Raggiungibilità: Sistemi a tempo discreto

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (*)$$

Per questo argomento non siamo interessati all'uscita y.

__Def__: $x_1 \in \mathbb{R}^n$ si dice __raggiungibile__ al passo $k_1 \in \mathbb{N}$ se esiste u tale che la soluzione di $(*)$ con il dato iniziale $\boxed{x(0) = 0}$ soddisfa $x(k_1) = x_1$

__Osservazione__: È importante notare che nella definizione precedente si assume che $x(0) = 0$.

__Def__: L'insieme degli stati raggiungibili al passo k_1 è dato da $X_R(k_1) = \{x \in \mathbb{R}^n : x$ è raggiungibile al passo $k_1\}$.

__Def__: Il sistema $(*)$ è __completamente raggiungibile__ al passo k_1 se $X_R(k_1) = \mathbb{R}^n$.

__Def__: La __matrice di raggiungibilità__ al passo k è $R_k = [B, AB, A^2B, \dots, A^{k-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times (k \cdot m)}$ # controlli → # stati

__Prop.__ Per $k > 0$ la soluzione di $(*)$ è $x(k) = A^k x_0 + R_k U_k$, dove $U_k = [u(k-1), u(k-2), \dots, u(0)]^T$ con $U_k \in \mathbb{R}^{mk}$

__Dim__: $x(k) = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i) = A^k x_0 + A^0 Bu(k-1) + ABu(k-2) + \dots + A^{k-2}Bu(1) + A^{k-1}Bu(0)$
$= A^k x_0 + \underbrace{[B, AB, \dots, A^{k-1}B]}\cdot\underbrace{[u(k-1), u(k-2), \dots, u(0)]^T} = A^k x_0 + R_k U_k$ □

Se $x_0 = 0$, $x(k) = R_k U_k$ riusciamo a raggiungere tutti gli stati che sono contenuti nella immagine di R_k.

__Proprietà__: $X_R(0) = \{0\}$; se $k > 0$ $X_R(k) = \operatorname{Im} R_k$.

__Dim__: La condizione $x(0) = 0 \Rightarrow X_R(0) = \{0\}$. Se invece $k > 0$ vale la formula risolutiva precedente $x(k) = \cancel{A^k x_0} + R_k U_k$. Quindi $x \in X_R(k) \iff \exists U_k : x = R_k U_k \iff x \in \operatorname{Im} R_k$. □

__Proprietà__: Se $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times p}$, $\operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B = \operatorname{Im}[A, B]$

__Dim__: $x \in \operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B \iff \exists a, b : x = Aa + Bb \iff \exists a, b : x = [A, B] \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \iff x \in \operatorname{Im}[A, B]$ □

__Proprietà__: $X_R(k) \subseteq X_R(k+1)$, $k \geq 0$ $[A \subseteq B$: ogni elemento di A è elemento di B.
$A \subset B$: $(A \subseteq B) \wedge (A \neq B)]$

__Dim__: $X_R(k) = \operatorname{Im} R_k = \operatorname{Im}[B, AB, A^2B, \dots, A^{k-1}B] \subseteq \operatorname{Im}[B, AB, \dots, A^{k-1}B] + \operatorname{Im}[A^k B] =$
$= \operatorname{Im}[B, AB, \dots, A^{k-1}B, A^k B] = \operatorname{Im} R_{k+1} = X_R(k+1)$ □

__Proprietà__: $X_R(k+1) = A(X_R(k)) + \operatorname{Im} B$

__Dim__: $X_R(k+1) = \operatorname{Im} R_{k+1} = \operatorname{Im}[B, AB, \dots, A^k B] = \operatorname{Im}[B] + \operatorname{Im}[AB, A^2B, \dots, A^k B] =$

$= \text{Im}\, B + \text{Im}\, A[B, AB, \dots, A^{k-1}B] = \text{Im}\, B + A(\text{Im}\, R_k) = \text{Im}\, B + A(X_R(k))$ □

Possiamo interpretare questa equazione come una equazione alle differenze dell'insieme dei sottospazi di $\mathbb{R}^n$: $X_R(k)$ è la soluzione di

$$\begin{cases} X_R(k+1) = A(X_R(k)) + \text{Im}\, B \\ X_R(0) = \{0\} \end{cases}$$

Proprietà: Se $X_R(k) = X_R(k+1)$, allora $X_R(k+2) = X_R(k+1)$.

Dim: $X_R(k+2) = A(X_R(k+1)) + \text{Im}\, B = A(X_R(k)) + \text{Im}\, B = X_R(k+1)$ □

Sequenza di sottospazi: $X_R(0) = \{0\} \subset X_R(1) \subset \dots \subset X_R(\bar{k}) = X_R(\bar{k}+1)$.
Le inclusioni fino a $\bar{k}$ sono tutte strette e chiamiamo $X_R(\bar{k}) = X_R$ insieme di raggiungibilità.

Def: L'insieme degli stati raggiungibili o insieme di raggiungibilità è $X_R = X_R(\bar{k})$, dove $\bar{k} = \min\{k \in \mathbb{N} : X_R(k) = X_R(k+1)\}$.

Proprietà: $\bar{k} \le n$ dove n è la dimensione dello spazio degli stati.

Dim: $X_R(0) \subset X_R(1) \subset \dots \subset X_R(\bar{k}) = X_R(\bar{k}+1) = \dots$, inoltre $\dim X_R(0) = 0$ e $\dim X_R(1) > \dim X_R(0)$; quindi $\dim X_R(1) \ge 1$, $\dim X_R(2) > \dim X_R(1)$, quindi $\dim X_R(2) \ge 2, \dots$ $\dim X_R(\bar{k}) \ge \bar{k}$ ma $\dim X_R(\bar{k}) \le n$ poiché è sottoinsieme dello spazio degli stati $\Rightarrow \bar{k} \le n$ □

Def: La matrice di raggiungibilità è $R = R_n = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$.

