

Содержание

стр.

Введение	
1. Теоретические сведения	
1.1. Оптимальный фильтр	
1.2. Согласованный фильтр	
1.3. Простые и сложные сигналы	
1.4. ЛЧМ сигнал	
1.5. Код Баркера	
2. Практическая часть	
2.1. Описание виртуальной установки	
2.2. Задания к работе	
Литература.....	
Приложение.....	

Введение

В современных радиолокационных станциях (РЛС) для увеличения разрешающей способности по дальности при сохранении импульсной мощности широко применяются сигналы достаточно большой длительности с внутриимпульсной модуляцией. Согласованная фильтрация обеспечивает временное сжатие такого импульса и является одним из критически важных и наиболее ресурсоемких этапов в цифровой обработке радиолокационных сигналов. От качества и эффективности выполнения данного этапа зависят дальнейшие результаты обработки, в РЛС это обнаружение и распознавание целей. Наличие шума, на фоне которого обнаруживается полезный сигнал, приводит к случайным погрешностям. Чтобы уменьшить погрешность, желательно обработать смесь сигнала и шума так, чтобы увеличить отношение сигнал/шум.

Практически обнаружение и измерение часто сливаются в единый процесс. Однако для первоначального анализа удобно их раздельное рассмотрение. При этом имеется в виду, что в результате обнаружения устанавливаются факты наличия или отсутствия цели в определенных областях пространства. В результате измерения необходимо получать возможно более точные оценки дальности, скорости, угловой координаты в предположении, что наличие цели достоверно. При известной форме сигнала эти две различные задачи приводят к использованию согласованного фильтра.

Использование так называемых простых сигналов дает проигрыш в разрешающей способности при увеличении энергии за счет увеличения длительности сигнала. Требование большой энергии и высокой разрешающей способности не может быть выполнено одновременно при работе с простыми сигналами. Использование сложных сигналов, благодаря их укорачиванию при прохождении через согласованный фильтр, позволяет одновременно получить большую энергию (требуемую дальность) и высокую разрешающую способность.

В данной лабораторной работе изучаются свойства простых и сложных сигналов, особенности их преобразования согласованным фильтром, причины хорошего выделения сигнала на фоне шума с помощью согласованного фильтра.

Целью данной работы является изучение механизма обработки смеси сигнала и шума согласованным фильтром, а именно

- Изучение простых и сложных сигналов и особенностей их обработки в согласованном фильтре.
- Изучение разрешающей способности при использовании простых и сложных сигналов.

- Определение параметров сложных сигналов, которые обеспечивают максимальное отношение сигнал/шум и разрешающую способность.
- Изучение зависимости отношения сигнал/шум от параметров сигналов.
- Понятие о различении сигналов.

1. Теоретические сведения

1.1. Оптимальный фильтр

Пусть на вход линейной системы поступает аддитивная смесь сигнала $m(t)$ и стационарного шума $\xi(t)$, которая преобразуется в полезный сигнал $M(t)$ и шум $\eta(t)$, их аддитивная смесь $y(t)=M(t)+\eta(t)$ (рис. 1). Вид сигнала (функция $m(t)$) и спектральная плотность мощности шума на входе $S_{\xi}(\omega)$ известна.



Рис. 1

Какими нужно выбрать характеристики линейной системы – коэффициент передачи $K(j\omega)$, импульсную **переходную** характеристику системы $h(t)$ (или отклик системы на входное воздействие в виде $\delta(t)$), чтобы отношение сигнал/шум на выходе линейной системы стало максимально возможным по сравнению со всеми другими линейными системами? Так как фильтр линейный, то входные и выходные сигналы связаны интегралами Дюамеля:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')h(t-t')dt', \quad (1)$$

$$M(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t')h(t-t')dt', \quad (2)$$

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t')h(t-t')dt'. \quad (3)$$

За отношение сигнал/шум ρ примем отношение мощности сигнала в момент, когда сигнал достигает своего максимального значения, к средней мощности шума $\langle \eta^2 \rangle$, где $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по статистическому ансамблю. Например, отношение сигнал/шум на выходе системы может быть записано так:

$$\rho_{\text{вых}} = \frac{M^2(t_0)}{\langle \eta^2 \rangle}. \quad (4)$$

Здесь t_0 – момент времени, когда сигнал $M(t)$ достигает максимального значения $M(t_0)$, $\langle \eta^2 \rangle$ – дисперсия шума на выходе системы (полагаем, что $\langle \eta \rangle = 0$). Известно, что любой сигнал $f(t)$ и его комплексный спектр связаны преобразованием Фурье:

$$C_f(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (5)$$

где j – мнимая единица. Функция $f(t)$ представляется в виде интеграла в частотной области с помощью обратного преобразования Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_f(j\omega)e^{j\omega t} d\omega, \quad (6)$$

то есть спектр входного сигнала $m(t)$ можно представить в виде

$$C_m(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t)e^{-j\omega t} dt \quad (7)$$

Аналогично можно представить комплексные спектры $C_\xi(j\omega)$, $C_x(j\omega)$, $C_M(j\omega)$, $C_\eta(j\omega)$, $C_y(j\omega)$ для реализаций сигналов $\xi(t)$, $x(t)$, $M(t)$, $\eta(t)$, $y(t)$ соответственно. Коэффициент передачи линейной системы (в нашем случае – фильтра) $K(j\omega)$ определяется как преобразование Фурье его импульсной переходной характеристики

$$K(j\omega) \equiv C_h(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \quad (8)$$

Из (3), (5), (8) можно получить связь комплексных спектров на входе и выходе фильтра:

$$C_y(j\omega) = K(j\omega) \cdot C_x(j\omega), \quad (9)$$

$$C_M(j\omega) = K(j\omega) \cdot C_m(j\omega), \quad (10)$$

$$C_\eta(j\omega) = K(j\omega) \cdot C_\xi(j\omega). \quad (11)$$

Пусть импульсный сигнал $m(t)$ является детерминированной (известной) функцией времени. Тогда $M(t)$ также полностью известный сигнал, а спектры $C_m(j\omega)$, $C_M(j\omega)$ – детерминированные функции в частотной области. Спектры же шумов $C_\xi(j\omega)$, $C_\eta(j\omega)$ – случайны в силу случайности процессов $\xi(t)$, $\eta(t)$. Для описания шумов с помощью соотношений

$$2\pi \cdot S_\xi(\omega)\delta(\omega - \omega') = \langle C_\xi^*(j\omega) \cdot C_\xi(j\omega') \rangle, \quad (12)$$

$$2\pi \cdot S_\eta(\omega)\delta(\omega - \omega') = \langle C_\eta^*(j\omega) \cdot C_\eta(j\omega') \rangle \quad (13)$$

можно ввести детерминированные функции частоты – спектральные плотности мощности $S_\xi(j\omega)$, $S_\eta(j\omega)$. В отличие от комплексных спектров спектральные плотности мощности $S_\xi(j\omega)$, $S_\eta(j\omega)$ являются действительными функциями частоты ω . Спектральные плотности мощности связаны преобразованиями Фурье с корреляционными функциями случайных процессов:

$$S_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_\xi(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (14)$$

$$K_{\xi}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (15)$$

где $K_{\xi}(\tau) = \langle \xi^*(t) \xi(t+\tau) \rangle$ – корреляционная функция процесса $\xi(t)$. Из (11) и (13) следует, что спектральные плотности шумов на входе и выходе фильтра связаны соотношением

$$S_{\eta}(\omega) = |K(j\omega)|^2 S_{\xi}(\omega). \quad (16)$$

Полезный сигнал на выходе фильтра $M(t)$ выражается через его спектр с помощью обратного преобразования Фурье:

$$M(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_M(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (17)$$

Таким образом, можно выразить сигнал $M(t)$ и среднюю мощность шума на выходе системы $\langle \eta^2 \rangle$ через коэффициент передачи системы $K(j\omega)$ и, соответственно, через Фурье-образ входного сигнала $C_m(j\omega)$ и спектральную плотность мощности входного шума $S_{\xi}(\omega)$:

$$M(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(j\omega) C_m(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (18)$$

$$\langle \eta^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\eta}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |K(j\omega)|^2 S_{\xi}(\omega) d\omega. \quad (19)$$

Подставляя эти выражения в (3), можно получить:

$$\rho_{\text{вых}} = \frac{\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(j\omega) C_m(j\omega) e^{-j\omega t_0} d\omega \right]^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |K(j\omega)|^2 S_{\xi}(\omega) d\omega} \quad (20)$$

Соотношение (20) показывает, что $\rho_{\text{вых}}$ является функционалом от $K(j\omega)$. В числителе этого выражения стоит $M^2(t_0)$ – мощность входного сигнала в фиксированный момент времени t_0 . Максимальное значение этого функционала $\rho_{\text{вых}}$ может быть найдено путем варьирования $K(j\omega)$. Однако можно не прибегать к методам вариационного исчисления, а поступить следующим образом: получить оценку сверху для (20), а потом подобрать $K(j\omega)$ таким, при котором $\rho_{\text{вых}}$ как раз и будет достигать своего максимально возможного значения.

Максимально возможное значение числителя в (20) может быть записано с помощью неравенства Коши-Буняковского:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx, \quad (21)$$

После умножения и деления подынтегрального выражения на $\sqrt{S_{\xi}(\omega)}$ получается:

$$\rho_{\text{вых}} \leq \frac{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |K(j\omega)|^2 S_{\xi}(\omega) d\omega \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|C_m(j\omega)|^2}{S_{\xi}(\omega)} d\omega}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |K(j\omega)|^2 S_{\xi}(\omega) d\omega}. \quad (22)$$

Учитывая, что один из интегралов в числителе оказывается равным интегралу в знаменателе, после сокращения легко получить

$$\rho_{\text{вых}} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|C_m(j\omega)|^2}{S_{\xi}(\omega)} d\omega \quad (23)$$

В (23) записано максимально возможное значение отношения сигнал/шум на выходе линейной системы. Теперь можно подобрать $K(j\omega)$ таким, чтобы интеграл, квадрат которого стоит в числителе (20), равнялся бы правой части неравенства (23). То есть $K_{\text{онм}}(j\omega)$ находится из соотношения:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\text{онм}}(j\omega) C_m(j\omega) e^{j\omega t_0} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|C_m(j\omega)|^2}{S_{\xi}(\omega)} d\omega. \quad (24)$$

Коэффициент передачи, при котором выполняется это равенство, как раз и будет коэффициентом передачи оптимального фильтра $K_{\text{онм}}(j\omega)$, то есть на выходе системы будет достигнуто максимально возможное соотношение сигнал/шум:

$$K_{\text{онм}}(j\omega) = C_1 \frac{C_m^*(j\omega) e^{-j\omega t_0}}{S_{\xi}(\omega)}. \quad (25)$$

Анализируя выражение (25), можно отметить *основные свойства оптимальной линейной системы*.

1. $K_{\text{онм}}(j\omega)$ определяется с точностью до произвольного постоянного множителя C_1 (при изменении C_1 не изменяется $\rho_{\text{вых}}$).

2. $K_{\text{онм}}(j\omega)$ пропорционален $C_m^*(j\omega)$, где $C_m(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t) e^{-j\omega t} dt$ -

Фурье-образ входного сигнала. Если его записать в виде $C_m(j\omega) = |C_m(j\omega)| e^{j\varphi_m(\omega)}$, где $|C_m(j\omega)|$ - спектр амплитуд, а $\varphi_m(\omega)$ - фазовый спектр сигнала $m(t)$, то, анализируя (25), можно увидеть, как изменяются при прохождении через оптимальную линейную систему амплитуды спектральных составляющих сигнала $m(t)$ и какие фазовые сдвиги добавляются системой этим спектральным составляющим.

