Analisi 1

kanopo

17 maggio 2022

Indice

Elenco delle figure

Elenco delle tabelle

1 Insiemi e funzioni

1.1 Insieme

$$A = \{1, 2, 3\}$$

- $1 \in A$
- $4 \notin A$

1.1.1 Caratteristiche

1. appartenenza di un elemento
2. un elemento compare una sola volta
3. no ordine di comparizione

A e B sono due insiemi uguali se ogni elemento di B appartiene ad A e ogni elemento di A appartiene a B.
Cardinalità: numero di elementi in un insieme.

1.2 Operazioni tra insiemi

- Unione
- Intersezione
- Differenza

1.3 Completamento di un'insieme

$$C_{(A)} = A^C = \{x : x \notin A\}$$

Esempio:
P è l'insieme naturale dei numeri pari? allora il completamento sono tutti i numeri naturali dispari.

- $\mathbb{N}$ sono gli interi positivi $\{1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z}$ sono gli interi $\{-\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty\}$
- $\mathbb{Q}$ sono i razionali $\{\frac{p}{q} : q, p \in \mathbb{Z}\}$
- $\Re$ sono i reali

1.4 Funzioni (applicazioni, trasformazioni, mappe)

$$f : x \to f(x)$$

Dove la x è il dominio e $f(x)$ è il codominio.
La funzione trasforma l'elemento di un'insieme in un'elemento anche di un'altro insieme.

1.5 Funzione iniettiva

Definizione:
f è **iniettiva** se associa a elementi distinti del dominio a elementi distinti del codominio.

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Se invece le due x sono uguali, le loro $f(x)$ saranno uguali.

1.6 Immagine di una funzione

$$f : X \to Y$$

L'immagine di f è il sottoinsieme di Y che contiene tutti gli elementi di Y che si possono ottenere partendo da X.

$$Imf = \{y \in Y \Leftrightarrow \exists x \in X : y = f(x)\}$$

Definizione:
f è **suriettia** se $Imf = Y$.
Definizione:
f e **biettiva** se è suriettiva e iniettiva

2 Dominio di funzione

Logaritmi:

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B) \tag{1}$$

$$\ln(\frac{A}{B}) = \ln(A) - \ln(B) \tag{2}$$

Sostanzialemte il dominio è quella parte di spazio nel piano dove la funzione è verificata(esiste).

3 Funzioni invertibili

Definizione: Sia:

$$f : X \to Y \Rightarrow g : Y \to X$$

g è l'inversa di f.

3.1 Monotonia

Se:

$$\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2$$

la funzione si dice **monotona crescente**.
Se:

$$\forall x_1, x_2 : x_1 \leq x_2$$

la funzione si dice **strettamente crescente**.
Se:

$$\forall x_1, x_2 : x_1 > x_2$$

la funzione si dice **monotona decrescente**.
Se:

$$\forall x_1, x_2 : x_1 \geq x_2$$

la funzione si dice **strettamente decrescente**.

4 Proprietà di funzioni reali

4.1 Funzioni pari e dispari

Si dice **pari** se:

$$\forall x \in D \to f(-x) = f(x)$$

Si dice **dispari** se:

$$\forall x \in D \to f(-x) = -f(x)$$

4.2 Funzioni periodiche

Si ripete con periodo t.(seno coseno...)

4.3 Funzioni concave/convesse

La funzione è concava se il segmento che congiunge due punti si trova al di sotto del grafico.
La funzione si dice convessa se il segmento che unisce due punti si trova al di sopra del grafico.

5 Funzione logaritmica

Il logaritmo che ha come base il numero di nepero($e \sim 2.7$) prende il nome di logaritmo naturale.