Proprietà: $X_R = \text{Im}\, R$

Dim: $X_R = X_R(\bar{k})$, $\bar{k} = \min\{k \in \mathbb{N} : X_R(k) = X_R(k+1)\}$, quindi $X_R = X_R(\bar{k}) \overset{\bar{k} \le n}{=} X_R(n) = \text{Im}\, R_n = \text{Im}\, R$. □

Esempio: $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad X_R(k) = ?$, $X_R = ?$

$X_R(0) = \{0\}$

$X_R(1) = \text{Im}\, R_1 = \text{Im}\, B = \text{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$X_R(2) = \text{Im}\, R_2 = \text{Im}\, [B, AB] = \text{Im} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \times \end{array} \end{array} = \text{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X_R(2) = A(X_R(1)) + \text{Im}\, B = A\left(\text{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + \text{Im}\, B = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \text{Im}\, B = \text{Im} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \times \end{array} \end{array}$$

$= \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e riotteniamo lo stesso risultato.

$$X_R(3) = \operatorname{Im} R_3 = \operatorname{Im}[B, AB, A^2B] = \operatorname{Im}\left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{B} \left| \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{matrix}}_{AB} \right| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{matrix}}_{A^2B}\right] = X_R(2) = X_R \quad \text{e } \bar{k} = 2.$$

$\rightsquigarrow$ il rango è 3

$X_R(3) = A(X_R(2)) + \operatorname{Im} B =$

$$= A\left(\operatorname{Im}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + \operatorname{Im} B = \operatorname{Im}\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] = X_R(2)$$

$\rightsquigarrow$ il rango è 3

$$X_R = \operatorname{Im} R = \operatorname{Im}[B, AB, A^2B, A^3B] \; (= \operatorname{Im} R_4) = \operatorname{Im}\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] =$$

$$= \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Proprietà: Se $X_R(k+1) = X_R(k) + \operatorname{Im} M$ allora $X_R(k+2) = X_R(k+1) + \operatorname{Im} AM$.

Dim: $X_R(k+2) = A(X_R(k+1)) + \operatorname{Im} B = A(X_R(k) + \operatorname{Im} M) + \operatorname{Im} B = A(X_R(k)) + A(\operatorname{Im} M) + \operatorname{Im} B$

$= \underbrace{A(X_R(k)) + \operatorname{Im} B} + \operatorname{Im} AM = X_R(k+1) + \operatorname{Im} AM.$

Esempio: Consideriamo A, B come nell'esempio precedente. $X_R(0) = \{0\}$

$$X_R(1) = \operatorname{Im} B = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Im}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M},$$

Quindi $X_R(1) = X_R(0) + \operatorname{Im} M$ e $X_R(2) = X_R(1) + \operatorname{Im} AM =$

$$= X_R(1) + \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -4 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Im}\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = X_R(1) + \operatorname{Im}\overset{M_1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

$$X_R(3) = X_R(2) + \operatorname{Im} A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = X_R(2) + \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \operatorname{Im}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] = X_R(2) = X_R$$

Proprietà: $X_R = A(X_R) + \operatorname{Im} B$

Dim: $X_R = X_R(\bar{k})$, $\bar{k} = \min\{k \in \mathbb{N} : X_R(k) = X_R(k+1)\}$, $\overbrace{X_R(\bar{k}+1)} = A(\overbrace{X_R(\bar{k})}) + \operatorname{Im} B$,

$X_R = A(X_R) + \operatorname{Im} B$

$\square$

Proprietà: $A(X_R) \subseteq X_R$ [X_R è un sottospazio invariante rispetto ad A]

Dim: $X_R = A(X_R) + \mathrm{Im}\,B$ quindi $A(X_R) \subseteq X_R$. $\square$

Proprietà: X_R è il più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^n$ che soddisfa:

1. X_R è invariante rispetto ad A.
2. X_R contiene $\mathrm{Im}\,B$.

Dim: Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ tale che $A(V) \subseteq V$ e $\mathrm{Im}\,B \subseteq V$. Mostriamo che $X_R \subseteq V$.
Sappiamo che $\mathrm{Im}\,B \subseteq V$; $\mathrm{Im}\,AB = A(\mathrm{Im}\,B) \subseteq A(V) \subseteq V$, $\mathrm{Im}\,A^2B = A\,\mathrm{Im}(AB) \subseteq A(V) \subseteq V$; ...
$\mathrm{Im}\,A^{n-1}B \subseteq V$. $X_R = \mathrm{Im}\,R = \mathrm{Im}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = \mathrm{Im}\,B + \mathrm{Im}\,AB + \dots + \mathrm{Im}\,A^{n-1}B \subseteq V$ $\square$

Proprietà: Dato il sistema $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$, esiste un controllo u tale che $x(k_1) = x_1 \iff$
$\iff x_1 - A^{k_1}x_0 \in X_R(k_1)$ [condizione necessaria e sufficiente]. Inoltre u è soluzione di
$x_1 - A^{k_1}x_0 = R_{k_1}[u(k-1), u(k-2), \dots, u(0)]^T = R_{k_1}U_k$

Dim: $x(k_1) = A^{k_1}x_0 + R_{k_1}U_{k_1}$. $\exists U_{k_1} : x(k_1) = x_1 \iff \exists U_{k_1} : x_1 - A^{k_1}x_0 = R_{k_1}U_{k_1} \iff$
$\iff x_1 - A^{k_1}x_0 \in \mathrm{Im}\,R_{k_1} = X_R(k_1)$. Risolvendo $x_1 - A^{k_1}x_0 = R_{k_1}U_{k_1}$ possiamo ottenere tutti i controlli che ci consentono di effettuare questa transizione $\square$

Esempio: $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ nel numero minimo di passi.

$k_1 = 1$, $x_1 - Ax_0 \in X_R(1)$? $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Im}\,B = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$? No.

$k_1 = 2$, $x_1 - A^2x_0 \in X_R(2)$? $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Im}[B, AB] = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$? Sì, $\boxed{k_1 = 2}$

$$x_1 - A^2x_0 = R_2U_2 \iff \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \iff \begin{cases} u(1) = -1 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Raggiungibilità: sistemi a tempo continuo, 1

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (*)$$

Def: x_1 è **raggiungibile** al tempo t_1 per il sistema $(*)$ se esiste u tale che la soluzione di $(*)$ con $x_0 = 0$ soddisfa $x(t_1) = x_1$.

Def: L'insieme degli stati raggiungibili al tempo t_1 per (*) è $X_R(t_1) = \{x \in \mathbb{R}^n : x$ è raggiungibile al tempo t_1 per (*)$\}$. Se $X_R(t_1) = \mathbb{R}^n$ il sistema (*) si dice <u>completamente raggiungibile</u> (<u>raggiungibile</u>) al tempo t_1.

$x(t_1) = \cancel{e^{At}x_0} + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} Bu(\tau)\,d\tau$ cerchiamo di capire com'è fatto questo insieme

<u>Proprietà</u>: Se $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $(e^A)^T = e^{(A^T)}$

Dim: Dimostriamo che $(e^{At})^T = e^{A^Tt}$, $t \in \mathbb{R}$. $z(t) := (e^{At})^T - e^{A^Tt}$ e mostriamo che è nulla.

* se $AB=BA$, $e^{At}B=Be^{At}$

$\dot z(t) = (\underline{Ae^{At}})^T - A^Te^{A^Tt} = (e^{At}A)^T - A^Te^{A^Tt} = A^T(e^{At})^T - A^Te^{A^Tt} = A^T((e^{At})^T - e^{A^Tt}) = A^Tz(t)$.

