1 Идея метода

Метод Прони заключается в аппроксимации последовательности данных $x[n]$ моделью $\tilde{x}[n]$, состоящей из p затухающих комплексных экспонент

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=1}^{p} A_k \exp\{\alpha_k T n\} \exp\{j 2\pi f_k T n + j\varphi_k\}, \text{ где } 1 \le n \le N,\ 1 \le p \le \frac{N}{2}$$

Представим это выражение в сокращенном виде

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=1}^{p} h_k z_k^{n-1}, \text{ где}$$

$h_k = A_k \exp(j\varphi_k)$ – комплексная амплитуда k-ой экспоненты, $z_k = \exp(\alpha_k T + j2\pi f_k T)$ – k-ая комплексная экспонента.

Или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \dots & z_p^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \dots & z_p^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_p^{N-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_p \end{pmatrix} \tag{1}$$

Если мы сможем найти метод для раздельного нахождения элементов z, то мы сможем решить уравнение (1) как обычную систему уранений относительно неизвестных переменных h.

2 Теоретическая часть

Составим матрицу размерности $p \times N$, где первый индекс число строк, а второй – число столбцов

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} a_p & a_{p-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_p & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_p & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

Теперь умножим уравнение (1) на $\hat{a}$ слева. Тогда левая часть уравнения (1) следующий примет вид

$$\begin{pmatrix} a_p & a_{p-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_p & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_p & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{m=0}^{p} a_m x_{p+1-m} \\ \sum\limits_{m=0}^{p} a_m x_{p+2-m} \\ \dots \\ \sum\limits_{m=0}^{p} a_m x_{N-m} \end{pmatrix}$$

А правая часть уравнения (1)

$$(p, N) \cdot (N, p) = (p, p)$$

$$\begin{pmatrix} a_p & a_{p-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_p & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_p & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \dots & z_p^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \dots & z_p^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_p^{N-1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{m=0}^{p} a_m z_1^{p-m} & \sum\limits_{m=0}^{p} a_m z_2^{p-m} & \dots & \sum\limits_{m=0}^{p} a_m z_p^{p-m} \\ z_1 \sum\limits_{m=0}^{p} a_m z_1^{p-m} & z_2 \sum\limits_{m=0}^{p} a_m z_2^{p-m} & \dots & z_p \sum\limits_{m=0}^{p} a_m z_p^{p-m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{N-p-1} \sum\limits_{m=0}^{p} a_m z_1^{p-m} & z_2^{N-m-1} \sum\limits_{m=0}^{p} a_m z_2^{p-m} & \dots & z_p^{N-m-1} \sum\limits_{m=0}^{p} a_m z_p^{p-m} \end{pmatrix}$$

Поскольку мы вводили коэффициенты a_m произвольно, теперь уточним их. Пусть коэффициенты a_m обеспечивают выполнение равенства

$$\sum_{m=0}^{p} a_m z_k^{p-m} = 0, \text{ для } k = 1, 2, \dots, p \tag{2}$$

при этом $a_0 = 1$.

Тогда правая часть уравнения (1) при умножении на матрицу $\hat{a}$ занулится. Остается

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{m=0}^{p} a_m x_{p+1-m} \\ \sum\limits_{m=0}^{p} a_m x_{p+2-m} \\ \dots \\ \sum\limits_{m=0}^{p} a_m x_{N-m} \end{pmatrix} = 0 \tag{3}$$

То есть мы получили систему уравнений из $N - p$ уравнений.

