

1 Идея метода

Метод Прони заключается в аппроксимации последовательности данных $x[n]$ моделью $\tilde{x}[n]$, состоящей из p затухающих комплексных экспонент

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=1}^p A_k \exp\{\alpha_k T n\} \exp\{j2\pi f_k T n + j\varphi_k\}, \text{ где } 1 \leq n \leq N, 1 \leq p \leq \frac{N}{2}$$

Представим это выражение в сокращенном виде

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=1}^p h_k z_k^{n-1}$$

Или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \dots & z_p^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \dots & z_p^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_p^{N-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_p \end{pmatrix} \quad (1)$$

Если мы сможем найти метод для раздельного нахождения элементов z , то мы сможем решить уравнение (1) как обычную систему уравнений относительно неизвестных переменных h .

2 Теоретическая часть

Составим матрицу размерности $p \times N$, где первый индекс число строк, а второй – число столбцов

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} a_p & a_{p-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_p & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_p & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

Теперь умножим уравнение (1) на \hat{a} слева. Тогда левая часть уравнения (1) следующий примет вид

$$\begin{pmatrix} a_p & a_{p-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_p & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_p & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^p a_m x_{p+1-m} \\ \sum_{m=0}^p a_m x_{p+2-m} \\ \dots \\ \sum_{m=0}^p a_m x_{N-m} \end{pmatrix}$$

А правая часть уравнения (1)

$$(p, N) \cdot (N, p) = (p, p)$$

$$\begin{pmatrix} a_p & a_{p-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_p & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_p & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \dots & z_p^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \dots & z_p^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_p^{N-1} \end{pmatrix} = \\
\begin{pmatrix} \sum_{m=0}^p a_m z_1^{p-m} & \sum_{m=0}^p a_m z_2^{p-m} & \dots & \sum_{m=0}^p a_m z_p^{p-m} \\ z_1 \sum_{m=0}^p a_m z_1^{p-m} & z_2 \sum_{m=0}^p a_m z_2^{p-m} & \dots & z_p \sum_{m=0}^p a_m z_p^{p-m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{N-p-1} \sum_{m=0}^p a_m z_1^{p-m} & z_2^{N-m-1} \sum_{m=0}^p a_m z_2^{p-m} & \dots & z_p^{N-m-1} \sum_{m=0}^p a_m z_p^{p-m} \end{pmatrix}$$

Поскольку мы вводили коэффициенты a_m произвольно, теперь уточним их. Пусть коэффициенты a_m обеспечивают выполнение равенства

$$\sum_{m=0}^p a_m z_k^{p-m} = 0, \text{ для } k = 1, 2, \dots, p \quad (2)$$

при этом $a_0 = 1$.

Тогда правая часть уравнения (1) при умножении на матрицу \hat{a} занулится. Остается

$$\begin{pmatrix} \sum_{m=0}^p a_m x_{p+1-m} \\ \sum_{m=0}^p a_m x_{p+2-m} \\ \dots \\ \sum_{m=0}^p a_m x_{N-m} \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$$

То есть мы получили систему уравнений из $N - p$ уравнений.

Немного о смысле уравнения (3). Запишем уравнение (3) через разложение в экспоненциальный ряд $\sum_{k=1}^p h_k z_k^{n-1}$

$$\begin{pmatrix} \sum_{m=0}^p a_m x_{p+1-m} \\ \sum_{m=0}^p a_m x_{p+2-m} \\ \dots \\ \sum_{m=0}^p a_m x_{N-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^p a_m \sum_{k=1}^p h_k z_k^{p-m} \\ \sum_{m=0}^p a_m \sum_{k=1}^p h_k z_k^{p-m+1} \\ \dots \\ \sum_{m=0}^p a_m \sum_{k=1}^p h_k z_k^{N-m-1} \end{pmatrix}$$

Поменяем местами суммы

$$\begin{pmatrix} \sum_{m=0}^p a_m \sum_{k=1}^p h_k z_k^{p-m} \\ \sum_{m=0}^p a_m \sum_{k=1}^p h_k z_k^{p-m+1} \\ \dots \\ \sum_{m=0}^p a_m \sum_{k=1}^p h_k z_k^{N-m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^p h_k \sum_{m=0}^p a_m z_k^{p-m} \\ \sum_{k=1}^p h_k z_m \sum_{m=0}^p a_m z_k^{p-m} \\ \dots \\ \sum_{k=1}^p h_k z_k^{N-p-1} \sum_{m=0}^p a_m z_k^{p-m} \end{pmatrix}$$

Сумму в правой части можно рассматривать, как некий полином записанный через свой корни, что и обеспечивает тождественное нулю равенство.

Именно для этого мы вводили особым образом матрицу \hat{a} и уравнение (2).

Но при аппроксимации последовательности x_n последовательностью \tilde{x} , мы не сможем точно определить корни полинома (2), у нас будет некоторая погрешность.

Это подводит нас к тому, что уравнение (3) должно быть модифицировано

$$\begin{pmatrix} \sum_{m=0}^p a_m x_{p+1-m} \\ \sum_{m=0}^p a_m x_{p+2-m} \\ \dots \\ \sum_{m=0}^p a_m x_{N-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_{N-p} \end{pmatrix}, \text{ где} \quad (4)$$

e – характеризует ошибку линейной аппроксимации, хотя изначально вы вводили ошибку ϵ как ошибку экспоненциальной аппроксимации.

