1. Спектральное представление непериодических сигналов

Пусть $U(t)$ одиночный импульс конечной длительности. Создадим периодическую последовательность с периодом T и представим её комплексным рядом Фурье

$$U_{\text{периодич}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\{in\omega_0 t\}, \tag{1}$$

где

$$C_n = \frac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U(t) \exp\{-in\omega_0 t\} \mathrm{d}t \tag{2}$$

Для того, чтобы перейти к спектральному представлению единичного импульса, устремим $T \to \infty$.

Из (2) видно, что при $T \to \infty$ получаем:

1. Бесконечно-малые амплитудные коэффициенты C_n (из-за наличия T в знаменателе);

2. Частоты соседник гармоник $n\omega_0$ и $(n+1)\omega_0$ становятся сколь угодно близкими (т.к. $\omega = \frac{2\pi}{T}$;

3. Число гармоник, входящих в ряд Фурье, становится бесконечно большим, т.к. при $T \to \infty$ основная частота $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \to 0$, т.е. спектр становится сплошным.

Подставим (1) в (2), получим:

$$U(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U(x) \exp(-in\omega_0 t) \right) \cdot \exp(in\omega_0 t) \cdot \frac{\omega_0}{2\pi}, \tag{3}$$

т.к. $T \to \infty$, то $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \to 0$, а значит в (3) можно перейти от суммирования к интегрированию ω_0, $n\omega_0 \to \omega$, $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \to \int\limits_{-\infty}^{\infty}$. Таким образом, получаем двойной интеграл Фурье

$$U(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\left[\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} U(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x}_{S(\omega)}\right]\mathrm{d}\omega.$$

$$\boxed{S(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} U(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t}$$

Функцию $S(\omega)$ здесь и далее будем называть **прямым преобразованием Фурье** функции $U(t)$ или **спектарльной плотностью сигнала** $U(t)$.

С учетом обозначений, получим

$$\boxed{U(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega} \tag{4}$$

(4) есть **обратное преобразование Фурье**.

Амплитудно-частотной характеристикой сигнала $U(t)$ будем называть

$$|S(\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}\{S(\omega)\}^2 + \mathrm{Im}\{S(\omega)\}^2}$$

Фаза-частотной характеристикой сигнала $U(t)$ будем называть функцию

$$\Theta(\omega) = \mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Im}\{S(\omega)\}}{\mathrm{Re}\{S(\omega)\}}$$

2. Основные свойства преобразований Фурье

Сложение сигналов Преобразование Фурье линейно. Если

$$U(t) = U_1(t) + U_2(t) + \cdots + U_n(t),$$

то

$$S(\omega) = S_1(\omega) + S_2(\omega) + \cdots + S_n(\omega),$$

Теорема запаздывания

$$U_2(t) = U_1(t - t_0)$$

$$S_2(\omega) = \int U_1(t - t_0)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \{\theta = t - t_0, \mathrm{d}t = \mathrm{d}\theta\} =$$
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} U_1(\theta)e^{-i\omega(\theta + t_0)}\,\mathrm{d}\theta = e^{-i\omega t_0}S_1(\omega);$$

$$\boxed{S_2(\omega) = e^{-i\omega t_0}S_1(\omega)}$$

Изменение масштаба времени $U_2(t) = U_1(nt)$, $n > 1$ – сжатие сигнала, $n < 1$ – расширение сигнала.

$$S_2(\omega) = \int\limits_0^{\frac{\tau}{n}} U_2(t)e^{-i\omega t} = \int\limits_0^{\frac{\tau}{n}} U_1(nt)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$$

После замены переменных $nt = \theta, \mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(\frac{\theta}{t}\right)$ отсюда имеем

$$S_2(\omega) = \frac{1}{n}\int\limits_0^{\frac{\tau}{n}} U_1(\theta)e^{-i\frac{\omega}{n}\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{n}S_1\left(\frac{\omega}{n}\right)$$
$$\boxed{S_2(\omega) = \frac{1}{n}S_1(\frac{\omega}{n})}$$