$$\log_e x = \ln x$$

$$(\ln x)^{-1} = e^x$$

Logaritmo e esponenziale sono inverse.
Osservazione

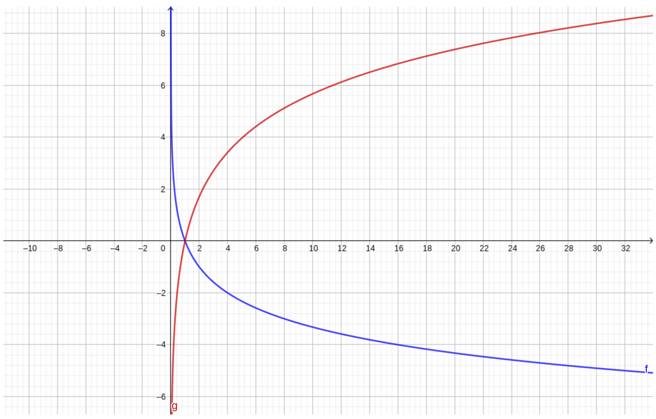

Figura 1: Logaritmo: differenze tra base maggiore di 1 e compresa tra 0 e 1

- Linea rossa ha base maggiore di 1
- Linea blue ha base compresa tra 0 e 1

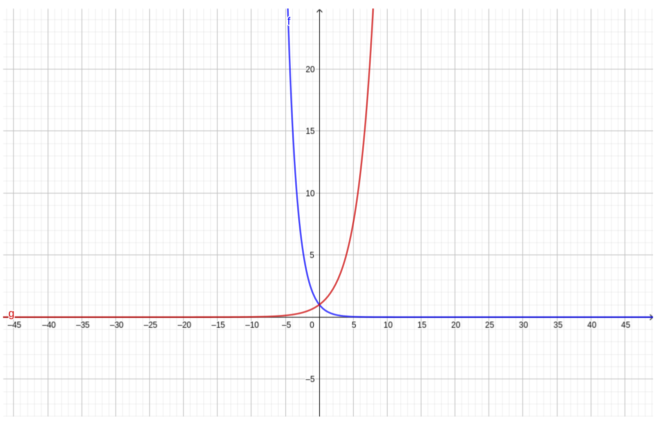

Figura 2: Esponenziale: differenze tra base maggiore di 1 e compresa tra 0 e 1

- Linea rossa ha base maggiore di 1
- Linea blue ha base compresa tra 0 e 1

5.1 Funzioni trigonometriche

Seno e coseno hanno dominio $D = [-1, 1]$, seno e dispari e coeno è pari.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Il dominio è:

$$D(tan) = R \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Il dominio è:

$$D(cot) = R \backslash \{\pi + k\pi\}$$

Tan e cot sono dispari!!

6 Estremo superiore/inferiore, minimo e massimo

6.1 Estremo superiore

L'estremo superiore di un insieme $E \subseteq R$:
Definizione:
$E \subseteq X$ si dice limitato superiormente se $\exists M \in X \Leftrightarrow x \leq M, \forall x \in E$

6.2 Estremo inferiore

L'estremo inferiore di un insieme $E \subseteq R$:
Definizione:
$E \subseteq X$ si dice limitato inferiormente se $\exists m \in X \Leftrightarrow x \geq m, \forall x \in E$
Un'insieme si dice limitato quando è limitato superiormente e inferiormente.

6.3 MAX

Definizione:
Sia $E \subseteq X$, allora X_M è il massimo per E se:

$$\begin{cases} X_M \in E \\ X_M \geq x, \forall x \in E \end{cases}$$

6.4 MIN

Definizione:
Sia $E \subseteq X$, allora X_M è il minimo per E se:

$$\begin{cases} X_m \in E \\ X_m \leq x, \forall x \in E \end{cases}$$

Osservazione: se esiste un massimo l'insieme è limitato superiormente ecc.

6.5 Maggiorante e minorante

Definizione: Sia $E \subseteq X$:
Un numero $k \in X$ si dice **maggiorante** se $k \geq x, \forall x \in E$. k non deve per forza far parte di E.
Un numero $k \in X$ si dice **minorante** se $k \leq x, \forall x \in E$. k non deve per forza far parte di E.
Definizione:
Chiameremo **Estremo inferiore** di E $\inf(E)$(**il massimo dei minoranti**).
Chiameremo **Estremo superiore** di E $\sup(E)$(**il minimo dei maggioranti**).

7 Funzioni limite

$f : D \subseteq R \to R$
Definizione: f si dice **limitata superiormente** se:

$$\exists M \in \Re \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq M, \quad \forall x \in D$$

Definizione: f si dice **limitata inferiormente** se:

$$\exists m \in \Re \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \geq m, \quad \forall x \in D$$

Definizione: f si dice **limitata** se lo è sia superiormente che inferiormente.

8 Intorni e punti di accumulazione

Definizione: Un Intorno di $x_0 \in \Re$ è un'insieme della retta $\Re$ che contiene un'intervallo aperto del tipo:

$$I_\epsilon(x_0) =]x_0 - \epsilon, \quad x_0 + \epsilon[$$

Con $\epsilon > 0$
Definizione: Un'intorno di $+\infty$ è un'insieme $J \subseteq \Re$ che contiene intervalli aperti del tipo $[M, \quad +\infty[$ con $M \in \Re$.
Definizione: Sia $A \subseteq \Re$, e sia $X_0 \in \Re$, si dice che x_0 è **punto di accumulazione** per A se in ogni intorno di J di x_0 esiste un punto x diverso da x_0 che appartiene ad A.

$$\forall J \text{ di } x_0 \quad \exists x \neq x_0 \quad \Leftrightarrow x \in J \cap A$$

Sostanzialmente un punto di accumulazione(o p.d.a.) presenta dei punti attorno a se perchè si trova in un intervallo e non è un signolo punto.

9 Limiti di funzioni

9.1 Teorema 1

Sono continue nel proprio dominio:

1. potenze
2. funzioni trigonometriche
3. logaritmo

9.2 Teorema 2

Siano $f, g : I \to \Re, \quad X_0 \in I$
Supponendo che f e g siano continue in x_0, allora:

1. $f \pm g$ è continua in x_0
2. $f \cdot g$ è continua in x_0
3. $\frac{f}{g}$ è continua in x_0, non in $g(x) = 0$

9.3 Teorema colcolo dei limiti

Siano:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \Re$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

allora:

1. la somma risulta in più infinito
2. la moltiplicazione dipende dal segno del limite finito
3. la sottrazione f - g risulta in meno infinito

10 Forme indefinite $\left[\frac{0}{0}\right]$

Esempio:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2 + 1} \tag{3}$$