Sistemi autonomi: caso a tempo continuo, proprietà generali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

non abbiamo l'ingresso, $A(t) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $x(t) \in \mathbb{C}^n$

Distinguiamo due casi: $A(t)$ tempo variante e $A(t) = A$ tempo invariante per cui riusciremo sempre a trovare soluzioni in forma chiusa, mentre non sarà così per il primo caso.

Caso scalare $\begin{cases} \dot{x}(t) = a x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ $a \in \mathbb{C}$, $x(t) \in \mathbb{C}$ e sappiamo che la soluzione è $x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0$

per verificare che è effettivamente soluzione basta sostituire: $\dot{x}(t) = a e^{a(t-t_0)} x_0 = a x(t)$ e $x(t_0) = e^{a(t_0-t_0)} x_0 = e^{a \cdot 0} x_0 = x_0$. Nel caso matriciale la soluzione sarà formalmente simile: $x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0$ dove e^A è un esponenziale di matrice che vedremo in questa lezione.

<u>Teorema</u> di esistenza e unicità globale: Se $I =]a,b[\subseteq \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ e consideriamo $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ dove $f: \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$, continua a tratti rispetto a t e tale che $\exists L \in \mathbb{R}$ per cui $(\forall t \in \bar{I})(\forall x, y \in \mathbb{C}^m) \| f(t,x) - f(t,y) \| \leq L \| x - y \|$, cioè f è Lipschitziana, allora la soluzione dell'equazione differenziale esiste ed è unica per $t \in I$.

Tutte le volte che indichiamo una norma $\| \cdot \|$ senza pedici, si intende la norma 2.

<u>Proprietà</u>: Se $A(t)$ è continua a tratti la soluzione di $\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t) x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ esiste ed è unica per $t \in \mathbb{R}$.

Dim: $f(t,x) = A(t)x$, applichiamo il teorema precedente con questa scelta di $f(t,x)$ e consideriamo $I =]a,b[\subseteq \mathbb{R}$, $t_0 \in I$, rimane da verificare che f è Lipschitziana:
$\| f(t,x) - f(t,y) \| = \| A(t)x - A(t)y \| = \| A(t)(x-y) \| \leq \| A(t) \| \cdot \| x - y \| \leq \max_{t \in [a,b]} \| A(t) \| \| x - y \| = L \| x - y \|$.
quindi la soluzione esiste ed è unica per $t \in I$, ma I è arbitrario quindi lo possiamo estendere a tutto quanto $\mathbb{R}$. $\square$

<u>Proprietà</u>: La soluzione di $\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t) x(t) \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$ è data da $x(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$

Dim: Basta mostrare che $x(t) = 0$ è soluzione, grazie al teorema precedente. $\square$

<u>Def</u>: Sia $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ una base di $\mathbb{C}^m$ e per $i = 1, \dots, n$ sia φ_i la soluzione dell'equazione $\begin{cases} \dot{\varphi}_i(t) = A(t) \varphi_i(t) \\ \varphi_i(t_0) = b_i \end{cases}$ allora $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ si chiamano <u>insieme fondamentale di soluzioni</u> e la matrice $\Psi(t) = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ si chiama <u>matrice fondamentale di soluzione</u>.

<u>Proprietà</u>: Ψ è la soluzione dell'equazione $\begin{cases} \dot{\Psi}(t) = A(t) \Psi(t) \\ \Psi(t_0) = [b_1, b_2, \dots, b_m] \end{cases}$

Dim: $\dot{\Psi}(t) = [\dot{\varphi}_1(t), \dot{\varphi}_2(t), \dots, \dot{\varphi}_m(t)] = [A(t)\varphi_1(t), A(t)\varphi_2(t), \dots, A(t)\varphi_m(t)] = A(t)[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)] = A(t)\Psi(t)$. Poi, $\Psi(t_0) = [\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_m(t_0)] = [b_1, \dots, b_m]$. $\square$

<u>Proprietà</u>: $\det \Psi(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Dim: Per assurdo $(\exists \bar{t} \in \mathbb{R}) \det \Psi(\bar{t}) = 0 \Rightarrow$ il Kernel ha dimensione $> 0 \Rightarrow (\exists v \neq 0) \Psi(\bar{t}) v = 0$, definiamo $z(t) := \Psi(t) v$ e calcoliamo $\dot{z}(t) = \dot{\Psi}(t) v = A(t) \Psi(t) v = A(t) z(t)$, inoltre $z(\bar{t}) = \Psi(\bar{t}) v = 0$ ma per la proprietà precedente deve essere $z(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$, in particolare $z(t_0) = 0 \Rightarrow \Psi(t_0) \cdot v = 0 \Rightarrow [b_1, b_2, \dots, b_m] v = 0$ ma B è una base e non può esistere un tale $v \neq 0$, contraddizione ↯ $\square$

Proprietà: La soluzione di $\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ è data da $x(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)x_0$

Dim: Basta sostituire. $\dot{x}(t) = \dot{\Psi}(t)\Psi^{-1}(t_0)x_0 = A(t)\underline{\Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)x_0} = A(t)x(t)$.