Пропорциональность $K_{\text{онм}}(j\omega)$ комплексно-сопряженному спектру сигнала $C_m^*(j\omega)$ означает, что оптимальная линейная система пропускает лишь те спектральные составляющие входного процесса, которые есть в спектре сигнала $m(t)$. И чем сильнее представлена гармоника какой-то частоты в спектре сигнала, тем больше она усиливается в оптимальном фильтре. Те же частоты, которых нет в спектре сигнала, оптимальной системой не пропускаются.

3. Оптимальный фильтр изменяет фазовый спектр сигнала. Из-за того, что $K_{\text{онм}}(j\omega)$ пропорционален комплексно-сопряженному спектру

сигнала, фазовые сдвиги, добавляемые системой различным спектральным составляющим, обратны по знаку фазовому спектру сигнала. Благодаря этому фазовый спектр выходного сигнала становится нулевым $\varphi_M(\omega)=0$. Это обстоятельство очень важно для понимания того, за счет чего максимизируется отношение сигнал/шум в оптимальном фильтре и будет подробно обсуждено в разделе, посвященному согласованному фильтру.

4. $K_{opt}(j\omega)$ обратно пропорционален $S_\xi(\omega)$ - спектральной плотности мощности входного шума, то есть чем интенсивнее шум на какой-то частоте, содержащейся в спектре сигнала, тем меньше коэффициент усиления системы на этой частоте.

5. Выражение для $K_{opt}(j\omega)$ содержит множитель $\exp(-j\omega t_0)$ - этот множитель является коэффициентом передачи идеальной линии задержки на время t_0 . Рассмотрим линейную систему (рис. 2).

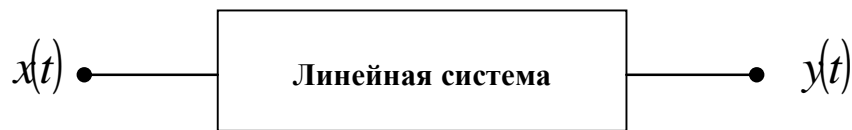


Рис. 2

Известно, что если на вход линейной системы подать гармоническое колебание единичной амплитуды, то выходное колебание будет той же частоты, а его комплексная амплитуда будет равна коэффициенту передачи системы, то есть $x(t)=\exp(j\omega t) \rightarrow y(t)=K(j\omega)\exp(j\omega t)$.

Если подать $x(t)=\exp(j\omega t)$ на идеальную линию задержки (рис. 3) на время t_0 , то $y(t)=\exp(j\omega(t - t_0))=\exp(j\omega t) \exp(-j\omega t_0)$.

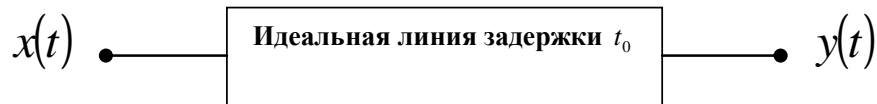


Рис. 3.

Отсюда видно, что $K_{задержки}(j\omega)=\exp(-j\omega t_0)$. Из этого следует, что в оптимальном фильтре обязательно происходит задержка на время t_0 (где t_0 - момент времени, в который выходной сигнал достигает своего максимального значения). И как будет показано ниже, эта задержка t_0 не может быть меньше длительности выходного сигнала T_m , то есть $t_0 \geq T_m$.

1.2. Согласованный фильтр

Согласованным фильтром для заданного импульсного сигнала, принимаемого на фоне стационарного белого шума, называют такой линейный фильтр с постоянными параметрами, на выходе которого достигается максимально возможное отношение сигнал/шум. Фактически это оптимальный фильтр для сигнала, замаскированного шумом, имеющим

функцию корреляции вида $K_{\xi}(\tau)=D\delta(\tau)$. Здесь D – спектральная плотность мощности входного белого шума.

Коэффициент передачи согласованного фильтра $K_{сф}(j\omega)$ легко получается из (25) при $S_{\xi}(\omega)=D$.

$$K_{сф}(j\omega) = \frac{C_1}{D} C_m^*(j\omega) \cdot e^{-j\alpha_0} = C_0 C_m^*(j\omega) \cdot e^{-j\alpha_0}. \quad (26)$$

Теперь коэффициент передачи $K_{сф}(j\omega)$ совпадает с точностью до постоянного множителя C_0 с комплексно-сопряженным спектром входного сигнала и еще имеет множитель $\exp(-j\omega t_0)$, отражающий наличие задержки в фильтре на величину t_0 .

Для более подробного рассмотрения амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристик согласованного фильтра следует рассмотреть комплексный спектр входного импульсного сигнала и коэффициент передачи фильтра в виде

$$C_m(j\omega) = |C_m(j\omega)| e^{j\varphi_m(\omega)}, \quad K(j\omega) = |K(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}. \quad (27)$$

Для согласованного фильтра из (20) получается:

$$|K(j\omega)| = |C_0| \cdot |C_m(j\omega)|, \quad \varphi(\omega) = -\varphi_m(\omega) - \alpha_0 + \arg(C_0). \quad (28)$$

Отсюда видно, что амплитудно-частотная характеристика согласованного фильтра (модуль передаточной функции) пропорциональна амплитудно-частотному спектру входного сигнала (“согласована” со спектром сигнала). Фазо-частотная характеристика фильтра с точностью до фазового спектра задержки $-\omega t_0$ противоположна по знаку фазовому спектру сигнала $\varphi_m(\omega)$. Это означает, что согласованный фильтр имеет в общем случае неравномерную амплитудно-частотную и нелинейную фазо-частотную характеристики, т.е. фильтр искажает сигнал. Однако с точки зрения критерия максимизации выходного отношения сигнал-шум это не имеет никакого значения. Совпадение формы модуля передаточной характеристики фильтра с амплитудным спектром входного импульса обеспечивает выделение наиболее интенсивных участков спектра сигнала. Слабые участки спектра сигнала фильтр ослабляет.

Фазо-частотная характеристика согласованного фильтра компенсирует взаимные фазовые сдвиги $\varphi_m(\omega)$ отдельных гармонических составляющих спектра сигнала. Поэтому комплексный (мгновенный) спектр выходного импульсного сигнала не зависит от $\varphi_m(\omega)$ и имеет вид:

$$C_M(j\omega) = K(j\omega)C_m(j\omega) = C_0 |C_m(j\omega)|^2 e^{-j\alpha_0}. \quad (29)$$

Нахождение импульсной переходной характеристики согласованного фильтра $h_{сф}(t)$.

Известно, что импульсная переходная характеристика системы $h(t)$ является Фурье-образом коэффициента передачи системы $K(j\omega)$:

$$\begin{aligned}
h_{cf}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_{cf}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\
&= \frac{C_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_m^*(j\omega) e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{C_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_m(-j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega
\end{aligned} \quad (30)$$

Вводя новую переменную $\tilde{\omega} = -\omega$, можно получить

$$h_{cf}(t) = \frac{C_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_m(j\tilde{\omega}) e^{j\tilde{\omega}(t_0-t)} d\tilde{\omega} = C_0 m(t_0 - t) = C_0 m(-(t - t_0)). \quad (31)$$

Из (31) следует, что для получения импульсной переходной характеристики согласованного фильтра нужно построить функцию времени, являющуюся зеркальным отражением сигнала $m(t)$ относительно оси ординат, и затем сдвинуть по оси времени на величину t_0 . Это легко пояснить с помощью рисунков (рис.4 – рис.7). Пусть сигнал $m(t)$ имеет вид:

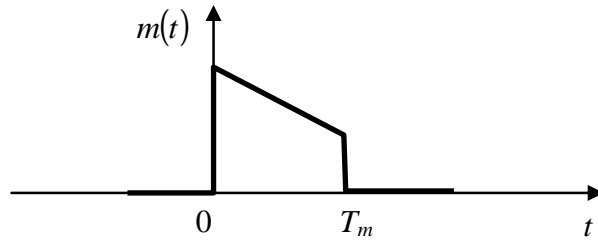


Рис. 4

Тогда функция, зеркально отраженная относительно оси ординат выглядит следующим образом:

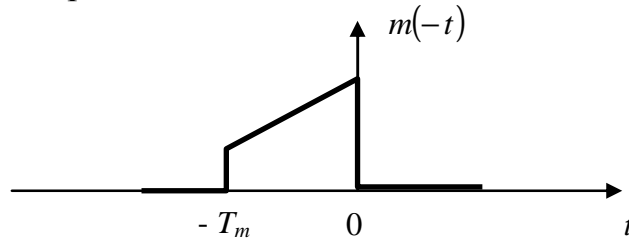


Рис. 5

Эта функция не может быть импульсной переходной характеристикой физически реализуемой системы, так как последняя должна быть равна нулю при $t \leq 0$ (должен быть выполнен принцип причинности: реакция на $\delta(t)$ должна быть равна нулю при $t < 0$). Поэтому нужно этот сигнал задержать на время $t_0 \geq T_m$ (не меньше, чем длительность входного сигнала T_m).

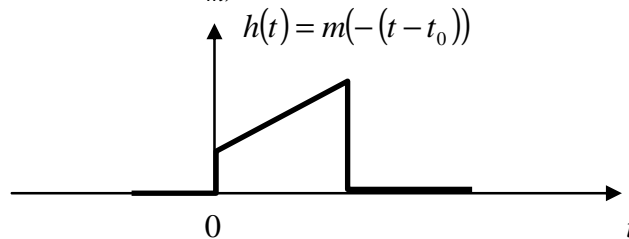


Рис. 6

Вообще говоря, $h(t)$ не зависит от амплитуды входного сигнала, а определяется только формой импульса. Например, на рис. 7 изображена импульсная переходная характеристика $h(t)=C_0 m(-(t-t_0))$, где коэффициент C_0 подобран так, чтобы $h_{max}(t)=1$:

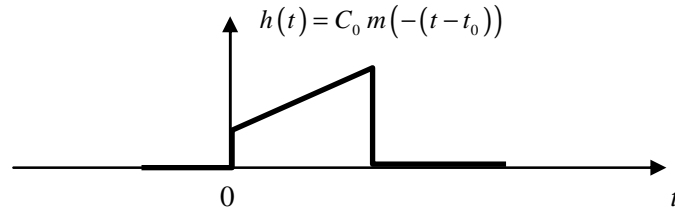


Рис. 7

В общем случае сигнал $m(t)$ длительности T появляется не в нулевой момент времени, а в момент времени $t = \tau$. Тогда условие физической реализуемости принимает вид:

$$t_0 \geq \tau + T. \quad (32)$$

Данное условие означает, что пиковое значение выходного сигнала согласованного фильтра достигается не раньше, чем окончится импульсный сигнал, поступающий на вход фильтра. Иначе невозможно накопить всю энергию входного сигнала для формирования пика на выходе фильтра в момент времени t_0 . Увеличение t_0 сверх величины $\tau + T$ не влияет на величину максимума выходного сигнала, а лишь сдвигает его в сторону большего запаздывания. Поэтому имеет смысл выбирать $t_0 = \tau + T$. Тогда максимальное значение выходного сигнала достигается точно в момент окончания входного импульса.

Какова форма сигнала $M(t)$ на выходе согласованного фильтра?

Сигнал на выходе линейной системы является интегральной сверткой входного сигнала и импульсной переходной характеристики системы, поэтому, учитывая (31), можно получить:

$$M(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(\tilde{t}) h(t - \tilde{t}) d\tilde{t} = \int_{-\infty}^{+\infty} m(\tilde{t}) C_0 m(t_0 - t + \tilde{t}) d\tilde{t} \quad (33)$$

$$M(t) = C_0 \Psi(t_0 - t) = C_0 \Psi(t - t_0) \quad (34)$$

Из формулы (34) видно, что сигнал на выходе согласованного фильтра пропорционален функции корреляции первого рода полезного сигнала $\Psi_m(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t) m(t + \tau) dt$ с коэффициентом пропорциональности C_0 .

