

1. Общие понятия

Рассмотрим ряд общих понятий, описывающих возвышения взволнованной морской поверхности в рамках теории случайных пространственно-временных полей. Представим возвышения поверхности в виде суммы гармонических бегущих волн с независимыми фазами:

$$\xi(\vec{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(\vec{k}_n) \exp\{i(\vec{k}_n \vec{r})\}, \quad (1)$$

где $A_n(\vec{k}_n)$ – комплексная амплитуда гармоника с волновым числом \vec{k}_n и временной частотой ω_n , связанной с \vec{k}_n известным дисперсионным соотношением $\omega = \omega(k)$.

Корреляционную функцию поля $\xi(\vec{r}, t)$ определим как

$$K_\xi[\vec{r}_1, \vec{r}_2, t_1, t_2] = \langle \xi(\vec{r}_1, t_1) \xi^*(\vec{r}_2, t_2) \rangle$$

Поле высот в нашей задаче считаем стационарным в широком смысле, то есть $K_\xi[\vec{r}_1, \vec{r}_2, t_1, t_2] = K_\xi[\vec{\rho} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \tau = t_2 - t_1]$. Корреляционную функцию поверхности (1) несложно посчитать

$$K_\xi[\vec{\rho}, \tau] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(A_n(\vec{k}_n))^2}{2} \exp\{i(\vec{k}_n \vec{\rho} - \omega \tau)\} \quad (2)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать мгновенный снимок моделируемой поверхности, а значит положить $\tau = \text{const} = 0$ и $K_\xi[\rho, \tau] = K_\xi[\rho]$.

Тогда справедлива формула Винера-Хинчина

$$S_\xi(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\xi[\vec{\rho}] e^{-i\vec{k}\vec{\rho}} d\rho. \quad (3)$$

Будем полагать, что волновой спектр имеет вид функции с разделяющимися переменными

$$S_\xi(\vec{k}) = S_\xi(k) \Phi(\phi),$$

где $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, $\phi = \arctg \frac{k_x}{k_y}$. Для удобства, нормируем угловое распределение $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\phi) d\phi = 1$.

Спектр мощности $S_\xi(k)$ и азимутальное распределение $\Phi(\phi)$ известны из экспериментов (см. [пример 1]). Практическую реализацию построения модели морской поверхности мы рассмотрим далее.

2. Двумерная модель поверхностного волнения

В соответствии с предыдущим разделом, для моделирования случайной поехрности $\xi(\vec{r}, t)$ будем использовать её представление в виде суперпозиции плоских волн с различными частотами и случайными фазами ψ_{nm} , бегущих под разными азимутальными углами ϕ_m [?]:

$$\xi(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M A_n(k_n) \cdot F_m(\phi_m) \cos(\omega_n t + \vec{k}\vec{r} + \psi_{nm}), \quad (4)$$

где ψ_{nm} – случайная фаза, равномерно распределенная в интервале от 0 до 2π (см. рис. 2). Амплитуда n -ой гармоники A_n есть мощность на интервале Δk_n , которая вычисляется по спектру моделируемой поверхности $S_\xi(k)$ (см. (2) и (3)).

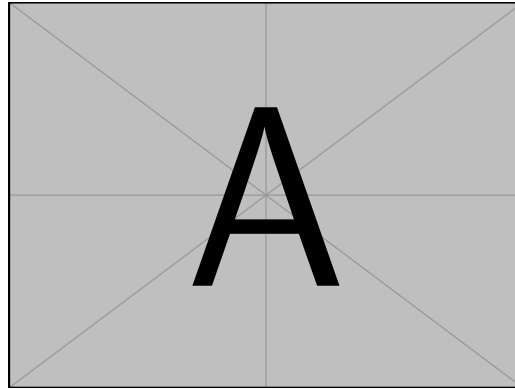


Рис. 1: Плотность вероятности случайной фазы ϕ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^2} &= S_\xi(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{\rho}} d\vec{k} = \frac{1}{(2\pi)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_\xi(k) \Phi(\phi) k e^{i\vec{k}\vec{\rho}} dk d\phi = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} k S_\xi(k) e^{i\vec{k}\vec{\rho}} dk = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(A_n(\vec{k}_n))^2}{2} e^{i\vec{k}_n\vec{\rho}} \end{aligned}$$

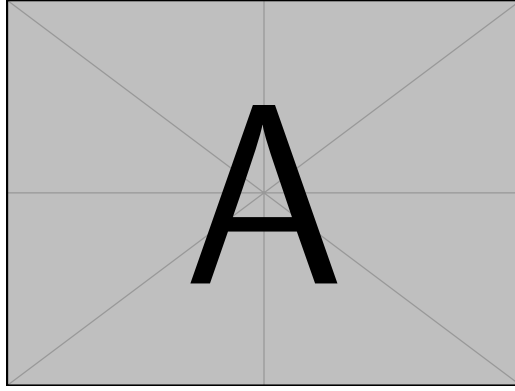


Рис. 2: К выводу формулы (5).

$$A_n(k_n) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int_{\Delta k_n} 2k S_\xi(k_n) \cdot \Delta k_n} \quad (5)$$

При достаточно $n \rightarrow \infty$ ($\Delta k_n \rightarrow 0$) можно интегрировать прямоугольником

$$A_n(k_n) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2S_\xi(k_n) \cdot \Delta k_n}$$

с ошибкой порядка $E \approx \frac{d^2 k S_\xi(k)}{dk^2} \Delta k_n^2$. Введем новое обозначение для удобства $S(k_n) \equiv k_n S_\xi(k_n)$.