Произведение двух сигналов Рассмотрим составной сигнал $U(t) = f(t)\cdot g(t)$, где $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$, и $g(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$. Найдём прямое преобразование Фурье:

$$S(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot g(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{(2\pi)^2}\iiint F(x)G(y)\exp\{-i(\omega - x - y)t\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t$$

Учтем, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i(\omega - x - y)t\}\mathrm{d}t = 2\pi\delta(x + y - \omega)$

$$\frac{1}{2\pi}\iint F(x)G(y)\delta(x+y-\omega)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Применим фильтрующее свойство дельта-функции к функции $F(x)$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega - y)G(y)\,\mathrm{d}y$$

$\boxed{S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x)F(\omega - x)\,\mathrm{d}x}$ – свертка спектров сомножителей.

3. Choppy Wave Model

3.1. Обычный CWM

Рассмотрим задачу моделирования одномерной поверхности суммой гармоник с детерменированными амплитудами и случайными фазами

$$z = \sum_{j=0}^{N} A_j \cos(k_j x + \psi_j)$$

Чтобы получить модель заостренной волны введем нелинейное преобразование координат

$$\{x, z(x)\} \longrightarrow \{x + D(x), z(x)\},$$

где $D(x)$ горизонтальное смещение

$$D(x) = \frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(k)e^{ikx}\,\mathrm{d}k\,,$$

а $S(k)$ – прямое Фурье преобразование исходной поверхности

$$S(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} z(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x$$

В нашем случае, функция $D(x)$ примет вид:

$$\begin{cases} x = x_0 \underbrace{- \sum_{j=0}^{N} A_j \sin(k_j x_0 + \psi_j)}_{D(x)} \\ z = \sum_{j=0}^{N} \cos(k_j x_0 + \psi_j) \end{cases}$$

Это и есть Choppy Wave Model. График подобной заостренной поверхности изображен на рис.1

Рассчитаем спектр поверхности, построенной по CWM.

Спектр поверхности в новых координатах

$$\widehat{S}(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} z(x) \cdot e^{-ikx}[1 + D'(x)]\,\mathrm{d}x = S(k) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} z(x) \cdot D'(x) e^{-ikx}\,\mathrm{d}x\,, \qquad (5)$$

где $S(k)$– исходный спектр (например, JONSWAP).

Пусть спектр $S(k)$ состоит из всего одной гармоники. Тогда, мы можем его записать в виде

$$S(k) = \pi A_0 (\delta(k - k_0) + \delta(k + k_0))$$

Для такого спектра функция горизонтального смещения и её производная равны:

$$D(x) = -A_0 \sin(k_0 x), \quad D'(x) = -A_0 k_0 \cos(k_0 x)$$

Запишем прямое преобразование Фурье для функции $D'(x)$:

$$\mathfrak{D}(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} D'(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x = -\pi A_0 k_0 [\delta(k - k_0) + \delta(k + k_0)]$$

Перепишем (5), применяя теорему о свертке:

$$\widehat{S}(k) = S(k) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S(k - \xi) \mathfrak{D}(\xi) \mathrm{d}\xi$$

$$\widehat{S}(k) = S(k) + \frac{A_0}{2}[\mathfrak{D}(k-k_0) + \mathfrak{D}(k+k_0)] =$$
$$S(k) - \frac{\pi A_0^2}{2} k_0 [\delta(k-2k_0) + \delta(k+2k_0) + \delta(k) + \delta(k)] =$$
$$\pi A_0[\delta(k+k_0) + \delta(k-k_0)] - \frac{\pi A_0^2 k_0}{2}[\delta(k+2k_0) + 2\delta(k) + \delta(k-2k_0)]$$

Итак, для частного случае, когда моделируемая поверхность представляет всего одну гармонику $z(x) = A_0\cos(k_0 x)$ Мы получили модифицированный спектр:

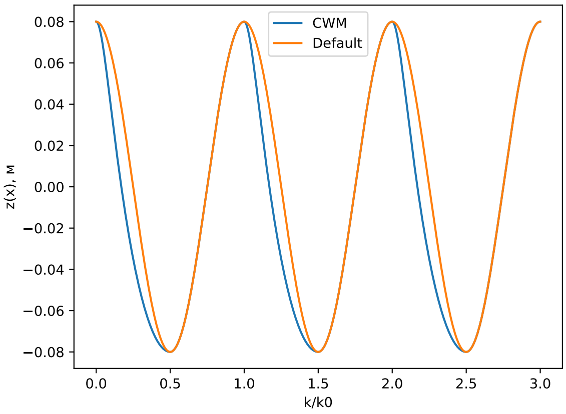
$$\widehat{S} = \pi A_0[\delta(k+k_0) + \delta(k-k_0)] - \frac{\pi A_0^2 k_0}{2}[\delta(k+2k_0) + 2\delta(k) + \delta(k-2k_0)]$$

Очевидно, что если поверхность будет представляться суммой гармоник $z(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} A_n \cos k_n x$, спектр примет вид

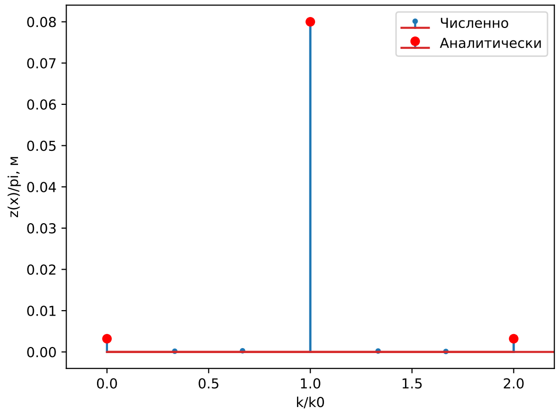
$$\widehat{S} = \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \pi A_n[\delta(k+k_n) + \delta(k-k_n)]}_{S(k)} \underbrace{- \sum_{n=0}^{N} \frac{\pi A_n^2 k_n}{2}[\delta(k+2k_n) + 2\delta(k) + \delta(k-2k_n)]}_{S_{CWM}(k)}$$

Добавка к исходному спектру выглядит следующим образом

$$\boxed{S_{CWM}(k) = -\sum_{n=0}^{N} \pi A_n^2 k_n \delta(k) - \sum_{n=0}^{N} \frac{\pi A_n^2 k_n}{2}[\delta(k+2k_n) + \delta(k-2k_n)]}$$



(a)



(b)

Рис. 1: Заостренная синусоида (CWM) в сравнении обычной

Рис. 2: Спектр заостренной синусоиды

3.2. Модифицированный CWM

Для того, чтобы получить ассиметричную, заостренную поверхности введем другую функцию горизонтального смещения $D(x)$

$$D(x) = \begin{cases} -A_0 \sin(k_0 x), & \text{если } 0 \le k_0 x \le \pi \\ 0, & \text{если } \pi < k_0 x < 2\pi \end{cases}$$

И снова введем преобразование координат

$$\{z(x), x\} \to \{z(x), x + D(x)\}$$

Спектр поверхности в новых координатах

$$\widehat{S}(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} z(x) \cdot e^{-ikx} [1 + D'(x)] \, \mathrm{d}x = S(k) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} z(x) \cdot D'(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x \,,$$

где $S(k)$– исходный спектр (например, JONSWAP).

Задача сводится теперь к вычислению интеграла

$$I(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} z(x) \cdot D'(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x$$

Согласно теореме о свертке

$$I(k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S(k-\xi)\mathfrak{D}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,,\ \text{где} \tag{6}$$

$\mathfrak{D}(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} D'(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$, $S(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} z(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$ – обратное Фурье-преобразование функций $D'(x)$ и $z(x)$ соответственно.

3.2.1 Нахождение спектральной плотности функции $D'(x)$

Для простоты рассмотрим случай одной гармоники.

В этом случае $D(x)$ можно представить в виде модуляции гармонического сигнала прямоугольным сигналом.

$D(x)$ представим в виде произведения двух функций $D(x) = -A_0\sin(k_0x)\cdot\Theta(k_0x)$, где $\Theta(k_0x)$ – прямоугольный сигнал.