Сигнал $M(t)$ достигает максимального значения в момент t_0 , поскольку функция корреляции всегда имеет максимальное значение в нуле $\Psi_m(\tau)_{max} = \Psi(0)$. Тогда максимальное значение с точностью до постоянного множителя C_0 равно энергии сигнала:

$$M(t_0) = C_0 \Psi_m(0) = C_0 \int_{-\infty}^{+\infty} m^2(t) dt = C_0 \mathcal{E}_m. \quad (35)$$

Можно записать $M(t_0)$ через спектр $C_m(j\omega)$ сигнала $m(t)$:

$$M(t_0) = C_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |C_m(j\omega)|^2 d\omega = C_0 \mathcal{E}_m. \quad (36)$$

Как преобразуется шум в согласованном фильтре? Функция корреляции выходного шума $K_\eta(\tau)$ может быть записана через интеграл Фурье от спектральной плотности мощности выходного шума

$$\begin{aligned} K_\eta(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_\eta(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_\xi(\omega) |K_{cf}(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} DC_0^2 |C_m^*(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega = DC_0^2 \Psi_m(\tau) \end{aligned} \quad (37)$$

То есть

$$K_\eta(\tau) = DC_0^2 \Psi_m(\tau). \quad (38)$$

Это означает, что функция корреляции шума на выходе согласованного фильтра $K_\eta(\tau)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с функцией корреляции первого рода входного сигнала $\Psi_m(\tau)$, а также с формой выходного сигнала $M(t)$ (34).

Таким образом, на выходе согласованного фильтра происходит “выравнивание” временных структур сигнальной и шумовой функций. В то время как в суммарном входном сигнале $x(t)$ импульс $m(t)$ и шум $\xi(t)$ могут существенно различаться по характеру изменения во времени, на выходе согласованного фильтра сигнал $M(t)$ и шум $\eta(t)$ становятся подобными друг другу. Можно сказать, что шум на выходе согласованного фильтра будет сигналоподобным.

Этот факт иллюстрируется рисунками, на которых качественно изображены виды входной и выходной реализаций смеси сигнала и шума (рис. 8 и 9).

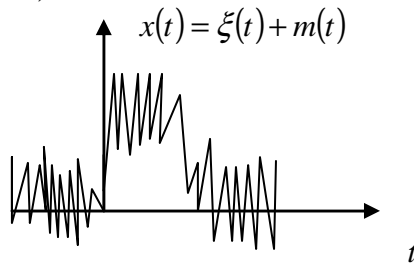


Рис. 8

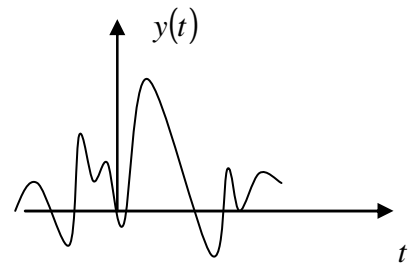


Рис. 9

Входной шум является белым (быстро изменяющийся, δ -коррелированный). На его фоне сигнал выглядит медленно изменяющейся функцией. На выходе согласованного фильтра вид шумовых выбросов и вид сигнала практически одинаковы (по форме выбросов их не отличить).

Сигналоподобность выбросов шума естественно связана с тем, что из всех спектральных составляющих белого шума $\xi(t)$ согласованный фильтр пропускает только те составляющие (и в той же пропорции), которые есть в сигнале $m(t)$.

Для более наглядного представления о том, как образуется значение выходной реализации из входной, можно рассмотреть интеграл Дюамеля

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tilde{t}) \cdot h(t - \tilde{t}) d\tilde{t}$. В согласованном фильтре $h_{сф}(t) = m(t_0 - t)$, где t_0 – время задержки, его минимальное значение равно длительности сигнала $t_{0min} = T$. Если $t_{0min} = T$, тогда:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tilde{t}) \cdot m(T - (t - \tilde{t})) d\tilde{t} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tilde{t}) \cdot m(T - t + \tilde{t}) d\tilde{t} \quad (39)$$

Пусть полезный сигнал $m(t)$ имеет форму, представленную на рис. 10:

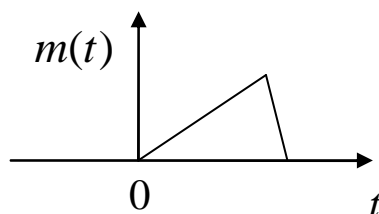


Рис. 10 Полезный сигнал на входе согласованного фильтра.

Его длительность конечна и изменяется в пределах $0 \leq T - t + \tilde{t} \leq T$, отсюда $t - T \leq \tilde{t} \leq t$. Тогда в выражении (39) пределы интегрирования можно заменить:

$$y(t) = \int_{t-T}^t x(\tilde{t}) \cdot m(T - t + \tilde{t}) d\tilde{t} = \int_{t-T}^t x(\tilde{t}) \cdot m(\tilde{t} + T - t) d\tilde{t}. \quad (40)$$

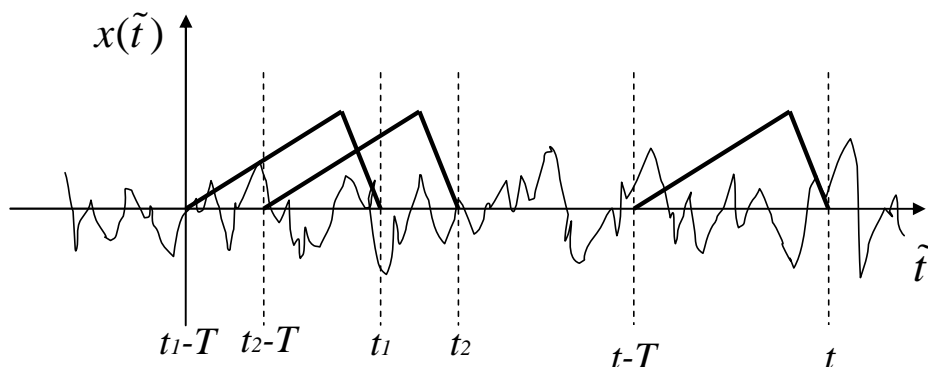


Рис. 11 Получение значения реализации на выходе согласованного фильтра в различные моменты времени.

Таким образом, чтобы получить значение выходной реализации в момент времени t , нужно проинтегрировать входную реализацию на интервале времени $(t - T, t)$, предшествующем этому моменту и по длительности равном длительности сигнала, при этом предварительно умножив входную реализацию на весовой множитель $m(\tilde{t} + T - t)$, повторяющий вид входного сигнала.

По определению (4), отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра $\rho_{вых}$:

$$\rho_{вых} = \frac{M^2(t_0)}{\langle \eta^2 \rangle} \quad (41)$$

Из соотношения (23) и того факта, что коэффициент передачи согласованного фильтра с условием достижения максимума в выражении (23), следует, что

$$(\rho_{\text{вых}})_{\text{сф}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|C_m(j\omega)|^2}{D} d\omega = \frac{\mathcal{E}_m}{D}. \quad (42)$$

Это означает, что максимальное отношение сигнал/шум, которое можно получить при линейном преобразовании смеси полезного сигнала $m(t)$ с белым шумом, равно отношению энергии сигнала $\mathcal{E}_m = \int_{-\infty}^{+\infty} m^2(t) dt$ к спектральной плотности мощности шума D .

Если принять, что сигнал обнаружим с допустимой вероятностью ошибки при $(\rho_{\text{вых}})_{\text{сф}} \geq \rho_0$ (здесь ρ_0 определяется требованиями к точности обнаружения), то из (42) следует, что обнаружимость сигнала определяется его энергией и оказывается одинаковой в следующих случаях (рис. 12а,б):

- а) $m(t)$ короткий сигнал большой мощности;
- б) $m(t)$ длинный во времени сигнал малой мощности.

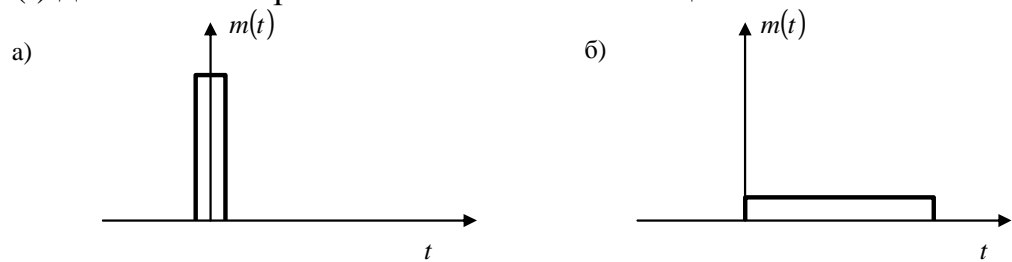


Рис. 12

Увеличение энергии импульса можно получить за счет увеличения амплитуды A или длительности T , т.к. энергия сигнала представляется в виде

$$E_m = A^2 E_s = A^2 \int_0^T s^2(t') dt' \leq A^2 T \quad (43)$$

Здесь $m(t) = A \cdot s(t)$, а $s(t)$ – сигнал, совпадающий по форме с сигналом $m(t)$, но имеющий единичную амплитуду.

Иногда на практике затруднительно реализовать большие мощности, тогда остаётся один путь – увеличивать длительность зондирующего импульса, то есть получается ситуация, соответствующая рисунку 12б. Но здесь приходится считаться со следующим фактом: увеличение длительности сигнала вступает в противоречие с разрешающей способностью (точностью определения координаты цели по дальности), так как разрешающая способность импульсных сигналов на выходе согласованного фильтра зависит от протяженности выходных сигналов. Эти противоречивые требования большой энергии сигнала $m(t)$ за счет увеличения его длительности и высокой разрешающей способности, требующей достаточно коротких во времени сигналов, удастся одновременно удовлетворить, используя сложные сигналы.

