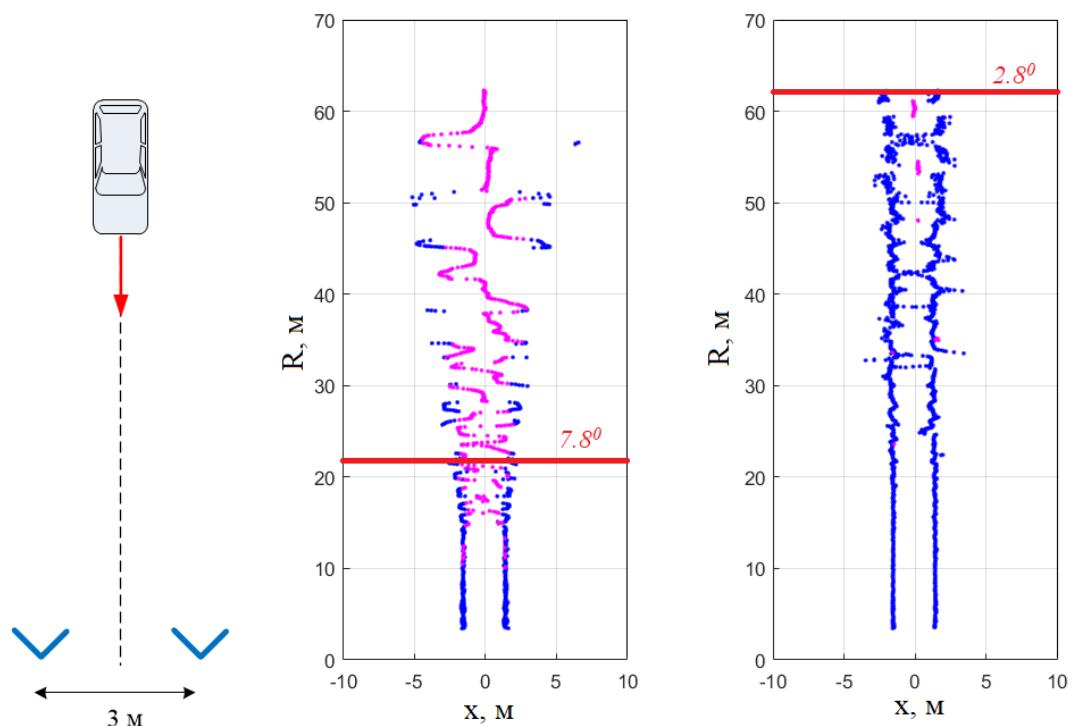


Рисунок 3.13 – Схема эксперимента для сценария Д1 (слева), треки целей полученные с помощью метода Фурье (в центре) и корневого метода минимального многочлена (справа)

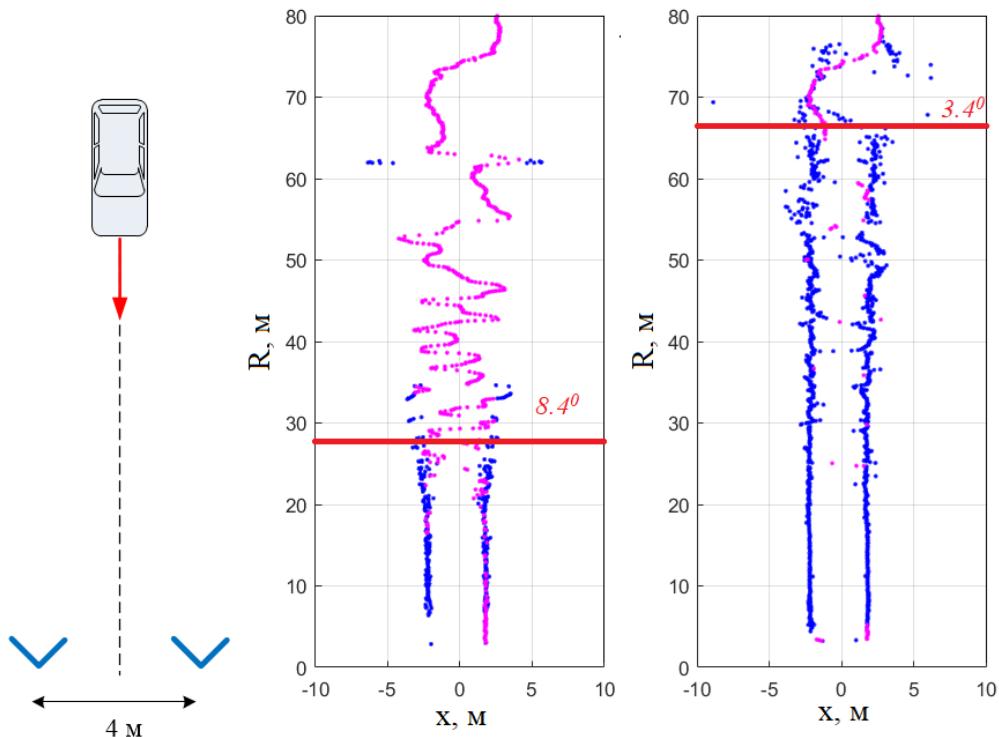


Рисунок 3.14 – Схема эксперимента для сценария Д2 (слева), треки целей полученные с помощью метода Фурье (в центре) и корневого метода минимального многочлена (справа)