Inoltre $z(0) = (e^{At})^T - e^{A^Tt}\big|_{t=0} = I - I = 0$. Quindi $\dot z(t) = A^Tz(t)$ e $z(0)=0 \Rightarrow z(t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}$ □

$x(t_1) = \int_0^{t_1} \underline{e^{A(t_1-\tau)}B}u(\tau)\,d\tau$, definiamo $u(\tau) := (e^{A(t_1-\tau)}B)^T\eta$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, quindi $u(\tau) = B^Te^{A^T(t_1-\tau)}\eta$, di conseguenza $x(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}BB^Te^{A^T(t_1-\tau)}\eta\,d\tau =$
$= \underline{\int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}BB^Te^{A^T(t_1-\tau)}d\tau}\,\eta =: W_R(t_1)\eta$ con $W_R(t_1) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gramiano di raggiungibilità

$$W_R(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A(\underbrace{t_1-\tau}_{\ell})}BB^Te^{A^T(t_1-\tau)}d\tau = \int_{t_1}^0 e^{A\ell}BB^Te^{A^T\ell}(-d\ell) = \int_0^{t_1} e^{A\ell}BB^Te^{A^T\ell}d\ell.$$

Def: Il <u>gramiano di raggiungibilità</u> al tempo t_1 è $W_R(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A\tau}BB^Te^{A^T\tau}d\tau$.

Quindi $x(t_1) = W_R(t_1)\eta$

<u>Proprietà</u>: $\operatorname{Im} W_R(t_1) \subseteq X_R(t_1)$

Dim: Basta mostrare che: $x_1 \in \operatorname{Im} W_R(t_1) \Rightarrow x_1 \in X_R(t_1)$. Assumiamo che $x_1 \in \operatorname{Im} W_R(t_1)$
$\Rightarrow \exists \eta : x_1 = W_R(t_1)\eta$. $u(\tau) := B^Te^{A^T(t_1-\tau)}\eta$. $x(t_1) = \underline{\int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}BB^Te^{A^T(t_1-\tau)}d\tau}\,\eta$
$= W_R(t_1)\eta = x_1 \Rightarrow x_1 \in X_R(t_1)$. Abbiamo trovato un controllo che ci permette di raggiungerlo □

In realtà vediamo che vale $\boxed{X_R(t_1) = \operatorname{Im} W_R(t_1)}$, ma prima rivediamo alcuni concetti:

Def: Se $x, y \in \mathbb{R}^n$, con $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$, il <u>prodotto scalare</u> di x e y è $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_iy_i$

Possiamo riscrivere il prodotto scalare come $\langle x, y\rangle = x^Ty = [x_1, x_2, \dots, x_n]\cdot[y_1, y_2, \dots, y_n]^T$.

Def: Se V è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, il <u>complemento ortogonale</u> di V è $V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : (\forall y \in V)\ x^Ty = 0\}$

<u>Proprietà</u>: Se $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $(\operatorname{Im} A)^\perp = \operatorname{Ker} A^T$

Dim: $x \in (\operatorname{Im} A)^\perp \Leftrightarrow (\forall y \in \operatorname{Im} A)\ x^Ty = 0 \Leftrightarrow (\forall z \in \mathbb{R}^m)\ x^TAz = 0 \Leftrightarrow (\forall z \in \mathbb{R}^m)\ z^TA^Tx = 0$
$\Leftrightarrow A^Tx = 0 \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} A^T$. □

Esempio: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $(\operatorname{Im} A)^\perp = \operatorname{Ker} A^T = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Proprietà: Se V è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ $\dim V^\perp = n - \dim V$

Dim: Sia A tale che $V = \operatorname{Im} A$. $V^\perp = (\operatorname{Im} A)^\perp = \operatorname{Ker} A^T$, per il teorema N+R:

$\dim \operatorname{Ker} A^T = n - \operatorname{rank} A^T = n - \operatorname{rank} A = n - \dim V$. □

Proprietà: Se V, Z sono sottospazi di $\mathbb{R}^n$ e $V \subseteq Z$, allora $Z^\perp \subseteq V^\perp$

Dim: $x \in Z^\perp \Rightarrow x \in V^\perp$: tesi. $x \in Z^\perp \Leftrightarrow (\forall y \in Z)\ x^T y = 0 \overset{V \subseteq Z}{\Rightarrow} (\forall y \in V)\ x^T y = 0 \Leftrightarrow x \in V^\perp$. □

Proprietà: $(V^\perp)^\perp = V$.

Proprietà: Se V, Z sono sottospazi di $\mathbb{R}^n$ con $V \subseteq Z$, $V^\perp \subseteq Z^\perp$, allora $V = Z$.

Dim: $V^\perp \subseteq Z^\perp \Rightarrow (V^\perp)^\perp \supseteq (Z^\perp)^\perp \Rightarrow V \supseteq Z$, ma per ipotesi $V \subseteq Z \Rightarrow V = Z$. □

Lemma del gramiano: Sia $F: [0, t_1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times m}$ una funzione continua e definiamo $G = \int_0^{t_1} F(t) F^T(t)\, dt \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Allora $x \in \operatorname{Ker} G \Leftrightarrow (\forall t \in [0, t_1])\ F^T(t) x = 0$.

Dim: $(\Leftarrow)$ Se $(\forall t \in [0,t_1])\ F^T(t) x = 0$, $Gx = \int_0^{t_1} F(t) F^T(t)\, dt\, x = \int_0^{t_1} F(t) \underbrace{F^T(t) x}_{=0} dt = 0$

$(\Rightarrow)$ $x \in \operatorname{Ker} G \Rightarrow \int_0^{t_1} F(t) F^T(t)\, dt\, x = 0 \Rightarrow x^T \int_0^{t_1} F(t) F^T(t)\, dt\, x \Rightarrow \int_0^{t_1} \underbrace{x^T F(t)}_{y^T} \underbrace{F^T(t) x}_{y}\, dt = 0$

* $\|\cdot\|_2^2$ continua e ≥ 0

$\Rightarrow \int_0^{t_1} \|F^T(t) x\|_2^2\, dt = 0 \overset{*}{\Rightarrow} (\forall t \in [0,t_1])\ \|F^T(t) x\|_2^2 = 0 \Rightarrow F^T(t) x = 0 \quad \forall t \in [0, t_1]$. □

Proprietà: $X_R(t_1) = \operatorname{Im} W_R(t_1)$

Dim: 1. $\operatorname{Im} W_R(t_1) \subseteq X_R(t_1)$. [già dimostrato]

2. $(\operatorname{Im} W_R(t_1))^\perp \subseteq (X_R(t_1))^\perp$. Tesi: $x \in (\operatorname{Im} W_R(t_1))^\perp \Rightarrow x \in (X_R(t_1))^\perp$.

$W_R(t_1) := \int_0^{t_1} \underline{e^{A(t_1 - \tau)}} B B^T e^{A^T(t_1 - \tau)}\, d\tau = \int_0^{t_1} F(\tau) F^T(\tau)\, d\tau$. Osserviamo che $W_R(t_1) = W_R(t_1)^T$, inoltre $(\operatorname{Im} W_R(t_1))^\perp = \operatorname{Ker}(W_R(t_1)^T) = \operatorname{Ker}(W_R(t_1))$.

