Analisi 1

kanopo

2022

Indice

Elenco delle figure

Elenco delle tabelle

1 Insiemi e funzioni

1.1 Insieme

$$A = \{1, 2, 3\}$$

- $1 \in A$
- $4 \notin A$

1.1.1 Caratteristiche

1. appartenenza di un elemento
2. un elemento compare una sola volta
3. no ordine di comparizione

A e B sono due insiemi uguali se ogni elemento di B appartiene ad A e ogni elemento di A appartiene a B.
Cardinalità: numero di elementi in un insieme.

1.2 Operazioni tra insiemi

- Unione
- Intersezione
- Differenza

1.3 Completamento di un'insieme

$$C_{(A)} = A^C = \{x : x \notin A\}$$

Esempio:
P è l'insieme naturale dei numeri pari? allora il completamento sono tutti i numeri naturali dispari.

- $\mathbb{N}$ sono gli interi positivi $\{1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z}$ sono gli interi $\{-\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty\}$
- $\mathbb{Q}$ sono i razionali $\{\frac{p}{q} : q, p \in \mathbb{Z}\}$
- $\Re$ sono i reali

1.4 Funzioni (applicazioni, trasformazioni, mappe)

$$f : x \to f(x)$$

Dove la x è il dominio e $f(x)$ è il codominio.
La funzione trasforma l'elemento di un'insieme in un'elemento anche di un'altro insieme.

1.5 Funzione iniettiva

Definizione:
f è **iniettiva** se associa a elementi distinti del dominio a elementi distinti del codominio.

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Se invece le due x sono uguali, le loro $f(x)$ saranno uguali.

1.6 Immagine di una funzione

$$f : X \to Y$$

L'immagine di f è il sottoinsieme di Y che contiene tutti gli elementi di Y che si possono ottenere partendo da X.

$$Imf = \{y \in Y \Leftrightarrow \exists x \in X : y = f(x)\}$$

Definizione:
f è **suriettia** se $Imf = Y$.
Definizione:
f e **biettiva** se è suriettiva e iniettiva

2 Dominio di funzione

Logaritmi:

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B) \tag{1}$$

$$\ln(\frac{A}{B}) = \ln(A) - \ln(B) \tag{2}$$

Sostanzialemte il dominio è quella parte di spazio nel piano dove la funzione è verificata(esiste).

3 Funzioni invertibili

Definizione: Sia:

$$f : X \to Y \Rightarrow g : Y \to X$$

g è l'inversa di f.

3.1 Monotonia

Se:

$$\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2$$

la funzione si dice **monotona crescente**.
Se:

$$\forall x_1, x_2 : x_1 \leq x_2$$

la funzione si dice **strettamente crescente**.
Se:

$$\forall x_1, x_2 : x_1 > x_2$$

la funzione si dice **monotona decrescente**.
Se:

$$\forall x_1, x_2 : x_1 \geq x_2$$

la funzione si dice **strettamente decrescente**.

4 Proprietà di funzioni reali

4.1 Funzioni pari e dispari

Si dice **pari** se:

$$\forall x \in D \to f(-x) = f(x)$$

Si dice **dispari** se:

$$\forall x \in D \to f(-x) = -f(x)$$

4.2 Funzioni periodiche

Si ripete con periodo t.(seno coseno...)

4.3 Funzioni concave/convesse

La funzione è concava se il segmento che congiunge due punti si trova al di sotto del grafico.
La funzione si dice convessa se il segmento che unisce due punti si trova al di sopra del grafico.

5 Funzione logaritmica

Il logaritmo che ha come base il numero di nepero($e \sim 2.7$) prende il nome di logaritmo naturale.