Немного о смысле уравнения (3). Запишем уравнение (3) через разложение в экспоненциальный ряд $\sum\limits_{k=1}^{p} h_k z_k^{n-1}$

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{m=0}^{p} a_m x_{p+1-m} \\ \sum\limits_{m=0}^{p} a_m x_{p+2-m} \\ \dots \\ \sum\limits_{m=0}^{p} a_m x_{N-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{m=0}^{p} a_m \sum\limits_{k=1}^{p} h_k z_k^{p-m} \\ \sum\limits_{m=0}^{p} a_m \sum\limits_{k=1}^{p} h_k z_k^{p-m+1} \\ \dots \\ \sum\limits_{m=0}^{p} a_m \sum\limits_{k=1}^{p} h_k z_k^{N-m-1} \end{pmatrix}$$

Поменяем местами суммы

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{m=0}^{p} a_m \sum\limits_{k=1}^{p} h_k z_k^{p-m} \\ \sum\limits_{m=0}^{p} a_m \sum\limits_{k=1}^{p} h_k z_k^{p-m+1} \\ \dots \\ \sum\limits_{m=0}^{p} a_m \sum\limits_{k=1}^{p} h_k z_k^{N-m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{p} h_k \sum\limits_{m=0}^{p} a_m z_k^{p-m} \\ \sum\limits_{k=1}^{p} h_k z_m \sum\limits_{m=0}^{p} a_m z_k^{p-m} \\ \dots \\ \sum\limits_{k=1}^{p} h_k z_k^{N-p-1} \sum\limits_{m=0}^{p} a_m z_k^{p-m} \end{pmatrix}$$

Сумму в правой части можно рассматривать, как некий полином записанный через свой корни, что и обеспечивает тождественное нулю равенство.

Именно для этого мы вводили особым образом матрицу $\hat{a}$ и уравнение (2).

Но при аппроксимации последовательности x_n последовательностью $\tilde{x}$, мы не сможем точно определить корни полинома (2), у нас будет некоторая погрешность.

Это подводит нас к тому, что уравнение (3) должно быть модифицировано

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{m=0}^{p} a_m x_{p+1-m} \\ \sum\limits_{m=0}^{p} a_m x_{p+2-m} \\ \dots \\ \sum\limits_{m=0}^{p} a_m x_{N-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_{N-p} \end{pmatrix}, \text{ где} \tag{4}$$

e – характеризует ошибку <u>линейной</u> аппроксимации, хотя изначально вы вводили ошибку ϵ как ошибку экспоненциальной аппроксимации.

Теперь будем минимизировать квадрат ошибок функции (4)

$$\rho = \sum_{n=1}^{N-p} e_n e_n^* = \sum_{n=1}^{N-p} \sum_{m=0}^{p} a_m x_{p+n-m} \sum_{k=0}^{p} a_k^* x_{p+n-k}^* \rightarrow \ \min \tag{5}$$

Пусть $a_m = a_m^*$.Можно ли так делать?

Чтобы (5) выполнялось необходимо продифференцировать каждое слагаемое ρ по всем a_m и найти их минимум, т.е.

$$\frac{\partial \rho}{\partial a_0} = \sum_{n=1}^{N-p} x_{n+p} x_{p+n}^* + a_1 \sum_{n=1}^{N-p} x_{p+n-1} x_{p+n}^* + a_2 \sum_{n=1}^{N-p} x_{p+n-2} x_{p+n}^* + \dots \\ + a_p \sum_{n=1}^{N-p} x_n x_{p+n}^* = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial a_1} = \sum_{n=1}^{N-p} x_{n+p} x_{p+n-1}^* + a_1 \sum_{n=1}^{N-p} x_{p+n-1} x_{p+n-1}^* + a_2 \sum_{n=1}^{N-p} x_{p+n-2} x_{p+n-1}^* + \dots \\ + a_p \sum_{n=1}^{N-p} x_n x_{p+n-1}^* = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial a_2} = \sum_{n=1}^{N-p} x_{n+p} x^*_{p+n-2} + a_1 \sum_{n=1}^{N-p} x_{p+n-1} x^*_{p+n-2} + a_2 \sum_{n=1}^{N-p} x_{p+n-2} x^*_{p+n-2} + \ldots$$
$$+ a_p \sum_{n=1}^{N-p} x_n x^*_{p+n-2} = 0$$

Вспомним, что конструкция вида $\frac{1}{N-m} \sum\limits_{n=0}^{N-m-1} x_{n+m} x^*_n$ есть выражение для дискретно-временной оценки автокорреляции $r_{xx}[m]$.