$x \in (\operatorname{Im} W_R(t_1))^\perp \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} W_R(t_1)$. Per il Lemma del gramiano $(\forall \tau \in [0, t_1])$ $F^T(\tau) x = 0 \Leftrightarrow (\forall \tau \in [0, t_1])\ B^T e^{A^T(t_1 - \tau)} x = 0$. Sia $y \in X_R(t_1) \Rightarrow$

$y = \int_0^{t_1} e^{A(t_1 - \tau)} B u(\tau)\, d\tau$. $y^T x = \int_0^{t_1} u^T(\tau) B^T e^{A^T(t_1 - \tau)}\, d\tau\, x = \int_0^{t_1} u^T(\tau) \underbrace{B^T e^{A^T(t_1 - \tau)} x}_{=0}\, d\tau = 0$

Quindi $(\forall y \in X_R(t_1))\ y^T x = 0 \Leftrightarrow x \in X_R(t_1)^\perp$. □

Se $x_1 \in X_R(t_1)$, $x_1 = W_R(t_1)\eta$, $u(t) = B^T e^{A^T(t_1 - t)} \eta$, $x(t_1) = x_1$; un controllo di questo tipo ci permette di raggiungere tutti gli stati raggiungibili al tempo t_1, ed è solo uno degli infiniti controlli possibili

Proprietà: Sia $x_1 \in X_R(t_1)$ e sia $u^*(t) = B^T e^{A^T(t_1 - t)} \eta$, con $x_1 = W_R(t_1)\eta$. Sia $\bar{u}$ un controllo tale che $\int_0^{t_1} e^{A(t_1 - \tau)} B \bar{u}(\tau)\, d\tau = x_1$, allora $\int_0^{t_1} \|u^*(t)\|^2 dt \leq \int_0^{t_1} \|\bar{u}(t)\|^2 dt$

Intuitivamente possiamo pensare che il controllo u^* fatto con il gramiano è il controllo a minima energia poiché l'integrale della proprietà è proporzionale all'energia spesa nel caso in cui $\|u\|^2$ rappresenti una potenza.

Dim: $\int_0^{t_1} \|\bar u(t)\|^2 dt = \int_0^{t_1} \bar u(t)^T \bar u(t)\, dt = \int_0^{t_1} (\bar u(t) - u^*(t) + u^*(t))^T(\bar u(t) - u^*(t) + u^*(t))\, dt =$

* sono termini scalari

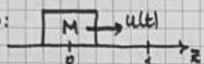
$= \int_0^{t_1} (\bar u - u^*)^T(\bar u - u^*)\, dt + \int_0^{t_1}(u^*)^T u^*\, dt + \underline{\int_0^{t_1}(\bar u-u^*)^T u^*\, dt} + \underline{\int_0^{t_1} (u^*)^T(\bar u - u^*)\, dt} =$

$= \int_0^{t_1}\|\bar u - u^*\|^2 dt + \int_0^{t_1}\|u^*\|^2 dt + 2\int_0^{t_1}(\bar u - u^*)^T u^*\, dt$. Osserviamo che $\int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)}B(\bar u(t) - u^*(t))\,dt =$

$= \underline{\int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)}B\bar u(t)\,dt} - \underline{\int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)}Bu^*(t)\,dt} = x_1 - x_1 = 0$. Ora valutiamo:

$\int_0^{t_1}(\bar u-u^*)^T u^*\, dt = \int_0^{t_1}(\bar u - u^*)^T B^T e^{A^T(t_1-t)}\eta\, dt = \underline{\int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)}B(\bar u-u^*)^T dt}\,\eta = 0$

Quindi $\int_0^{t_1}\|\bar u\|^2 dt = \underbrace{\int_0^{t_1}\|\bar u - u^*\|^2 dt}_{\geq 0} + \int_0^{t_1}\|u^*\|^2 dt \geq \int_0^{t_1}\|u^*\|^2 dt.$ □

Esempio: 

$M = 1kg$. Equazione della dinamica: $M\ddot z(t) = u(t)$

$x = \begin{bmatrix} z \\ \dot z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2\end{bmatrix}$ $\begin{cases}\dot x_1 = x_2 \\ \dot x_2 = \frac{u(t)}{M} = u(t)\end{cases}$ $\dot x(t) = \overbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}}^{A} x(t) + \overbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}^{B} u(t)$

$u^*(t) = B^T e^{A^T(t_1-t)}\eta$, $x_1 = W_R(t_1)\eta$, $W_R(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At}BB^Te^{A^Tt}\,dt$

$e^{At} = \begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $e^{At}B = e^{At}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}t\\1\end{bmatrix}$, $W_R(t) = \int_0^t \begin{bmatrix}t\\1\end{bmatrix}\cdot[t, 1]\,dt = \int_0^t \begin{bmatrix}t^2 & t\\ t & 1\end{bmatrix} dt =$

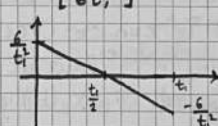
$= \begin{bmatrix}t^3/3 & t^2/2\\ t^2/2 & t\end{bmatrix}\Bigg|_0^{t_1} = \begin{bmatrix}t_1^3/3 & t_1^2/2\\ t_1^2/2 & t_1\end{bmatrix}$. $x_1 = W_R(t_1)\eta$. $\det W_R(t_1) = \frac{t_1^4}{3} - \frac{t_1^4}{4} \neq 0$ se $t_1 \neq 0$.

Il sistema è completamente raggiungibile per qualsiasi $t_1 \neq 0$.

$W_R(t_1)$ è invertibile se $t_1 \neq 0$ quindi $\eta = W_R(t_1)^{-1}x_1$, $\eta = \begin{bmatrix}t_1 & -t_1^2/2\\ -t_1^2/2 & t_1^3/3\end{bmatrix}\cdot\frac{12}{t_1^4}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12t_1^{-3}\\ 6t_1^{-2}\end{bmatrix}$

$u^*(t) = B^Te^{A^T(t_1-t)}\eta = [0, 1]\begin{bmatrix}1 & 0\\ t_1-t & 1\end{bmatrix}\eta = [t_1-t, 1]\begin{bmatrix}12t_1^{-3}\\ 6t_1^{-2}\end{bmatrix} = (t_1-t)12t_1^{-3} - 6t_1^{-2} =$

$= 12t_1^{-2} - 12tt_1^{-3} - 6t_1^{-2} = 6t_1^{-2} - 12tt_1^{-3} = \frac{6}{t_1^3}(t_1 - 2t)$



Acceleriamo la massa fino a metà del tempo a disposizione e poi iniziamo a frenarla fino ad arrivare alla posizione finale.

