Programmazione Lineare Intera

Programmazione Lineare Intera

Problema di PLI in forma standard:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{cx} \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0, \quad \mathbf{x} \in Z^n \end{aligned}$$

$Z \longrightarrow$ insieme degli interi.

Programmazione Lineare Intera

Problema di PLI in forma standard:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \mathbf{cx} \\
& \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \geq 0, \ \ \mathbf{x} \in Z^n
\end{aligned}
$$

$Z \longrightarrow$ insieme degli interi.

Regione ammissibile:

$$Z_a = \{\mathbf{x} \in Z^n \ : \ \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \ \mathbf{x} \geq 0\},$$

Insieme delle sue soluzioni ottime:

$$Z_{ott} = \{\mathbf{x}^* \in Z_a \ : \ \mathbf{cx}^* \geq \mathbf{cx} \ \ \forall \ \mathbf{x} \in Z_a\}.$$

Rilassamento lineare

Il rilassamento lineare di un problema di PLI è il problema di PL ottenuto dal problema di PLI omettendo la richiesta che le variabili siano intere, e quindi

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{cx} \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

S_a e S_{ott} denotano rispettivamente la regione ammissibile e l'insieme delle soluzioni ottime del rilassamento lineare del problema di PLI.

Esempio

Problema di PLI:

$$
\begin{aligned}
\max \qquad & x_1 + x_2 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in Z.
\end{aligned}
$$

Esempio

Problema di PLI:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + x_2 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in Z.
\end{aligned}
$$

Rilassamento lineare:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + x_2 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Relazioni tra i due problemi

Si ha che:

$$Z_a \subseteq S_a$$

e i due problemi hanno la *stessa* funzione obiettivo $\mathbf{cx}$ quindi:

- Se $S_a = \emptyset$, allora $Z_a = \emptyset$.

Relazioni tra i due problemi

Si ha che:

$$Z_a \subseteq S_a$$

e i due problemi hanno la *stessa* funzione obiettivo $\mathbf{cx}$ quindi:

- Se $S_a = \emptyset$, allora $Z_a = \emptyset$.
- Se $\exists \; \{\mathbf{x}_k\}$ tale che $\mathbf{x}_k \in Z_a$ per ogni k e

$$\mathbf{cx}_k \rightarrow +\infty \quad k \rightarrow +\infty,$$

  (obiettivo del problema di PLI illimitato), allora è illimitato anche l'obiettivo del suo rilassamento lineare.

Continua

- Se $S_{ott} \neq \emptyset$ e $Z_{ott} \neq \emptyset$, allora dato $\mathbf{x}^* \in S_{ott}$ e $\mathbf{z}^* \in Z_{ott}$, si ha

$$\mathbf{z}^* \in Z_{ott} \;\Rightarrow\; \mathbf{z}^* \in Z_a \;\Rightarrow\; \mathbf{z}^* \in S_a \;\Rightarrow \mathbf{cz}^* \leq \mathbf{cx}^*$$

cioè il valore ottimo del problema di PLI non può essere superiore al valore ottimo del suo rilassamento lineare.

Continua

- Se $S_{ott} \neq \emptyset$ e $Z_{ott} \neq \emptyset$, allora dato $\mathbf{x}^* \in S_{ott}$ e $\mathbf{z}^* \in Z_{ott}$, si ha

$$\mathbf{z}^* \in Z_{ott} \;\Rightarrow\; \mathbf{z}^* \in Z_a \;\Rightarrow\; \mathbf{z}^* \in S_a \;\Rightarrow \mathbf{c}\mathbf{z}^* \leq \mathbf{c}\mathbf{x}^*$$

  cioè il valore ottimo del problema di PLI non può essere superiore al valore ottimo del suo rilassamento lineare.