1.3. Простые и сложные сигналы

Как было показано выше, сигнал на выходе согласованного фильтра имеет форму автокорреляционной функции входного сигнала

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} m(\tilde{t})h(t - \tilde{t})d\tilde{t} = \int_{-\infty}^{\infty} m(\tilde{t})C_0m(t_0 - t + \tilde{t})d\tilde{t} = C_0\Psi(t - t_0). \quad (44)$$

Тогда его эффективную протяженность можно определить как время корреляции входного сигнала

$$\tau_k = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_m(\tau)|d\tau}{\Psi_m(0)} \quad (45)$$

Для многих сигналов $m(t)$ увеличение их длительности T сопровождается увеличением времени корреляции τ_k . Такие сигналы принято называть *простыми*. Например, если $m(t)$ – прямоугольный импульс единичной амплитуды

$$m(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0; T] \\ 0, & t \in [0; T] \end{cases}, \quad (46)$$

то его энергия определяется длительностью $E_m = T$, автокорреляционная функция имеет вид треугольного импульса

$$\Psi_m(\tau) = \begin{cases} T(1 - \frac{|\tau|}{T}), & 0 \leq \tau \leq T \\ 0, & \tau < 0, \tau > T \end{cases}, \quad (47)$$

мгновенный спектр и спектральная плотность энергии соответственно равны

$$C_m(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} m(t)e^{-j\omega t}dt = T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-j\omega t}, \quad (48)$$

$$\mathfrak{E}_m(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_m(t)e^{-j\omega \tau}d\tau = T^2 \frac{\sin^2(\omega T/2)}{(\omega T/2)^2}, \quad (49)$$

и время корреляции, вычисленное по формуле (45), равно длительности импульса

$$\tau_k = T. \quad (50)$$

На рис. 13 показаны временные и спектральные характеристики прямоугольного видеоимпульса:

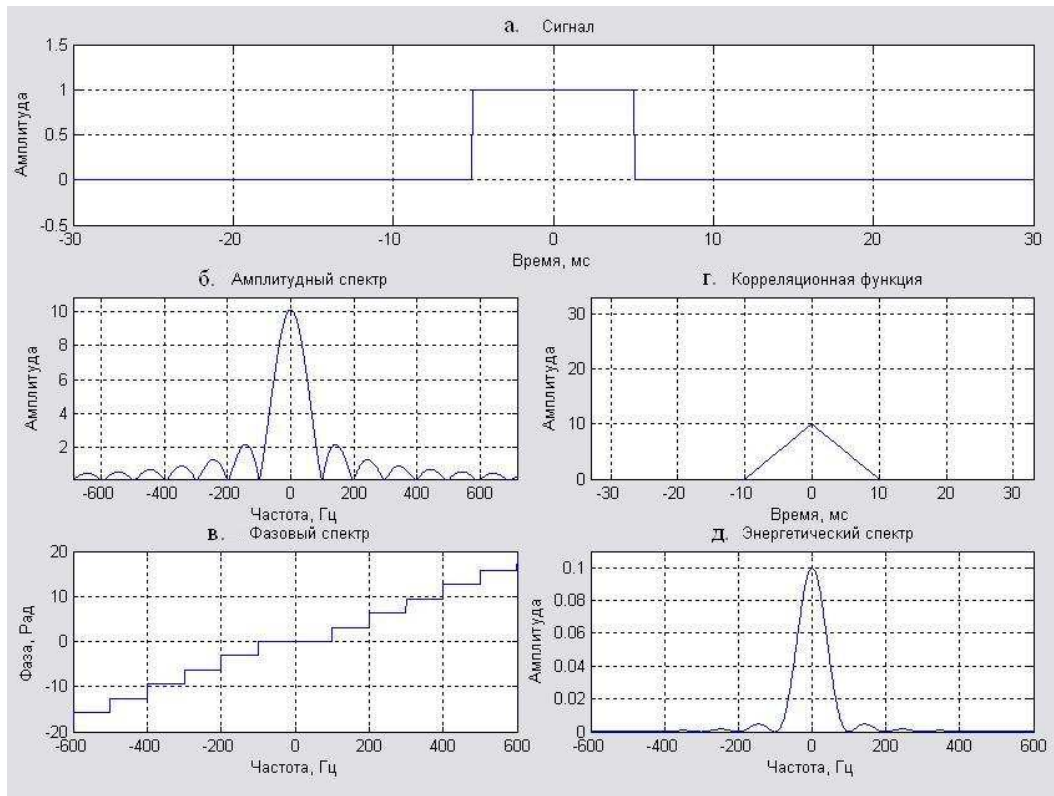


Рис. 13 Временная реализация (а.), амплитудный спектр (б.), фазовый спектр (в.), функция корреляции (г.), и спектр энергии (д.) прямоугольного видеоимпульса.

Еще один простой сигнал, рассматриваемый в данной работе – прямоугольный видеоимпульс с гармоническим заполнением

$$m(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), & t \in [0; T] \\ 0, & t \notin [0; T] \end{cases} \quad (51)$$

где ω_0 – известная частота, φ_0 – начальная фаза. При $\omega_0 \gg \frac{2\pi}{T}$ можно получить выражения $\mathfrak{E}_m = \frac{T}{2}$;

$$\Psi_m(\tau) = \begin{cases} \frac{T}{2} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \cos \omega_0 \tau, & |\tau| \leq T \\ 0, & |\tau| > T \end{cases} \quad (52)$$

$$C_m(j\omega) = \begin{cases} \frac{T}{2} \frac{\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} T\right)}{\frac{\omega - \omega_0}{2} T} e^{j\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} T + \varphi_0\right)}, & \omega > 0, \\ \frac{T}{2} \frac{\sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} T\right)}{\frac{\omega + \omega_0}{2} T} e^{j\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} T + \varphi_0\right)}, & \omega < 0. \end{cases} \quad (53)$$

$$\mathfrak{E}_m(\omega) = \frac{T^2}{2} \left\{ \frac{\sin^2\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} T\right)}{\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} T\right)^2} + \frac{\sin^2\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} T\right)}{\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} T\right)^2} \right\} \quad (54)$$

Для прямоугольного видеоимпульса с гармоническим заполнением вышеприведенные характеристики представлены на рис. 14:

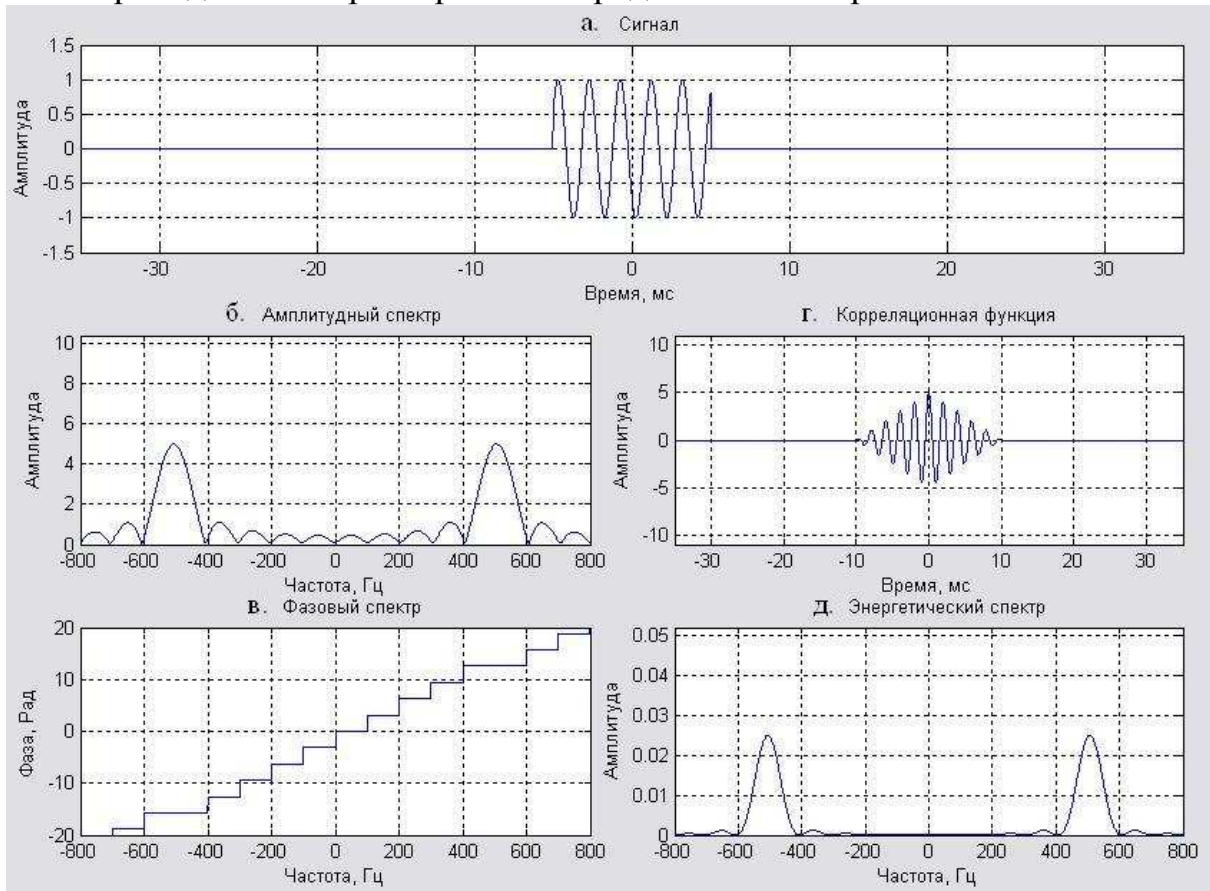


Рис. 14 Временная реализация (а.), амплитудный спектр (б.), фазовый спектр (в.), функция корреляции (г.), и спектр энергии (д.) прямоугольного видеоимпульса с гармоническим заполнением.

Для нахождения времени корреляции в соответствии с (45) и (52), необходимо вычислить интеграл

$$\tau_k = \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) |\cos(\omega_0 \tau)| d\tau \quad (55)$$

При всех τ выполняются неравенства

$$1 \geq |\cos(\omega_0 \tau)| \geq \cos^2(\omega_0 \tau), \quad (56)$$

поэтому вместо вычисления (55) можно записать для времени корреляции оценки

$$\int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) d\tau > \tau_k > \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \cos^2(\omega_0 \tau) d\tau, \quad (57)$$

откуда несложно получить, что $T > \tau_k > \frac{T}{2}$. Следовательно, при увеличении длительности импульса T время корреляции прямоугольного гармонического сигнала (51) также пропорционально увеличивается. Таким образом, прямоугольный гармонический сигнал (51) является простым сигналом.

Более строгое определение простых и сложных импульсных сигналов можно дать, вводя понятие базы сигнала $B=T\Delta f$, где T – эффективная длительность, Δf – эффективная ширина полосы спектра сигнала

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{E}_m(\omega)d\omega}{\mathcal{E}_m(\omega)_{\max}} = \frac{\Psi_m(0)}{\mathcal{E}_m(\omega)_{\max}}. \quad (58)$$

База простых сигналов имеет величину порядка единицы: $B \sim 1$. В частности, ширина спектра сигналов (46) и (51), как следует из (47), (48), (53), (54) и (58), обратна их длительности $\Delta f = 1/T$, а база равна единице $B=1$, что позволяет их отнести к простым сигналам.

Сложными называются сигналы, база которых значительно больше единицы, т.е. $B \gg 1$. Сложные сигналы можно получить в результате внутриимпульсной модуляции сигнала, обогащающей его спектр, т.е. при заданном T увеличивать Δf . Чем больше база сигнала, тем сложнее его структура и тем больше информации несет такой сигнал.

В ходе согласованной фильтрации над сигналом проводятся такие операции, которые сложный сигнал превращают в простой, т.к. согласованный фильтр выравнивает фазо-частотную характеристику выходного импульса и, следовательно, удаляет внутриимпульсную модуляцию входного сигнала (29). Поскольку ширина спектра Δf у входного и выходного сигналов одинакова, то подобное превращение сложного сигнала в простой должно сопровождаться эффектом сжатия сигнала во временной области. При этом выходной сигнал согласованного фильтра имеет эффективную протяженность $T_{\text{вых}} = 1/\Delta f$, т.е. в $B \gg 1$ раз меньшую, чем длительность входного сигнала.

Задержка сигнала τ в радиолокационном приемнике пропорциональна дальности до цели, а частота принимаемого сигнала ω_0 имеет доплеровское смещение, по которому можно определить направление и скорость движения цели. Очень короткий импульс (51) обладает хорошей разрешающей способностью по дальности, но при этом усложняется задача определения доплеровского смещение частоты. Импульсы же большой длительности (непрерывные радиосигналы на одной частоте) имеют хорошее разрешение по скорости и плохое по дальности. За счет эффекта сжатия выходного импульса согласованного фильтра применение сложных сигналов позволяет улучшить разрешение по дальности, не ухудшая разрешение по скорости.