$X_R(t_1) = \mathrm{Im}\, W_R(t_1)$, se $t_1 \neq 0$, $\det W_R(t_1) \neq 0$ quindi $\mathrm{Im}\, W_R(t_1) = \mathbb{R}^2 = X_R(t_1)$

Se però il tempo t_1 è molto piccolo la forza da impiegare è molto alta.

Raggiungibilità: sistemi a tempo continuo, 2

Proprietà: Per i sistemi a tempo continuo $X_R(0) = \{0\}$, $X_R(t) = \mathrm{Im} R$, $t > 0$ [confronto con caso discreto]

Dim: $X_R(0) = \{0\}$ perché $x(0) = 0$.

Anziché dimostrare che $X_R(t) = \mathrm{Im}\,R$ dimostriamo che $X_R(t)^\perp = (\mathrm{Im}\,R)^\perp$. Quindi dimostriamo che $x \in X_R(t)^\perp \iff x \in (\mathrm{Im}\,R)^\perp$. Ma $X_R(t) = \mathrm{Im}\,W_R(t)$, quindi $X_R(t)^\perp = (\mathrm{Im}\,W_R(t))^\perp = \mathrm{Ker}\,W_R(t)^T = \mathrm{Ker}\,W_R(t)$. Ricordiamo che $W_R(t) = \int_0^t e^{A\tau}BB^Te^{A^T\tau}\,d\tau$, $F(\tau) := e^{A\tau}B$.

- $x \in \mathrm{Ker}\,W_R(t) \iff F^T(\tau)x = 0\ \forall \tau\in[0,t] \iff B^Te^{A^T\tau}x = 0\ \forall\tau\in[0,t] \iff x^Te^{A\tau}B = 0\ \forall \tau\in[0,t]$.
- Ora vediamo che $x\in(\mathrm{Im}\,R)^\perp \iff x\in\mathrm{Ker}\,R^T \iff R^Tx=0 \iff x^TR=0 \iff x^T[B,AB,..,A^{n-1}B]=0 \iff x^TB=0 \wedge x^TAB=0\wedge..\wedge x^TA^{n-1}B=0$. Quindi la tesi vale se e solo se (a) $x^Te^{A\tau}B=0\ \forall\tau\in[0,t] \iff$ (b) $x^TB=0 \wedge x^TAB=0\wedge\dots\wedge x^TA^{n-1}B=0$. Quindi mostriamo che (a) $\Rightarrow$ (b) e che (b) $\Rightarrow$ (a).

(a) $\Rightarrow$ (b): $x^Te^{A\tau}B=0\ \forall\tau\in[0,t] \Rightarrow x^Te^{A\tau}B|_{\tau=0} = x^TB=0$. $\frac{d}{d\tau}x^Te^{A\tau}B = x^TAe^{A\tau}B=0 \Rightarrow x^TAe^{A\tau}B|_{\tau=0}=x^TAB=0, \dots, \frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}}x^Te^{A\tau}B = x^TA^{n-1}e^{A\tau}B=0 \Rightarrow x^TA^{n-1}e^{A\tau}B|_{\tau=0}=0$.

(b) $\Rightarrow$ (a): $e^{At} := \alpha_0(t)I+\alpha_1(t)A+\dots+\alpha_{\ell-1}(t)A^{\ell-1}$ con $\ell = gr(\mu_A) \le gr(\chi_A) = n$ quindi possiamo scrivere $e^{At} = \alpha_0(t)I+\alpha_1(t)A+\dots+\alpha_{n-1}(t)A^{n-1}$. Quindi $x^Te^{A\tau}B = x^T(\alpha_0(\tau)I+\dots+\alpha_{n-1}(\tau)A^{n-1})B =$
$= \alpha_0(\tau)\underline{x^TB}+\alpha_1(\tau)\underline{x^TAB}+\dots+\alpha_{n-1}(\tau)\underline{x^TA^{n-1}B}=0\ \forall\tau\in\mathbb{R}$. □

Def: <u>L'insieme degli stati raggiungibili</u> è $X_R = X_R(t), t>0 = \mathrm{Im}\,R$

Def: La coppia (A,B) è <u>raggiungibile</u> se $\mathrm{Im}\,R = \mathrm{Im}[B,AB,..,A^{n-1}B] = \mathbb{R}^n$.

<u>Osservazione</u>: Se (A,B) è raggiungibile $x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$ è completamente raggiungibile per $k\ge\bar k$, $k\ge n$, mentre $\dot x(t)=Ax(t)+Bu(t)$ è completamente ragg. $\forall t>0$

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.\ X_R = \mathrm{Im}\,R = \mathrm{Im}[B,AB,A^2B] = \mathrm{Im}\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} B & AB & A^2B \end{matrix} \end{array} = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$X_R = \mathrm{Im}\,R = \mathrm{Im}[B,AB,A^2B,A^3B]$ ma noi sappiamo anche che $X_R(\bar k) = \mathrm{Im}\,R$ quindi conviene ragionare a tempo discreto e sfruttare il fatto che $X_R(k+1) = X_R(k)+\mathrm{Im}\,M \Rightarrow$
$\Rightarrow X_R(k+2) = X_R(k+1)+\mathrm{Im}\,AM$. $X_R(0)=\{0\}$, $X_R(1)=\mathrm{Im}\underbrace{B}_{M}$.

$$X_R(2) = X_R(1)+\mathrm{Im}\,AM = X_R(1)+\mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Im}\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} & & M \end{matrix} \end{array}$$

$$X_R(3) = X_R(2)+\mathrm{Im}\,AM = X_R(2)+\mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = X_R(2),\ \bar k = 2 \text{ e quindi } X_R = \mathrm{Im}\,R = X_R(2)$$

Proprietà: Dato il sistema $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ sia $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $t_1 > 0$, esiste un controllo u tale che $x(t_1) = x_1 \iff x_1 - e^{At_1}x_0 \in X_R$.

In particolare u può essere dato da $u(t) = B^T e^{A^T(t_1-t)}\eta$, dove $x_1 - e^{At_1}x_0 = W_R(t_1)\eta$.

Dim analoga al caso discreto

Dim: $\exists u : x(t_1) = x_1 \iff \exists u : e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} Bu(\tau)\,d\tau = x_1 \iff \exists u : \overbrace{\int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} Bu(\tau)\,d\tau}^{X_R} = x_1 - e^{At_1}x_0 \iff x_1 - e^{At_1}x_0 \in X_R$. Per ottenere questo stato finale è sufficiente utilizzare $u(t) = B^T e^{A^T(t_1-t)}\eta$, dove η è ottenuto risolvendo $x_1 - e^{At_1}x_0 = W_R(t_1)\eta$ □

Proprietà: Se $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ sono tali che $\operatorname{Im} B \subseteq \operatorname{Im} A$, allora $\exists L \in \mathbb{R}^{m\times p}$ tale che $B = AL$.