- Se $S_{ott} \neq \emptyset$ contiene un punto $\mathbf{x}^*$ a coordinate tutte intere, allora $\mathbf{x}^* \in Z_{ott}$ e i valori ottimi dei due problemi coincidono. Infatti:

$$\mathbf{x}^* \in S_{ott} \;\Rightarrow\; \mathbf{c}\mathbf{x} \leq \mathbf{c}\mathbf{x}^* \;\;\forall\, \mathbf{x} \in S_a \;\Rightarrow\; \mathbf{c}\mathbf{x} \leq \mathbf{c}\mathbf{x}^* \;\;\forall\, \mathbf{x} \in Z_a$$

$$\mathbf{x}^* \quad \text{a coordinate intere} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^* \in Z_a$$

Esempio

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_2 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in Z.
\end{aligned}
$$

Altri casi possibili

- $Z_a = \emptyset$ ma $S_{ott} \neq \emptyset$

Altri casi possibili

- $Z_a = \emptyset$ ma $S_{ott} \neq \emptyset$
- $Z_a = \emptyset$ ma l'obiettivo del rilassamento lineare è illimitato

Altri casi possibili

- $Z_a = \emptyset$ ma $S_{ott} \neq \emptyset$
- $Z_a = \emptyset$ ma l'obiettivo del rilassamento lineare è illimitato
- Se $\mathbf{A}, \mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ contengono solo valori razionali, allora $Z_{ott} \neq \emptyset$ implica $S_{ott} \neq \emptyset$. Se vi sono coefficienti irrazionali allora può accadere che $Z_{ott} \neq \emptyset$ ma il rilassamento lineare ha obiettivo illimitato.

Esempi

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_2 \\
& x_1 \geq \frac{1}{4} \\
& x_1 \leq \frac{3}{4} \\
& x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in Z.
\end{aligned}
$$

Esempi

$$\begin{aligned} \max \quad & x_2 \\ & x_1 \geq \frac{1}{4} \\ & x_1 \leq \frac{3}{4} \\ & x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in Z. \end{aligned}$$

Esempi

$$\begin{aligned} \max \quad & x_2 \\ & x_1 \geq \frac{1}{4} \\ & x_1 \leq \frac{3}{4} \\ & x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in Z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & x_2 \\ & x_2 = \sqrt{2} x_1 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in Z. \end{aligned}$$

Un’importante osservazione

I problemi di PL sono in generale molto più semplici e rapidi da risolvere dei problemi di PLI In particolare il rilassamento lineare di un problema di PLI è tipicamente molto più facile da risolvere del problema di PLI stesso.

Metodi di risoluzione

Perché non risolvere il rilassamento lineare e poi arrotondare a valori interi gli eventuali valori non interi nella soluzione ottima del rilassamento lineare?

Metodi di risoluzione

Perché non risolvere il rilassamento lineare e poi arrotondare a valori interi gli eventuali valori non interi nella soluzione ottima del rilassamento lineare?

Tale procedura è accettabile *solo se i valori delle variabili sono elevati*. In tal caso infatti l'arrotondamento introduce un errore relativo del tutto trascurabile.

Metodi di risoluzione

Perché non risolvere il rilassamento lineare e poi arrotondare a valori interi gli eventuali valori non interi nella soluzione ottima del rilassamento lineare?

Tale procedura è accettabile *solo se i valori delle variabili sono elevati*. In tal caso infatti l'arrotondamento introduce un errore relativo del tutto trascurabile.

È del tutto *inaccettabile* quando le variabili assumono valori piccoli (in particolare con le variabili binarie che assumono solo i valori 0 e 1)

Insiemi e chiusure convesse

Definizione *Un insieme S si dice* convesso *se:*

$$\forall\, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S \;\; \forall\, \lambda \in [0,1] \;\; : \quad \lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \in S.$$

Insiemi e chiusure convesse

Definizione *Un insieme S si dice* convesso *se:*

$$\forall\, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S \;\; \forall\, \lambda \in [0,1] \;\; : \quad \lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \in S.$$

Definizione *Dato un insieme T, la chiusura convessa di T, indicata con $conv(T)$, è il più piccolo insieme convesso contenente T.*

Chiusura convessa di Z_a

Sia $conv(Z_a)$ la chiusura convessa di Z_a. Si può dimostrare che, se $Z_a \neq \emptyset$, $conv(Z_a)$ è un poliedro, cioè esiste una matrice $\mathbf{A}'$ ed un vettore $\mathbf{b}'$ tale che

$$conv(Z_a) = \{\mathbf{x} \in R^n : \ \mathbf{A}'\mathbf{x} \leq \mathbf{b}', \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

