Analisi 1

kanopo

2022

Indice

Elenco delle figure

Elenco delle tabelle

1 Insiemi e funzioni

1.1 Insieme

$$A = \{1, 2, 3\}$$

- $1 \in A$
- $4 \notin A$

1.1.1 Caratteristiche

1. appartenenza di un elemento
2. un elemento compare una sola volta
3. no ordine di comparizione

A e B sono due insiemi uguali se ogni elemento di B appartiene ad A e ogni elemento di A appartiene a B.
Cardinalità: numero di elementi in un insieme.

1.2 Operazioni tra insiemi

- Unione
- Intersezione
- Differenza

1.3 Completamento di un'insieme

$$C_{(A)} = A^C = \{x : x \notin A\}$$

Esempio:
P è l'insieme naturale dei numeri pari? allora il completamento sono tutti i numeri naturali dispari.

- $\mathbb{N}$ sono gli interi positivi $\{1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z}$ sono gli interi $\{-\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty\}$
- $\mathbb{Q}$ sono i razionali $\{\frac{p}{q} : q, p \in \mathbb{Z}\}$
- $\Re$ sono i reali

1.4 Funzioni (applicazioni, trasformazioni, mappe)

$$f : x \to f(x)$$

Dove la x è il dominio e $f(x)$ è il codominio.
La funzione trasforma l'elemento di un'insieme in un'elemento anche di un'altro insieme.

1.5 Funzione iniettiva

Definizione:
f è **iniettiva** se associa a elementi distinti del dominio a elementi distinti del codominio.

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Se invece le due x sono uguali, le loro $f(x)$ saranno uguali.

1.6 Immagine di una funzione

$$f : X \to Y$$

L'immagine di f è il sottoinsieme di Y che contiene tutti gli elementi di Y che si possono ottenere partendo da X.

$$Imf = \{y \in Y \Leftrightarrow \exists x \in X : y = f(x)\}$$

Definizione:
f è **suriettia** se $Imf = Y$.
Definizione:
f e **biettiva** se è suriettiva e iniettiva

2 Dominio di funzione

Logaritmi:

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B) \tag{1}$$

$$\ln(\frac{A}{B}) = \ln(A) - \ln(B) \tag{2}$$

Sostanzialemte il dominio è quella parte di spazio nel piano dove la funzione è verificata(esiste).

3 Funzioni invertibili

Definizione: Sia:

$$f : X \to Y \Rightarrow g : Y \to X$$

g è l'inversa di f.

3.1 Monotonia

Se:

$$\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2$$

la funzione si dice **monotona crescente**.
Se:

$$\forall x_1, x_2 : x_1 \leq x_2$$

la funzione si dice **strettamente crescente**.
Se:

$$\forall x_1, x_2 : x_1 > x_2$$

la funzione si dice **monotona decrescente**.
Se:

$$\forall x_1, x_2 : x_1 \geq x_2$$

la funzione si dice **strettamente decrescente**.

4 Proprietà di funzioni reali

4.1 Funzioni pari e dispari

Si dice **pari** se:

$$\forall x \in D \to f(-x) = f(x)$$

Si dice **dispari** se:

$$\forall x \in D \to f(-x) = -f(x)$$

4.2 Funzioni periodiche

Si ripete con periodo t.(seno coseno...)

4.3 Funzioni concave/convesse

La funzione è concava se il segmento che congiunge due punti si trova al di sotto del grafico.
La funzione si dice convessa se il segmento che unisce due punti si trova al di sopra del grafico.

5 Funzione logaritmica

Il logaritmo che ha come base il numero di nepero($e \sim 2.7$) prende il nome di logaritmo naturale.