1.4. ЛЧМ сигнал

Импульсы с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) имеют вид

$$m(t) = \begin{cases} \cos \left[\left(\omega_0 - \frac{\Omega}{2} \right) t + \frac{\Omega t^2}{2T} + \varphi_0 \right], & t \in [0; T], \\ 0, & t \in [0, T] \end{cases} \quad (59)$$

Типичная реализация такого сигнала представлена на рис. 15:

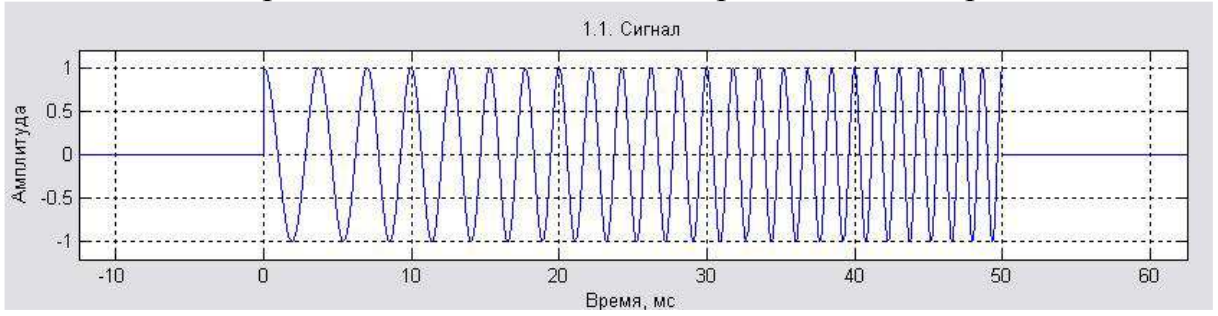


Рис. 15 ЛЧМ сигнал.

Амплитуда импульса здесь постоянна, а мгновенная фаза меняется по квадратичному закону

$$\varphi(t) = \int_0^t \omega(t') dt' = \frac{\Omega t^2}{2T} + \left(\omega_0 - \frac{\Omega}{2} \right) t + \varphi_0, \quad t \in [0, T], \quad (60)$$

где φ_0 – начальная фаза, которая считается известной, $|\Omega|$ – девиация частоты, ω_0 – центральная частота. Мгновенная частота сигнала изменяется во времени линейно в течение длительности импульса (см. рис. 16):

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 - \frac{\Omega}{2} + \frac{\Omega}{T} t, \quad t \in [0, T]. \quad (61)$$

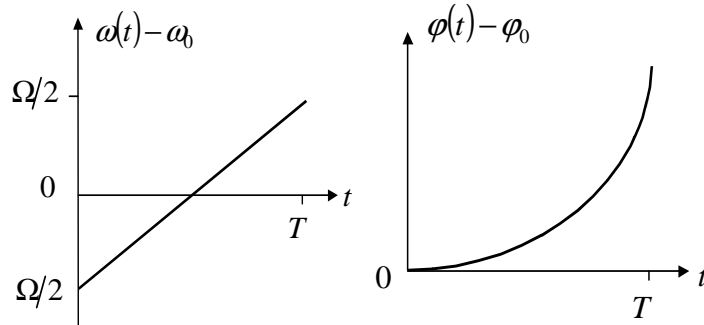


Рис. 16 Зависимость мгновенной частоты и фазы ЛЧМ сигнала от времени.

Можно показать, что сигналу (59) соответствует корреляционная функция

$$\Psi_m(\tau) = \begin{cases} \frac{T}{2} \left(1 - \frac{|\tau|}{T} \right) \cdot \frac{\sin \left[\frac{\Omega}{2} \left(1 - \frac{|\tau|}{T} \right) \tau \right]}{\frac{\Omega}{2} \left(1 - \frac{|\tau|}{T} \right) \tau} \cos(\omega_0 \tau), & |\tau| \leq T, \\ 0, & |\tau| > T. \end{cases} \quad (62)$$

Огибающая корреляционной функции при $|\Omega| \cdot T \gg 2\pi$ определяется выражением

$$|\Psi_m(\tau)| \approx \frac{T}{2} \cdot \frac{\sin \left(\frac{\Omega \tau}{2} \right)}{\frac{\Omega \tau}{2}}. \quad (63)$$

Отсюда видно, что энергия импульса $\mathcal{E}_m = \Psi_m(0) = T/2$ пропорциональна его длительности, а время корреляции не зависит от T и обратно пропорционально девиации частоты $\tau_k \approx (2\pi)/|\Omega|$. Таким образом, импульс на выходе согласованного фильтра укорачивается по сравнению с входным. Коэффициент укорочения равен базе сигнала

$$B = \frac{T}{\tau_k} = \frac{T \cdot |\Omega|}{2\pi} \gg 1. \quad (64)$$

ЛЧМ сигналы широко используются в радиолокации. На практике коэффициент сжатия импульса обычно бывает больше 10, а иногда достигает 1000 и более.

Можно отметить, что корреляционная функция ЛЧМ сигнала (63) имеет достаточно высокий уровень боковых лепестков по отношению к главному максимуму (21% для первого бокового лепестка и 13% для второго). Это несколько снижает разрешающую способность по дальности и различение двух близко расположенных целей. Для подавления боковых лепестков вместо ЛЧМ сигнала используют сигнал с нелинейным нарастанием частоты заполнения, тогда боковые лепестки выходного сигнала значительно уменьшаются. При этом расширяется главный максимум. Одновременно уменьшается отношение сигнал-шум на выходе фильтра.

Для ЛЧМ сигнала с прямоугольной огибающей точная спектральная плотность мощности выражается через интегралы Френеля [1] и имеет достаточно сложное аналитическое выражение. Но при условии узкополосности $\Omega_d \ll \omega_0$ и при достаточно большой девиации частоты $\Omega_d \gg 2\pi/T$ (это эквивалентно $B \gg 1$) амплитудный спектр ЛЧМ сигнала можно считать прямоугольным, то есть считать его постоянным в пределах того диапазона частот, в котором линейно изменяется частота внутри импульса, а именно

$$|C_m(j\omega)|^2 = \frac{\mathcal{E}_m}{2\Omega_d} \quad \text{для} \quad \begin{cases} \omega_0 - \frac{\Omega_d}{2} \leq \omega \leq \omega_0 + \frac{\Omega_d}{2} \\ -\omega_0 - \frac{\Omega_d}{2} \leq \omega \leq -\omega_0 + \frac{\Omega_d}{2} \end{cases}. \quad (65)$$

Поскольку коэффициент передачи согласованного фильтра можно считать постоянным в его полосе (совпадающей с полосой сигнала), то при прохождении через согласованный фильтр выходной сигнал имеет прямоугольный амплитудный спектр и нулевой фазовый спектр (сигнал стал простым после прохождения через согласованный фильтр).

Равенство нулю фазового спектра простых сигналов приводит к следующим свойствам:

1. Если $C_m(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = |C_m| \cdot \exp(j\varphi(\omega)) = |C_m| \cos \varphi + j|C_m| \sin \varphi$, то $|C_m| = \sqrt{A^2 + B^2}$, а $\varphi(\omega) = \arctg \frac{B(\omega)}{A(\omega)}$.

2. Если $\varphi(\omega)=0$, то $C_m(j\omega)=|C_m(j\omega)|$ и является чётной, положительной функцией. В результате замены в $m(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}C_m(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$ подынтегральной функции на модуль следует, что $m(t)\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|C_m(j\omega)|d\omega$. Если зафиксировать амплитудный спектр $|C_m(j\omega)|$, то форму сигнала, то есть вид функции $m(t)$, можно изменять, изменяя фазовый спектр. При этом энергия сигнала $\mathcal{E}_m=\int_{-\infty}^{+\infty}|C_m(j\omega)|^2d\omega$ остаётся неизменной (см. рис. 17).

На рис. 17 представлены временные реализации сигналов с таким амплитудным и с различными фазовыми спектрами:

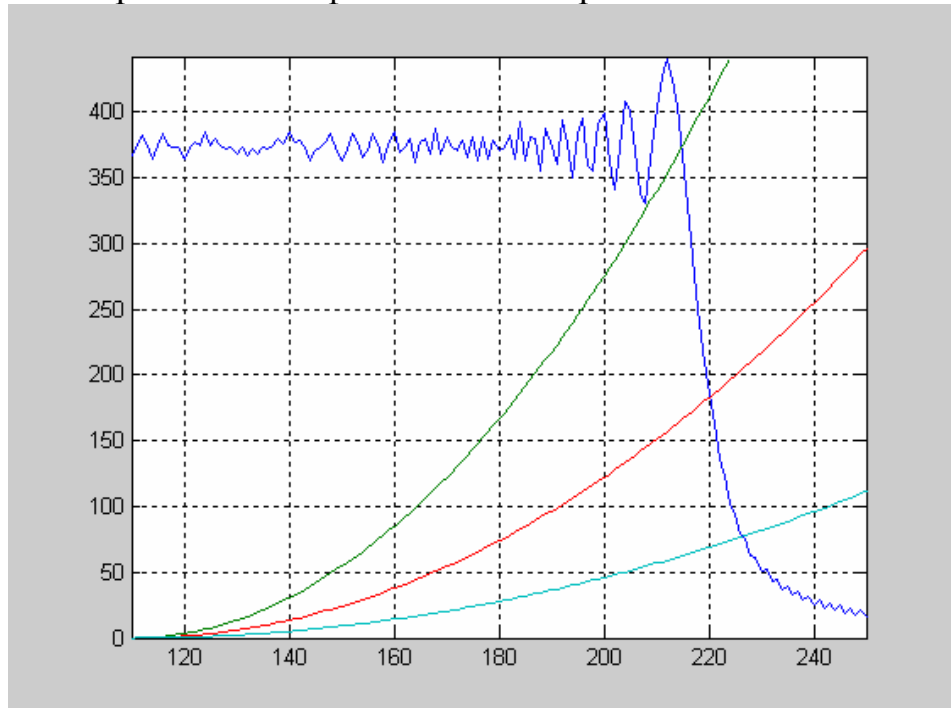


Рис. 17 Квазипрямоугольный амплитудный спектр и несколько вариантов фазовых спектров.

Самый длинный по времени и самый маленький по амплитуде сигнал (рис.18) соответствует наиболее круто идущему параболическому фазовому спектру.

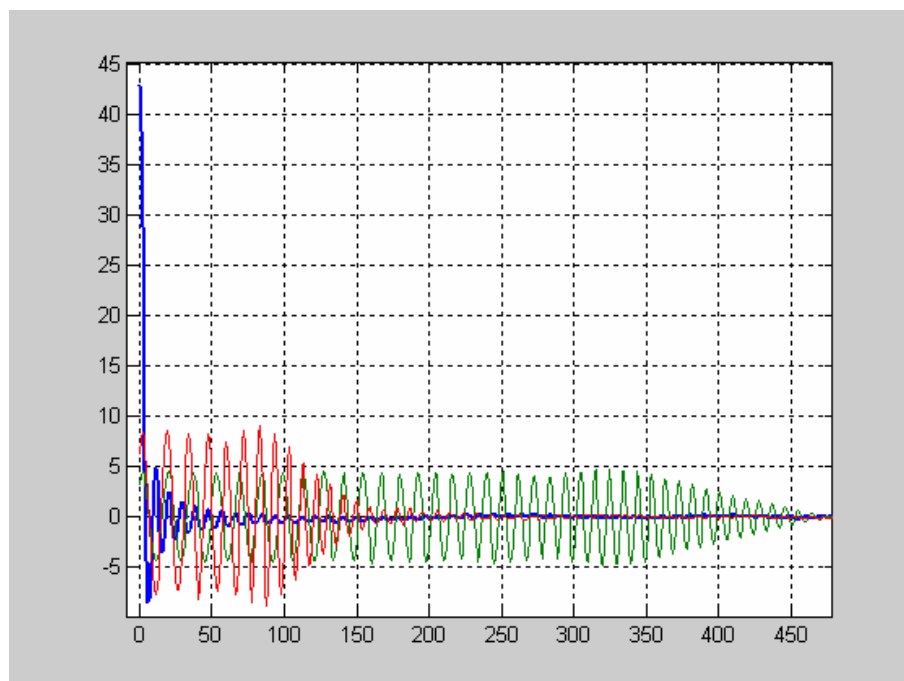


Рис. 18 Временные реализации сигналов с прямоугольным амплитудным спектром и с различными фазовыми спектрами.