Esempio

Si consideri il seguente problema (PLI),

$$\begin{aligned}
&\max x_1 + x_2 \\
&x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq \frac{7}{4} \\
&\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq \frac{7}{4} \\
&x_1, x_2 \geq 0 \text{ interi}
\end{aligned}$$

Esempio

Si consideri il seguente problema (PLI),

$$\begin{aligned}
&\max x_1 + x_2 \\
&x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq \frac{7}{4} \\
&\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq \frac{7}{4} \\
&x_1, x_2 \geq 0 \text{ interi}
\end{aligned}$$

Si ha $S_a = \{(x_1, x_2) : \ \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \ x_1, x_2 \geq 0\}$, con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix}.$$

Esempio- continua

L'insieme $Z_a = S_a \cap Z^2$ è formato dai quattro punti

$$(0,0) \quad (0,1) \quad (1,0) \quad (1,1)$$

Esempio- continua

L'insieme $Z_a = S_a \cap Z^2$ è formato dai quattro punti

$$(0,0) \quad (0,1) \quad (1,0) \quad (1,1)$$

Si ha che

$$conv(Z_a) = \{(x_1, x_2) : \ x_1 \leq 1, \ x_2 \leq 1, \ x_1, x_2 \geq 0\}.$$

Esempio- continua

L'insieme $Z_a = S_a \cap Z^2$ è formato dai quattro punti

$$(0,0) \quad (0,1) \quad (1,0) \quad (1,1)$$

Si ha che

$$conv(Z_a) = \{(x_1, x_2) : \ x_1 \leq 1, \ x_2 \leq 1, \ x_1, x_2 \geq 0\}.$$

In tal caso

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si consideri ora il problema di PL indicato con $(Pconv)$ con regione ammissibile la chiusura convessa $conv(Z_a)$ di un problema di PLI.

$$\max \mathbf{cx}$$
$$\mathbf{A}'\mathbf{x} \leq \mathbf{b}'$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \;\; \mathbf{x} \in R^n$$

Si può dimostrare che:

Si consideri ora il problema di PL indicato con $(Pconv)$ con regione ammissibile la chiusura convessa $conv(Z_a)$ di un problema di PLI.

$$\max \mathbf{cx}$$
$$\mathbf{A'x} \leq \mathbf{b'}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \;\; \mathbf{x} \in R^n$$

Si può dimostrare che:

- un problema di PLI ammette soluzione se e solo se la ammette il corrispondente problema $(Pconv)$;

Si consideri ora il problema di PL indicato con $(Pconv)$ con regione ammissibile la chiusura convessa $conv(Z_a)$ di un problema di PLI.

$$\max \mathbf{cx}$$
$$\mathbf{A}'\mathbf{x} \leq \mathbf{b}'$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \;\; \mathbf{x} \in R^n$$

Si può dimostrare che:

- un problema di PLI ammette soluzione se e solo se la ammette il corrispondente problema $(Pconv)$;
- ogni soluzione ottima del problema di PLI è soluzione ottima del corrispondente problema $(Pconv)$;

Si consideri ora il problema di PL indicato con $(Pconv)$ con regione ammissibile la chiusura convessa $conv(Z_a)$ di un problema di PLI.

$$\max \mathbf{cx}$$
$$\mathbf{A'x} \leq \mathbf{b'}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \ \ \mathbf{x} \in R^n$$

Si può dimostrare che:

- un problema di PLI ammette soluzione se e solo se la ammette il corrispondente problema $(Pconv)$;
- ogni soluzione ottima del problema di PLI è soluzione ottima del corrispondente problema $(Pconv)$;
- esiste almeno una soluzione ottima (di base) del problema $(Pconv)$ che è anche soluzione ottima del problema di PLI.

Esempio-continua

Si noti che indipendentemente dalla funzione obiettivo il problema di PLI e il problema $(Pconv)$ hanno sempre soluzione in questo caso.

Esempio-continua

Si noti che indipendentemente dalla funzione obiettivo il problema di PLI e il problema $(Pconv)$ hanno sempre soluzione in questo caso.

Con la funzione obiettivo $x_1 + x_2$ entrambi i problemi hanno l'unica soluzione $(1, 1)$.

Esempio-continua

Si noti che indipendentemente dalla funzione obiettivo il problema di PLI e il problema $(Pconv)$ hanno sempre soluzione in questo caso.