Коэффициенты F_m задают азимутальное распределение и вычисляются следующим образом:

$$F_m(\phi_m) = \sqrt{\Phi_\xi(\phi_m) \cdot \phi_m},$$

где $\Delta\phi = \frac{2\pi}{M}$ – шаг по азимутальному углу.

Такой подход является одним из самых простых и эффективных, но у него есть существенный недостаток – моделируемая поверхность получается симметричной, хотя реальная поверхность ассиметрична: передний склон волны более крутой и короткий относительно заднего склона.

Графики $S(k)$ и $\Phi_\xi(k)$ для наглядности изображены на рис. 3 и рис. ?? соответственно. Далее k_m будет называться ордината максимума функции $S(k)$. Стоит заметить, что с ростом скорости ветра число используемых гармоник, необходимых для получения одинакового качества моделирования, возрастает. На рис. 4 изображены поверхности, построенные по формуле (4).

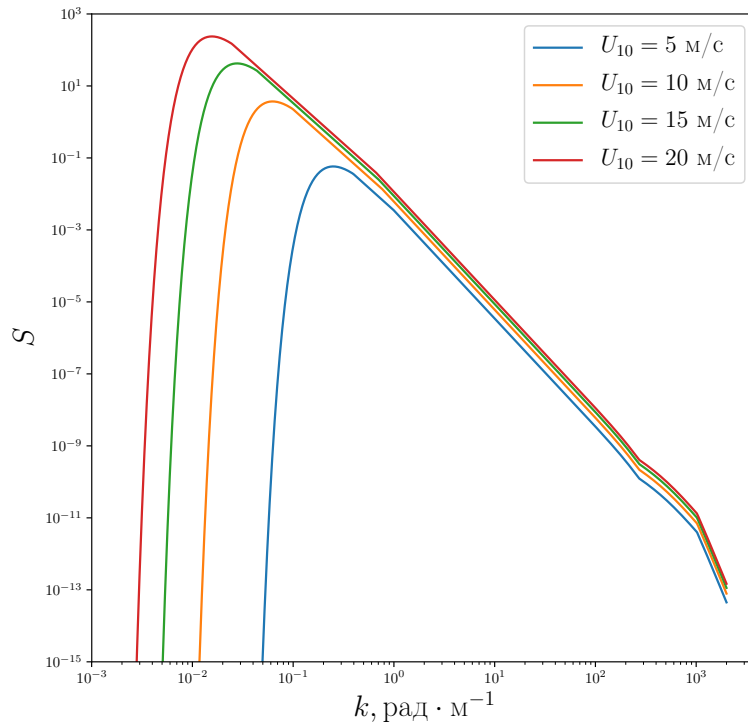


Рис. 3: Спектр высот $S(k)$ при меняющейся скорости ветра

Критерием качества моделирования, а также оптимального выбора числа гармоник была выбрана близость следующих корреляционных функций высот:

$$K[\rho] = \int_{-\infty}^{\infty} S(k) \cos(k\rho) dk \quad (6)$$

$$\tilde{K}(\rho) = \sum_{n=1}^N \frac{A_n^2}{2} \cos(k_n \rho)$$

3. Метод «отбеливания» спектра.

Для оптимизации времени построения поверхности и уменьшения количества гармоник без уменьшения качества моделирования, предлагается использовать следующий метод.

Предположим, что при больших ρ гармонические составляющие корреляционной функции не зависят друг от друга и мы можем пренебречь их взаимной корреляцией. Тогда мощность «шума» функции $\tilde{K}(\rho)$ определяет-