$$\log_e x = \ln x$$

$$(\ln x)^{-1} = e^x$$

Logaritmo e esponenziale sono inverse.
Osservazione

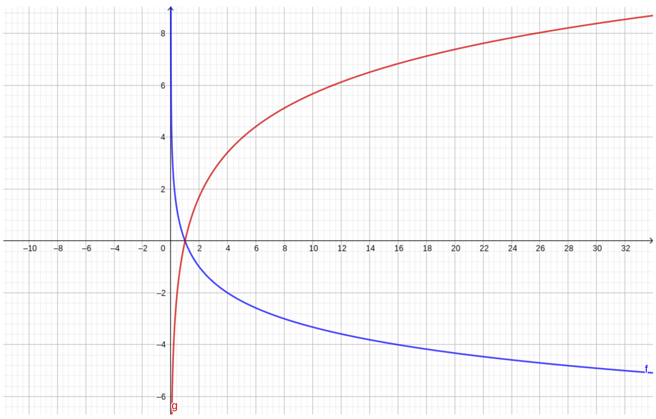

Figura 1: Logaritmo: differenze tra base maggiore di 1 e compresa tra 0 e 1

- Linea rossa ha base maggiore di 1
- Linea blue ha base compresa tra 0 e 1

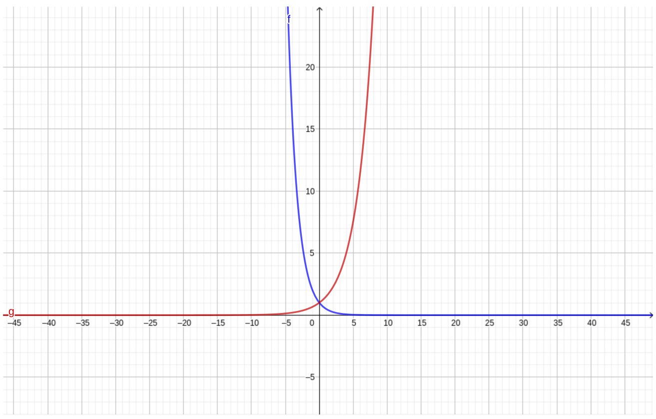

Figura 2: Esponenziale: differenze tra base maggiore di 1 e compresa tra 0 e 1

- Linea rossa ha base maggiore di 1
- Linea blue ha base compresa tra 0 e 1

5.1 Funzioni trigonometriche

Seno e coseno hanno dominio $D = [-1, 1]$, seno e dispari e coeno è pari.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Il dominio è:

$$D(tan) = R \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Il dominio è:

$$D(cot) = R \backslash \{\pi + k\pi\}$$

Tan e cot sono dispari!!

6 Estremo superiore/inferiore, minimo e massimo

6.1 Estremo superiore

L'estremo superiore di un insieme $E \subseteq R$:
Definizione:
$E \subseteq X$ si dice limitato superiormente se $\exists M \in X \Leftrightarrow x \leq M, \forall x \in E$

6.2 Estremo inferiore

L'estremo inferiore di un insieme $E \subseteq R$:
Definizione:
$E \subseteq X$ si dice limitato inferiormente se $\exists m \in X \Leftrightarrow x \geq m, \forall x \in E$
Un'insieme si dice limitato quando è limitato superiormente e inferiormente.

6.3 MAX

Definizione:
Sia $E \subseteq X$, allora X_M è il massimo per E se:

$$\begin{cases} X_M \in E \\ X_M \geq x, \forall x \in E \end{cases}$$

6.4 MIN

Definizione:
Sia $E \subseteq X$, allora X_M è il minimo per E se:

$$\begin{cases} X_m \in E \\ X_m \leq x, \forall x \in E \end{cases}$$

Osservazione: se esiste un massimo l'insieme è limitato superiormente ecc.

6.5 Maggiorante e minorante

Definizione: Sia $E \subseteq X$:
Un numero $k \in X$ si dice **maggiorante** se $k \geq x, \forall x \in E$. k non deve per forza far parte di E.
Un numero $k \in X$ si dice **minorante** se $k \leq x, \forall x \in E$. k non deve per forza far parte di E.
Definizione:
Chiameremo **Estremo inferiore** di E $\inf(E)$(**il massimo dei minoranti**).
Chiameremo **Estremo superiore** di E $\sup(E)$(**il minimo dei maggioranti**).

7 Funzioni limite

$f : D \subseteq R \to R$
Definizione: f si dice **limitata superiormente** se:

$$\exists M \in \Re \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq M, \quad \forall x \in D$$

Definizione: f si dice **limitata inferiormente** se:

$$\exists m \in \Re \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \geq m, \quad \forall x \in D$$

Definizione: f si dice **limitata** se lo è sia superiormente che inferiormente.