Con la funzione obiettivo $x_1 + x_2$ entrambi i problemi hanno l'unica soluzione $(1, 1)$.

Se si considera invece l'obiettivo x_1, si ha che il problema di PLI ha soluzioni $(1, 0)$ e $(1, 1)$, mentre il problema $(Pconv)$ ha come soluzioni l'intero segmento avente come estremi $(1, 0)$ e $(1, 1)$. È comunque sempre vero che esiste almeno una soluzione del problema $(Pconv)$ che è anche soluzione del problema di PLI.

Quindi ...

... *se* conoscessimo la matrice $\mathbf{A}'$ ed il vettore $\mathbf{b}'$ che definiscono $conv(Z_a)$, potremmo risolvere il problema di PLI risolvendo il problema $(Pconv)$.

Quindi ...

... *se* conoscessimo la matrice $\mathbf{A}'$ ed il vettore $\mathbf{b}'$ che definiscono $conv(Z_a)$, potremmo risolvere il problema di PLI risolvendo il problema $(Pconv)$.

Il problema è che in molti casi $conv(Z_a)$ non è noto.

Quindi ...

... *se* conoscessimo la matrice $\mathbf{A}'$ ed il vettore $\mathbf{b}'$ che definiscono $conv(Z_a)$, potremmo risolvere il problema di PLI risolvendo il problema $(Pconv)$.

Il problema è che in molti casi $conv(Z_a)$ non è noto.

In altri casi $conv(Z_a)$ è noto ma è formato da un numero esponenziale di vincoli, il che *può* rendere inefficiente la risoluzione del problema $(Pconv)$.

Una classe speciale di problemi di PLI ...

... ovvero quelli per cui

$$conv(Z_a) = conv(S_a \cap Z^n) = S_a.$$

Una classe speciale di problemi di PLI ...

... ovvero quelli per cui

$$conv(Z_a) = conv(S_a \cap Z^n) = S_a.$$

Equivalentemente:

$$(Pconv) \equiv (RL) \quad \text{o anche} \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} \ \text{ e } \ \mathbf{b}' = \mathbf{b},$$

cioè il problema $(Pconv)$ coincide con il rilassamento lineare (RL) del problema di PLI.

Una classe speciale di problemi di PLI ...

... ovvero quelli per cui

$$conv(Z_a) = conv(S_a \cap Z^n) = S_a.$$

Equivalentemente:

$$(Pconv) \equiv (RL) \quad \text{o anche} \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} \;\; \text{e} \;\; \mathbf{b}' = \mathbf{b},$$

cioè il problema $(Pconv)$ coincide con il rilassamento lineare (RL) del problema di PLI.

I problemi di PLI per cui si verifica questa condizione sono importanti perché sono molto più semplici da risolvere rispetto agli altri problemi di PLI. Infatti, basta risolvere il loro rilassamento lineare.

Continua

Essendo tutti i problemi di PL più semplici da risolvere dei problemi di PLI, anche i problemi di PLI che soddisfano questa condizione risulteranno risolvibili in modo più efficiente dei generici problemi di PLI.

Continua

Essendo tutti i problemi di PL più semplici da risolvere dei problemi di PLI, anche i problemi di PLI che soddisfano questa condizione risulteranno risolvibili in modo più efficiente dei generici problemi di PLI.

Inoltre, in molti casi questi problemi hanno strutture particolari che consentono di risolverli attraverso algoritmi specifici che sono per lo più specializzazioni di metodi per risolvere problemi di PL (come il metodo del simplesso), dove la particolare struttura dei problemi consente di implemementare in modo più efficiente i passi di tali metodi.

Matrici totalmente unimodulari

Definizione *Una matrice* $\mathbf{A}$ *si dice totalmente unimodulare (TU nel seguito) se ogni sua sottomatrice quadrata ha determinante pari a 0, +1 o -1.*

Matrici totalmente unimodulari

Definizione *Una matrice* $\mathbf{A}$ *si dice totalmente unimodulare (TU nel seguito) se ogni sua sottomatrice quadrata ha determinante pari a 0, +1 o -1.*

Si noti che una matrice TU può avere come elementi solo i valori 0, +1 e -1 visto che ogni suo elemento è una particolare sottomatrice quadrata di ordine 1×1.