Приведем суммы в выражениях

Составим на основе получившихся производных матрицу ковариации

$$\hat{R}_{xx} = \begin{pmatrix} r_{xx}[0] & r^*_{xx}[1] & r^*_{xx}[2] & \ldots & r^*_{xx}[p] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & r^*_{xx}[1] & \ldots & r^*_{xx}[p] \\ r_{xx}[2] & r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \ldots & r^*_{xx}[p] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{xx}[p] & r_{xx}[p-1] & r_{xx}[-2] & \ldots & r_{xx}[0] \end{pmatrix}$$

Получили систему уравений

$$\boxed{\hat{R}_{xx} \cdot \hat{a} = 0}, \text{ где} \tag{6}$$

вектор-столбец $\hat{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$ – неизвестнен.

Найденные из уравнения (6) коэффициенты a подставим в уравнение (2). Получаем замкнутую систему уравнений для p неизвестных z_k.

$$\sum_{m=0}^{p} a_m z_k^{p-m} = 0, \text{ для } k = 1, 2, \ldots, p$$

Вспомним теперь, что реальная последовательность x_n отличается от аппроксимированной последовательности $\tilde{x}_n$ на величину ошибки экспоненциальной аппроксимации ϵ

$$x_n = \tilde{x}_n + \epsilon_n$$

Из этих соображений, модифицируем уравнение (1)

$$\begin{pmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \ldots & z_p^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \ldots & z_p^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \ldots & z_p^{N-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \ldots \\ h_p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \ldots \\ \epsilon_N \end{pmatrix}$$

Теперь вновь нужно минимизировать сумму квадратом ошибок

$$\rho = \sum_{n=1}^{N} \epsilon_n \epsilon_n^* \rightarrow \min$$

Вновь дифференцируя по параметру h_p получаем систему уравнений вида

$$\boxed{\hat{Z} \cdot \hat{h} = \hat{C}}, \text{ где}$$

$$
\hat{Z} = \begin{pmatrix}
\sum\limits_{n=1}^{N} z_1^{n-1}(z_1^*)^{n-1} & \sum\limits_{n=1}^{N} z_2^{n-1}(z_1^*)^{n-1} & \dots & \sum\limits_{n=1}^{N} z_p^{n-1}(z_1^*)^{n-1} \\
\sum\limits_{n=1}^{N} z_1^{n-1}(z_2^*)^{n-1} & \sum\limits_{n=1}^{N} z_2^{n-2}(z_2^*)^{n-1} & \dots & \sum\limits_{n=1}^{N} z_p^{n-1}(z_2^*)^{n-1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\sum\limits_{n=1}^{N} z_1^{n-1}(z_p^*)^{n-1} & \sum\limits_{n=1}^{N} z_2^{n-2}(z_p^*)^{n-1} & \dots & \sum\limits_{n=1}^{N} z_p^{n-1}(z_p^*)^{n-1}
\end{pmatrix},
$$

$$
\hat{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_p \end{pmatrix},
$$

$$
\hat{C} = \begin{pmatrix}
\sum\limits_{n=1}^{N} x_n(z_1^*)^{n-1} \\
\sum\limits_{n=1}^{N} x_n(z_2^*)^{n-1} \\
\dots \\
\sum\limits_{n=1}^{N} x_n(z_p^*)^{n-1}
\end{pmatrix},
$$

Из этой системы мы найдем вектор-столбец $\hat{h}$.

3 Краткая схема

1. Составляем матрицу ковариации (см. (6))
2. Находим множители полинома a_m (см. (6))
3. Находим затухающие экспоненты z_k (см. (2))
4. Находим комплексные амплитуды экспонент h_k

5. Находим все остальные параметры модели

$$f_k = \frac{1}{2\pi T} \arctan \frac{\mathrm{Im}\{z_k\}}{\mathrm{Re}\{z_k\}}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \ln |z_k|$$

$$A_k = |h_k|$$

$$\varphi_k = \arctan \frac{\mathrm{Im}\{h_k\}}{\mathrm{Re}\{h_k\}}$$