

Algoritmi di taglio

Taglio valido

Sia \mathbf{x}^* una soluzione ottima del rilassamento lineare, che si suppone abbia almeno una coordinata non intera (se tutte le sue coordinate fossero intere allora $\mathbf{x}^* \in Z_{ott}$).

Definizione *Una disequazione $\mathbf{w}\mathbf{x} \leq v$ si definisce taglio valido per il problema di PLI se non è soddisfatta da \mathbf{x}^* ma è soddisfatta da tutti i punti nella regione ammissibile del problema di PLI, ovvero*

$$\mathbf{w}\mathbf{x}^* > v, \quad \mathbf{w}\mathbf{x} \leq v \quad \forall \mathbf{x} \in Z_a$$

Algoritmi di taglio

Inizializzazione Si risolva il rilassamento lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \mathbf{a}_i\mathbf{x} &= b_i \quad i = 1, \dots, m \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Se:

- $S_a = \emptyset$, allora STOP con $Z_a = \emptyset$;
- esiste una soluzione ottima, indicata con \mathbf{x}^{*1} . Se \mathbf{x}^{*1} ha coordinate tutte intere, allora STOP: $\mathbf{x}^{*1} \in Z_{ott}$. Altrimenti si ponga $k = 1$ e si vada al Passo 1.

Continua

Passo 1 Si generi un taglio valido, ovvero una disequazione $\mathbf{w}_k \mathbf{x} \leq v_k$ tale che

$$\mathbf{w}_k \mathbf{x}^{*k} > v_k \quad \mathbf{w}_k \mathbf{x} \leq v_k \quad \forall \mathbf{x} \in Z_a$$

Continua

Passo 2 Si aggiunga il nuovo taglio valido ai vincoli originari del problema e ai tagli validi generati in precedenza e si risolva il problema di PL

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}\mathbf{x} \\ & \mathbf{a}_i\mathbf{x} = b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & \mathbf{w}_r\mathbf{x} \leq v_r \quad r = 1, \dots, k \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Se:

- il problema ha regione ammissibile vuota, allora STOP: $Z_a = \emptyset$.
- Altrimenti sia $\mathbf{x}^{*(k+1)}$ la sua soluzione ottima. Se $\mathbf{x}^{*(k+1)}$ ha coordinate tutte intere, allora STOP: $\mathbf{x}^{*(k+1)} \in Z_{ott}$. Altrimenti si ponga $k = k + 1$ e si ritorni al Passo 1.

Nota bene

Il problema di PL con l'aggiunta dei tagli non è in forma standard. Basta la semplice aggiunta di una variabile $y_r \geq 0$ in ciascuno dei tagli per portarlo alla forma standard:

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{c}\mathbf{x} \\ & \mathbf{a}_i\mathbf{x} = b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & \mathbf{w}_r\mathbf{x} + y_r = v_r \quad r = 1, \dots, k \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \\ & y_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, k \end{array}$$

Esempio

Problema di PLI:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Soluzione ottima rilassamento lineare: $x_1^* = x_2^* = 4/3$.

Taglio valido: $3x_1 + 2x_2 \leq 6$.

Continua esempio

Soluzione ottima nuovo rilassamento lineare:

$$x_1^* = 1, x_2^* = 3/2.$$

Nuovo taglio valido: $x_1 + x_2 \leq 2$.

Una soluzione ottima nuovo rilassamento lineare:

$$x_1^* = 2, x_2^* = 0. \text{ A coordinate intere e quindi: STOP}$$

Tagli di Gomory

Sia data la base ottima $B^* = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\}$ per il rilassamento lineare del problema di PLI con la seguente riformulazione rispetto a tale base è la seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & \gamma_0 + \sum_{j=1}^{n-m} \gamma_j x_{i_m+j} \\ & x_{i_1} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{n-m} \alpha_{1j} x_{i_m+j} \\ & \dots \\ & x_{i_k} = \beta_k + \sum_{j=1}^{n-m} \alpha_{kj} x_{i_m+j} \\ & \dots \\ & x_{i_m} = \beta_m + \sum_{j=1}^{n-m} \alpha_{mj} x_{i_m+j} \\ & x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

Ipotesi

Si suppone che almeno uno dei valori β_r , $r = 1, \dots, m$, sia non intero (se fossero tutti interi la soluzione di base associata a B^* sarebbe non solo ottima per il rilassamento lineare ma anche per il problema di PLI).