Влияние земной поверхности при оценке числа и угловых координат источников излучения проявлялось в виде флюктуаций ОСШ, вызванное когерентным сложением прямого и отраженного от земли сигналов (см. раздел 3.1.2). Для некоторых дальностей сигналы складывались в противофазе, что приводило, как видно из результатов, к потере точности оценки координат целей и разрешения. Оценённые в ходе эксперимента значения ОСШ для различных дальностей представлены на Рисунке 3.15.

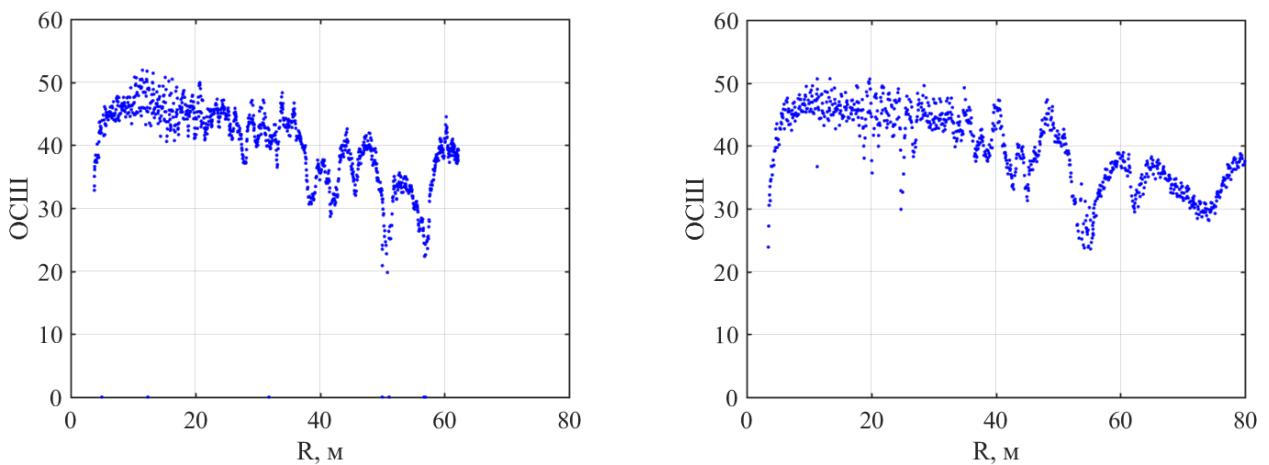


Рисунок 3.15 – Оценённые значения ОСШ для сценариев Д1 (слева) и Д2 (справа).

3.6. Заключение по третьей главе

В рамках третьей главы диссертации рассмотрена проблема оценки угловых координат источников сигналов в МИМО радаре при наличии отражения от земной поверхности. Основные результаты исследований, представленных в данной главе, заключаются в следующем:

1. На основе свойств сигнала, используемых при оценке углового положения цели, предложено два критерия применимости концепции виртуальной АР в МИМО радаре: критерий равенства сигналов и критерий равенства фазирующих векторов.
2. Произведён теоретический анализ предложенных критериев. Исследовано соответствие различных конфигураций АР МИМО радара данным критериям. Доказано, что для применения концепции виртуальной АР в условиях влияния земли необходимо и достаточно, чтобы элементы хотя бы одного типа (приёмники или передатчики) имели одинаковую высоту. Результаты численного моделирования показывают справедливость полученных теоретических результатов.
3. Рассмотрены особенности применения синтезированного метода оценки числа и угловых координат источников излучения в автомобильном МИМО радаре при наличии отражения от земной поверхности.

4. Эффективность метода минимального многочлена при оценке угловых координат целей в MIMO радаре при наличии отражения от земной поверхности подтверждена результатами натурного эксперимента, проведённого с помощью автомобильного MIMO радара миллиметрового диапазона длин волн.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей диссертационной работе синтезированы новые методы оценки числа и двумерных угловых координат источников излучения с помощью прямоугольной АР на основе метода минимального многочлена КМ, эффективно работающие в условиях пространственно-окрашенного шума, а также произведено обоснование применимости данных методов в МИМО радаре при условии наличия отражений от земной поверхности.