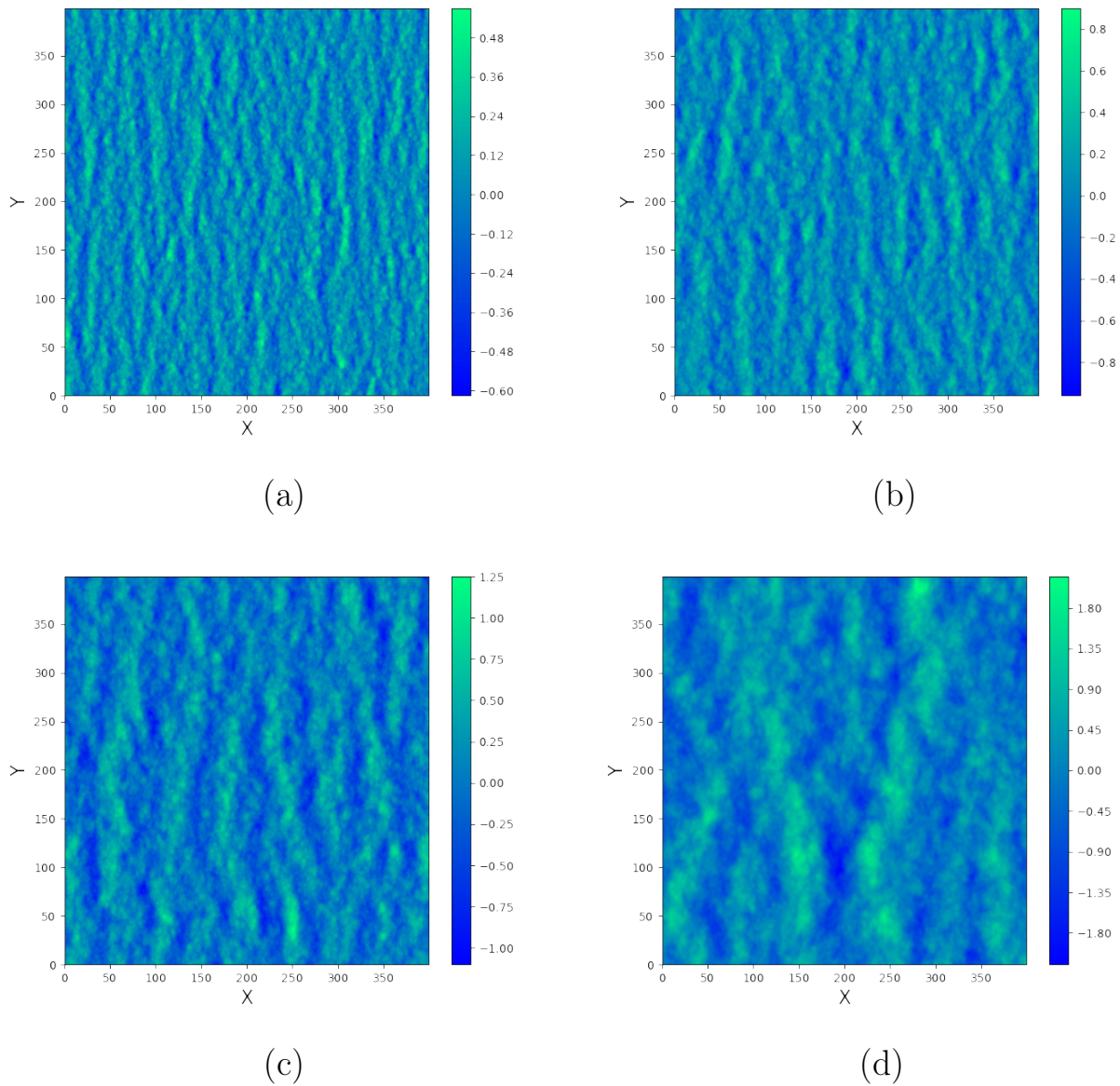


Рис. 4: Моделирование высот морского волнения: (a) $U_{10} = 5 \text{ м/с}$; (b) $U_{10} = 6 \text{ м/с}$; (c) $U_{10} = 7 \text{ м/с}$; (d) $U_{10} = 10 \text{ м/с}$;

ся выражением $\sigma_{\text{шум}}^2 = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \frac{A_i^2}{2} \equiv \sum_{n=1}^N \frac{b_i^2}{2}$.

В областях малых ρ , напротив, гармоники должны сильно взаимодействовать и соответствующая мощность равна $\tilde{K}^2(0) = \left(\sum_{n=1}^N b_i \right)^2$ (см. (6)).

Образует величину

$$Q = \frac{\sigma_{\text{шум}}^2}{\tilde{K}^2(0)},$$

которая характеризует относительную мощность шумов. Минимум этой величины находится путём решения системы уравнений

$$\frac{\partial Q}{\partial b_i} = 0, \text{ для } i = 1, 2, \dots, N.$$

$$\frac{b_i \left(\sum_{n=1}^N b_i \right)^2 - 2 \sum_{n=1}^N b_i \sum_{n=1}^N \frac{b_i^2}{2}}{\left(\sum_{n=1}^N b_i \right)^4} = 0$$

Частным результатом её решения является $b_1 = b_2 = \dots = b_N$.

Спектр модельного поля при этом имеет близкий к белому вид, а выравнивание амплитуд спектральных компонент поля $S(k)$ сводится к разбиению области определения спектра $[k_{min}, k_{max}]$ на участки Δk_i , интегралы по которым от функции $S(k)$ имеют одно и тоже значение $b_i = b_0 = \frac{\sigma^2}{N}$.

Заметим теперь, что рассуждая о способах разбиения интервала частот $[k_{min}, k_{max}]$ на участки Δk_i мы оставляли нерешенным вопрос о выборе расположения гармоник k_i внутри этих участков. Обычно k_i ставится у правой границы ячейки Δk_i . При этом, однако, оказывается, что модельная корреляционная функция плохо совпадает с экспериментальной корреляционной функцией в области малых ρ . Для достижения лучшего согласия следует потребовать сопряжения всех производных (от первого до N -го порядка) функций $\tilde{K}[\rho]$ и $K[\rho]$ при $\rho = 0$. Поскольку $K'[\rho] = \frac{\partial^2 K[\rho]}{\partial \rho^2}$, это условие эквивалентно требованию сопряжения моментов спектров модельного и реального полей, которое записывается в виде

$$\sum_{n=1}^N b_i k_i^{2p} = \int_0^{\infty} k^{2p} S(k) dk,$$

Полученная система N уравнений для N неизвестных k_i не имеет общего решения и потому может анализироваться лишь численно. Чтобы упростить решение нашей задачи, потребуем облегченного, по сравнению с предыдущим, условия сопряжения вторых моментов модельного и реального спектров

