1 Метод наименьших квадратов Прони

1.1 Матрица ковариации

$$R_{xx} = \begin{bmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}^*[1] & \dots & r_{xx}^*[n] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \dots & r_{xx}^*[n-1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{xx}[p] & r_{xx}[p-1] & \dots & r_{xx}^*[n-p] \end{bmatrix}$$

Можно обойтись без комплексного сопряжения, если учесть, что функция ковариации обладает следующим свойством $r_{xx}[-p] = r_{xx}^*[p]$.

$$R_{xx} = \begin{bmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}[1] & \dots & r_{xx}[-n] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \dots & r_{xx}[-n+1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{xx}[p] & r_{xx}[p-1] & \dots & r_{xx}[-n+p] \end{bmatrix}$$

Корреляция r_{xx} вычисляется следующим образом, если индексс отсчитывать от единицы:

$$r_{xx}[p] = \frac{1}{n-p+1} \sum_{j=1}^{n-p} x[j+p] \cdot x^*[j]$$

Или, если применять индексы $p < 0$:

$$r_{xx}[p] = \frac{1}{n-|p|+1} \sum_{j=1}^{n-|p|} x^*[j+|p|] \cdot x[j]$$

Зная автокорреляционную матрицу, можно найти коэффициент авторегрессии, решая уравненния Юла-Уокера

$$\begin{pmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}[-1] & \dots & r_{xx}[-n] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \dots & r_{xx}[-n+1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{xx}[p] & r_{xx}[p-1] & \dots & r_{xx}[-n+p] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a_p[1] \\ \vdots \\ a_p[n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.2 Оценка ошибки предсказания

Коэффициенты авторегрессии нужны для нахождения коэффициентов отражения k_p:

$$k_p = -\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{p-1}[n] r_{xx}[p-n]}{\rho_{p-1}}, \text{ где}$$

дисперсия (?) ρ_p связана рекурсивным соотношением с $\rho_0 = r_{xx}[0]$

$$\rho_p = \rho_{p-1}(1 - |k_p|^2)$$

Теперь можем найти ошибку предсказания вперед и назад

$$e_p^f[n] = e_{p-1}^f[n] + k_p e_{p-1}^b[n-1]$$
$$e_p^b[n] = e_{p-1}^b[n-1] + k_p^* e_{p-1}^f[n]$$