Основные результаты диссертационной работы и следующие из них теоретические и практические выводы могут быть сформулированы следующим образом:

1. Предложен и теоретически обоснован метод минимального многочлена на случай двумерной пеленгации. Исследована эффективность двух способов решения задачи сверхразрешения источников: корневого и псевдоспектрального. Проведено сравнение предложенного двумерного метода минимального многочлена и метода MUSIC, используемого совместно с критерием MDL. Результаты моделирования показывают, что метод минимального многочлена позволяет успешно разрешать близкорасположенные источники излучения. При малом числе выборок входного процесса этот метод превосходит критерий MDL по вероятности правильной оценки числа источников. Если число источников оценено правильно, то точность оценок угловых координат для метода минимального многочлена и метода MUSIC практически совпадают.
2. Для случая двухстрочной АР с произвольным числом столбцов (или двухстолбцовой АР с произвольным числом строк) предложен высокоэффективный упрощённый корневой способ сверхразрешения. Результаты численного моделирования показывают, что предложенный упрощённый корневой способ сверхразрешения не уступает в точности пеленгации корневому подходу, применяемому для АР произвольного размера. Сравнение вычислительной сложности рассмотренных алгоритмов показывает, что предложенный альтер-

нативный способ вычисления разрешающего полинома для двухстрочной (двуухстолбцовой) АР является наиболее простым и эффективным.

3. Разработаны новые подходы к практической реализации базовой части метода минимального многочлена, направленные на снижение вычислительной сложности. Также предложен способ замены итеративной вычислительной процедуры на аналитическое решение в случае малого числа источников излучения.
4. Предложен эффективный сверхразрешающий обобщённый метод минимального многочлена, предназначенный для оценки числа и угловых координат близкорасположенных источников сигнала на фоне пространственно-распределённой помехи. Рассмотрено два эквивалентных варианта обобщения метода минимального многочлена. Первый вариант основан непосредственно на особенностях построения сигнального подпространства в условиях пространственно-окрашенной помехи, а второй – предполагает применение обобщающего преобразования сигнала и стандартного метода минимального многочлена. Исследование эффективности нового предложенного алгоритма в сравнении с классическим методом минимального многочлена показывает, что при наличии пространственно-распределённой помехи обобщённый метод минимального многочлена приводит к существенному выигрышу в требуемой для успешного разрешения источников мощности сигнала. Также обобщённый метод минимального многочлена позволяет существенно снизить величину систематической ошибки, связанной со смещением оценок угловых координат в сторону помехового источника.
5. На основе свойств сигнала, используемых при оценке углового положения цели, предложено два критерия применимости концепции виртуальной АР в МИМО радаре: критерий равенства сигналов и критерий равенства фазирующих векторов. Произведён теоретический анализ предложенных критериев. Исследовано соответствие различных конфигураций АР МИМО радара данным критериям. Доказано, что для применения концепции виртуальной АР в условиях влияния земли необходимо и достаточно, чтобы элементы хотя бы одно-

го типа (приёмники или передатчики) имели одинаковую высоту. Результаты численного моделирования показывают справедливость полученных теоретических результатов.

6. Рассмотрены особенности применения предложенного обобщенного двухмерного метода минимального многочлена в автомобильном MIMO радаре при наличии отражения от земной поверхности.
7. Представлены экспериментальные результаты, доказывающие эффективность метода минимального многочлена при оценке угловых координат целей с помощью виртуальной антенной решётки в автомобильном MIMO радаре при наличии отражений от земной поверхности.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю профессору, д.ф.-м.н. Флаксману А.Г. и научному консультанту профессору, д.т.н. Ермолаеву В.Т. за помощь и поддержку, оказанные при подготовке настоящей диссертации, а также за бесценные знания и опыт, полученные под их руководством; к.ф.-м.н. Елохину А.В. за помощь в обработке экспериментальных данных; преподавателям радиофизического факультета ННГУ за заложенную радиофизическую и математическую базу, лежащую в основе настоящей работы; ассистенту кафедры статистической радиофизики и мобильных систем связи Купцову В.В. и аспиранту Трушкову С.Н., а также членам своей семьи за неоценимую моральную поддержку.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

АР	Антеннная Решётка
ДН	Диаграмма Направленности
КМ	Корреляционная Матрица
ОСШ	Отношение Сигнал/Шум
ОСШП	Отношение Сигнал/Шум-Помеха
СКО	Среднеквадратичная Ошибка
ADAS	Advanced Driver Assistance Systems
AIC	Akaike's Information Criterion
DSP	Digital Signal Processor
ESPRIT	Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques
FPGA	Field-Programmable Gate Array
MDL	Minimum Description Length
MIMO	Multiple Input Multiple Output
MUSIC	MUltiple Signal Classification