высот

$$b_i k_i^2 = \int_{\Delta k_i} k^2 S(k) dk,$$

где $b_i = A_i^2/2$

Из него непосредственно следует правило нахождения узлов k_i

$$k_i = \sqrt{\frac{2}{A_i^2} \int_{\Delta k_i} k^2 S(k) dk}. \quad (7)$$

Формула (7) выведена для спектра высот поверхностного волнения. Когда возникает необходимость моделирования уклонов, то необходима сделать замену переменной $S(k) \rightarrow k^2 S(k)$, чтобы получить формулу для нахождения правила расположения гармоник для уклонов

$$k_i = \sqrt{\frac{2}{A_i^2} \int_{\Delta k_i} k^4 S(k) dk}. \quad (8)$$

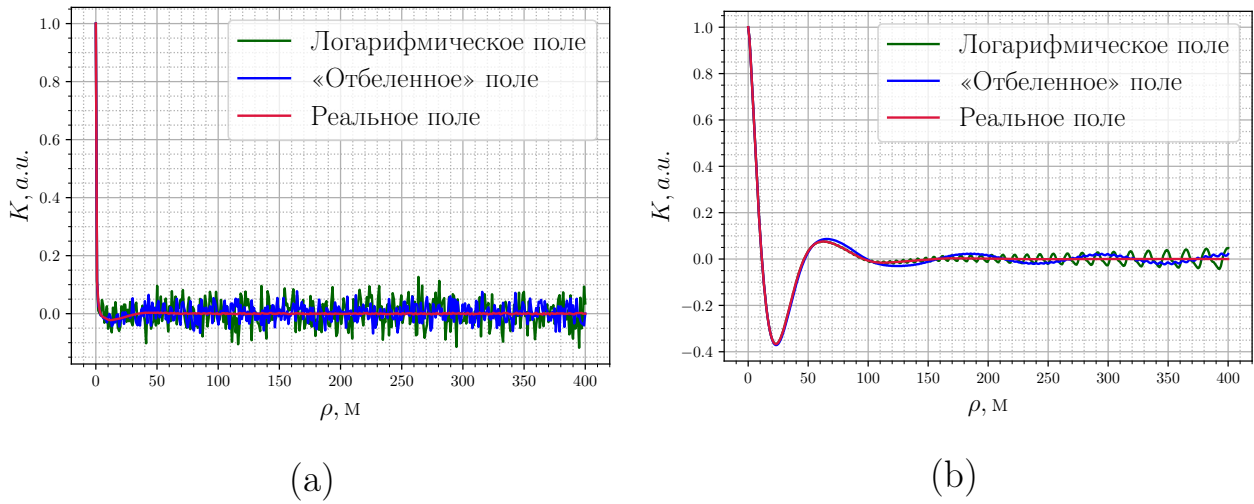


Рис. 5: Расположение гармоник по методу «отбеливания» спектра для наклонов и высот соответственно.

Такой способ выбора расположения гармоник, как нетрудно убедиться, обеспечивает сопряжение корреляционных функций реального и модельного полей по второй производной в нуле, или, иначе говоря, равенство дисперсий кривизн этих полей.