8 Intorni e punti di accumulazione

Definizione: Un Intorno di $x_0 \in \Re$ è un'insieme della retta $\Re$ che contiene un'intervallo aperto del tipo:

$$I_\epsilon(x_0) =]x_0 - \epsilon, \quad x_0 + \epsilon[$$

Con $\epsilon > 0$
Definizione: Un'intorno di $+\infty$ è un'insieme $J \subseteq \Re$ che contiene intervalli aperti del tipo $[M, \quad +\infty[$ con $M \in \Re$.
Definizione: Sia $A \subseteq \Re$, e sia $X_0 \in \Re$, si dice che x_0 è **punto di accumulazione** per A se in ogni intorno di J di x_0 esiste un punto x diverso da x_0 che appartiene ad A.

$$\forall J \text{ di } x_0 \quad \exists x \neq x_0 \quad \Leftrightarrow x \in J \cap A$$

Sostanzialmente un punto di accumulazione(o p.d.a.) presenta dei punti attorno a se perchè si trova in un intervallo e non è un signolo punto.

9 Limiti di funzioni

9.1 Teorema 1

Sono continue nel proprio dominio:

1. potenze
2. funzioni trigonometriche
3. logaritmo

9.2 Teorema 2

Siano $f, g : I \to \Re, \quad X_0 \in I$
Supponendo che f e g siano continue in x_0, allora:

1. $f \pm g$ è continua in x_0
2. $f \cdot g$ è continua in x_0
3. $\frac{f}{g}$ è continua in x_0, non in $g(x) = 0$

9.3 Teorema colcolo dei limiti

Siano:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \Re$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

allora:

1. la somma risulta in più infinito
2. la moltiplicazione dipende dal segno del limite finito
3. la sottrazione f - g risulta in meno infinito

10 Forme indeterminate

10.1 $[\frac{0}{0}]$

Esempio:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^3+x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(x+\frac{1}{x})}$$

Semplifico il x^2:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\pm\infty}$$

$$\frac{0}{1}=0$$

Quindi regola generale per $[\frac{0}{0}]$, devo cercare di portare fuori la variabili che mi causano la forma indefinita e semplificarle.

10.2 $[\frac{\infty}{\infty}]$

Esempio:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+2x}{3x^2-x^2-1}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2(x+\frac{2}{x})}{x^2(3-1-\frac{1}{x^2})}$$

Semplifico il x^2:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\frac{2}{x}}{(3-1-\frac{1}{x^2})}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{+\infty+0}{2-0}=+\infty$$

11 Teoremi

11.1 Teorema della permanenza del segno

Sia $f: I\subseteq\Re\to\Re$ continua e sia x_0 **p.d.a.** per I se:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L>0$$

Allora $f(x)$ sarà maggiore di 0(positivo)

11.2 Teorema del confronto

Siano $f, d, g: D\subseteq\Re$ continue in D e sia x_0 **p.d.a.** per D.
Supponiamo:

1. $\exists \lim_{x\to x_0} d(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = L$
2. $\exists I(x_0): \quad d(x)\leq f(x)\leq g(x), \quad \forall x\in I(x_0)\backslash\{x_0\}, \quad \forall x\in D$

Esempio:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2+\cos x}{x}$$

$$-1\leq \cos x\leq +1$$

$$2-1\leq 2+\cos x\leq 2+1$$

$$\frac{2-1}{x}\leq\frac{2+\cos x}{x}\leq\frac{2+1}{x}$$

Cosi facendo capisco che il limite risulta 0.

12 Altre forme indeterminate

12.1 $1^{+\infty}$

Esempio:

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x$$

In realtà questo è un limite noteveole che diventa:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

12.2 0^0

$$\lim_{x\to0^+} x^{x^2}$$

Consiglio:

$$e^{\ln\alpha}=\alpha$$

$$\exp(\lim_{x\to0^+} x^{x^2}) = \exp(\lim_{x\to0^+} x^2\ln(x))$$

che così diventa la F.I. $[0\cdot-\infty]$.

12.3 F.I. $[\infty^0]$

$$\lim_{z\to+\infty}(e^x)^{\frac{1}{3^x}} = \lim_{z\to+\infty}(e)^{\frac{x}{3^x}}$$

guardo con che velocità tendono a infinito il numeratore e il denominatore.
Cosi scopro che il demnominatore è più veloce e il risultato del limite è 1.

