1. Спектральное представление непериодических сигналов

Пусть U(t) одиночный импульс конечной длительности. Создадим периодическую последовательность с периодом T и представим её комплексным рядом Фурье

$$U_{\text{периодич}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\{in\omega_0 t\},\tag{1}$$

где

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U(t) \exp\{-in\omega_0 t\} dt$$
 (2)

Для того, чтобы перейти к спектральному представлению единичного импульса, устремим $T \to \infty$.

Из (2) видно, что при $T \to \infty$ получаем:

- 1. Бесконечно-малые амплитудные коэффициенты C_n (из-за наличия T в знаменателе);
- 2. Частоты соседник гармоник $n\omega_0$ и $(n+1)\omega_0$ становятся сколь угодно близкими (т.к. $\omega=\frac{2\pi}{T}$;
- 3. Число гармоник, входящих в ряд Фурье, становится бесконечно большим, т.к. при $T \to \infty$ основная частота $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \to 0$, т.е. спектр становится сплошным.

Подставим (1) в (2), получим:

$$U(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U(x) \exp(-in\omega_0 t) \right) \cdot \exp(in\omega_0 t) \cdot \frac{\omega_0}{2\pi}, \tag{3}$$

т.к. $T \to \infty$, то $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \to 0$, а значит в (3) можно перейти от суммирования к интегрированию ω_0 , $n\omega_0 \to \omega$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \to \int_{-\infty}^{\infty}$. Таким образом, получаем двойной

интеграл Фурье

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} U(x)e^{-i\omega x} dx \right] d\omega.$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t)e^{-i\omega t} dt$$

Функцию $S(\omega)$ здесь и далее будем называть **прямым преобразованием Фурье** функции U(t) или **спектарльной плотностью сигнала** U(t).

С учетом обозначений, получим

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$
 (4)

(4) есть обратное преобразование Фурье.

Амплитудно-частотной характеристикой сигнала U(t) будем называть

$$|S(\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}\{S(\omega)\}^2 + \operatorname{Im}\{S(\omega)\}^2}$$

Фаза-частотной характеристикой сигнала U(t) будем называть функцию

$$\Theta(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}\{S(\omega)\}}{\operatorname{Re}\{S(\omega)\}}$$

2. Основные свойства преобразований Фурье

Сложение сигналов Преобразование Фурье линейно. Если

$$U(t) = U_1(t) + U_2(t) + \cdots + U_n(t),$$

TO

$$S(\omega) = S_1(\omega) + S_2(\omega) + \cdots + S_n(\omega),$$

Теорема запаздывания

$$U_2(t) = U_1(t - t_0)$$

$$S_2(\omega) = \int U_1(t - t_0)e^{-i\omega t} dt = \{\theta = t - t_0, dt = d\theta\} = \int_{-\infty}^{\infty} U_1(\theta)e^{-i\omega(\theta + t_0)} d\theta = e^{-i\omega t_0}S_1(\omega);$$

$$S_2(\omega) = e^{-i\omega t_0} S_1(\omega)$$

Изменение масштаба времени $U_2(t) = U_1(nt), n > 1$ – сжатие сигнала, n < 1 – расширение сигнала.

$$S_2(\omega) = \int_0^{\frac{\tau}{n}} U_2(t)e^{-i\omega t} = \int_0^{\frac{\tau}{n}} U_1(nt)e^{-i\omega t} dt.$$

После замены переменных $nt= heta, \mathrm{d}t=\mathrm{d}\left(rac{ heta}{t}
ight)$ отсюда имеем

$$S_2(\omega) = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\tau}{n}} U_1(\theta) e^{-i\frac{\omega}{n}\theta} d\theta = \frac{1}{n} S_1\left(\frac{\omega}{n}\right)$$
$$S_2(\omega) = \frac{1}{n} S_1\left(\frac{\omega}{n}\right)$$

Произведение двух сигналов Рассмотрим составной сигнал $U(t)=f(t)\cdot g(t)$, где $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$, и $g(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$. Найдём прямое преобразование Фурье:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint F(x) G(y) \exp\{-i(\omega - x - y)t\} dx dy dt$$

Учтем, что
$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i(\omega-x-y)t\} dt = 2\pi\delta(x+y-\omega)$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint F(x)G(y)\delta(x+y-\omega) dx dy$$

Применим фильтрующее свойство дельта-функции к функции F(x)

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega-y) G(y) \,\mathrm{d}y$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x) F(\omega-x) \,\mathrm{d}x - \mathrm{c}$$
 — свертка спектров сомножителей.

3. Choppy Wave Model

3.1. Обычный CWM

Рассмотрим задачу моделирования одномерной поверхности суммой гармоник с детерменированными амплитудами и случайными фазами

$$z = \sum_{j=0}^{N} A_j \cos(k_j x + \psi_j)$$

Чтобы получить модель заостренной волны введем нелинейное преобразование координат

$${x, z(x)} \longrightarrow {x + D(x), z(x)},$$

где D(x) горизонтальное смещение

$$D(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(k)e^{ikx} dk,$$

а S(k) – прямое Фурье преобразование исходной поверхности

$$S(k) = \int_{-\infty}^{\infty} z(x)e^{-ikx} dx$$

В нашем случае, функция D(x) примет вид:

$$\begin{cases} x = x_0 - \sum_{j=0}^{N} A_j \sin(k_j x_0 + \psi_j) \\ \sum_{j=0}^{D(x)} \cos(k_j x_0 + \psi_j) \end{cases}$$

Это и есть Choppy Wave Model. График подобной заостренной поверхности изображен на рис.1

Рассчитаем спектр поверхности, построенной по CWM.

