# Fondamenti di controlli automatici

Dmitri Ollari

July 17, 2023

## Contents



# 1 Analisi complessa

Quando si ha a che fare con equazioni differenziali lineari, solitamente si preferisce trasformare il calcolo da dominio del tempo $t$ a dominio complesso $s$, svolgere il calcolo come se fosse una problema polinomiale e ritornare nel dominio del tempo $t$ con il problema risolto.

## 1.1 Poli

Avendo una funzione d'esempio:

$$\frac{s(s+6)^3}{(s-2)(s+3)^2(s+5)^4} \tag{1}$$

I poli in questo caso sono:

- $s = 2$ di ordine 1
- $s = -3$ di ordine 2
- $s = -5$ di ordine 4

### 1.2 Zeri

Avendo una funzione d'esempio:

$$\frac{s(s+6)^3}{(s-2)(s+3)^2(s+5)^4} \tag{2}$$

Gli zeri in questo caso sono:

- $s = 0$ di ordine 1
- $s = -6$ di ordine 3

## 2 Trasformata di Laplace

La trasformata di laplace è comoda perchè permette di trasformare un problema differenziale in un problema algebrico e nel farlo mantiene la proprietà di linerià. Il che permette di:

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)] \tag{3}$$

La trasformata di Laplace rispetta anche la proprietà di Iniettività, ovvero:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)] \implies f(t) = g(t) \tag{4}$$

### 2.1 Trasformate di laplace interessanti

| Segnale | Trasformata di Laplace |
|---|---|
| Gradino unitario | $\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$ |
| Segnale esponenziale | $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$ |
| | $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| Derivata segnale impulsivo | $\mathcal{L}[\delta^{(n)}(t)] = s^n$ |
| Segnale impulsivo | $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ |

## 3 Funzione di trasferimento

### 3.1 Guadanagno statico

$$Y(s) = G(0)U(s) \tag{5}$$

### 3.2 polinomio caratteristico

Dato:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i u \tag{6}$$

Il polinomio caratteristico è:

$$a(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i S^i \tag{7}$$

### 3.3 Poli e Zeri

I poli sono le radici di $a(s)$, gli zeri sono le radici di $b(s)$.

### 3.4 Modi

Se $p$ è un polo reale con molteplicità $h$, allora:

$$t^{h-1}e^{pt}, t^{h-2}e^{pt}, \ldots, e^{pt} \tag{8}$$

Fino ad arrivare ad avere $h = 0$.
Se $\sigma \pm j\omega$ è un polo complesso con molteplicità $h$, allora:

$$t^{h-1}e^{\sigma t}\cos(\omega t), t^{h-1}e^{\sigma t}\sin(\omega t), \ldots, e^{\sigma t}\cos(\omega t), e^{\sigma t}\sin(\omega t) \tag{9}$$

Oppure:

$$t^{h-1}e^{\sigma t}\sin(\omega t), t^{h-2}e^{\sigma t}\sin(\omega t), \ldots, e^{\sigma t}\sin(\omega t) \tag{10}$$

Ecco un'esempio:

$$G(s) = \frac{(s+1)(S^2+2S+7)}{(s+4)^4(s+5[(s+1^2+4)])} \tag{11}$$

I modi sono:

$$\left\{e^{-4t}, te^{-4t}, t^2e^{-4t}, t^3e^{-4t}, e^{-5t}, e^{-t}\sin(2t+\varphi_1), te^{-t}sin(2t+\varphi_2)\right\} \tag{12}$$

## 4 Sistemi dinamici elementari

| | |
|---|---|
| $S$ | Massima sovrapposizione |
| $T_r$ | Tempo di ritardo |
| $T_s$ | Tempo di salita |
| $T_m$ | Istante di massima sovrapposizione |
| $T_a$ | Tempo di assestamento |