13 Definizione di derivate

Rapporto incrementale:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Praticamente il rapporto incrementale mi da la pendenza media.
Per avere il signolo valore faccio il limite di h che tende a 0.
Definizione:
Sia $f:(a,b)\to\Re,\quad x_0\in(a,b)$.
Se $\exists\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\in\Re$ allora f è derivabile in x_0.

14 Teorema della derivazioe composta

Avendo due funzioni derivabili in x_0:

$$(g \quad o \quad f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$$

Esempio:

$$f(x)=\sin(x^2)$$

Sapendo che la derivata del seno è il coseno:

$$\cos(x^2)\cdot2x$$

14.1 RICORDA

$$(\frac{g}{h})' = \frac{g'h-h'g}{h^2}$$

15 Derivata destra e sinistra, punti angolosi, cuspidi

Definizione:

Sia:

$$f : (a, b) \to \Re, \quad x_0 \in (a, b)$$

Se

$$\exists \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \Re$$

allora f è derivabile in x_0.

Si dice che f è derivabile a destra, stessa solfa per la derivabilità a sinistra.

Definizione:

Se la derivata sinistra e quella destra del punto sono diverse, siamo in presenza di un punto angoloso.

Definizione:

Se il limite tende a più o meno infinito, allora si parla di flesso a tangente verticale nel punto preso in considerazione per il limite.

Definizione:

Se il limite destro e sinistro di un punto tendo a infinito ma con segno opposto fra di loro, il punto in questione è un punto di **cuspide** per f.

16 Teorema degli zeri

Definizione:

Sia:

1. Se f è continua in $[a, b]$
2. $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$ o viceversa

Siamo sicuri che incontreremo l'asse delle x(cioè uno o più zeri)

In pratica si divide lo spazio tra a e b in 2, cosi ottenedo $[a, c]$ e $[c, b]$, si fanno questi divisioni di spazio finchè non si trova lo zero.

$$\begin{cases} f(c_!) > 0 \to & \text{focus su } [a, c_1] \\ f(c_!) = 0 \to & \text{finito} \\ f(c_!) < 0 \to & \text{focus su } [c_1, b] \end{cases}$$

Continuo ad iterare finchè non ottengo lo 0.

17 Terorema di weierstrass e teorema dei valori intermedi

Teorema:

Sia $f : I \to \Re$ con $I = [a, b]$ chiuso e limitato (funzione continua), allora esistono massimo e minimo in $[a, b]$.

17.1 Teorema dei valori intermedi

Sia $f : [a, b] \to \Re$ continua, $\forall \lambda$ compresa tra $m = \min f[a, b]$ e $M = \max f[a, b]$ $\exists$ uno zero tra $[a, b]$ tale che:

$\lambda f(x_0)$

18 Massimi, minimi e teorema di Fermat

Definizione:

Si dice che M è un massimo di f in $[a, b]$ e che $x_M \in [a, b]$ è punto di massimo se:

$$f(x_M) \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Analogamente si definisce il minimo.

Definizione:

Si dice che M_1 è massimo locale(relativo) per f e che x_1 è punto di massimo relativo se:

$$\exists \text{ un'intervallo } I_\delta(x_1) \triangleq (x_1 - \delta, x_1 + \delta), \quad \delta > 0 \quad \text{tale che}$$

$$f(x_1) \geq f(x) \quad \forall x \in I_\delta(x_1) \cap [a, b]$$

18.1 Teorema di Fermat

Definizione: Sia $f : [a, b] \to \Re$, derivabile $\forall x \in (a, b)$ allora:
Se x_0 è punto di massimo o minomo locale allora:

$$f'(x_0) = 0$$

18.2 Ricerca massimi e minimi

Sia $f : [a, b] \to \Re$:

1. calcolo $f(a) \in \Re$ e $f(b) \in \Re$
2. Studio eventuali punti dove f **non è derivabile**
3. calcolo f' e per il teorema di Fermat, se $f' = 0$ è un punto critico(max, min o altro)
4. se $\nexists \bar{x} \Leftrightarrow f'(\bar{x}) = 0$, allora $f(a)$ e $f(b)$ sono max o min(dipende da chi è più grosso)
5. trovati i punti critici, devo studiare il segno di f' intorno a questi punti(cosi vedo chi è max e min)
6. calcolo gli f per tutti i MAX/MIN per trovare i MAX/MIN globali