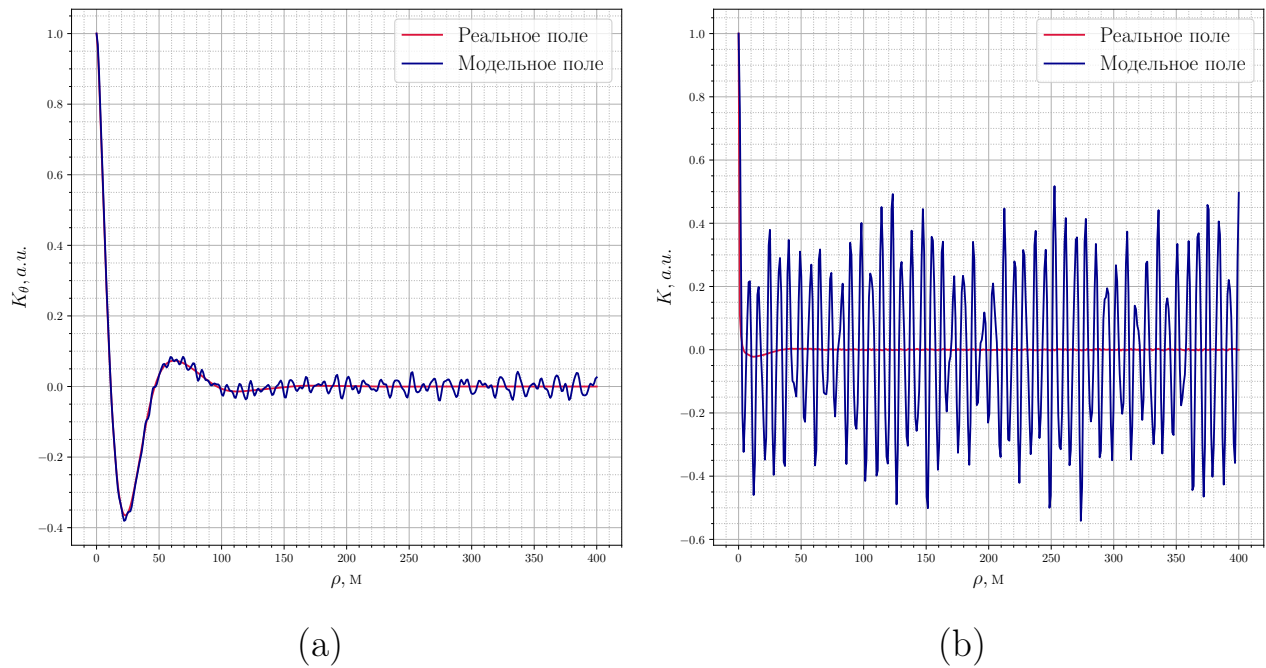


Рис. 6: Корреляционные функции высот (а) и уклонов (б) при расположении гармоник по методу «отбеливания» спектра по формуле (7)

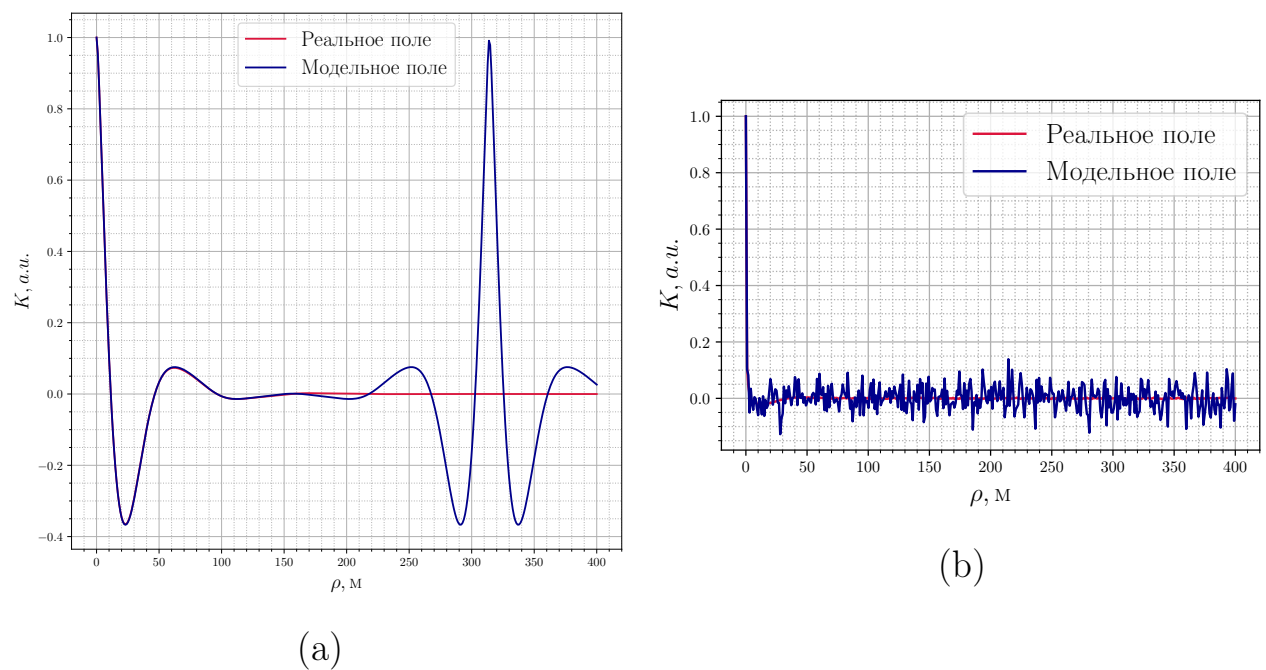


Рис. 7: Корреляционные функции высот (а) и уклонов (б) при расположении гармоник по методу «отбеливания» спектра по формуле (8)

Из рис. 6 и 7 видно, что нельзя такой метод, если задача требует одновременного точного моделирования высот и уклонов поверхности.

Для такой задачи необходима рассмотреть другую функцию относительных шумов Q , например

$$Q = \frac{(\sigma_{\text{шум}}^{\text{н}})^2}{(\tilde{K}^{\text{н}}(0))^2} + \frac{(\sigma_{\text{шум}}^{\text{в}})^2}{(\tilde{K}^{\text{в}}(0))^2}, \quad (9)$$

где индексы «н» и «в» соответствуют наклонам и высотам. Учитывая то, что оба слагаемых в уравнении (9) вещественны и положительны, то экстремум функции Q можно найти, зная экстремум каждого слагаемого по отдельности.

4. Choppy Wave Model

4.1. Обычный CWM

Рассмотрим задачу моделирования одномерной поверхности суммой гармоник с детерминированными амплитудами и случайными фазами

$$z = \sum_{j=0}^N A_j \cos(k_j x + \psi_j)$$

Чтобы получить модель заостренной волны введем нелинейное преобразование координат

$$\{x, z(x)\} \longrightarrow \{x + D(x), z(x)\},$$

где $D(x)$ горизонтальное смещение

$$D(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(k) e^{ikx} dk,$$

а $S(k)$ – прямое Фурье преобразование исходной поверхности

$$S(k) = \int_{-\infty}^{\infty} z(x) e^{-ikx} dx$$

В нашем случае, функция $D(x)$ примет вид:

$$\begin{cases} x = x_0 - \underbrace{\sum_{j=0}^N A_j \sin(k_j x_0 + \psi_j)}_{D(x)} \\ z = \sum_{j=0}^N \cos(k_j x_0 + \psi_j) \end{cases}$$

Это и есть Chorpy Wave Model. График подобной заостренной поверхности изображен на рис.8

Рассчитаем спектр поверхности, построенной по CWM.