Esempio

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{5}{6}x_1 - \frac{13}{3}x_4 \\ & 5x_1 + 6x_3 - 8x_4 = 12 \\ & -x_1 + 6x_2 + 8x_4 = 30 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Rilassamento lineare

Base ottima $B^* = \{x_1, x_2\}$

$$\begin{aligned} \max \quad & 2 - x_3 - 3x_4 \\ x_1 = & \frac{12}{5} - \frac{6}{5}x_3 + \frac{8}{5}x_4 \\ x_2 = & \frac{27}{5} - \frac{1}{5}x_3 + \frac{8}{5}x_4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq & 0 \end{aligned}$$

Il taglio di Gomory

Sia β_k un valore non intero. Equazione relativa a x_{i_k} (*equazione generatrice del taglio*):

$$x_{i_k} = \beta_k + \alpha_{k1}x_{i_{m+1}} + \alpha_{k2}x_{i_{m+2}} + \cdots + \alpha_{k,n-m}x_{i_n}.$$

Taglio di Gomory:

$$-f_k + f_{k1}x_{i_{m+1}} + f_{k2}x_{i_{m+2}} + \cdots + f_{k,n-m}x_{i_n} \geq 0$$

dove:

● $f_{kj} < 1, j = 1, \dots, n - m$, è la mantissa di $-\alpha_{kj}$, cioè

$$f_{kj} = -\alpha_{kj} - \lfloor -\alpha_{kj} \rfloor \geq 0,$$

● $f_k < 1$ è la mantissa di β_k (non intero per ipotesi), cioè

$$f_k = \beta_k - \lfloor \beta_k \rfloor > 0.$$

Esempio

Equazione generatrice del taglio:

$$x_1 = \frac{12}{5} - \frac{6}{5}x_3 + \frac{8}{5}x_4$$

Mantissa di $\frac{12}{5}$:

$$\frac{12}{5} - \lfloor \frac{12}{5} \rfloor = \frac{12}{5} - 2 = \frac{2}{5}$$

Mantissa di $\frac{6}{5}$:

$$\frac{6}{5} - \lfloor \frac{6}{5} \rfloor = \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5}$$

Continua

Mantissa di $-\frac{8}{5}$:

$$-\frac{8}{5} - \lfloor -\frac{8}{5} \rfloor = -\frac{8}{5} - (-2) = \frac{2}{5}$$

Taglio di Gomory:

$$-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 \geq 0$$

Continua

Per mantenere il formato standard, possiamo aggiungere una nuova variabile y_1 e riscrivere il taglio attraverso la seguente coppia di vincoli:

$$y_1 = -f_k + f_{k1}x_{i_{m+1}} + f_{k2}x_{i_{m+2}} + \cdots + f_{k,n-m}x_{i_n}$$

$$y_1 \geq 0.$$

Nell'esempio

$$-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 \geq 0$$

\Updownarrow

$$y_1 = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 \quad y_1 \geq 0$$

Il taglio di Gomory è valido

La soluzione ottima del rilassamento lineare non soddisfa il taglio.

Nella soluzione ottima del rilassamento lineare si ha:

$$x_{i_{m+1}} = \dots = x_{i_n} = 0$$

quindi, in corrispondenza della soluzione ottima del rilassamento lineare si ha:

$$y_1 = -f_k < 0.$$

Generico punto in Z_a :

$$\bar{x}_{i_1}, \dots, \bar{x}_{i_n}$$

Sostituiamo le coordinate di tale punto nell' equazione generatrice del taglio:

$$\bar{x}_{i_k} = \beta_k + \sum_{j=1}^{n-m} \alpha_{kj} \bar{x}_{i_{m+j}}$$

e nel taglio di Gomory:

$$\bar{y}_1 = -f_k + \sum_{j=1}^{n-m} f_{kj} \bar{x}_{i_{m+j}}$$

Si vuole dimostrare che il valore di \bar{y}_1 è ≥ 0 e cioè che la generica soluzione ammissibile in Z_a soddisfa il taglio. Ma prima dimostriamo che:

in corrispondenza di ogni punto in Z_a , il valore di \bar{y}_1 è intero

Sommo membro a membro le due equazioni:

$$\bar{x}_{i_k} = \beta_k + \sum_{j=1}^{n-m} \alpha_{kj} \bar{x}_{i_{m+j}}$$

e:

$$\bar{y}_1 = -f_k + \sum_{j=1}^{n-m} f_{kj} \bar{x}_{i_{m+j}}$$

Dalla somma ho:

$$\bar{y}_1 + \bar{x}_{i_k} = (\beta_k - f_k) + \sum_{j=1}^{n-m} (\alpha_{kj} + f_{kj}) \bar{x}_{i_m+j}$$

$$-f_k + \beta_k = \lfloor \beta_k \rfloor \quad f_{kj} + \alpha_{kj} = -\lfloor -\alpha_{kj} \rfloor$$

Quindi:

$$\bar{y}_1 = \lfloor \beta_k \rfloor - \bar{x}_{i_k} - \sum_{j=1}^{n-m} \lfloor -\alpha_{kj} \rfloor \bar{x}_{i_m+j}$$

$\bar{y}_1 \geq 0$ in corrispondenza di punti in Z_a

$$\bar{y}_1 + f_k = \sum_{j=1}^{n-m} \underbrace{f_{kj}}_{\geq 0} \underbrace{\bar{x}_{i_m+j}}_{\geq 0}$$

Quindi:

$$\bar{y}_1 + f_k \geq 0$$

e, per la interezza di \bar{y}_1 e $f_k < 1$, abbiamo che deve essere $\bar{y}_1 \geq 0$.