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ратынский, М.В. Адаптация и сверхразрешение в антенных решетках. / М.В. Ратынский. – М.: Радио и связь, 2003. – 200 с.
2. Турчин В.И. Введение в современную теорию оценки параметров сигналов / В.И. Турчин. – Н. Новгород: ИПФ РАН, 2005. – 116 с.
3. Сазонтов, А.Г. Согласованная пространственная обработка сигналов в подводных звуковых каналах (обзор) / А.Г. Сазонтов, А.И. Малеханов // Акустический журнал. – 2015. – Т. 61. № 2. – С. 233-253.
4. Родионов, А.А. Обнаружение и пеленгация источников с использованием разреженных антенных решёток / А.А. Родионов, В.И. Турчин // Изв. вузов. Радиофизика. – 2018. – Т. 61. № 2. – С. 122-140.
5. Кутузов, Н.А. Исследование возможности локализации нескольких источников вибрации в механоакустической системе с большим числом степеней свободы / Н.А. Кутузов, А.А. Родионов, А.В. Стуленков, А.С. Суворов // Акустический журнал. – 2020. – Т. 66. № 3. – С. 319-326.
6. Gottinger, M. Coherent Automotive Radar Networks: The Next Generation of Radar-Based Imaging and Mapping / M. Gottinger [et al.] // IEEE Journal of Microwave. – 2021. – V. 1. No. 1. – P. 149-163.
7. Frischen, A. Cooperative MIMO Radar Network Using Highly Integrated FMCW Radar Sensor / A. Frischen, J. Hasch, C. Waldschmidt // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 2017. – V. 65. No. 4. – P. 1355-1366.
8. Meinecke, B. Coherent Multistatic MIMO Radar Network Based on Repeater Tags / B. Meinecke [et al.] // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 2019. – V. 67. No. 9. – P. 3908-3916.
9. Frischen, A. Coherent Measurements with MIMO Radar Networks of Incoherent FMCW Sensor Nodes / A. Frischen, G. Hakobyan, C. Waldschmidt // IEEE

Microwave and Wireless Components Letters. – 2020. – V. 30. No. 7. – P. 721-724.

10. Myakinkov, A.V. The Distributed Radar System for Monitoring the Surrounding Situation for the Intelligent Vehicle / A.V. Myakinkov, S.B. Sidorov, S.V. Shishanov, S.A. Shabalin // 19th International Radar Symposium (IRS). – 2018. – P. 1-8.
11. Bergin, J. MIMO Radar. Theory and Application. / J. Bergin, J.R. Guerci. – Artech House, 2018. – 229 pp.
12. Черняк, В.С. Обнаружение сигналов в МИМО РЛС / В.С. Черняк // Успехи современной радиоэлек-троники. – 2014. – № 7. – С. 35-48.
13. Patole, S. Automotive Radars. A review of signal processing techniques / S. Patole, M. Torlak, D. Wang, M. Ali // IEEE Signal Processing Magazine. – 2017. – V. 34. No. 2. – P. 22-35.
14. Davis, M. Coherent MIMO radar: The phased array and orthogonal waveforms / M. Davis, G. Showman, A. Lanterman // IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine. – 2014. – V. 29. No. 8. – P.76-91.
15. Ермолаев, В.Т. Метод формирования виртуальных приемных каналов в автомобильном МИМО-радаре / В.Т. Ермолаев [и др.] // Радиотехника. – 2021. – Т. 7. № 85. – С.115-126.
16. Xu, H. Spatial and temporal characteristics of 60-GHz indoor channels / H. Xu, V. Kukshya, T.S. Rappaport // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. – 2002. – V. 20. No. 3. – P. 620-630.
17. Rappaport, T.S. Wideband Millimeter-Wave Propagation Measurements and Channel Models for Future Wireless Communication System Design / T.S. Rappaport, G.R. MacCartney, M.K. Samimi, S. Sun // IEEE Transactions on Communications. – 2015. – V. 63. No. 9. – P. 3029-3056.
18. Weiler, R.J. Quasi-deterministic millimeter-wave channel models in MiWEBA /