19 Regola di de l'Hospital

Definizione: Se sto calcolando un limite e il risultato è $[\frac{0}{0}]$ oppure $[\frac{\infty}{\infty}]$, posso sfruttare de l'Hospital, che afferma che :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \quad [x_0 \in \Re \cup \{\pm\infty\}]$$

$g'(x) \neq 0$ vicino all'intorno di I di x_0, allora:
Se:

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \Re \cup \{\pm\infty\}$$

Allora:

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

e i due limiti così ottenuti sono uguali!!!!

20 Teorema(sviluppo) di Taylor

Il polinomio di Taylor mi sembra di aver capito che sia una funzione derivabile n volte, per una funxione f in x_0 di ordine n, la formula è la seguente:

$$T^n_{x_0} f = p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Dove k rappresenta l'ordine del polinomio.

21 Derivate seconde e concavità

Con la derivata prima trovo la crescenza(positiva) o decrescenaza(negativa), con la derivata seconda capisco la convessità(positivo parabola felice) o concavità(begativa parabola triste).

22 Studio del grafico

1. Dominio
2. Simmetrie
3. Studio degli estremi
4. Segno della funzione
5. Studio del segno delle derivate(monotonia)
6. Massimi e minimi
7. Studio derivata seconda
8. Se ci sono punti non derivabili, farli a parte

22.1 Dominio

Semplicemente trovo il dominio della funzione.

22.2 Simmetrie

Controllo se periodica, pari o dispari

22.3 Studio agli estremi del dominio della funzione

Faccio i limiti e vedo il loro comportamento.

22.4 Segno della funzione

Faccio il calcolo di dove la funzione è maggiore uguale a 0.

22.5 Studio segno della derivata(monotonia)

Faccio la derivata prima e poi faccio lo studio del segno

22.6 Trovo i massimi e i minimi

Al punto precedente dovrei aver trovato dei punti critici, quindi posso procedere a trovare i punti di massimo e minimo se presenti.

22.7 Studio la derivata seconda

Per vedere concavità e convessità.

22.8 Punti non derivabili

Ora studio i punti non derivabili per capire il comportamento della funzione in prossimità di questi punti.

23 Integrale

L'integrale è l'area sottesa a un tratto di funzione$[a, b]$.
Se la funzione non è continua nell'intervallo, non è detto che esista l'integrale.

23.1 Proprietà

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \tag{1}$$

Se $a = b$

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \tag{2}$$

Se $b < a$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx = \tag{3}$$

Cosi da avere un risultato positivo(visto che praticamente sono aree).

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx = \tag{4}$$

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx \quad \forall \lambda \in \Re \tag{5}$$

Se

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

allora:

$$\int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x) \tag{6}$$

23.2 Teoremi fondamentali del calcolo itengrale

Primo teorema:

$$\frac{d}{dx}(\int_a^x f(t)dt) = f(x) \tag{1}$$

Secondo teorema:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{2}$$

24 Integrazione per parti

Avendo due funzioni(f, g) che sono continue(con le loro derivate):
Teorema:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)dx \tag{1}$$

24.1 Integrazione per sostituzione

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(a)} f(g(y)) \cdot g'(y)dy \tag{1}$$

25 Integrazione di funzioni razionali(DA FARE)

26 Equazioni differenziali

L'ordine del'equazione differenziale dipende dal'ordine delle singole derivate presenti, Se la derivata di ordine maggiore è $2(f''(x))$ allora l'ordine dell'equazione differenziale è 2.
Nel corso vengono trattate solo equazioni differenziali del primo e secondo ordine.

26.1 Equazione differenziale omogenea

$$Z(x, y''(x), y(x)) = 0 \tag{1}$$

Quando lo zero è separato dal resto si dice omogenea.
Ci sarebbe altra roba ma queste si fanno guardando il foglio che lascia usare il prof.

27 Equazioni differenziali del 1° ordine non omogenee

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$