Спектр поверхности в новых координатах

$$\widehat{S}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} z(x) \cdot e^{-ikx} [1 + D'(x)] dx = S(k) + \int_{-\infty}^{\infty} z(x) \cdot D'(x) e^{-ikx} dx, \quad (10)$$

где $S(k)$ – исходный спектр (например, JONSWAP).

Пусть спектр $S(k)$ состоит из всего одной гармонике. Тогда, мы можем его записать в виде

$$S(k) = \pi A_0 (\delta(k - k_0) + \delta(k + k_0))$$

Для такого спектра функция горизонтального смещения и её производная равны:

$$D(x) = -A_0 \sin(k_0 x), \quad D'(x) = -A_0 k_0 \cos(k_0 x)$$

Запишем прямое преобразование Фурье для функции $D'(x)$:

$$\mathfrak{D}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} D'(x) e^{-ikx} dx = -\pi A_0 k_0 [\delta(k - k_0) + \delta(k + k_0)]$$

Перепишем (10), применяя теорему о свертке:

$$\widehat{S}(k) = S(k) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(k - \xi) \mathfrak{D}(\xi) d\xi$$

$$\begin{aligned}\widehat{S}(k) &= S(k) + \frac{A_0}{2}[\mathfrak{D}(k - k_0) + \mathfrak{D}(k + k_0)] = \\ S(k) &- \frac{\pi A_0^2}{2}k_0[\delta(k - 2k_0) + \delta(k + 2k_0) + \delta(k) + \delta(k)] = \\ \pi A_0[\delta(k + k_0) + \delta(k - k_0)] &- \frac{\pi A_0^2 k_0}{2}[\delta(k + 2k_0) + 2\delta(k) + \delta(k - 2k_0)]\end{aligned}$$

Итак, для частного случае, когда моделируемая поверхность представляет всего одну гармонику $z(x) = A_0 \cos(k_0 x)$ Мы получили модифицированный спектр:

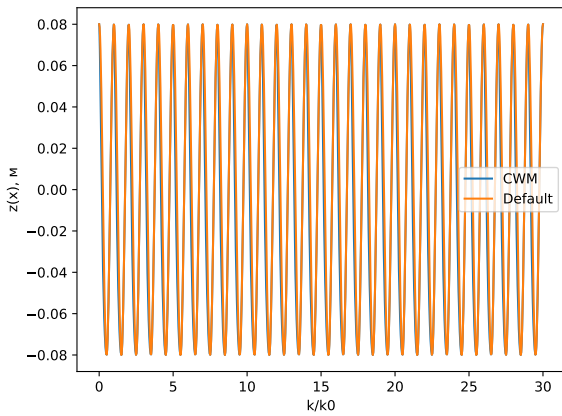
$$\widehat{S} = \pi A_0[\delta(k + k_0) + \delta(k - k_0)] - \frac{\pi A_0^2 k_0}{2}[\delta(k + 2k_0) + 2\delta(k) + \delta(k - 2k_0)]$$

Очевидно, что если поверхность будет представляться суммой гармоник $z(x) = \sum_{n=0}^N A_n \cos k_n x$, спектр примет вид

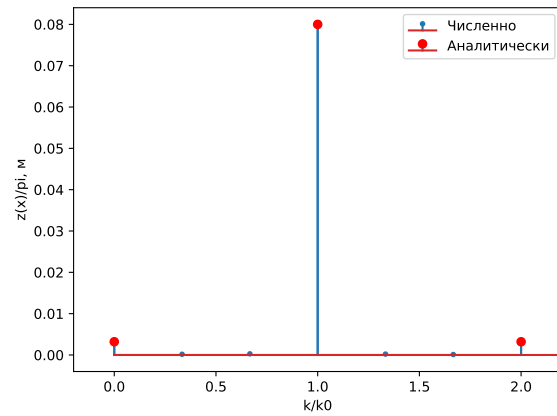
$$\widehat{S} = \underbrace{\sum_{n=0}^N \pi A_n [\delta(k + k_n) + \delta(k - k_n)]}_{S(k)} - \underbrace{\sum_{n=0}^N \frac{\pi A_n^2 k_n}{2} [\delta(k + 2k_n) + 2\delta(k) + \delta(k - 2k_n)]}_{S_{CWM}(k)}$$

Добавка к исходному спектру выглядит следующим образом

$$S_{CWM}(k) = - \sum_{n=0}^N \pi A_n^2 k_n \delta(k) - \sum_{n=0}^N \frac{\pi A_n^2 k_n}{2} [\delta(k + 2k_n) + \delta(k - 2k_n)]$$



(a)



(b)

Рис. 8: Заостренная синусоида (CWM) в сравнении обычной
Рис. 9: Спектр заостренной синусои- ды

4.2. Модифицированный CWM

Для того, чтобы получить ассиметричную, заостренную поверхности введем другую функцию горизонтального смещения $D(x)$

$$D(x) = \begin{cases} -A_0 \sin(k_0 x), & \text{если } 0 \leq k_0 x \leq \pi \\ 0, & \text{если } \pi < k_0 x < 2\pi \end{cases}$$

И снова введем преобразование координат

$$\{z(x), x\} \rightarrow \{z(x), x + D(x)\}$$

Спектр поверхности в новых координатах

$$\hat{S}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} z(x) \cdot e^{-ikx} [1 + D'(x)] dx = S(k) + \int_{-\infty}^{\infty} z(x) \cdot D'(x) e^{-ikx} dx,$$

где $S(k)$ – исходный спектр (например, JONSWAP).