- R.J. Weiler [et al.] // EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking. – 2016. – No. 84. – P. 1-16.
19. Kim, H. DOA estimation in Cyclic Prefix OFDM Systems in LOS mmWave Channel using Monopulse Ratio / H. Kim, J. Kim, K.H. Lee, K.S. Kim // 2018 International Conference on Information and Communication Technology Convergence (ICTC). – 2018. – P. 1-4.
 20. Zhu, D. Auxiliary Beam Pair Enabled AoD and AoA Estimation in mmWave FD-MIMO Systems / D. Zhu, J. Choi, R.W. Heath // 2016 IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM). – 2016. – P. 1-6.
 21. Gao, B. Double-link beam tracking against human blockage and device mobility for 60-GHz WLAN / B. Gao [et al.] // 2014 IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC). – 2014. – P. 323-328.
 22. Xiao, Z. Suboptimal Spatial Diversity Scheme for 60 GHz Millimeter-Wave WLAN / Z. Xiao // IEEE Communications Letters. – 2013. – V. 17. No. 9. – P. 1790-1793.
 23. Zhou, P. IEEE 802.11ay-Based mmWave WLANs: Design Challenges and Solutions / P. Zhou [et al.] // IEEE Communications Surveys & Tutorials. – 2018. – V. 20. No. 3. – P.1654-1681.
 24. Караваев, В.В. Статистическая теория пассивной локации / В.В. Караваев, Б.Б. Сазонов. – М.: Радио и связь, 1987. – 240 с.
 25. Godara, L.C. Smart antennas. / L.C. Godara. – CRC Press, 2004. – 472 pp.
 26. Stoica, P. Spetral analysis of signals / P. Stoica, R. Moses. – New Jersey: Prentice Hall Inc., 2005. – 427pp.
 27. Allen, B. Adaptive array systems: fundamentals and applications / B. Allen, M. Ghavami. – Chichester: John Wiley & Sons, 2006. – 290 pp.
 28. Tuncer, E. Classical and Modern Direction-of-Arrival Estimation / E. Tuncer, B. Friedlander. – Elsevier Inc. ed. 2009. – 429 pp.

29. Сычев, М.И. Оценивание числа и угловых координат близко расположенных источников излучения по пространственно-временной выборке / М.И. Сычев // Радиотехника. – 2009. – № 12. – С. 64-73.
30. Сычев, М.И. Пространственно-временная обработка радиосигналов на основе параметрического спектрального анализа / М.И. Сычев. // Антенны. – 2001. – № 1. – С. 70-77.
31. Ермолаев, В.Т. Оценивание параметров сигналов, принимаемых антенной решеткой / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флаксман, А.А. Анурин // Изв. вузов. Радиофизика. – 1996. – Т. 39 № 9. – С. 1144–1160.
32. Гершман, А.Б. Анализ сверхразрешения некоррелированных источников излучения в адаптивных антенных решетках / А.Б. Гершман, В.Т. Ермолаев, А.Г. Флаксман // Изв. вузов. Радиофизика. – 1988. – Т. 31. № 11. – С.1374-1379.
33. Mosca, E. Angle Estimation in Amplitude Comparison Monopulse Systems / E. Mosca // // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. – 1969. – V. AES-5. No. 2. – P. 205-212.
34. Luoshengbin, W. Detection of unresolved targets for plane array radar based on monopulse ratio / W. Luoshengbin, X. Zhenhai, L. Xinhua, D. Chong // 2016 CIE International Conference on Radar (RADAR). – 2016. – P. 1-5.
35. Sherman, S.M. Monopulse Principles and Techniques. 2nd ed. / S.M. Sherman, D.K. Barton. – London: Artech House Publishers, 2011. – 395 pp.
36. Логинов, А.А. Метод оценки числа источников излучения в задаче амплитудной моноимпульсной пеленгации / А.А. Логинов, О.А. Морозов, М.Ю. Семенова, В.Р. Фидельман // Изв. вузов. Радиофизика. – 2013. – Т. 56. № 7. – С. 505-513.
37. Логинов, А.А. Алгоритмы повышения точности оценки пеленга в задаче амплитудной моноимпульсной пассивной локации / А.А. Логинов, О.А.