Чем более пологий фазовый спектр, тем короче будет сигнал и тем больше его амплитуда. Наконец, при нулевом фазовом спектре ($\varphi(\omega)=0$) получится самый большой по величине сигнал. Кроме этого, он окажется и самым коротким по эффективной протяжённости T . Действительно,

$$T = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m^2(t)}{m_{\max}^2} dt = \frac{\mathcal{E}_m}{m_{\max}^2}. \quad (66)$$

где $\mathcal{E}_m = \text{const}$ - энергия сигнала а m_{\max} - максимально возможное значение амплитуды для всех сигналов с данным амплитудным спектром. Следовательно, при нулевом фазовом спектре, то получается самый короткий по протяжённости и самый большой по своему максимальному значению сигнал.

На рис. 19 показаны гармоники различных частот, но одинаковой амплитуды, входящие в сигнал:

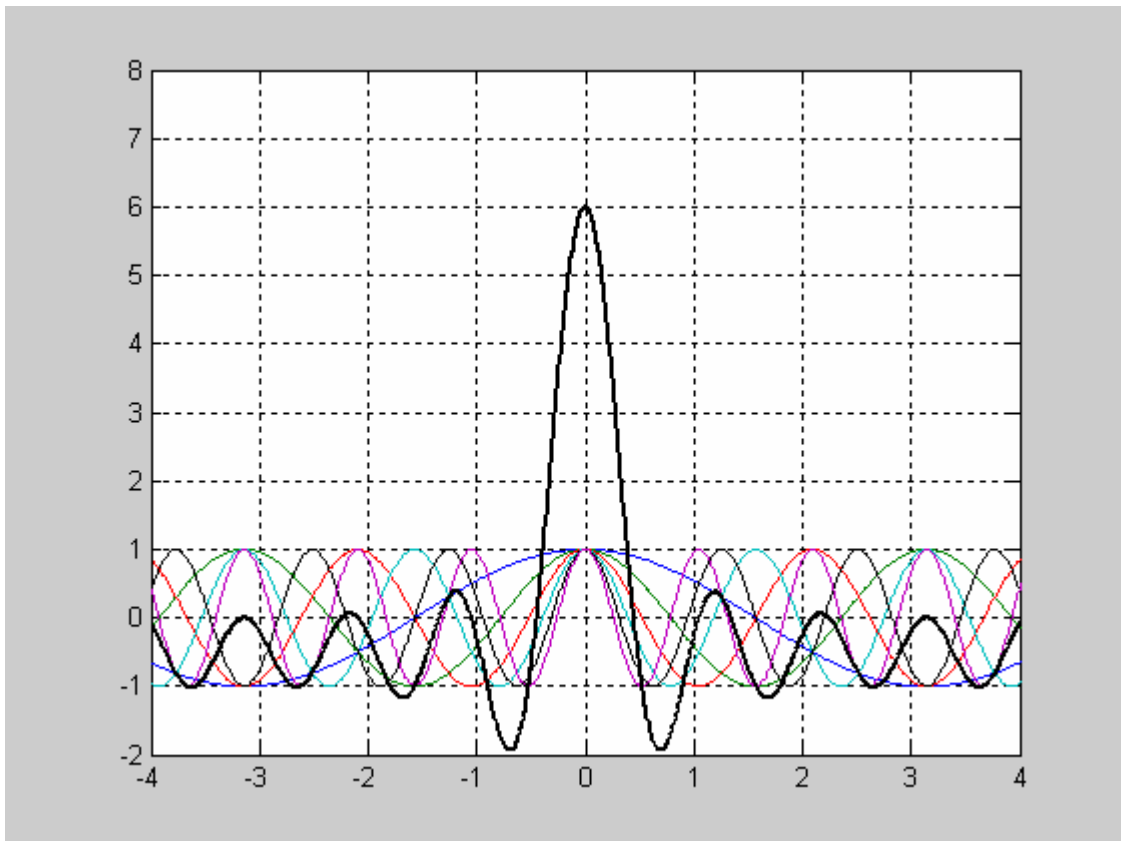


Рис. 19 Сложение гармоник различных частот по амплитуде.

Если фазовый спектр нулевой, то при $t=t_0$ все частотные составляющие (косинусоиды) в выходном сигнале когерентно суммируются. В этот момент и формируется самый большой по амплитуде сигнал, который может быть получен при заданном амплитудном спектре, то есть при заданной энергии $E=const$. Если $\varphi(\omega) \neq 0$, то максимум уменьшается, а протяжённость увеличивается. Гармоники уже не будут складываться когерентно.

Если база ЛЧМ сигнала не слишком велика, то он обладает свойством инвариантности к эффекту Доплера, т.е. сигнал с доплеровским сдвигом частоты, отраженный от движущейся цели, все равно сжимается согласованным фильтром, хотя при этом отклик фильтра несколько уменьшается по амплитуде и появляется на выходе с некоторым сдвигом во времени. Простое объяснение этого эффекта следует из связи мгновенных частот сигнала в разные моменты времени

$$\omega\left(t + \frac{\Omega_d T}{|\Omega|}\right) = \omega(t) + \Omega_d, \quad 0 < t < T - \frac{\Omega_d T}{|\Omega|} \quad (67)$$

Здесь Ω_d – доплеровский сдвиг частоты отраженного от цели сигнала. Отсюда видно, что доплеровское смещение частоты на Ω_d приводит к появлению отклика фильтра с запаздыванием на $\Omega_d T / |\Omega|$.

1.5. Код Баркера

Пусть длительность импульса T разбита на N временных интервалов одинаковой длины T/N . На каждом i -ом интервале значение сигнала d_i может быть равно $+1$ или -1 . Набор всех N значений образует код, который можно подбирать так, чтобы автокорреляционная функция импульса обладала требуемыми свойствами:

Время корреляции должно быть равно длительности одного интервала сигнала, то есть $\tau_k = T/N$, отношение максимумов боковых лепестков к главному максимуму корреляционной функции по абсолютной величине не должно превышать уровня $1/N$.

В этом случае автокорреляционная функция сигнала будет наиболее близка к дельта-коррелированной функции шумового процесса – оптимальной для согласованной фильтрации. Однако чисто шумовой сигнал, имеющий переменную амплитуду, неудобен для формирования и обработки импульса. Поэтому используют манипуляцию амплитуды на два положения по шумоподобному закону. Последовательности, состоящие из $+1$ и -1 , корреляционные функции которых удовлетворяют сформулированным условиям, называются кодами Баркера для разных значений N (от 1 до 13).

При $N > 13$ кодов Баркера не существует. Поэтому для самой длинной последовательности $N=13$ можно получить коэффициент сжатия 13, при этом уровень боковых лепестков будет составлять $1/13$ часть от главного максимума корреляционной функции.

Таблица 1

Распределение значений импульсов в коде Баркера от номера отсчета для $N=13$.

Номер импульса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Значение амплитуды	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	+1

Во многих задачах это оказывается недостаточным, поэтому коды Баркера находят ограниченное применение в радиолокации.

2. Практическая часть

2.1. Описание виртуальной установки

На рис. 20, изображена блок-схема виртуальной установки, используемой в данной лабораторной работе.

Основные функциональные узлы установки:

- «Генератор сигнала» выдает соответствующий тип сигнала со заданными параметрами.
- «Согласованный фильтр» моделирует фильтр, согласованный с соответствующим входным сигналом.
- «Генератор шума» генерирует «белый шум», дисперсию которого можно задать вручную.
- «Задержка сигнала» представляет собой идеальную линию задержки. Длительность и амплитуда задержанного сигнала задаются вручную.
- «Случайная выборка» случайным образом выбирает сигнал, сгенерированный «Генератором сигнала».
- Блок «Отношение сигнал/шум» позволяет вычислить данную характеристику как на входе, так и на выходе системы:
 - «Входное» - входное значение отношения сигнал/шум
 - «Выходное не усредненное» - выходное значение отношения сигнал/шум данной реализации, которое считается по формуле: $\rho_{вых} = \frac{M^2(t_0)}{\langle \eta^2 \rangle}$
 - «Выходное усредненное» - усредненное значение выходного отношения сигнал/шум по десяти реализациям.