$$\log_e x = \ln x$$

$$(\ln x)^{-1} = e^x$$

Logaritmo e esponenziale sono inverse.
Osservazione

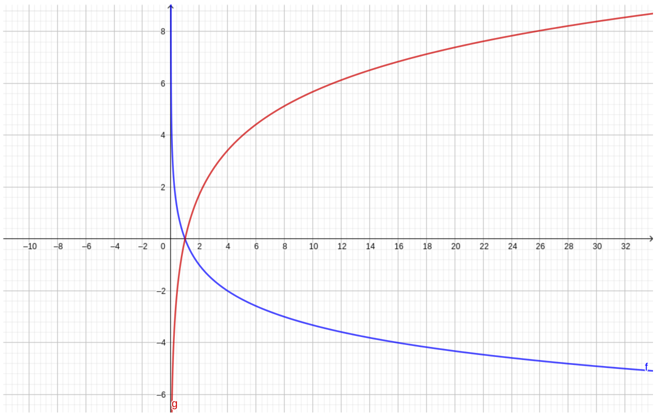

Figura 1: Logaritmo: differenze tra base maggiore di 1 e compresa tra 0 e 1

- Linea rossa ha base maggiore di 1
- Linea blue ha base compresa tra 0 e 1

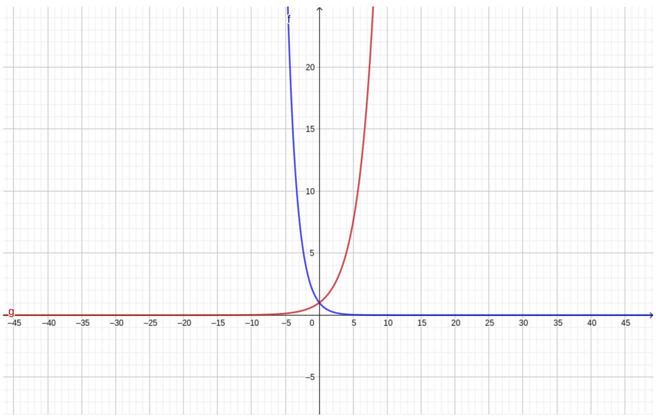

Figura 2: Esponenziale: differenze tra base maggiore di 1 e compresa tra 0 e 1

- Linea rossa ha base maggiore di 1
- Linea blue ha base compresa tra 0 e 1

5.1 Funzioni trigonometriche

Seno e coseno hanno dominio $D = [-1, 1]$, seno e dispari e coeno è pari.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Il dominio è:

$$D(tan) = R \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Il dominio è:

$$D(cot) = R \backslash \{\pi + k\pi\}$$

Tan e cot sono dispari!!

6 Estremo superiore/inferiore, minimo e massimo

6.1 Estremo superiore

L'estremo superiore di un insieme $E \subseteq R$:
Definizione:
$E \subseteq X$ si dice limitato superiormente se $\exists M \in X \Leftrightarrow x \leq M, \forall x \in E$

6.2 Estremo inferiore

L'estremo inferiore di un insieme $E \subseteq R$:
Definizione:
$E \subseteq X$ si dice limitato inferiormente se $\exists m \in X \Leftrightarrow x \geq m, \forall x \in E$
Un'insieme si dice limitato quando è limitato superiormente e inferiormente.

6.3 MAX

Definizione:
Sia $E \subseteq X$, allora X_M è il massimo per E se:

$$\begin{cases} X_M \in E \\ X_M \geq x, \forall x \in E \end{cases}$$

6.4 MIN

Definizione:
Sia $E \subseteq X$, allora X_M è il minimo per E se:

$$\begin{cases} X_m \in E \\ X_m \leq x, \forall x \in E \end{cases}$$

Osservazione: se esiste un massimo l'insieme è limitato superiormente ecc.

6.5 Maggiorante e minorante

Definizione: Sia $E \subseteq X$:
Un numero $k \in X$ si dice **maggiorante** se $k \geq x, \forall x \in E$. k non deve per forza far parte di E.
Un numero $k \in X$ si dice **minorante** se $k \leq x, \forall x \in E$. k non deve per forza far parte di E.
Definizione:
Chiameremo **Estremo inferiore** di E $\inf(E)$(**il massimo dei minoranti**).
Chiameremo **Estremo superiore** di E $\sup(E)$(**il minimo dei maggioranti**).

7 Funzioni limite

$f : D \subseteq R \to R$
Definizione: f si dice **limitata superiormente** se:

$$\exists M \in \Re \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq M, \quad \forall x \in D$$

Definizione: f si dice **limitata inferiormente** se:

$$\exists m \in \Re \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \geq m, \quad \forall x \in D$$

Definizione: f si dice **limitata** se lo è sia superiormente che inferiormente.

8 Intorni e punti di accumulazione

Definizione: Un Intorno di $x_0 \in \Re$ è un'insieme della retta $\Re$ che contiene un'intervallo aperto del tipo:

$$I_\epsilon(x_0) =]x_0 - \epsilon, \quad x_0 + \epsilon[$$

Con $\epsilon > 0$
Definizione: Un'intorno di $+\infty$ è un'insieme $J \subseteq \Re$ che contiene intervalli aperti del tipo $[M, \quad +\infty[$ con $M \in \Re$.
Definizione: Sia $A \subseteq \Re$, e sia $X_0 \in \Re$, si dice che x_0 è **punto di accumulazione** per A se in ogni intorno di J di x_0 esiste un punto x diverso da x_0 che appartiene ad A.

$$\forall J \text{ di } x_0 \quad \exists x \neq x_0 \quad \Leftrightarrow x \in J \cap A$$

Sostanzialmente un punto di accumulazione(o p.d.a.) presenta dei punti attorno a se perchè si trova in un intervallo e non è un signolo punto.