Спектр поверхности в новых координатах

$$\widehat{S}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} z(x) \cdot e^{-ikx} [1 + D'(x)] \, \mathrm{d}x = S(k) + \int_{-\infty}^{\infty} z(x) \cdot D'(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x \,, \quad (5)$$

где S(k)– исходный спектр (например, JONSWAP).

Пусть спектр S(k) состоит из всего одной гармоники. Тогда, мы можем его записать в виде

$$S(k) = \pi A_0(\delta(k - k_0) + \delta(k + k_0))$$

Для такого спектра функция горизонтального смещения и её производная равны:

$$D(x) = -A_0 \sin(k_0 x), \quad D'(x) = -A_0 k_0 \cos(k_0 x)$$

Запишем прямое преобразование Фурье для функции D'(x):

$$\mathfrak{D}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} D'(x)e^{-ikx} dx = -\pi A_0 k_0 [\delta(k - k_0) + \delta(k + k_0)]$$

Перепишем (5), применяя теорему о свертке:

$$\widehat{S}(k) = S(k) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(k - \xi) \mathfrak{D}(\xi) d\xi$$

$$\widehat{S}(k) = S(k) + \frac{A_0}{2} [\mathfrak{D}(k - k_0) + \mathfrak{D}(k + k_0)] =$$

$$S(k) - \frac{\pi A_0^2}{2} k_0 [\delta(k - 2k_0) + \delta(k + 2k_0) + \delta(k) + \delta(k)] =$$

$$\pi A_0 [\delta(k + k_0) + \delta(k - k_0)] - \frac{\pi A_0^2 k_0}{2} [\delta(k + 2k_0) + 2\delta(k) + \delta(k - 2k_0)]$$

Итак, для частного случае, когда моделируемая поверхность представляет всего одну гармонику $z(x) = A_0 \cos(k_0 x)$ Мы получили модифицированный спектр:

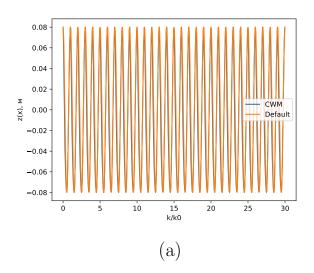
$$\widehat{S} = \pi A_0 [\delta(k+k_0) + \delta(k-k_0)] - \frac{\pi A_0^2 k_0}{2} [\delta(k+2k_0) + 2\delta(k) + \delta(k-2k_0)]$$

Очевидно, что если поверхность будет представляться суммой гармоник $z(x) = \sum_{n=0}^{N} A_n \cos k_n x$, спектр примет вид

$$\widehat{S} = \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \pi A_n [\delta(k+k_n) + \delta(k-k_n)]}_{S(k)} - \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \frac{\pi A_n^2 k_n}{2} [\delta(k+2k_n) + 2\delta(k) + \delta(k-2k_n)]}_{S_{CWM}(k)}$$

Добавка к исходному спектру выглядит следующим образом

$$S_{CWM}(k) = -\sum_{n=0}^{N} \pi A_n^2 k_n \delta(k) - \sum_{n=0}^{N} \frac{\pi A_n^2 k_n}{2} [\delta(k+2k_n) + \delta(k-2k_n)]$$



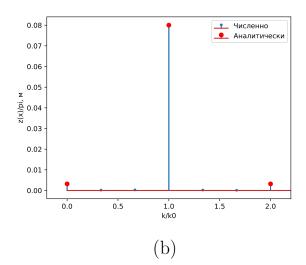


Рис. 1: Заостренная синусоида Рис. 2: Спектр заостренной синусои-(CWM) в сравнении обычной ды

3.2. Модифицированный CWM

Для того, чтобы получить ассиметричную, заостренную поверхности введем другую функцию горизонтального смещения D(x)

$$D(x) = \begin{cases} -A_0 \sin(k_0 x), & \text{если } 0 \le k_0 x \le \pi \\ 0, & \text{если } \pi < k_0 x < 2\pi \end{cases}$$

И снова введем преобразование координат

$$\{z(x), x\} \to \{z(x), x + D(x)\}$$

Спектр поверхности в новых координатах

$$\widehat{S}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} z(x) \cdot e^{-ikx} [1 + D'(x)] dx = S(k) + \int_{-\infty}^{\infty} z(x) \cdot D'(x) e^{-ikx} dx,$$

где S(k)– исходный спектр (например, JONSWAP).