Задача сводится теперь к вычислению интеграла

$$I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} z(x) \cdot D'(x) e^{-ikx} dx$$

Согласно теореме о свертке

$$I(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(k - \xi) \mathfrak{D}(\xi) d\xi, \text{ где} \quad (11)$$

$\mathfrak{D}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} D'(x) e^{-ikx} dx$, $S(k) = \int_{-\infty}^{\infty} z(x) e^{-ikx} dx$ – обратное Фурье-преобразование функций $D'(x)$ и $z(x)$ соответственно.

4.2.1 Нахождение спектральной плотности функции $D'(x)$

Для простоты рассмотрим случай одной гармоники.

В этом случае $D(x)$ можно представить в виде модуляции гармонического сигнала прямоугольным сигналом.

$D(x)$ представим в виде произведения двух функций $D(x) = -A_0 \sin(k_0 x) \cdot \Theta(k_0 x)$, где $\Theta(k_0 x)$ – прямоугольный сигнал.

Запишем прямое преобразование Фурье

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} D'(x) e^{-ikx} dx = \\ &= -A_0 k_0 \int_{-\infty}^{\infty} \cos k_0 x \cdot \Theta(k_0 x) e^{-ikx} dx - A_0 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \Theta'(k_0 x) \sin(k_0 x) e^{-ikx} dx}_{= 0} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{-A_0 k_0 \cos k_0 x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\Theta(k_0 x)}_{g(x)} e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) e^{-ikx} dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Осталось найти спектр функций $f(x)$ и $g(x)$ и снова воспользоваться теоремой о свертке.

Спектр функции $f(x)$.

$$\begin{aligned}
 S_f(k) &= -A_0 k_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{+ik_0 x} + e^{-ik_0 x}}{2} e^{-ikx} dx = \\
 &= -\frac{A_0 k_0}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k-k_0)x} dx}_{2\pi\delta(k-k_0)} - \frac{A_0 k_0}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k+k_0)x} dx}_{2\pi\delta(k+k_0)} = \\
 &= -\frac{A_0 k_0}{2} \cdot 2\pi\{\delta(k-k_0) + \delta(k+k_0)\} = \\
 &= \boxed{-\pi A_0 k_0 \{\delta(k-k_0) + \delta(k+k_0)\}}
 \end{aligned}$$

Спектр функции $g(x)$. $X = \frac{2\pi}{k_0}$ – период прямоугольного импульса, совпадающий с периодом синусоиды частотой k_0 . При этом $k_n = nk_0$

$$\begin{aligned}
 C_n(k) &= \frac{1}{X} \int_0^{\frac{X}{2}} e^{-ik_n x} dx = \frac{1}{-ik_n X} e^{-ik_n x} \Big|_0^{\frac{X}{2}} = \frac{1}{-ik_n X} \left(e^{-i\frac{k_n X}{2}} - 1 \right) = \\
 &= \frac{1}{-ik_n X} e^{-i\frac{k_n X}{4}} \left(e^{-i\frac{k_n X}{4}} - e^{+i\frac{k_n X}{4}} \right) = \frac{e^{-i\frac{k_n X}{4}}}{2} \cdot \text{sinc}\left(\frac{k_n X}{4}\right)
 \end{aligned}$$

$$S_g(k) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2k_0}k}}{2} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{2k_0}k\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(k - nk_0) \quad (13)$$

Вернемся к (12)

$$\mathfrak{D}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(k-x) S_g(x) dx = -\frac{A_0 k_0}{2} [S_g(k-k_0) + S_g(k+k_0)].$$

Переобозначим $\mathfrak{D}_{\pm}(k) = -\frac{A_0 k_0}{2} S_g(k \mp k_0)$. Распишем теперь эту формулу, используя (13):

$$\mathfrak{D}_{\pm} = -\frac{A_0 k_0}{2} \cdot \frac{e^{-i\frac{\pi}{2k_0}(k \mp k_0)}}{2} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{2k_0}(k \mp k_0)\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(k - nk_0)$$