9 Limiti di funzioni

9.1 Teorema 1

Sono continue nel proprio dominio:

1. potenze
2. funzioni trigonometriche
3. logaritmo

9.2 Teorema 2

Siano $f, g : I \to \Re, \quad X_0 \in I$
Supponendo che f e g siano continue in x_0, allora:

1. $f \pm g$ è continua in x_0
2. $f \cdot g$ è continua in x_0
3. $\frac{f}{g}$ è continua in x_0, non in $g(x) = 0$

9.3 Teorema colcolo dei limiti

Siano:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \Re$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

allora:

1. la somma risulta in più infinito
2. la moltiplicazione dipende dal segno del limite finito
3. la sottrazione f - g risulta in meno infinito

10 Forme indeterminate

10.1 $[\frac{0}{0}]$

Esempio:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^3+x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(x+\frac{1}{x})}$$

Semplifico il x^2:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\pm\infty}$$

$$\frac{0}{1}=0$$

Quindi regola generale per $[\frac{0}{0}]$, devo cercare di portare fuori la variabili che mi causano la forma indefinita e semplificarle.

10.2 $[\frac{\infty}{\infty}]$

Esempio:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+2x}{3x^2-x^2-1}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2(x+\frac{2}{x})}{x^2(3-1-\frac{1}{x^2})}$$

Semplifico il x^2:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\frac{2}{x}}{(3-1-\frac{1}{x^2})}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{+\infty+0}{2-0}=+\infty$$

11 Teoremi

11.1 Teorema della permanenza del segno

Sia $f: I\subseteq\Re\to\Re$ continua e sia x_0 **p.d.a.** per I se:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L>0$$

Allora $f(x)$ sarà maggiore di 0(positivo)

11.2 Teorema del confronto

Siano $f,d,g: D\subseteq\Re$ continue in D e sia x_0 **p.d.a.** per D.
Supponiamo:

1. $\exists \lim_{x\to x_0} d(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=L$
2. $\exists I(x_0): \quad d(x)\le f(x)\le g(x), \quad \forall x\in I(x_0)\backslash\{x_0\}, \quad \forall x\in D$

Esempio:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2+\cos x}{x}$$

$$-1\le\cos x\le +1$$

$$2-1\le 2+\cos x\le 2+1$$

$$\frac{2-1}{x}\le\frac{2+\cos x}{x}\le\frac{2+1}{x}$$

Cosi facendo capisco che il limite risulta 0.

12 Altre forme indeterminate

12.1 $1^{+\infty}$

Esempio:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

In realtà questo è un limite noteveole che diventa:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

12.2 0^0

$$\lim_{x\to0^+} x^{x^2}$$

Consiglio:

$$e^{\ln\alpha} = \alpha$$

$$\exp(\lim_{x\to0^+} x^{x^2}) = \exp(\lim_{x\to0^+} x^2\ln(x))$$

che così diventa la F.I. $[0\cdot-\infty]$.

12.3 F.I. $[\infty^0]$

$$\lim_{z\to+\infty}(e^x)^{\frac{1}{3^x}} = \lim_{z\to+\infty}(e)^{\frac{x}{3^x}}$$

guardo con che velocità tendono a infinito il numeratore e il denominatore.
Cosi scopro che il demnominatore è più veloce e il risultato del limite è 1.

13 Definizione di derivate

Rapporto incrementale:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Praticamente il rapporto incrementale mi da la pendenza media.
Per avere il signolo valore faccio il limite di h che tende a 0.
Definizione:
Sia $f:(a,b)\to\Re,\quad x_0\in(a,b)$.
Se $\exists\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\in\Re$ allora f è derivabile in x_0.

14 Teorema della derivazioe composta

Avendo due funzioni derivabili in x_0:

$$(g\quad o\quad f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$$

Esempio:

$$f(x) = \sin(x^2)$$

Sapendo che la derivata del seno è il coseno:

$$\cos(x^2)\cdot 2x$$

14.1 RICORDA

$$(\frac{g}{h})' = \frac{g'h-h'g}{h^2}$$

15 Derivata destra e sinistra, punti angolosi, cuspidi

Definizione:

Sia:

$$f : (a, b) \to \Re, \quad x_0 \in (a, b)$$

Se

$$\exists \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \Re$$

allora f è derivabile in x_0.

Si dice che f è derivabile a destra, stessa solfa per la derivabilità a sinistra.

Definizione:

Se la derivata sinistra e quella destra del punto sono diverse, siamo in presenza di un punto angoloso.

Definizione:

Se il limite tende a più o meno infinito, allora si parla di flesso a tangente verticale nel punto preso in considerazione per il limite.

Definizione:

Se il limite destro e sinistro di un punto tendo a infinito ma con segno opposto fra di loro, il punto in questione è un punto di **cuspide** per f.

16 Teorema degli zeri

Definizione:

Sia:

1. Se f è continua in $[a, b]$
2. $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$ o viceversa

Siamo sicuri che incontreremo l'asse delle x(cioè uno o più zeri)