Запишем прямое преобразование Фурье

$$\mathfrak{D}(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} D'(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \tag{7}$$

$$-A_0k_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos k_0x \cdot \Theta(k_0x)e^{-ikx}\mathrm{d}x - A_0 \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Theta'(k_0x)\sin(k_0x)e^{-ikx}\mathrm{d}x}_{=\,0} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \underbrace{-A_0k_0\cos k_0x\cdot}_{f(x)} \underbrace{\Theta(k_0x)}_{g(x)} e^{-ikx}\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x.$$

Осталось найти спектр функций $f(x)$ и $g(x)$ и снова воспользоваться теоремой о свертке.

Спектр функции $f(x)$.

$$S_f(k) = -A_0 k_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{+ik_0x} + e^{-ik_0x}}{2} e^{-ikx} \mathrm{d}x =$$

$$-\frac{A_0k_0}{2} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k-k_0)x}\,\mathrm{d}x}_{2\pi\delta(k-k_0)} - \frac{A_0k_0}{2} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k-k_0)x}\,\mathrm{d}x}_{2\pi\delta(k+k_0)} =$$

$$-\frac{A_0k_0}{2} \cdot 2\pi\{\delta(k-k_0) + \delta(k+k_0)\} =$$

$$\boxed{-\pi A_0 k_0\{\delta(k-k_0) + \delta(k+k_0)\}}$$

Спектр функции $g(x)$. $X = \frac{2\pi}{k_0}$ – период прямоугольного импульса, совпадающий с периодом синусоиды частотой k_0. При этом $k_n = nk_0$

$$C_n(k) = \frac{1}{X} \int\limits_0^{\frac{X}{2}} e^{-ik_nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{-ik_nX} e^{-ik_nx}\Big|_0^{\frac{X}{2}} = \frac{1}{-ik_nX}\left(e^{-i\frac{k_nX}{2}} - 1\right) =$$

$$\frac{1}{-ik_nX} e^{-i\frac{k_nX}{4}}\left(e^{-i\frac{k_nX}{4}} - e^{+i\frac{k_nX}{4}}\right) = \frac{e^{-i\frac{k_nX}{4}}}{2} \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{k_nX}{4}\right)$$

$$S_g(k) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2k_0}k}}{2} \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{2k_0}k\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(k - nk_0) \tag{8}$$

Вернемся к (7)

$$\mathfrak{D}(k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_f(k-x) S_g(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{A_0k_0}{2}[S_g(k-k_0) + S_g(k+k_0)].$$

Переобозначим $\mathfrak{D}_\pm(k) = -\frac{A_0k_0}{2} S_g(k \mp k_0)$. Распишем теперь эту формулу, используя (8):

$$\mathfrak{D}_\pm = -\frac{A_0k_0}{2} \cdot \frac{e^{-i\frac{\pi}{2k_0}(k\mp k_0)}}{2} \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{2k_0}(k \mp k_0)\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(k - nk_0)$$

Вернемся теперь к уравнению (6). Для него мы нашли $\mathfrak{D}(k)$. в случае одной гармоники равен $S(k) = \pi A_0\{\delta(k-k_0) + \delta(k+k_0)\}$. Получаем

$$
I(k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S(k-\xi)\mathfrak{D}(\xi)\,\mathrm{d}\xi =
$$

$$
\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \pi A_0 \{\delta(\xi - (k-k_0)) + \delta(\xi - (k+k_0))\} \cdot \{\mathfrak{D}_+(\xi) + \mathfrak{D}_-(\xi)\}\mathrm{d}\xi =
$$

$$
\frac{A_0}{2}(\mathfrak{D}_+(k-k_0) + \mathfrak{D}_+(k+k_0) + \mathfrak{D}_-(k+k_0) + \mathfrak{D}_-(k-k_0)) =
$$

$$
-\frac{A_0^2 k_0}{2}[S_g(k-2k_0) + S_g(k+2k_0) + 2S_g(k)]
$$

$$
\widehat{S}(k) = S(k) - \frac{A_0^2 k_0}{2}[S_g(k-2k_0) + S_g(k+2k_0) + 2S_g(k)]
$$