- Морозов, М.Ю. Семенова // Вестник ННГУ. – 2010. – Т. 5. № 2. – С. 358-362.
38. Кейпон, Дж. Пространственно-временной спектральный анализ с высоким разрешением / Дж. Кейпон // ТИИЭР. – 1969. – Т. 57. № 8. – С. 59-69.
 39. Roy, R. Estimation Of Signal Parameters Via Rotational Invariance Techniques / R. Roy, T. Kailath // IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing. – 1989. – V. 37. No. 7. – P. 984-995.
 40. Schmidt, R.O. Multiple emitter location and signal parameter estimation / R.O. Schmidt // IEEE Trans. Antennas Propagat. – 1986. – V. 34. No. 3. – P. 276-280.
 41. Джонсон, Д.Х. Применение методов спектрального оценивания к задачам определения угловых координат источников излучения / Д.Х. Джонсон // ТИИЭР. – 1982. – Т. 70. № 9. – С.126-138.
 42. Гершман, А.Б. Адаптивное разрешение некоррелированных источников по угловой координате / А.Б. Гершман, В.Т. Ермолаев, А.Г. Флаксман // Изв. вузов. Радиофизика. – 1988. – Т. 31. № 8. – С. 941-946.
 43. Гершман, А.Б. Повышение разрешающей способности обобщенного алгоритма пеленгации Кейпона / А.Б. Гершман, В.Т. Ермолаев, А.Г. Флаксман // Электромагнитные волны и электронные системы. – 1997. – Т. 2. № 4. – С.16-19.
 44. Wax, M. Detection of signals by information theoretic criteria / M. Wax, T. Kailath // IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Process. – 1985. – V. 33. – P. 387–392.
 45. Wax, M. Detection of the number of coherent signals by the MDL principle / M. Wax, I. Ziskind // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. – 1989. – V. 37. No. 8. – P. 1190-1196.
 46. Wax, M. Detection and localization of multiple sources in noise with unknown covariance / M. Wax // IEEE Trans. Signal Process. – 1992. – V. 40. No. 1. – P. 245-249.
 47. Ермолаев, В.Т. Метод минимального многочлена для оценки параметров сиг-

- налов, принимаемых антенной решеткой / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флаксман, А.В. Елохин, В.В. Купцов // Акустический журнал. – 2018. – Т. 64. № 1. – С. 78-85.
48. Ермолаев, В.Т. Угловое сверхразрешение сигналов в антенной решётке с помощью корневого метода минимального многочлена корреляционной матрицы / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флаксман, А.В. Елохин, О.А. Шмонин. // Изв. вузов. Радиофизика. – 2018. – Т. 61. № 3. – С. 261-272.
49. Ермолаев, В.Т. Экспериментальное исследование углового сверхразрешения двух коррелированных сигналов методом минимального многочлена / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флаксман, А.В. Елохин, О.А. Шмонин // Изв. вузов. Радиофизика. – 2018. – Т.61. № 11. – С. 945-957.
50. Rubsamen, M. Direction-of-arrival estimation for nonuniform sensor arrays: From manifold separation to fourier domain music methods / M. Rubsamen, A.B. Gershman // IEEE Transactions on Signal Processing. – 2009. – V. 52. No. 2. – P. 588-599.
51. Zoltowski, M.D. Development, performance analysis, and experimental evaluation of beamspace Root-MUSIC / M.D. Zoltowski, G.M. Kautz, S.D. Silverstein // ICASSP 91: 1991 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. – 1991. – P. 1-4.
52. Chen, J. An accurate real-time algorithm for spectrum peaks search in 2D MUSIC / J. Chen, H. Ma // 2011 International Conference on Multimedia Technology. – 2011. – P. 3385-3388.
53. Zhao, H. Two-dimensional DOA estimation with reduced-dimension MUSIC algorithm / H. Zhao, M. Cai, H. Liu // 2017 International Applied Computational Electromagnetics Society Symposium (ACES). – 2017. – P.1 – 2.
54. Zhang, Z. A 2-D DOA Estimation Method With Reduced Complexity in Unfolded Coprime L-Shaped Array / Z. Zhang, Y. Guo, Y. Huang, P. Zhang // IEEE Systems Journal. – 2019. – V. 15. No. 1. – P. 407-410.

55. Ghobadzadeh, A. Low-complexity 2D root-MUSIC pairing for an L-shaped array / A. Ghobadzadeh, R. Adve // 2017 IEEE Radar Conference (RadarConf). – 2017. – P. 0957-0962.
56. Bencheikh, M.L. Polynomial root finding technique for joint DOA DOD estimation in bistatic MIMO radar / M.L. Bencheikh, Y. Wang, H. He // Signal Processing. – 2010. – V. 90. No. 9. – P. 2723-2730.
57. Lee, J. Weighted Two-Dimensional Root MUSIC for Joint Angle-Doppler Estimation With MIMO Radar / J. Lee, J. Park, J. Chun // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. – 2019. – V. 55. No. 3. – P. 1474-1482.
58. Zoltowski, M.D. Closed-form 2-D angle estimation with rectangular arrays in element space or beamspace via unitary ESPRIT / M.D. Zoltowski, M. Haardt, C.P. Mathews // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1996. – V. 44. No. 2. – P. 316-328.
59. Zhang, X. Improved Blind 2D-Direction of Arrival Estimation with L-Shaped Array Using Shift Invariance Property / X. Zhang, X. Gao, W. Chen // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. – 2009. – V. 23. No. 5-6. – P.593-606.
60. Wax, M. On spatial smoothing of estimation of coherent signals // IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing / M. Wax, T. Kailath // IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing. – 1985. – V. 33. No. 4. – P. 806-811.
61. Гершман, А.Б. Анализ методов пространственного сглаживания в связи с угловой корреляцией сигналов / А.Б. Гершман, В.Т. Ермолаев, Г.В. Серебряков // Радиотехника. – 1990. – № 10. – С. 11-14.
62. Монзинго, Р.А. Адаптивные антенные решетки: Введение в теорию. / Р.А. Монзинго, Т.У. Миллер. – М.: Радио и связь, 1986. – 448 с.
63. Родионов, А.А. Обработка сигналов в антенных решётках на основе модели помехи, включающей корреляционную матрицу неполного ранга / А.А. Ро-

