対 数

$a>0,\ a\neq 1$と定まるとき、正の数Mに対して$a^p=M$となる実数Pがただ1つ定まる

x ⇒ aを底とするMの対数 ($x=\log_a M$)

M ⇒ この対数の真数 (正の数)

$x=\log_a M$　$a^x=M$　($a^{\log_a M}=M$)

例題 11.2

$x=\log_2 8$ とおくと、$2^x=8$である。

$x=\log_a M$　$a^x=M$

よって、$x=3$ ⇒ $\log_2 8=3$ である。

8は2のx乗
→正の数しか
考えないので3

対数の基本性質

$\log_a 1=0$
コイツをみたら
ゼロね。

$\log_a a=1$
同じで
1ね。

コレだけ残るよ

$\log_a a^x=x$
コレ1だから。

対数の計算法則

$a > 0$, $a \neq 1$ のとき，正の数 M, N と実数 p に対して

① $\underset{たす}{\log_a M + \log_a N} = \log_a \underset{かける}{MN}$

② $\underset{ひく}{\log_a M - \log_a N} = \log_a \underset{わる}{\frac{M}{N}}$

③ $p \log M = \log_a M^p$

例)

①と③使うヨ！

(1) $\underbrace{\underbrace{2\log_3 2}_{③} + \log_3 \frac{3}{4}}_{①} = \log_3\left(2^2 \times \frac{3}{4}\right) = \log_3\left(\cancel{4} \times \frac{3}{\cancel{4}}\right) = \log_3 3 = 1$

②を使うヨ！

(2) $\log_2 48 - \log_2 3 = \log_2 \frac{48}{3} = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

(3) $\log_5 \frac{1}{\sqrt{5}} = \log_5 5^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{a} = a^{-1}$

底の変換公式

$a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1,\ M>0$ のとき,

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$$

異なる底はそろえる!

例)

$$\underbrace{\log_3 8 \cdot \log_2 9}_{\text{コヤツらをあわせる!}} = \frac{\log_2 8}{\log_2 3} \cdot \log_2 3^2 = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 3} \cdot 2\log_2 3 = 3\cdot 2 = 6$$

変換するときは計算がラクな底に変換してネ!

対数関数のグラフ

→教科書見て(懇願

<方程式>

$y=\log_a x$ は単調だから,

$\log_a M = \log_a N \iff M=N$ が成り立つ.

例11.3) $\log_a x + \log_a y = 2$ であるときの x と y の関係

$$\log_a x + \log_a y = 2$$

⇓ かけてもOK!

$$\log_a xy = 2 \longrightarrow a^2 = xy$$

$a^2 = M$ より

〈方程式〉

○ $\log_a f(x)=k$ の形の方程式 ⇒ 真数条件に注意!

(例)

(1) $\log_3(2x-3)=2$

↳ 真数条件 $2x-3>0$. $\xRightarrow{\text{式変形}}$ $x>\frac{3}{2}$ //

・両辺の底を3にそろえる

$$\underbrace{\log_3(2x-3)=\log_3 3^2}_{\text{そろえる}}$$

・真数を比較 <そろえたらlogさんにさよならする。>

$2x-3=3^2$

$2x-3=9$ $\quad$ $2x=12$

$x=6$ //

$x=6$は

$x>\frac{3}{2}$をみたしてる

⇒ $x=6$が解 //

(2) $\log_2(x-1)+\log_2(x+3)=5$.

真数条件 ⇒ $x-1>0$ かつ, $x+3>0$ ⇒ $x>1$ //

・両辺の底を2にそろえる。

$\log_2\underbrace{(x-1)(x+3)}_{\text{かけておく}}=\log_2 2^5$

↳ 真数比較

$(x-1)(x+3)=2^5$

$x^2+2x-3=32$

$x^2+2x-35=0$.

$(x+7)(x-5)=0$.

→ $x=-7, 5$ がえられる.

※ $x=-7$は真数条件 $x>1$を満たさないので、

$x=5$ が解 //

不等式

$a>1$ のとき、関数 $y=\log_a x$ は単調増加だから、

$$\log_a M < \log_a N \Leftrightarrow M<N$$

が成り立つ。また、$0<a<1$ のとき、関数 $y=\log_a x$ は単調減少だから、

$$\log_a M < \log_a N \Leftrightarrow M>N$$

が成り立つ。これを用いて、$\log_a f(x)>k$ や $\log_a f(x)<k$ の形の不等式を解くことができる。

例)

(1) $\log_5(2x-1)\leqq 1$

真数条件 $2x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{2}$

底を5にそろえる

$\Rightarrow \log_5(2x-1)\leqq\log_5 5$.

底5が1より大きいから両辺の真数をひかくして、

$2x-1\leqq 5$

$x\leqq 3$

$\Rightarrow$ 真数条件より、

$\frac{1}{2}<x\leqq 3$

(2) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)<2$

真数条件 $x+1>0. \Rightarrow x>-1$.

底を$\frac{1}{3}$にそろえる。

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x+1)<\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2$

底$\frac{1}{3}$が1より小さいから真数の大小関係が逆転する

真数を比較する。

$x+1>\frac{1}{9}$ よって、$x>-\frac{8}{9}$

不等号が逆。

$\Rightarrow$ 真数条件をみたすから、

不等式の解は $x>-\frac{8}{9}$.

常用対数

10を底とする対数 ⇒ 常用対数

常用対数の値は，巻末の常用対数表を使って近似値を求められる．

例 11.8

(1) $\log_{10} 23400 = \log_{10}(2.34 \times 10^4)$

$= \log_{10} 2.34 + \log_{10} 10^4 \fallingdotseq \underbrace{0.3692}_{\text{対数表より}} + 4 = 4.3692$

工学では $a \times 10^n$ の形によく直すよ！

11.6 常用対数による近似計算

。常用対数表を用いて，値を $a \times 10^n$ $(1 \leqq a < 10 \quad n = \mathbb{R})$ の形に直す．

(1) 3^{33}

$\Rightarrow \underbrace{\log_{10} 3^{33}}_{\text{10を底にする}} = 33 \log_{10} 3 = 33 \times \underbrace{0.4771}_{\text{対数表より}} = 15.7443 = 0.7443 + 15$

$3^{33} \fallingdotseq 10^{0.7443 + 15} = 10^{0.7443} \times 10^{15}$

$a = 10^{0.7443}$ とすると．$\log_{10} a = 0.7443 \underset{\text{対数表}}{\Rightarrow} a \fallingdotseq 5.55$．

$(x = \log_a M)$ $(a^x = M)$

$3^{33} \fallingdotseq 5.55 \times 10^{15}$．

Scanned by CamScanner