Proprietà

Proprietà *Se* $\mathbf{A}$ *è una matrice TU si ha che*

- $\mathbf{A}^T$ *è TU*

Proprietà

Proprietà *Se* $\mathbf{A}$ *è una matrice TU si ha che*

- $\mathbf{A}^T$ *è TU*
- $[\mathbf{A}\ \mathbf{I}]$*, dove* $\mathbf{I}$ *è la matrice identica, è TU*

Proprietà

Proprietà *Se* $\mathbf{A}$ *è una matrice TU si ha che*

- $\mathbf{A}^T$ *è TU*
- $[\mathbf{A}\ \mathbf{I}]$, *dove* $\mathbf{I}$ *è la matrice identica, è TU*
- *una matrice ottenuta duplicando righe e/o colonne di* $\mathbf{A}$ *è ancora TU*

Proprietà

Proprietà *Se* $\mathbf{A}$ *è una matrice TU si ha che*

- $\mathbf{A}^T$ *è TU*
- $[\mathbf{A}\ \mathbf{I}]$, *dove* $\mathbf{I}$ *è la matrice identica, è TU*
- *una matrice ottenuta duplicando righe e/o colonne di* $\mathbf{A}$ *è ancora TU*
- *una matrice ottenuta moltiplicando righe e/o colonne di* $\mathbf{A}$ *per -1 è ancora TU*

Proprietà

Proprietà *Se* $\mathbf{A}$ *è una matrice TU si ha che*

- $\mathbf{A}^T$ *è TU*
- $[\mathbf{A}\ \mathbf{I}]$*, dove* $\mathbf{I}$ *è la matrice identica, è TU*
- *una matrice ottenuta duplicando righe e/o colonne di* $\mathbf{A}$ *è ancora TU*
- *una matrice ottenuta moltiplicando righe e/o colonne di* $\mathbf{A}$ *per -1 è ancora TU*
- *una matrice ottenuta scambiando righe di* $\mathbf{A}$ *(oppure colonne di* $\mathbf{A}$*) tra loro è ancora TU*

Proprietà

Proprietà *Se* $\mathbf{A}$ *è una matrice TU si ha che*

- $\mathbf{A}^T$ *è TU*
- $[\mathbf{A}\ \mathbf{I}]$*, dove* $\mathbf{I}$ *è la matrice identica, è TU*
- *una matrice ottenuta duplicando righe e/o colonne di* $\mathbf{A}$ *è ancora TU*
- *una matrice ottenuta moltiplicando righe e/o colonne di* $\mathbf{A}$ *per -1 è ancora TU*
- *una matrice ottenuta scambiando righe di* $\mathbf{A}$ *(oppure colonne di* $\mathbf{A}$*) tra loro è ancora TU*
- *una matrice ottenuta da* $\mathbf{A}$ *mediante un'operazione di cardine è ancora TU*

Alcuni modi per riconoscerle

Esistono alcune regole per riconoscere le matrici TU, tra cui la seguente.

Osservazione *Sia* $\mathbf{A}$ *una matrice i cui elementi sono tutti uguali a 0, +1 o -1 e lungo ogni colonna non vi sono più di due elementi diversi da 0. Allora* $\mathbf{A}$ *è TU se e solo se l'insieme delle righe di* $\mathbf{A}$ *può essere suddiviso in due sottinsiemi* Q_1 *e* Q_2 *tali che se una colonna contiene due elementi diversi da 0 si ha che:*

- *se i due elementi hanno lo stesso segno allora una delle due righe in cui si trovano è in* Q_1 *e l'altra in* Q_2*;*
- *se hanno segno opposto le righe corrispondenti sono entrambe contenute in* Q_1 *od entrambe in* Q_2*.*

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Prendendo $Q_1 = \{1, 2\}$ e $Q_2 = \{3, 4\}$ si verifica immediatamente che la condizione è soddisfatta e quindi $\mathbf{A}$ è TU.