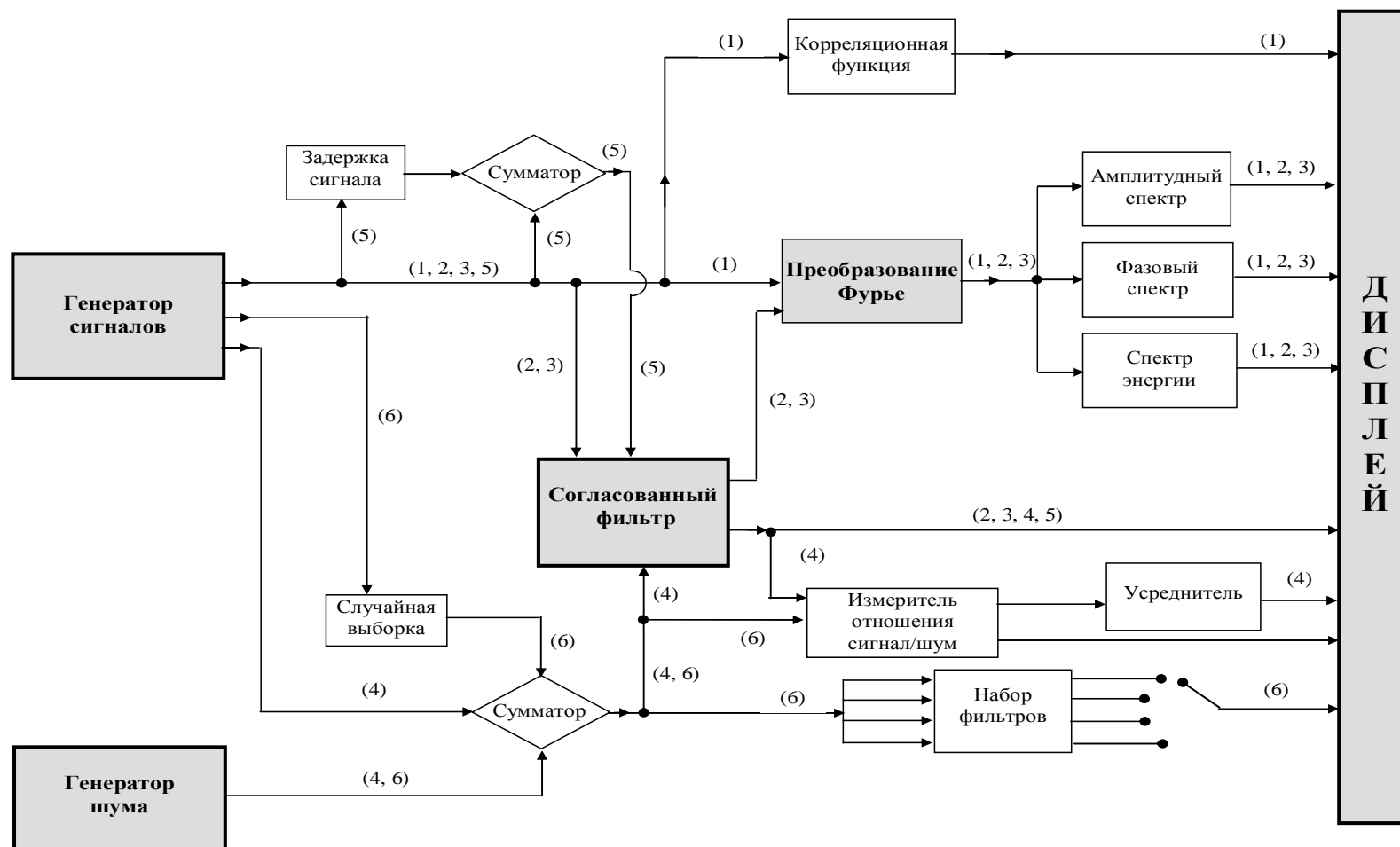


Рис. 20 Блок-схема виртуальной установки

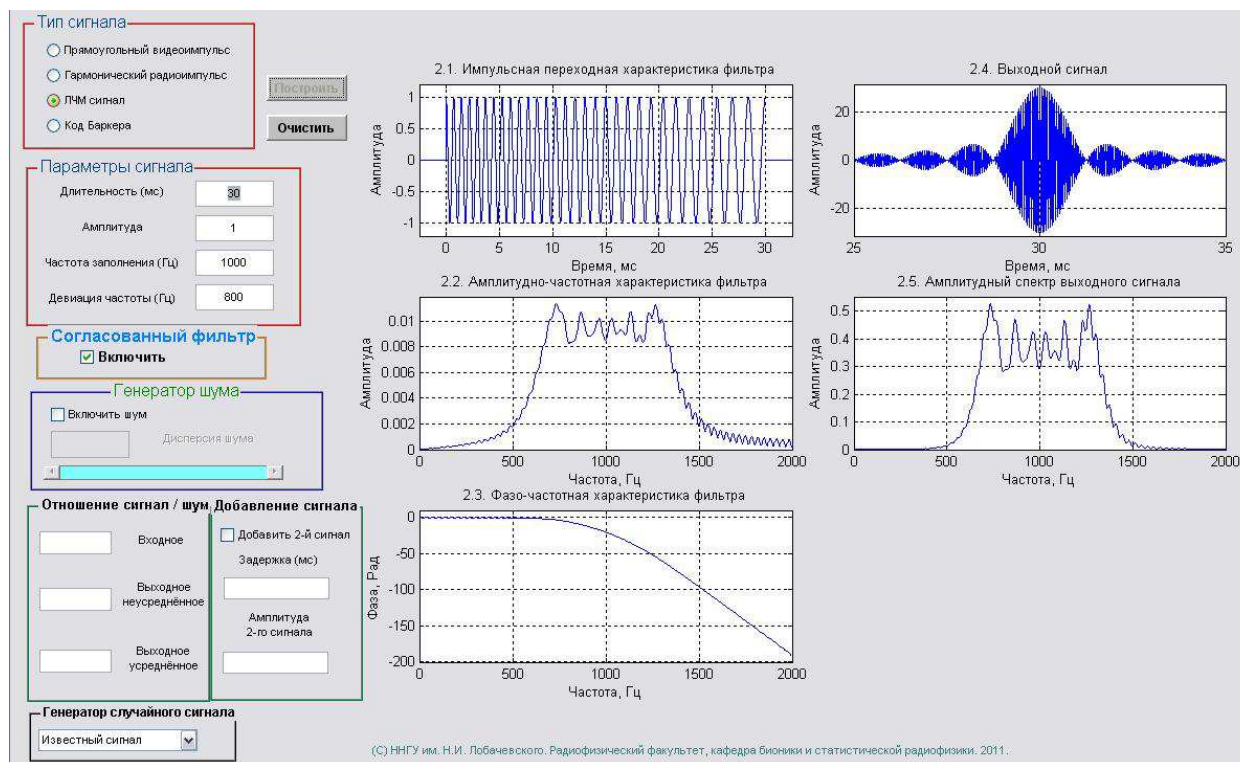


Рис. 21 Пользовательский интерфейс программы

На рис.21 представлен пользовательский интерфейс программы. В левой части расположены блоки управления с возможностью ручного задания параметров. Для построения графиков и получения результатов расчетов необходимо нажать кнопку «Построить». В правой части установки появятся графики соответствующие выполняемому заданию. Для повторного построения или изменения параметров нужно очистить окно и значения, оставшиеся в оперативной памяти компьютера, нажав кнопку «Очистить».

При некорректном введении параметров сигнала программой будет выдаваться сообщение ошибки такого типа:

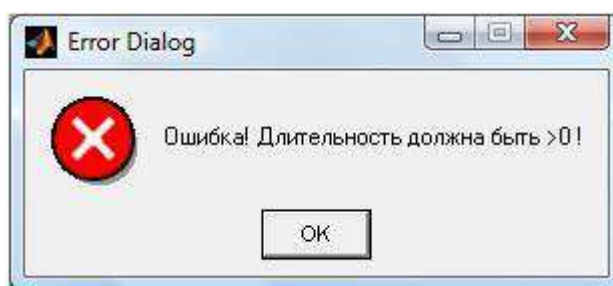


Рис. 22 Диалоговое окно ошибки, выдаваемое программой при неправильном вводе параметров. (Данное окно ошибки выдала программа при вводе длительности меньшей, либо равной нулю)

2.2. Задания к работе

Задание 1. Простые и сложные сигналы и их свойства.

В этом задании рассматриваются особенности простых и сложных сигналов, которые проявляются в поведении спектров сигналов. Следует проследить за тем, какие существуют закономерности при изменении спектров в зависимости от изменения временных параметров простых и сложных сигналов.

Для каждого рассмотренного сигнала $m(t)$ строятся графики реализации сигнала, амплитудного и фазового спектров, а так же функция корреляции и спектральная плотность энергии.

Выполнение:

1. Для прямоугольного видеоимпульса
 - 1.1. Получить аналитическое выражение для амплитудного, фазового и энергетического спектра, построить теоретический график.
 - 1.2. Изучить амплитудный, фазовый и энергетический спектры. Для этого задать длительность импульса 10мс и 20мс, амплитуду равной 1, а затем проанализировать зависимости.
2. Для прямоугольного видеоимпульса с гармоническим заполнением
 - 2.1. Изучить амплитудный, фазовый и энергетический спектры. Задать длительность импульса 10мс и 20мс, амплитуду равной 1 и частоту заполнения 400Гц, а затем проанализировать зависимости.
3. Линейно-частотный модулированный импульс
 - 3.1. Получить временные реализации ЛЧМ сигнала с параметрами:
 - длительность 100мс, средняя частота заполнения 1000Гц, девиация 500Гц;
 - длительность 100мс, средняя частота заполнения 1000Гц, девиация 1000Гц
 - амплитуда 1.
4. Код Баркера
Получить реализации для кода Баркера ($N=13$) при длительности 13мс и 26мс

Рекомендации по анализу результатов эксперимента

- Получить оценку энергии импульса разными способами по экспериментальным данным. Сравнить результаты с теоретическими.
- Для всех четырех видов сигнала оценить базу, используя формулу $B=T \cdot \Delta f$, где T – эффективная длительность, Δf – эффективная ширина полосы спектра сигнала. За оценку ширины следует принять половину расстояния между первыми нулями (ширины главного лепестка).

- Пояснить, как изменяется фазовый спектр сигнала, в том диапазоне частот, где лежит основная энергия сигнала. Показать с помощью рисунка, как происходит сложение гармонических составляющих сигнала. Выделить на графиках амплитудного и энергетического спектров диапазон частот, в котором лежит основная энергия сигнала. Как изменяется фазовый спектр сигнала в этом диапазоне частот? Почему физический амплитудный спектр имеет смысл рассматривать только внутри этой полосы?
- Для ЛЧМ сигнала сравнить протяженность корреляционной функции с длительностью сигнала. Во сколько раз она меньше длительности сигнала?
- Для ЛЧМ сигнала оценить диапазон изменения фазовых сдвигов у гармоник сигнала в пределах полосы амплитудного спектра. Нарисовать амплитудный спектр в приближенном виде (аппроксимируя прямоугольником) и посмотреть, какой в этих пределах фазовый спектр.
- Во всех примерах рассматривались изменения спектральных характеристик при изменении временных зависимостей сигналов. Учитывая, что для функций, сопряженных по Фурье, справедливы следующие соотношения (см. Приложение):

$$g(t) \Rightarrow G(f)$$

$$g(at) \Rightarrow \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right),$$

где при $a > 1$ временная функция сужается, спектр расширяется и в a раз убывает, а при $a < 1$ – наоборот, проверить выполнение этих соотношений. Если в каком-то случае соотношения несправедливы – пояснить почему.

- Чем определяется максимальное значение функции корреляции? Рассмотреть корреляционную функцию как сигнал и найти его базу.
- Сравнить изменения спектрально-корреляционных характеристик при изменении длительности различных сигналов.

Задание 2. Параметры согласованного фильтра и выходного сигнала.

В этом задании изучаются характеристики согласованных фильтров, соответствующих каждому из сигналов, рассмотренных в задании №1. Кроме того, исследуются вид и свойства выходных сигналов. Учитывая, что при расширении фазового спектра длительность сигнала увеличивается, а при уменьшении до нуля – укорачивается, в данном задании необходимо внимательно проследить за укорочением сигнала. Самый короткий и самый большой по амплитуде он должен получиться при нулевом фазовом спектре.

Для каждого сигнала программа позволяет получить следующие графики:

- а) график $h(t)$ – импульсной переходной характеристики каждого из фильтров;
- б) график $|K_{сф}(j\omega)|$ – амплитудно-частотной характеристики фильтра;
- в) график $\varphi_k(j\omega)$ – фазо-частотной характеристики фильтра.
- г) график выходного сигнала $M(t)$;
- д) амплитудный спектр выходного сигнала $S_M(j\omega)$;

Выполнение:

Включить блок «Согласованный фильтр»

1. Пропустить прямоугольный видеоимпульс через согласованный фильтр при следующих параметрах сигнала: длительностью 10мс и 30мс, в обоих случаях брать единичную амплитуду. И отметить наблюдаемые зависимости.
2. Для прямоугольного видеоимпульса с гармоническим заполнением, пропустив его через согласованный фильтр, пронаблюдать те же закономерности, что и для прямоугольного видеоимпульса из пункта 1. Длительность сигналов брать 10мс и 30мс при частоте гармонического заполнения 500Гц.
3. ЛЧМ сигнал пропустить через согласованный фильтр, применяя следующие параметры: длительность 100мс, средняя частота заполнения 1000Гц и девиация 500Гц для первого случая и для второго - длительность 100мс, средняя частота заполнения 1000Гц и девиация 1000Гц.
4. Пропустить сигнал, модулированный по амплитуде кодом Баркера с длительностью 13мс и 26мс через согласованный фильтр.

Рекомендации по анализу результатов эксперимента

- Как коэффициент передачи по амплитуде $|k(\omega)|$ фильтра и фазовые сдвиги $\varphi(\omega)$, вносимые фильтром в соответствующую гармонику, связаны с амплитудным и фазовым спектром сигнала?
- Как связан выходной сигнал и его амплитудный и фазовый спектр с характеристиками выходного сигнала? Сравнить длительности входного и выходного сигналов.
- Какой вид имеет импульсная переходная характеристика согласованного фильтра?
- Какой фазовый спектр и база выходного сигнала?

Задание 3. Согласованная фильтрация линейно-частотно модулированного сигнала

В этом задании на примере ЛЧМ сигнала подробно исследуются особенности фильтрации сложных сигналов.