Dim: $B = [b_1, b_2, \dots, b_p]$, $A = [a_1, a_2, \dots, a_m]$. $\operatorname{Im} B \subseteq \operatorname{Im} A \Rightarrow b_1 \in \operatorname{Im} A \Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tali che $b_1 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_m a_m = \underbrace{[a_1, a_2, \dots, a_m]}\underbrace{[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]^T} = A \cdot l_1$, analogamente $b_2 = Al_2, \dots, b_p = Al_p$, quindi $B = [b_1, \dots, b_p] = [Al_1, \dots, Al_p] = A\underbrace{[l_1, \dots, l_p]} = AL$. □

Proprietà (Forma standard di raggiungibilità): Consideriamo $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B\,u(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$ e poniamo $x = Tz$, dove $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile, con $T = [\overbrace{T_1}^{r}, \overbrace{T_2}^{n-r}]$, dove $T_1 \in \mathbb{R}^{n\times r}$ e $\operatorname{Im} T_1 = X_R = \operatorname{Im} R$. Allora $\begin{cases} \dot{z}(t) = \hat{A}z(t) + \hat{B}\,u(t) \\ y(t) = \hat{C}z(t) + \hat{D}u(t) \end{cases}$ dove

$$\hat{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} A_R & A_{12} \\ \hline 0 & A_{NR} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \}r \\ \}n-r \end{array} \qquad \hat{B} = \left[\begin{array}{c} B_R \\ \hline 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \}r \\ \}n-r \end{array}$$

Dim: $x = Tz$, $\dot{x} = T\dot{z}$; $T\dot{z}(t) = ATz(t) + Bu(t)$ e $y(t) = CTz(t) + Du(t)$, da cui otteniamo

$\begin{cases} \dot{z}(t) = \overbrace{T^{-1}AT}z(t) + \overbrace{T^{-1}B}u(t) \\ y(t) = \underline{CT}z(t) + \underline{D}u(t) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \dot{z}(t) = \hat{A}z(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) = \hat{C}z(t) + \hat{D}u(t) \end{cases}$ dobbiamo verificare la presenza degli zeri strutturali

$\hat{A} = T^{-1}AT = T^{-1}A[T_1, T_2] = [\underbrace{T^{-1}AT_1}_{r}, \underbrace{T^{-1}AT_2}_{n-r}]$. Usiamo la proprietà di invarianza: $\operatorname{Im}(AT_1) = A(\operatorname{Im} T_1) = A(X_R) \subseteq X_R = \operatorname{Im} T_1 \Rightarrow \exists A_R : AT_1 = T_1 A_R$, quindi $T^{-1}AT_1 = T^{-1}T_1 A_R = T^{-1}\underline{[T_1, T_2]}[A_R^T \mid 0^T] = \cancel{T^{-1}}\cancel{T}[A_R^T \mid 0^T] = [\underbrace{A_R^T}_{r} \mid \underbrace{0^T}_{n-r}]$. Ora consideriamo $\hat{B} = T^{-1}B$

$\operatorname{Im} T_1 = X_R \supseteq \operatorname{Im} B \Rightarrow \exists B_R : B = T_1 B_R$ quindi $\hat{B} = T^{-1}B = T^{-1}T_1 B_R = T^{-1}[T_1, T_2][B_R^T \mid 0^T] = \cancel{T^{-1}}\cancel{T}[B_R^T \mid 0^T] = [\underbrace{B_R^T}_{r} \mid \underbrace{0^T}_{n-r}]$. □

Per costruzione $\operatorname{Im} T_1 = X_R$ e $A(X_R) \subseteq X_R$, possiamo trovare una base di X_R considerando le colonne di T_1: $\mathcal{B}$ = colonne di T_1 = base di X_R. Possiamo definire $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ t.c. $a(x) = Ax$ quindi $A_R = [a|_{X_R}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$.

Proprietà: Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, per ogni $i \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im} A^iB \subseteq \operatorname{Im} R = \operatorname{Im}[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$.

Dim: Se $i \leq n-1$ non c'è nulla da dimostrare. Sia quindi $i \geq n$. $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$

$\operatorname{Im} A^iB \subseteq \operatorname{Im}[B, AB, \dots, A^iB] = \operatorname{Im} R_{i+1} = X_R(i+1) \overset{i+1>n}{=} X_R = \operatorname{Im} R$. In alternativa avremmo potuto sfruttare il Teorema di Hamilton-Cayley: $\chi_A(A) = 0$. $\chi_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$

$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \dots - a_0 A^0 \Rightarrow A^n \in \operatorname{Span}\{A^0, \dots, A^{n-1}\}$, $A^{n+1} = \underline{A \cdot A^n} \in \operatorname{Span}\{A^0, \dots, A^{n-1}\}$.

$(\forall i \in \mathbb{N})$ $A^i \in \operatorname{Span}\{A^0, \dots, A^{n-1}\}$ e quindi $A^iB \in \operatorname{Span}\{A^0B, \dots, A^{n-1}B\}$ □

Proprietà: (A_R, B_R) è raggiungibile

Dim: $\hat{R} = [\hat{B}, \hat{A}\hat{B}, \dots, \hat{A}^{m-1}\hat{B}]$, $\hat{B} = T^{-1}B$, $\hat{A} = T^{-1}AT$ quindi $\hat{R} = [T^{-1}B, T^{-1}AT\,T^{-1}B, \dots,$
$(T^{-1}AT)^{m-1}T^{-1}B = [T^{-1}B, T^{-1}AB, T^{-1}A^2B, \dots, T^{-1}A^{m-1}B] = T^{-1}[B, AB, \dots, A^{m-1}B] = T^{-1}R.$

Rank $\hat{R}$ = rank $T^{-1}R$ = rank R poiché rank $T^{-1}R \leq \min\{\text{rank}\,T^{-1}, \text{rank}\,R\} = \min\{m, r\} = r$ mentre per la disuguaglianza di Silvester rank $T^{-1}R \geq$ rank T^{-1} + rank $R - m = m + r - m = r$.