Задача сводится теперь к вычислению интеграла

$$I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} z(x) \cdot D'(x)e^{-ikx} dx$$

Согласно теореме о свертке

$$I(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(k - \xi) \mathfrak{D}(\xi) \, \mathrm{d}\xi, \text{ где}$$
 (6)

 $\mathfrak{D}(k)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}D'(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x,$ $S(k)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}z(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$ – обратное Фурье-преобразование функций D'(x) и z(x) соответственно.

3.2.1 Нахождение спектральной плотности функции D'(x)

Для простоты рассмотрим случай одной гармоники.

В этом случае D(x) можно представить в виде модуляции гармонического сигнала прямоугольным сигналом.

D(x) представим в виде произведения двух функций $D(x) = -A_0 \sin(k_0 x) \cdot \Theta(k_0 x)$, где $\Theta(k_0 x)$ – прямоугольный сигнал.

Запишем прямое преобразование Фурье

$$\mathfrak{D}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} D'(x)e^{-ikx} dx =$$

$$-A_0 k_0 \int_{-\infty}^{\infty} \cos k_0 x \cdot \Theta(k_0 x)e^{-ikx} dx - A_0 \int_{-\infty}^{\infty} \Theta'(k_0 x) \sin(k_0 x)e^{-ikx} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{-A_0 k_0 \cos k_0 x}_{f(x)} \underbrace{\Theta(k_0 x)}_{g(x)} e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-ikx} dx.$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{-A_0 k_0 \cos k_0 x}_{f(x)} \underbrace{\Theta(k_0 x)}_{g(x)} e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-ikx} dx.$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{-A_0 k_0 \cos k_0 x}_{f(x)} \underbrace{\Theta(k_0 x)}_{g(x)} e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-ikx} dx.$$

Осталось найти спектр функций f(x) и g(x) и снова воспользоваться теоремой о свертке.

Спектр функции f(x).

$$S_{f}(k) = -A_{0}k_{0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{+ik_{0}x} + e^{-ik_{0}x}}{2} e^{-ikx} dx =$$

$$-\frac{A_{0}k_{0}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k-k_{0})x} dx - \frac{A_{0}k_{0}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k-k_{0})x} dx =$$

$$-\frac{A_{0}k_{0}}{2} \cdot 2\pi \{\delta(k-k_{0}) + \delta(k+k_{0})\} =$$

$$-\frac{A_{0}k_{0}}{2} \cdot 2\pi \{\delta(k-k_{0}) + \delta(k+k_{0})\}$$

Спектр функции g(x). $X=\frac{2\pi}{k_0}$ — период прямоугольного импульса, совпадающий с периодом синусоиды частотой k_0 . При этом $k_n=nk_0$

$$C_n(k) = \frac{1}{X} \int_0^{\frac{X}{2}} e^{-ik_n x} dx = \frac{1}{-ik_n X} e^{-ik_n x} \Big|_0^{\frac{X}{2}} = \frac{1}{-ik_n X} \left(e^{-i\frac{k_n X}{2}} - 1 \right) = \frac{1}{-ik_n X} e^{-i\frac{k_n X}{4}} \left(e^{-i\frac{k_n X}{4}} - e^{+i\frac{k_n X}{4}} \right) = \frac{e^{-i\frac{k_n X}{4}}}{2} \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{k_n X}{4}\right)$$

$$S_g(k) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2k_0}k}}{2} \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{2k_0}k\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(k - nk_0)$$
 (8)

Вернемся к (7)

$$\mathfrak{D}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(k-x) S_g(x) \, \mathrm{d}x = -\frac{A_0 k_0}{2} [S_g(k-k_0) + S_g(k+k_0)].$$

Переобозначим $\mathfrak{D}_{\pm}(k) = -\frac{A_0k_0}{2}S_g(k \mp k_0)$. Распишем теперь эту формулу, используя (8):

$$\mathfrak{D}_{\pm} = -\frac{A_0 k_0}{2} \cdot \frac{e^{-i\frac{\pi}{2k_0}(k \mp k_0)}}{2} \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{2k_0}(k \mp k_0)\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(k - nk_0)$$

Вернемся теперь к уравнению (6). Для него мы нашли $\mathfrak{D}(k)$. в случае одной гармоники равен $S(k)=\pi A_0\{\delta(k-k_0)+\delta(k+k_0)\}$. Получаем

$$I(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(k - \xi) \mathfrak{D}(\xi) \, \mathrm{d}\xi =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \pi A_0 \{ \delta(\xi - (k - k_0)) + \delta(\xi - (k + k_0)) \} \cdot \{ \mathfrak{D}_+(\xi) + \mathfrak{D}_-(\xi) \} \, \mathrm{d}\xi =$$

$$\frac{A_0}{2} (\mathfrak{D}_+(k - k_0) + \mathfrak{D}_+(k + k_0) + \mathfrak{D}_-(k + k_0) + \mathfrak{D}_-(k - k_0)) =$$

$$-\frac{A_0^2 k_0}{2} [S_g(k - 2k_0) + S_g(k + 2k_0) + 2S_g(k)]$$

$$\widehat{S}(k) = S(k) - \frac{A_0^2 k_0}{2} [S_g(k - 2k_0) + S_g(k + 2k_0) + 2S_g(k)]$$