Выполнение:

Выбрать среднюю частоту заполнения 1000Гц,
длительность ЛЧМ сигнала менять в пределах от 10мс до 100мс
девиацию частоты изменять от 400Гц до 1000Гц

Пропустить ЛЧМ сигнал через согласованный фильтр. Качественно проанализировать, чем определяются основные параметры выходного сигнала: величина его максимума и степень укорочения сигнала, временное положение максимума. Получить и построить графики следующих зависимостей, оставляя среднюю частоту неизменной:

1. Зависимость длительности выходного сигнала
 - 1.1. от длительности входного сигнала
 - 1.2. от девиации частоты входного сигнала
2. Зависимость амплитуды выходного сигнала
 - 2.1. от длительности входного сигнала
 - 2.2. от девиации частоты входного сигнала
3. Зависимость временного положения максимума выходного сигнала
 - 3.1. от длительности входного сигнала
 - 3.2. от девиации частоты входного сигнала

Задание 4. Зависимость отношения сигнал/шум на выходе согласованного фильтра от параметров входного сигнала

Аддитивная смесь ЛЧМ сигнала и белого шума поступает на вход соответствующего согласованного фильтра. Исследовать зависимость отношения сигнал/шум на выходе согласованного фильтра от параметров входного ЛЧМ сигнала (от длительности сигнала и девиации частоты) и построить соответствующие графики.

Выполнение:

Включить шум в блоке «Генератор шума»

Параметры входного ЛЧМ сигнала можно взять следующими:

амплитуда 1

центральная частота 1000 Гц

среднее значение шума равно нулю,

дисперсия шума равна 4.

а) При девиации частоты 700 Гц длительность входного сигнала изменять в пределах 10мс - 100мс

б) При длительности сигнала 50 мс девиацию частоты изменять в пределах 400Гц - 1000Гц.

Построить график зависимости отношения сигнал/шум от длительности импульса:

а) по однократному замеру для каждого из значений длительности входного сигнала

б) для каждого из значений длительности сигнала произвести 10 замеров. Результаты измерения нанести на график. Произвести усреднение случайных замеров и построить усредненную зависимость.

Рекомендации по анализу результатов эксперимента

- Сравнить времена корреляции шума на выходе фильтра и на входе. Для оценки времени корреляции шума на выходе использовать полученные графики 4.3 и 4.4. Сравнить время корреляции выходного шума с длительностью выходного сигнала, оценив эту длительность по графику 4.2. Пояснить утверждение о том, что шум на выходе является сигналоподобным.
- Почему отношение сигнал/шум не зависит от девиации и прямо пропорционально длительности входного импульса?
- Качественно нарисовать график зависимости отношения сигнал/шум от длительности входного сигнала для прямоугольного видеоимпульса. Как изменится зависимость по сравнению с аналогичной, построенной для ЛЧМ сигнала? Сравнить поведение усредненных кривых и случайный разброс экспериментальных точек относительно усредненной кривой.
- Аддитивная смесь ЛЧМ сигнала с девиацией частоты $\Delta f_{\text{дев}}$ и белого шума пропускается через фильтр со средней частотой, совпадающей со средней частотой ЛЧМ сигнала и с прямоугольной полосой пропускания Π_{ϕ} , ширину которой можно изменять. Фазовая характеристика фильтра обратна по знаку фазовому спектру сигнала в полосе фильтра. Построить зависимость отношения сигнал/шум на выходе фильтра от отношения $\Delta f_{\text{дев}}/\Pi_{\phi}$. За отправную точку в графике выбрать случай, когда фильтр согласован с сигналом ($\Delta f_{\text{дев}}/\Pi_{\phi}=1$). Каким кривыми описывается исследуемая зависимость при $\Delta f_{\text{дев}}/\Pi_{\phi}>1$ и $\Delta f_{\text{дев}}/\Pi_{\phi}<1$?

Задание 5. Разрешение во времени простых и сложных сигналов при согласованной фильтрации.

В этом задании качественно анализируется разрешение сигналов во времени и преимущества, которые дает использование сложных сигналов. Качественно можно считать, что сигналы разрешены, если их максимумы отстоят не менее, чем на величину длительности сигнала. Разрешающая

способность сигналов в реальной ситуации существенно зависит от отношения сигнал/шум. Блок-схема устройства, использующегося в этом задании, приведена на рис. 23.

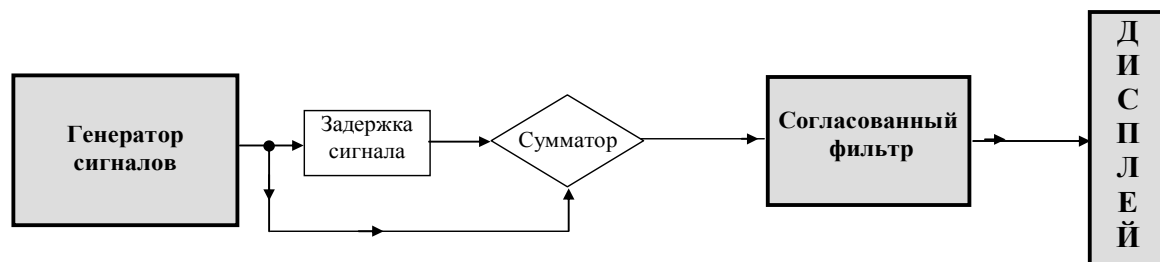


Рис. 23 Блок-схема, применяемая для разрешения сигналов.

Выполнение:

Требуется пронаблюдать суперпозицию двух разнесенных на величину временной задержки сигналов на выходе согласованного фильтра. Варьируя эту задержку, установить, какая минимальная величина задержки необходима для успешного разрешения сигналов во времени. Измерения произвести двух видов сигналов:

1. прямоугольные видеоимпульсы одинаковой длительности (для трех значений последней);

2. ЛЧМ сигналы

одинаковой длительности $T_1=T_2$

с одинаковыми центральными частотами 3000 Гц,

с одинаковыми девиациями частоты.

2.1. амплитуды импульсов равны: $A_1=A_2$

Измерения произвести для трех различных значений девиации частоты, например: 200, 400: 800 Гц

2.2. амплитуда задержанного импульса меньше величины первого бокового лепестка незадержанного импульса: $A_1 \approx 6 \cdot A_2$

Измерения произвести для трех различных значений девиации частоты, например: 200, 400: 800 Гц

Рекомендации по анализу результатов эксперимента

- Каким параметром входных сигналов определяется разрешающая способность при согласованной обработке?
- Проанализировать, как будет изменяться разрешающая способность при изменении длительности входных импульсов, например, $T_1=T_2=10; 20; 40$ мс, при неизменной девиации частоты.

Задание 6. Различение сигналов.

Этот вопрос важен, например, при рассмотрении задачи электромагнитной совместимости различных установок. В ряде случаев

существует необходимость обеспечить работу нескольких станций, которые расположены в непосредственной территориальной близости. В такой ситуации на вход приемников поступают сразу все сигналы со всех близкорасположенных станций. Наблюдая временную реализацию, нужно определить, какой сигнал из ограниченного числа возможных содержится в этой реализации – полезный или мешающий сигнал от других станций.

Для решения задачи распознавания в задании выбран набор из четырех возможных сигналов, приведенный в табл.2. Все сигналы имеют одинаковую среднюю частоту и одинаковую по порядку величины полосу спектра: одинаковую амплитуду и одинаковую временную протяженность (следовательно, и одинаковую энергию). Два из них являются ЛЧМ сигналами с зеркальным законом модуляции частоты, а два других – сигналы с зеркальной фазовой модуляцией кодом Баркера ($N=13$).

Таблица 2

Список используемых в задании сигналов.

№	Вид сигнала	Амплитуда	Длительность, мс	Средняя частота заполнения, Гц	Девиация частоты, Гц
1	ЛЧМ импульс с нарастающей частотой	$\sqrt{2}$	100	2 000	300
2	ЛЧМ импульс с убывающей частотой	$\sqrt{2}$	100	2 000	300
3	Код Баркера ($N=13$) с гармоническим заполнением	$\sqrt{2}$	100	2 000	-
4	Код Баркера зеркально отражённый относительно вертикальной оси ($N=13$) с гармоническим заполнением	$\sqrt{2}$	100	2 000	-

Выполнение:

В эксперименте формируется реализация $x(t)$, представляющая собой аддитивную смесь шума $\xi(t)$ и одного из перечисленных выше сигналов $m(t)$, $x(t)=m(t)+\xi(t)$. Сигнал выбирается по случайному равновероятному закону. Требуется определить, какой из сигналов содержится в данной реализации при отношении сигнал/шум 0.1.

На рис. 24 представлена блок-схема установки, используемой для выполнения данного задания.

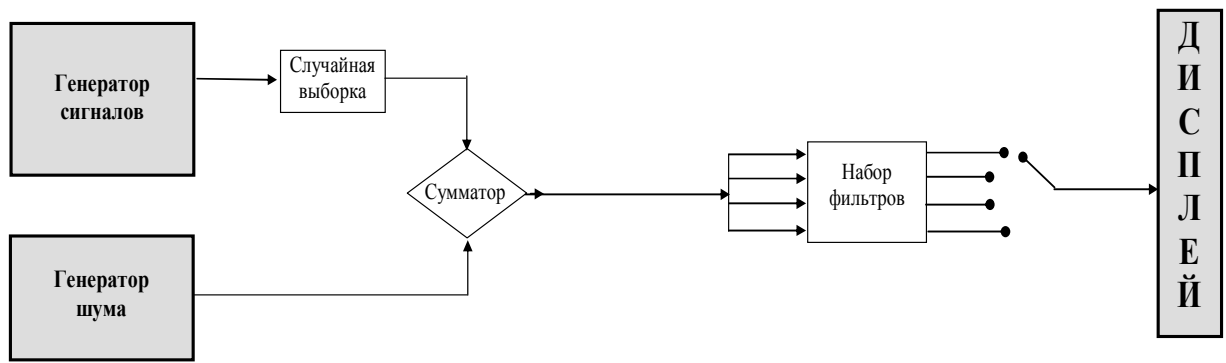


Рис 24. Схема реализации каналов.

По амплитуде максимума и степени укорочения сигнала на выходе каждого из четырёх фильтров можно определить фильтр, согласованный с полезным сигналом, содержащимся во входной реализации.

Рекомендации по анализу результатов эксперимента

1. Как объяснить разницу в высоте максимума и длительности выходного сигнала в согласованном и несогласованных фильтрах?
2. Сравнить поведение амплитудных и фазовых спектров выходных сигналов в согласованном и несогласованных фильтрах.

Литература

1. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Сов. радио. – 1971.
2. Тихонов В.И. Оптимальный приём сигналов. М.: Радио и связь. – 1983.
3. Ширман Я.Д., Манжос В.Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. М.: Радио и связь. – 1981.
4. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь. – 1991.
5. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ. М.: Мир. – 1990.
6. Медведев С.Ю., Силаев А.М. Исследование согласованных фильтров (Описание лабораторной работы). Н.Новгород/ННГУ. – 1996. – С. 46.
7. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер. – 2003. – С. 604.

Приложение

Таблица П1

Основные свойства преобразования Фурье

Свойство	Функция	Преобразование
Линейность	$a \cdot g(t) + b \cdot h(t)$	$a \cdot G(f) + b \cdot H(f)$
Сдвиг по времени	$h(t - t_0)$	$H(f) \exp(-2j\pi f t_0)$
Сдвиг по частоте (модуляция)	$h(t) \exp(-2j\pi f_0 t)$	$H(f - f_0)$
Масштабирование	$(1/ a) \cdot h(t/a)$ $h(a \cdot t)$	$H(a \cdot f)$ $(1/ a) \cdot H(f/a)$
Теорема свертки во временной области	$g(t) * h(t)$	$G(f) H(f)$
Теорема свертки в частотной области	$g(t) h(t)$	$G(f) * H(f)$