Corollario

Sia $\mathbf{A}$ *una matrice i cui elementi sono tutti uguali a 0, +1 o -1 e lungo ogni colonna non vi sono più di due elementi diversi da 0. Se nelle colonne con due elementi diversi da 0 la somma di tali elementi è uguale a 0 (ovvero un elemento è uguale a +1 e l'altro a -1), allora* $\mathbf{A}$ *è TU.*

Corollario

Sia $\mathbf{A}$ una matrice i cui elementi sono tutti uguali a 0, +1 o -1 e lungo ogni colonna non vi sono più di due elementi diversi da 0. Se nelle colonne con due elementi diversi da 0 la somma di tali elementi è uguale a 0 (ovvero un elemento è uguale a +1 e l'altro a -1), allora $\mathbf{A}$ è TU.

Dimostrazione È sufficiente utilizzare l'osservazione precedente ponendo

$$Q_1 = \{\text{tutte le righe di } \mathbf{A}\} \quad Q_2 = \emptyset.$$

Corollario

Sia $\mathbf{A}$ una matrice i cui elementi sono tutti uguali a 0, +1 o -1 e lungo ogni colonna non vi sono più di due elementi diversi da 0. Se nelle colonne con due elementi diversi da 0 la somma di tali elementi è uguale a 0 (ovvero un elemento è uguale a +1 e l'altro a -1), allora $\mathbf{A}$ è TU.

Dimostrazione È sufficiente utilizzare l'osservazione precedente ponendo

$$Q_1 = \{\text{tutte le righe di } \mathbf{A}\} \quad Q_2 = \emptyset.$$

Il corollario ci dice ad esempio che tutte le matrici di incidenza nodo-arco di un grafo orientato sono matrici TU.

Esempio

Sia $\mathbf{A}$ la seguente matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

In base al corollario tale matrice è TU.

Altro corollario

La matrice di incidenza nodo-arco per un grafo bipartito non orientato $G = (V_1 \cup V_2, A)$, dove V_1 e V_2 sono le due classi di bipartizione, è TU.

Altro corollario

La matrice di incidenza nodo-arco per un grafo bipartito non orientato $G = (V_1 \cup V_2, A)$, dove V_1 e V_2 sono le due classi di bipartizione, è TU.

Dimostrazione È sufficiente utilizzare l'osservazione precedente ponendo

$$Q_1 = V_1 \quad Q_2 = V_2.$$

Un importante teorema

Sia dato il generico problema di PLI

$$\begin{array}{ll} \max/\min & \mathbf{cx} \\ & \mathbf{A}_1\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_1 \\ & \mathbf{A}_2\mathbf{x} \geq \mathbf{b}_2 \\ & \mathbf{A}_3\mathbf{x} = \mathbf{b}_3 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Un importante teorema

Sia dato il generico problema di PLI

$$\begin{array}{ll} \max / \min & \mathbf{cx} \\ & \mathbf{A}_1\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_1 \\ & \mathbf{A}_2\mathbf{x} \geq \mathbf{b}_2 \\ & \mathbf{A}_3\mathbf{x} = \mathbf{b}_3 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Sia

$$S_a(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \{\mathbf{x} \in R^n : \ \mathbf{A}_1\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_1, \ \mathbf{A}_2\mathbf{x} \geq \mathbf{b}_2, \ \mathbf{A}_3\mathbf{x} = \mathbf{b}_3, \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

e

$$Z_a(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = S_a(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \cap Z^n.$$

Un importante teorema

Sia dato il generico problema di PLI

$$\begin{aligned} \max / \min \quad & \mathbf{cx} \\ & \mathbf{A}_1\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_1 \\ & \mathbf{A}_2\mathbf{x} \geq \mathbf{b}_2 \\ & \mathbf{A}_3\mathbf{x} = \mathbf{b}_3 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Sia

$$S_a(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \{\mathbf{x} \in R^n : \ \mathbf{A}_1\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_1, \ \mathbf{A}_2\mathbf{x} \geq \mathbf{b}_2, \ \mathbf{A}_3\mathbf{x} = \mathbf{b}_3, \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

e

$$Z_a(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = S_a(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \cap Z^n.$$

Si dimostra che $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ *sono TU se e solo se per* tutti *i vettori di interi* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ *per cui* $S_a(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \neq \emptyset$ *si ha che*

$$conv(Z_a(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)) = S_a(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3).$$

In particolare ...

... quello che interessa a noi è che:

$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ TU e $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ a coordinate intere $\Rightarrow \ conv(Z_a) = S_a$

e quindi questo problema può essere risolto semplicemente risolvendone il rilassamento lineare.