Теперь будем минимизировать квадрат ошибок функции (4)

$$\rho = \sum_{n=1}^{N-p} e_n e_n^* = \sum_{n=1}^{N-p} \sum_{m=0}^p a_m x_{p+n-m} \sum_{k=0}^p a_k^* x_{p+n-k}^* \rightarrow \min \quad (5)$$

Пусть $a_m = a_m^*$. Можно ли так делать?

Чтобы (5) выполнялось необходимо продифференцировать каждое слагаемое ρ по всем a_m и найти их минимум, т.е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial a_0} &= \sum_{n=1}^{N-p} x_{n+p} x_{p+n}^* + a_1 \sum_{n=1}^{N-p} x_{p+n-1} x_{p+n}^* + a_2 \sum_{n=1}^{N-p} x_{p+n-2} x_{p+n}^* + \dots \\ &\quad + a_p \sum_{n=1}^{N-p} x_n x_{p+n}^* = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial a_1} &= \sum_{n=1}^{N-p} x_{n+p} x_{p+n-1}^* + a_1 \sum_{n=1}^{N-p} x_{p+n-1} x_{p+n-1}^* + a_2 \sum_{n=1}^{N-p} x_{p+n-2} x_{p+n-1}^* + \dots \\ &\quad + a_p \sum_{n=1}^{N-p} x_n x_{p+n-1}^* = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial a_2} = \sum_{n=1}^{N-p} x_{n+p} x_{p+n-2}^* + a_1 \sum_{n=1}^{N-p} x_{p+n-1} x_{p+n-2}^* + a_2 \sum_{n=1}^{N-p} x_{p+n-2} x_{p+n-2}^* + \dots \\ + a_p \sum_{n=1}^{N-p} x_n x_{p+n-2}^* = 0 \end{aligned}$$

Вспомним, что конструкция вида $\frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x_{n+m} x_n^*$ есть выражение для дискретно-временной оценки автокорреляции $r_{xx}[m]$.

Приведем суммы в выражениях

Составим на основе получившихся производных матрицу ковариации

$$\hat{R}_{xx} = \begin{pmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}^*[1] & r_{xx}^*[2] & \dots & r_{xx}^*[p] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & r_{xx}^*[1] & \dots & r_{xx}^*[p] \\ r_{xx}[2] & r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \dots & r_{xx}^*[p] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{xx}[p] & r_{xx}[p-1] & r_{xx}[-2] & \dots & r_{xx}[0] \end{pmatrix}$$

Получили систему уравнений

$$\boxed{\hat{R}_{xx} \cdot \hat{a} = 0}, \text{ где} \quad (6)$$

вектор-столбец $\hat{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$ – неизвестен.

Найденные из уравнения (6) коэффициенты a подставим в уравнение (2). Получаем замкнутую систему уравнений для p неизвест-

ных z_k .

$$\sum_{m=0}^p a_m z_k^{p-m} = 0, \text{ для } k = 1, 2, \dots, p$$

Вспомним теперь, что реальная последовательность x_n отличается от аппроксимированной последовательности \tilde{x}_n на величину ошибки экспоненциальной аппроксимации ϵ

$$x_n = \tilde{x}_n + \epsilon_n$$

Из этих соображений, модифицируем уравнение (1)

$$\begin{pmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \dots & z_p^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \dots & z_p^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_p^{N-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \dots \\ \epsilon_N \end{pmatrix}$$

Теперь вновь нужно минимизировать сумму квадратов ошибок

$$\rho = \sum_{n=1}^N \epsilon_n \epsilon_n^* \rightarrow \min$$

Вновь дифференцируя по параметру h_p получаем систему уравнений вида

$$\boxed{\hat{Z} \cdot \hat{h} = \hat{C}}, \text{ где}$$

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^N z_1^{n-1} (z_1^*)^{n-1} & \sum_{n=1}^N z_2^{n-1} (z_1^*)^{n-1} & \dots & \sum_{n=1}^N z_p^{n-1} (z_1^*)^{n-1} \\ \sum_{n=1}^N z_1^{n-1} (z_2^*)^{n-1} & \sum_{n=1}^N z_2^{n-2} (z_2^*)^{n-1} & \dots & \sum_{n=1}^N z_p^{n-1} (z_2^*)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{n=1}^N z_1^{n-1} (z_p^*)^{n-1} & \sum_{n=1}^N z_2^{n-2} (z_p^*)^{n-1} & \dots & \sum_{n=1}^N z_p^{n-1} (z_p^*)^{n-1} \end{pmatrix},$$

$$\hat{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_p \end{pmatrix},$$

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^N x_n (z_1^*)^{n-1} \\ \sum_{n=1}^N x_n (z_2^*)^{n-1} \\ \dots \\ \sum_{n=1}^N x_n (z_p^*)^{n-1} \end{pmatrix},$$

Из этой системы мы найдем вектор-столбец \hat{h} .

3 Краткая схема

1. Составляем матрицу ковариации (см. (6))
2. Находим множители полинома a_m (см. (6))
3. Находим затухающие экспоненты z_k (см. (2))
4. Находим комплексные амплитуды экспонент h_k

5. Находим все остальные параметры модели

$$f_k = \frac{1}{2\pi T} \arctan \frac{\operatorname{Im}\{z_k\}}{\operatorname{Re}\{z_k\}}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \ln |z_k|$$

$$A_k = |h_k|$$

$$\varphi_k = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{h_k\}}{\operatorname{Re}\{h_k\}}$$