Вернемся теперь к уравнению (11). Для него мы нашли $\mathfrak{D}(k)$. в случае одной гармоники равен $S(k) = \pi A_0 \{\delta(k-k_0) + \delta(k+k_0)\}$. Получаем

$$\begin{aligned}
I(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(k - \xi) \mathfrak{D}(\xi) d\xi = \\
&\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \pi A_0 \{ \delta(\xi - (k - k_0)) + \delta(\xi - (k + k_0)) \} \cdot \{ \mathfrak{D}_+(\xi) + \mathfrak{D}_-(\xi) \} d\xi = \\
&\frac{A_0}{2} (\mathfrak{D}_+(k - k_0) + \mathfrak{D}_+(k + k_0) + \mathfrak{D}_-(k + k_0) + \mathfrak{D}_-(k - k_0)) = \\
&-\frac{A_0^2 k_0}{2} [S_g(k - 2k_0) + S_g(k + 2k_0) + 2S_g(k)]
\end{aligned}$$

$$\widehat{S}(k) = S(k) - \frac{A_0^2 k_0}{2} [S_g(k - 2k_0) + S_g(k + 2k_0) + 2S_g(k)]$$

$$S_g(k) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2k_0}k}}{2} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{2k_0}k\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(k - nk_0)$$

А. Спектральное представление непериодических сигналов

Пусть $U(t)$ одиночный импульс конечной длительности. Создадим периодическую последовательность с периодом T и представим её комплексным рядом Фурье

$$U_{\text{периодич}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\{in\omega_0 t\}, \quad (14)$$

где

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U(t) \exp\{-in\omega_0 t\} dt \quad (15)$$

Для того, чтобы перейти к спектральному представлению единичного импульса, устремим $T \rightarrow \infty$.

Из (15) видно, что при $T \rightarrow \infty$ получаем:

1. Бесконечно-малые амплитудные коэффициенты C_n (из-за наличия T в знаменателе);
2. Частоты соседних гармоник $n\omega_0$ и $(n+1)\omega_0$ становятся сколь угодно близкими (т.к. $\omega = \frac{2\pi}{T}$);
3. Число гармоник, входящих в ряд Фурье, становится бесконечно большим, т.к. при $T \rightarrow \infty$ основная частота $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$, т.е. спектр становится сплошным.

Подставим (14) в (15), получим:

$$U(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U(x) \exp(-in\omega_0 t) \right) \cdot \exp(in\omega_0 t) \cdot \frac{\omega_0}{2\pi}, \quad (16)$$

т.к. $T \rightarrow \infty$, то $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$, а значит в (16) можно перейти от суммирования к интегрированию $\omega_0, n\omega_0 \rightarrow \omega, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}$. Таким образом, получаем

двойной интеграл Фурье

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{-i\omega x} dx}_{S(\omega)} \right] d\omega.$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-i\omega t} dt$$

Функцию $S(\omega)$ здесь и далее будем называть **прямым преобразованием Фурье** функции $U(t)$ или **спектральной плотностью сигнала** $U(t)$.

С учетом обозначений, получим

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (17)$$

(17) есть **обратное преобразование Фурье**.

Амплитудно-частотной характеристикой сигнала $U(t)$ будем называть

$$|S(\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}\{S(\omega)\}^2 + \operatorname{Im}\{S(\omega)\}^2}$$

Фаза-частотной характеристикой сигнала $U(t)$ будем называть функцию

$$\Theta(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}\{S(\omega)\}}{\operatorname{Re}\{S(\omega)\}}$$

В. Основные свойства преобразований Фурье

Сложение сигналов Преобразование Фурье линейно. Если

$$U(t) = U_1(t) + U_2(t) + \cdots + U_n(t),$$

то

$$S(\omega) = S_1(\omega) + S_2(\omega) + \cdots + S_n(\omega),$$

Теорема запаздывания

$$U_2(t) = U_1(t - t_0)$$

$$S_2(\omega) = \int U_1(t - t_0) e^{-i\omega t} dt = \{\theta = t - t_0, dt = d\theta\} = \\ \int_{-\infty}^{\infty} U_1(\theta) e^{-i\omega(\theta+t_0)} d\theta = e^{-i\omega t_0} S_1(\omega);$$

$$\boxed{S_2(\omega) = e^{-i\omega t_0} S_1(\omega)}$$

Изменение масштаба времени $U_2(t) = U_1(nt)$, $n > 1$ – сжатие сигнала, $n < 1$ – расширение сигнала.

$$S_2(\omega) = \int_0^{\frac{\pi}{n}} U_2(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{n}} U_1(nt) e^{-i\omega t} dt.$$

После замены переменных $nt = \theta$, $dt = d(\frac{\theta}{n})$ отсюда имеем

$$S_2(\omega) = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{n}} U_1(\theta) e^{-i\frac{\omega}{n}\theta} d\theta = \frac{1}{n} S_1\left(\frac{\omega}{n}\right)$$

$$\boxed{S_2(\omega) = \frac{1}{n} S_1\left(\frac{\omega}{n}\right)}$$

Произведение двух сигналов Рассмотрим составной сигнал $U(t) = f(t) \cdot g(t)$, где $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$, и $g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega$. Найдём прямое преобразование Фурье:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint F(x) G(y) \exp\{-i(\omega - x - y)t\} dx dy dt$$

Учтем, что $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i(\omega - x - y)t\} dt = 2\pi\delta(x + y - \omega)$

$$\frac{1}{2\pi} \iint F(x)G(y)\delta(x + y - \omega) dx dy$$

Применим фильтрующее свойство дельта-функции к функции $F(x)$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega - y)G(y) dy$$

$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(x)F(\omega - x) dx$	– свертка спектров сомножителей.
---	----------------------------------