- дионов, В.И. Турчин // Изв. вузов. Радиофизика. – 2017. – Т. 60. № 1. – С. 60-71.
64. Иваненков, А.С. Определение эффективного числа источников помехи в задаче адаптивной оценки временных форм узкополосных сигналов с помощью антенных решёток / А.С. Иваненков, А.А. Родионов, Н.В. Савельев // Изв. вузов. Радиофизика. – 2019. – Т. 62. № 3. – С. 228-240.
65. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц. / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
66. Parlett, B.N. The symmetric eigenvalue problem / B.N. Parlett. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998. – 345 pp.
67. Черняк, В.С. О новых и старых идеях в радиолокации: MIMO РЛС / В.С. Черняк // Успехи современной радиоэлектроники. – 2011. – №2. – С. 5-20.
68. Li, J. MIMO Radar Signal Processing. / J. Li, and P. Stoica. – Hoboken, N.J.: Wiley-IEEE Press, 2008. – 448 pp.
69. Li, J. MIMO Radar with Colocated Antennas / J. Li, P. Stoica // IEEE Signal Processing Magazine. – 2007. – V. 24. No. 5. – P. 106-114.
70. Hassanien, A. Phased-MIMO radar: A tradeoff between phased-array and MIMO radars / A. Hassanien, S.A. Vorobyov // IEEE Transactions on Signal Processing. – 2010. – V. 58. No. 6. – P. 3137-3151.
71. Sun, H. Analysis and comparison of MIMO radar waveforms / H. Sun, F. Brigui, M. Lesturgie // 2014 International Radar Conference. – 2014. – P. 1-6.
72. Li, J. Signal synthesis and receiver design for MIMO radar imaging / J. Li, P. Stoica, X. Zheng // IEEE Transactions on Signal Processing. – 2008. – V. 56. No. 8. – P. 3959-3968.
73. Forsythe, K.W. MIMO Radar Waveform Constraints for GMTI / K.W. Forsythe, D. Bliss // IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing. – 2010. – V. 4. No. 1. – P. 21-32.
74. Ермолаев, В.Т. Пороговая техника для оценки числа источников радиоизлу-

- чения методом минимального многочлена / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флаксман, А.В. Елохин, О.А. Шмонин // Труды XXI Научной конференции по радиофизике. – Н. Новгород: ННГУ, 2017. – С. 319-322.
75. Ермолаев, В.Т. Оценка параметров источников сигнала методом минимального многочлена с поиском корней псевдоспектральной функции / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флаксман, А.В. Елохин, О.А. Шмонин // Труды XXI Научной конференции по радиофизике. – Н. Новгород: ННГУ, 2017. – С. 365-368.
76. Ермолаев В.Т. Эффективность оценки числа и угловых координат близкорасположенных коррелированных источников сигналов в антенной решётке с помощью корневого метода минимального многочлена / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флаксман, А.В. Елохин, О.А. Шмонин // Радиолокация. Результаты теоретических и экспериментальных исследований. – М.: Радиотехника, 2018. – С.119-130.
77. Шмонин, О.А. Угловое сверхразрешение источников в антенной решётке. Обобщение метода минимального многочлена на случай пространственно-окрашенного шума / О.А. Шмонин // Труды XXIV международной научно-технической конференции "Информационные системы и технологии". – Н. Новгород: НГТУ, 2018. – С. 214-219.
78. Ермолаев, В.Т. Экспериментальные результаты углового сверхразрешения двух коррелированных источников с помощью метода минимального многочлена / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флаксман, А.В. Елохин, О.А. Шмонин // Труды XII всероссийской конференции "Радиолокация и радиосвязь". – М.: ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, 2018. – С. 69-73.
79. Ермолаев, В.Т. Обобщение сверхразрешающего метода минимального многочлена на случай пространственно-окрашенного шума / В.Т. Ермолаев, О.А. Шмонин // Труды XXII научной конференции по радиофизике. – Н. Новгород: ННГУ, 2018. – С. 381-384.
80. Ермолаев, В.Т. Двухмерная пеленгация близкорасположенных источников

излучения на основе метода минимального многочлена / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флаксман, О.А. Шмонин, А.С. Михайлова // Труды XXIII научной конференции по радиофизике. – Н. Новгород: ННГУ, 2019. – С. 395-398.