$r = \text{rank}\,\hat{R} = \text{rank}\,[\hat{B}, \hat{A}\hat{B}, \dots, \hat{A}^{m-1}\hat{B}] = \text{rank}\begin{bmatrix} B_R & A_R B_R & A_R^2 B_R & \dots & A_R^{m-1} B_R \\ \hline 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} \}r \\ \}n-r \end{matrix} =$
$= \text{rank}\,[B_R, A_R B_R, \dots, A_R^{m-1} B_R]$

Inoltre $(\forall i \in \mathbb{N})$ Im $A_R^i B_R \in \text{Span}\{B_R, A_R B_R, \dots, A_R^{r-1} B_R\}$ per la proprietà precedente.
Quindi Rank $\hat{R} = \text{rank}\,[B_R, A_R B_R, \dots, A_R^{r-1} B_R] = \text{rank}\,R_R$ con R_R matrice di raggiungibilità della coppia (A_R, B_R). Poiché Rank $R_R = r$, cioè R_R ha rango massimo, questo vuol dire che la coppia (A_R, B_R) è raggiungibile $\square$

Raggiungibilità: sistemi a tempo continuo, 3

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \begin{bmatrix} A_R & A_{12} \\ 0 & A_{NR} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} B_R \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [C_R \mid C_{NR}]\, z(t) + D\,u(t) \end{cases}$$

sistema nelle coordinate trasformate $z(t)$, per scrivere in modo più esplicito l'equazione differenziale di questo sistema partizioniamo $z = [z_R, z_{NR}]^T$, e ricordiamo che $r = \dim X_R$

$$\begin{cases} \dot{z}_R(t) = A_R z_R(t) + A_{12} z_{NR}(t) + B_R u(t) \\ \dot{z}_{NR}(t) = A_{NR} z_{NR}(t) \end{cases}$$

vediamo ora le proprietà di raggiungibilità di questo sistema $z(0) = 0 \Rightarrow z_R(0) = 0$ e $z_{NR}(0) = 0$. $\dot{z}_{NR}$ dipende solo da z_{NR} è un sottosistema autonomo e quindi se $z_{NR}(0) = 0$ allora $(\forall t \in \mathbb{R})$ $z_{NR}(t) = 0$. Per questo lo chiamiamo sottosistema non raggiungibile, poiché qualunque sia l'ingresso, se partiamo da 0 la sua soluzione sarà sempre nulla. Sostituiamo $z_{NR}(t) = 0$ nella prima equazione:
$\dot{z}_R(t) = A_R z_R(t) + B_R u(t)$, ma a questo punto abbiamo già dimostrato che (A_R, B_R) è raggiungibile e quindi scegliendo in modo opportuno u potremo raggiungere qualunque stato, per cui chiamiamo questo sottosistema il sottosistema raggiungibile. Inoltre vale che:

Proprietà: $H(s) = C_R(sI - A_R)^{-1}B_R + D$

Dim:
$$\begin{cases} \dot{z}_R(t) = A_R z_R(t) + \cancel{A_{12} z_{NR}(t)} + B_R u(t) \\ \dot{z}_{NR}(t) = A_{NR} z_{NR}(t) \\ y(t) = C_R z_R(t) + \cancel{C_{NR} z_{NR}(t)} + D u(t) \\ z_R(0) = 0,\ z_{NR}(0) = 0 \end{cases}$$

ma quindi il sottosistema non raggiungibile è identicamente nullo. Sia $Z_R(s) = \mathcal{L}\{z_R(s)\}$

$$\begin{cases} s Z_R(s) - \cancel{z_R(0)} = A_R Z_R(s) + B_R U(s) \\ Y(s) = C_R Z_R(s) + D U(s) \end{cases}$$ da cui

$(sI - A_R) Z_R(s) = B_R U(s)$ da cui $Z_R(s) = (sI - A_R)^{-1} B_R U_s$ e $Y(s) = \overbrace{(C_R(sI - A_R)^{-1}B_R + D)}^{H(s)}U(s)$ $\square$

Proprietà: Se $A, B \in \mathbb{C}^{m \times m}$ sono tali che $\exists T: A = T^{-1}BT$, allora $\chi_A = \chi_B$

Dim: $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - T^{-1}BT) = \det(\lambda T^{-1}T - T^{-1}BT) = \det T^{-1}(\lambda I - B)T \overset{\text{Teorema di Binet}}{=}$
$= \det T^{-1} \cdot \det(\lambda I - B) \cdot \det T = (\det T)^{-1} \cdot \det(\lambda I - B) \det T = \det(\lambda I - B)$ $\square$

Proprietà: $\sigma(A) = \sigma(A_R) \cup \sigma(A_{NR})$

Dim: $\sigma(A) = \sigma(\hat{A})$ poiché sono simili, quindi $\chi_A = \chi_{\hat{A}} = \det \left[\begin{array}{c|c} \lambda I - A_R & -A_{12} \\ \hline 0 & \lambda I - A_{NR} \end{array}\right] =$
$= \det(\lambda I - A_R) \cdot \det(\lambda I - A_{NR}) = \chi_{A_R} \cdot \chi_{A_{NR}}$ e quindi
$\sigma(A) = \sigma(A_R) \cup \sigma(A_{NR})$. □

Chiamiamo $\sigma(A_R)$ l'insieme degli autovalori raggiungibili di A mentre $\sigma(A_{NR})$ l'insieme degli autovalori non raggiungibili di A.

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vogliamo trovare l'insieme degli stati raggiungibili e scrivere il sistema nella forma standard.
$X_R(0) = \{0\}$, $X_R(1) = \operatorname{Im} B$

$$X_R(2) = X_R(1) + \operatorname{Im} AB = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \overbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{T_1}}^{M}, \quad X_R(3) = X_R(2) + \operatorname{Im} AM = X_R(2) + \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $X_R(3) = X_R(2) = X_R$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{Im} T_1 = X_R.$$

$T = [T_1, T_2]$ con T invertibile. Per scegliere T_2 abbiamo diverse possibilità, basta scegliere $T_2 \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ per completare una base di $\mathbb{R}^4$. Conviene scegliere i vettori della base canonica.

$$T = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = T^{-1}AT = T^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} =$$

(the right block of T is labelled T_2)

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & & 1 & 2 \\ & & 0 & 3 \end{array}\right] \quad A_R,\ A_{12},\ A_{NR}$$

* zeri strutturali

$r = \dim X_R = 2$
$\sigma(A) =$
$= \sigma(A_R) \cup \sigma(A_{NR}) =$
$= \{1, 2\} \cup \{1, 3\} = \{1, 2, 3\}$

$$\hat{B} = T^{-1}B = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}} \end{array}\right] B_R \to \text{zeri strutturali}, \quad \hat{C} = CT = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad C_R,\ C_{NR}$$

$$H(s) = C_R(sI - A_R)^{-1}B_R + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{(s-2)(s-1)}$$

$$= \frac{1}{(s-2)(s-1)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ s-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-2)(s-1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(s-2)(s-1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = [1, -1, 0, 0] \quad D = [0, 0]$$

Sistema discreto, ma la forma di raggiungibilità si trova nello stesso modo
$X_R(0) = \{0\}$, $X_R(1) = \operatorname{Im} B$

$$X_R(2) = X_R(1) + \operatorname{Im} AM = \operatorname{Im}\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right] = \operatorname{Im}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & M \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & +1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array};\quad X_R(3) = X_R(2) + \operatorname{Im} AM = $$

$$= X_R(2) + \operatorname{Im}[3, 2, 0, -3]^T = $$

$$= X_R(2) = X_R$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\quad T = [T_1, T_2],\ T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \hat{A} = T^{-1}AT = T^{-1}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & -1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{array}{cc} A_R & A_{12} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] & \\ \text{zeri [illegible]} & A_{NR} \end{array} \qquad r = \dim X_R = 0$$

$$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{array}{c} B_R \\ \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \end{array},\quad \hat{C} = CT = \begin{array}{cc} C_R & C_{NR} \\ [0, -1, 0 & | \ 0] \end{array}$$