Esempio

$$\max\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$
$$x_1 + x_2 = 2$$
$$-x_1 + x_3 = 4$$
$$-x_2 + x_4 = 3$$
$$-x_3 - x_4 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \ \text{ interi}$$

Esempio- continua

Si ha

$$Z_a(\mathbf{b}_3) = \{\mathbf{x} \in Z^n : \ \mathbf{A}_3\mathbf{x} = \mathbf{b}_3, \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

con

Esempio- continua

Si ha

$$Z_a(\mathbf{b}_3) = \{\mathbf{x} \in Z^n : \ \mathbf{A}_3\mathbf{x} = \mathbf{b}_3, \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

con

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Esempio- continua

Si ha

$$Z_a(\mathbf{b}_3) = \{\mathbf{x} \in Z^n : \ \mathbf{A}_3\mathbf{x} = \mathbf{b}_3, \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

con

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Esempio-continua

Poiché $\mathbf{A}_3$ è TU e $\mathbf{b}_3$ è un vettore di interi, il problema di PLI può essere risolto semplicemente risolvendone il riassamento lineare.

Nota bene

I problemi di:

- *flusso a costo minimo*
- *flusso massimo*
- *trasporto*
- *assegnamento*

sono tutti risolvibili come problemi di PL rimuovendo i vincoli di interezza sulla variabili.

Nota bene

I problemi di:

- *flusso a costo minimo*
- *flusso massimo*
- *trasporto*
- *assegnamento*

sono tutti risolvibili come problemi di PL rimuovendo i vincoli di interezza sulla variabili.

Dimostrazione In tutti i casi si è visto che le matrici dei vincoli sono TU, mentre per definizione dei problemi tutti i termini noti sono interi.

Osservazione: PLI in forma standard

Si adottano le stesse regole già viste per i problemi di PL ma occorre prestare attenzione ad un ulteriore aspetto.

Un esempio:

$$
\begin{array}{lc}
\max & x_2 \\
& x_1 \leq \frac{1}{2} \\
& x_2 \leq \frac{1}{2} \\
& x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in Z.
\end{array}
$$

Continua

Con un problema di PL potremmo trasformarlo in forma standard con l'aggiunta di due variabili y_1 e y_2:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_2 \\
& x_1 + y_1 = \frac{1}{2} \\
& x_2 + y_2 = \frac{1}{2} \\
& x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in Z.
\end{aligned}
$$

Ma:

Continua

Con un problema di PL potremmo trasformarlo in forma standard con l'aggiunta di due variabili y_1 e y_2:

$$\begin{array}{ll} \max & x_2 \\ & x_1 + y_1 = \frac{1}{2} \\ & x_2 + y_2 = \frac{1}{2} \\ & x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in Z. \end{array}$$

Ma: ci ritroviamo con un problema in cui alcune variabili (x_1 e x_2) possono assumere solo valori interi e altre possono assumere anche valori non interi. Infatti, ad esempio, se scelgo $x_1 = x_2 = 0$, valori ammissibili per il nostro problema di PLI, il corrispondente valore di y_1 e y_2 è pari a $1/2$.

Il rimedio

Per fare in modo che anche le nuove variabili possano assumere solo valori interi quando quelle originarie hanno valori interi, è sufficiente:

trasformare i vincoli in modo tale che in essi compaiano solo coefficienti e termini noti interi.

Nell'esempio

Nel nostro esempio basta moltiplicare entrambi i vincoli per 2:

$$
\begin{array}{ll}
\max & x_2 \\
& 2x_1 \leq 1 \\
& 2x_2 \leq 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in Z.
\end{array}
$$

Nell'esempio

Nel nostro esempio basta moltiplicare entrambi i vincoli per 2:

$$
\begin{array}{ll}
\max & x_2 \\
& 2x_1 \leq 1 \\
& 2x_2 \leq 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in Z.
\end{array}
$$

e solo a questo punto aggiungere le due variabili y_1 e y_2:

$$
\begin{array}{ll}
\max & x_2 \\
& 2x_1 + y_1 = 1 \\
& 2x_2 + y_2 = 1 \\
& x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0, \quad x_1, x_2, y_1, y_2 \in Z.
\end{array}
$$