81. Ermolayev, V. Antenna configuration restrictions for MIMO radar influenced by ground reflection / V. Ermolayev, A. Flaksman, O. Shmonin // 2019 International Conference on Engineering and Telecommunication. – 2019. – Р. 1-5.
82. Ермолаев, В.Т. Оценка двухмерных угловых координат источников излучения с помощью корневого варианта метода минимального многочлена / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флаксман, О.А. Шмонин // Труды XXIV научной конференции по радиофизике. – Н. Новгород: ННГУ, 2020. – С. 278-281.
83. Шмонин, О.А. Обобщение сверхразрешающего метода минимального многочлена для пеленгации целей в условиях пространственно-окрашенного шума и помех / О.А. Шмонин // Журнал радиоэлектроники. – 2021. - № 1. – С. 1 – 23.
84. Ермолаев, В.Т. Применение концепции виртуальной антенной решётки в МИМО-радаре при наличии отражений от земной поверхности / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флаксман, О.А. Шмонин // Изв. вузов. Радиофизика. – 2020. – Т. 63. № 3. – С. 240-249.
85. Ермолаев, В.Т. Угловое разрешение близкорасположенных источников сигналов с использованием двумерной антенной решётки и метода минимального многочлена / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флаксман, О.А. Шмонин // Изв. вузов. Радиофизика. – 2021. – Т. 64. № 3. – С. 237-251.
86. Марков, Г.Т. Антенны / Г.Т. Марков, Д.М. Сазонов. – М.: Энергия, 1975. – 528 с.
87. Баскаков, С.И. Радиотехнические цепи и сигналы / С.И. Баскаков. – 3-е изд. – М.: Высшая школа, 2000. – 462 с.
88. Левин, Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р. Левин. – 3-е изд. – М.: Радио и связь, 1989. – 656 с.

89. Ильин, В.А. Линейная алгебра / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – 4-е изд. – М.: Наука. Физматлит, 1999. – 296 с.
90. Просолов, В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры / В.В. Просолов. – М.: Наука, 1996. – 304 с.
91. Воеводин, В.В. Линейная алгебра. / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1980. – 400 с.
92. Ермолаев, В.Т. Оценивание параметров минимального многочлена сигнальной корреляционной матрицы многоканальной адаптивной приемной системы / В.Т. Ермолаев // Изв. вузов. Радиофизика. – 1995. Т. 38. № 8. – С. 841–859.
93. Тихонов, В.И. Статистическая радиотехника / В.И. Тихонов. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
94. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры. / А.Г. Курош. СПб.: Лань, 2008. – 432 с.
95. Шилов, Г.Е. Математический анализ (функции нескольких вещественных переменных) / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1972. – 624 с.
96. Алексеев, В.Б. Теорема Абеля в задачах и решениях / В.Б. Алексеев. – М.: МЦНМО, 2001. – 192 с.
97. Golub, G.H. Matrix Computations / G.H. Golub, C.F. Van Loan. – 2nd ed. – Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1989. – 694 pp.
98. Watkins, D.S. Fundamentals of Matrix Computations / D.S. Watkins. – New York: Wiley, 1991. – 618 pp.
99. Левитин А.В. Алгоритмы: введение в разработку и анализ / А.В. Левитин. – М.: Вильямс, 2006. – 576 с.
100. Пистолькорс, А.А. Введение в теорию адаптивных антенн. / А.А. Пистолькорс, О.С. Литвинов. – М.: Наука, 1991. – 200 с.
101. Ширман, Я.Д. Теория и техника обработки радиолокационной информации

- на фоне помех / Я.Д. Ширман, В.Н. Манжос. – М.: Радио и связь, 1981. – 416 с.
102. Вержбицкий В.М. Основы численных методов / В.М. Вержбицкий. – М.: Высшая школа, 2009. – 840 с.
103. Bevan, D.D.N. Gaussian channel model for mobile multipath enviroment / D.D.N. Bevan, V.T. Ermolayev, A.G. Flaksman, I.M. Averin // EURASIP Journal on applied Signal Processing. – 2004. - № 9. – С. 1321-1329.
104. Ермолаев, В.Т. Теоретические основы обработки сигналов в беспроводных системах связи: Монография. / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флаксман. – Н. Новгород: ННГУ, 2011. – 368 с.
105. Черный, Ф.Б. Распространение радиоволн / Ф.Б. Черный. – М.: Советское радио, 1972. – 462 с.
106. Кобак, В.О. Радиолокационные отражатели / В.О. Кобак. – М.: Советское радио, 1975. – 348 с.