Calcoliamo $\sigma(A) = \sigma(A_R) \cup \sigma(A_{NR})$

$\chi_{A_R}(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda^2 - 2\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-2)\lambda$

Quindi $\sigma(A) = \{0, -1, 2\} \cup \{3\} = \{-1, 0, 2, 3\}$. Calcoliamo infine $H(z) = C_R(zI - A_R)^{-1}B_R + D =$

$$= [0, -1, 0] \cdot \begin{bmatrix} z-3 & -3 & -1 \\ 1 & z+1 & 1 \\ 0 & 0 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z(z+1)(z-2)} \cdot [0, -1, 0] \cdot \left[\begin{array}{c|c|c} * & * & * \\ \hline -z-1 & * & 2-z \\ \hline * & * & * \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$H(z) = \frac{1}{z(z+1)(z-2)}[z+1, *, z-2]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z(z+1)(z-2)}[z+1, z-2] = \left[\frac{1}{z(z-2)}, \frac{1}{z(z+1)}\right].$$

Dato un sistema sarà importante capire quali sono i suoi autovalori non raggiungibili. Per far questo, fino ad ora abbiamo visto che dobbiamo riscrivere il sistema nella forma $\hat{A}$, vediamo ora un metodo più diretto per calcolare questi autovalori.

<u>Proprietà</u>: <u>Test PBH</u> (Popov - Belevitch - Hautus): $\lambda \in \sigma(A_{NR}) \iff \operatorname{rank}\overbrace{[A - \lambda I \mid B]}^{n+m} < n$

Dim: Dimostriamo che $\operatorname{rank}[A - \lambda I, B] = \operatorname{rank}[\hat{A} - \lambda I, \hat{B}] = \operatorname{rank}[T^{-1}AT - \lambda I, T^{-1}B] =$

$= \operatorname{rank}[T^{-1}AT - \lambda T^{-1}T, T^{-1}B] = \operatorname{rank}[T^{-1}[(A - \lambda I)T, B] \overset{\text{Sylvester}}{=} \operatorname{rank}[(A-\lambda I)T, B] =$

$= \dim(\operatorname{Im}((A - \lambda I)T) + \operatorname{Im} B)$ ma $\operatorname{Im}(A-\lambda I)T = (A - \lambda I)\operatorname{Im} T = (A - \lambda I)\operatorname{Im} I = \operatorname{Im}(A - \lambda I)$.

Quindi " $\dim(\operatorname{Im}(A - \lambda I) + \operatorname{Im} B) = \operatorname{rank}[A - \lambda I, B]$.

Ora dobbiamo dimostrare che $\operatorname{rank}[\hat{A} - \lambda I, \hat{B}] < n \iff \lambda \in \sigma(A_{NR})$:

$(\Rightarrow)$ $\operatorname{rank}[\hat{A} - \lambda I, \hat{B}] < n$ questa matrice ha n righe quindi non sono tutte linearmente indipendenti

$\Rightarrow \exists w \in \mathbb{R}^n, w \neq 0 : w^T[\hat{A} - \lambda I, \hat{B}] = 0$, $\quad [w_R^T, w_{NR}^T] \cdot \left[\begin{array}{cc|c} A_R - \lambda I & A_{12} & B_R \\ 0 & A_{NR} - \lambda I & 0 \end{array}\right] = 0$, con $w = \begin{bmatrix} w_R \\ w_{NR} \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} w_R^T(A_R - \lambda I) = 0 \\ w_R^T A_{12} + w_{NR}^T(A_{NR} - \lambda I) = 0 \\ w_R^T B_R = 0 \end{cases}$$

da cui $w_R^T A_R = \lambda w_R^T$. Calcoliamo $w_R^T A_R B_R = \lambda \underline{w_R^T B_R} = 0$

$w_R^T A_R^2 B_R = \lambda w_R^T A_R B_R = \lambda^2 \underline{w_R^T B_R} = 0, \dots, w_R^T A_R^i B_R = 0 \ \forall i \in \mathbb{N}$

ma questo significa che $w_R^T \underline{[B_R, A_R B_R, \dots, A_R^{r-1} B_R]} = 0 \iff w_R^T R_R = 0$ e $\operatorname{rank} R_R = r \Rightarrow w_R^T = 0$

Dalla seconda equazione otteniamo che $w_{NR}^T(A_{NR}-\lambda I)=0 \iff w_{NR}^T A_{NR} = \lambda w_{NR}^T \iff A_{NR}^T w_{NR} = \lambda w_{NR}$ quindi w_{NR} è un autovettore di A_{NR}^T, quindi $\lambda \in \sigma(A_{NR}^T) = \sigma(A_{NR})$.

($\Leftarrow$) $\lambda \in \sigma(A_{NR}) \Rightarrow \lambda \in \sigma(A_{NR}^T) \iff \exists w_{NR} \in \mathbb{R}^{n-r}, w_{NR} \neq 0 : A_{NR}^T w_{NR} = \lambda w_{NR} \iff w_{NR}^T A_{NR} = \lambda w_{NR}^T \iff$ $w_{NR}^T(A_{NR}-\lambda I)=0$. $[0, w_{NR}^T][\hat{A}-\lambda I, \hat{B}]=0$ significa che questa matrice è di rango non massimo

$$[0, w_{NR}^T] \cdot \left[\begin{array}{cc|c} A_R-\lambda I & A_{r} & B_R \\ 0 & A_{NR}-\lambda I & 0 \end{array}\right] = [0, \underbrace{w_{NR}^T(A_{NR}-\lambda I)}_{=0}, 0] = 0 \Rightarrow \operatorname{rank}[\hat{A}-\lambda I, B] < n \quad \square$$

Esempio: $A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Vogliamo calcolare col test PBH gli autovalori non raggiungibili di questo sistema.

$\chi_A(\lambda) = (\lambda^2-2\lambda)(\lambda-1) = \lambda(\lambda-2)(\lambda-1)$, $\sigma(A) = \{0, 1, 2\}$.

- $\lambda = 0$ $\operatorname{rank}[A-0I, B] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ quindi $0 \notin \sigma(A_{NR})$, 0 è un autovalore raggiungibile

- $\lambda = 1$, $\operatorname{rank}[A-I, B] = \operatorname{rank}\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = 2$ quindi $1 \in \sigma(A_{NR})$, 1 è un autovalore non raggiungibile

- $\lambda = 2$ $\operatorname{rank}[A-2I, B] = \operatorname{rank}\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] = 3$ quindi $2 \notin \sigma(A_{NR})$, 2 è un autovalore raggiungibile