Osservazione 1

Abbiamo dimostrato che la nuova variabile che viene introdotta (la y_1) assume sempre valori interi in corrispondenza di ogni punto di Z_a .

Quindi con l'aggiunta del taglio posso riscrivere il problema di PLI in questo modo:

$$\begin{array}{ll}\max & \mathbf{c}\mathbf{x} \\ & \mathbf{a}_i\mathbf{x} = b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & y_1 = -f_k + \sum_{j=1}^{n-m} f_{kj}x_{i_m+j} \\ & x_j \geq 0, \quad x_j \in Z \quad j = 1, \dots, n \\ & y_1 \geq 0, \quad y_1 \in Z\end{array}$$

Nell'esempio

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{5}{6}x_1 - \frac{13}{3}x_4 \\ & 5x_1 + 6x_3 - 8x_4 = 12 \\ & -x_1 + 6x_2 + 8x_4 = 30 \\ & y_1 = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, y_1 \geq 0, \quad x_1, x_2, x_3, x_4, y_1 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Continua

Quindi: dal momento che il nuovo problema con l'aggiunta del taglio è ancora un problema di PLI (tutte le variabili, compresa la nuova, y_1 , sono vincolate ad essere intere) possiamo iterare la procedura, cioè se dopo l'aggiunta del primo taglio la risoluzione del nuovo rilassamento lineare non ha coordinate tutte intere, possiamo generare un nuovo taglio utilizzando la stessa regola di generazione.

Osservazione 2

Il rilassamento lineare del problema di PLI dopo l'aggiunta del taglio non deve essere risolto da zero. Infatti, possiamo prendere la coppia di vincoli

$$y_1 = -f_k + \sum_{j=1}^{n-m} f_{kj} x_{i_m+j} \quad y_1 \geq 0,$$

che esprime il taglio ed aggiungerla alla riformulazione rispetto alla base ottima B^* del rilassamento lineare prima dell'introduzione del taglio.

Continua

$$\begin{aligned} \max \quad & \gamma_0 + \sum_{j=1}^{n-m} \gamma_j x_{i_m+j} \\ & x_{i_1} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{n-m} \alpha_{1j} x_{i_m+j} \\ & \quad \dots \\ & x_{i_k} = \beta_k + \sum_{j=1}^{n-m} \alpha_{kj} x_{i_m+j} \\ & \quad \dots \\ & x_{i_m} = \beta_m + \sum_{j=1}^{n-m} \alpha_{mj} x_{i_m+j} \\ & y_1 = -f_k + \sum_{j=1}^{n-m} f_{kj} x_{i_m+j} \\ & x_1, \dots, x_n, y_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Continua

Questa è già la riformulazione del nuovo rilassamento lineare rispetto alla base $B^* \cup \{y_1\}$. Tale base è

- non ammissibile per il primale ($y_1 = -f_k < 0$);
- ammissibile per il duale.

Nell'esempio

Base $B^* \cup \{y_1\} = \{x_1, x_2, y_1\}$ ammissibile per il duale

$$\max \quad 2 - x_3 - 3x_4$$

$$x_1 = \frac{12}{5} - \frac{6}{5}x_3 + \frac{8}{5}x_4$$

$$x_2 = \frac{27}{5} - \frac{1}{5}x_3 + \frac{8}{5}x_4$$

$$y_1 = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1 \geq 0.$$

Continua

Applicando il simplesso duale si arriva in una iterazione alla base ottima $\{x_1, x_2, x_3\}$:

$$\begin{aligned}\max \quad & 0 - 5y_1 - x_4 \\ x_1 = & 0 - 6y_1 + 4x_4 \\ x_2 = & 5 - y_1 + 2x_4 \\ x_3 = & 2 + 5y_1 - 2x_4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, y_1 \geq & 0\end{aligned}$$

Soluzione ottima del rilassamento lineare e del problema di PLI:

$$x_1^* = 0 \quad x_2^* = 5 \quad x_3^* = 2 \quad x_4^* = 0$$

Valore ottimo del rilassamento lineare e del problema di PLI
 $= 0$

Osservazione 3

Se ad ogni iterazione il taglio di Gomory viene realizzato a partire dalla prima equazione con un termine noto β_k non intero, allora l'algoritmo termina in un numero finito di iterazioni.