$x(t_0) = \Psi(t_0)\Psi^{-1}(t_0)x_0 = Ix_0 = x_0$. $\square$

Def: La matrice di transizione dello stato è data da $\Phi(t,t_0) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)$

Proprietà: La soluzione di $\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ è data da $x(t) = \Phi(t,t_0)x_0$ (è solo una riscrittura).

Questo giustifica il nome perché $\Phi(t,t_0)$ ci consente di passare dallo stato al tempo t_0 a quello t.

Proprietà: $\Phi(t,t_0)$ è soluzione di $\begin{cases} \dot{\Phi}(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0) \\ \Phi(t_0,t_0) = I \end{cases}$

Dim: $\dot{\Phi}(t,t_0) = \frac{d}{dt}(\Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)) = \dot{\Psi}(t)\Psi^{-1}(t_0) = A(t)\Psi(t)\Psi^{-1}(t_0) = A(t)\Phi(t,t_0)$.

$\Phi(t_0,t_0) = \Psi(t_0)\Psi^{-1}(t_0) = I$. $\square$

Proprietà: $\Phi(t_2,t_1)\Phi(t_1,t_0) = \Phi(t_2,t_0)$

Dim. $\Phi(t_2,t_1)\Phi(t_1,t_0) = \Psi(t_2)\underline{\Psi^{-1}(t_1)\Psi(t_1)}\Psi^{-1}(t_0) = \Psi(t_2)\Psi^{-1}(t_0) = \Phi(t_2,t_0)$ $\square$

Proprietà: $\Phi(t_1,t_2) = \Phi^{-1}(t_2,t_1)$

Dim: $\Phi(t_1,t_2)\Phi(t_2,t_1) = \Phi(t_1,t_1) = I$ $\square$

Caso tempo invariante

$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ sappiamo che $x(t) = \Phi(t,t_0)x_0$

Def: Data $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, l'esponenziale di matrice di A è $e^A = \Phi(1,0)$ dove $\Phi(t,0)$ è la soluzione di $\begin{cases} \dot{\Phi}(t,0) = A\Phi(t,0) \\ \Phi(0,0) = I \end{cases}$

Proprietà: Se $\tau \in \mathbb{R}$ allora $e^{A\tau} = \Phi(\tau,0)$

Dim: Se $\Phi(t,t_0)$ è la matrice di transizione per $\dot{x}(t) = Ax(t)$, allora $\Phi(t\tau,t_0\tau)$ è la matrice di transizione per $\dot{x}(t) = A\tau x(t)$, infatti $\frac{d}{dt}\Phi(t\tau,t_0\tau) = A\Phi(t\tau,t_0\tau)\cdot\tau = A\tau\Phi(t\tau,t_0\tau)$. Inoltre $\Phi(t\tau,t_0\tau)|_{t=t_0} = I$, quindi per definizione $e^{A\tau} = \Phi(t\tau,0)|_{t=1} = \Phi(\tau,0)$. $\square$

Proprietà: $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$ (formalmente è la stessa proprietà dell'esponenziale scalare)

Dim: $\frac{d}{dt}e^{At} = \frac{d}{dt}\Phi(t,0) = A\Phi(t,0) = Ae^{At}$ $\square$

Proprietà: $e^0 = I$, $0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (è analogo al caso scalare in cui $e^0 = 1$)

Dim: $e^0 = e^{A\cdot 0} = \Phi(t\cdot 0,0) = \Phi(0,0) = I$. $\square$

Proprietà: $e^A = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i}{i!}$ (formalmente è la stessa proprietà dell'esponenziale scalare)

Dim: in realtà dimostriamo che $e^{At} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(At)^i}{i!}$, chiaramente per $t=1$ otteniamo quello
NO DIM
che vogliamo dimostrare. Sfruttiamo il fatto che $e^{At} = \Phi(t,0)$ e che quindi soddisfa $\begin{cases} \frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At} \\ e^{At}\big|_{t=0} = I \end{cases}$ e quindi questa equazione differenziale definisce in modo univoco e^{At} e quindi andiamo a sostituire questa espressione nell'equazione per vedere se è soddisfatta: $\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(At)^i}{i!}$, si può far vedere che si può scambiare la somma con l'operatore di derivazione, bisognerebbe verificare delle proprietà di convergenza

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(At)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{d}{dt}\frac{(At)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{A^i}{i!}\frac{d}{dt}t^i = \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{A^i}{i!}i\,t^{i-1} = \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{A^i}{(i-1)!}t^{i-1} = A\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{A^{i-1}}{(i-1)!}t^{i-1} =$$

$= A\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{A^\ell}{\ell!}t^\ell$ quindi abbiamo verificato la prima equazione, rimane la condizione iniziale $\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{A^i t^i}{i!} = \frac{I\cdot 1}{1} + At + \frac{A^2t^2}{2} + \dots$ se valutiamo la somma per $t=0$ rimane solo il primo termine cioè I. Poiché questa sommatoria risolve la stessa equazione risolta dall'esponenziale di matrice vuol dire che le due cose coincidono $\square$

Per gli scalari vale che $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$, vale anche nel caso matriciale?
$e^A \cdot e^B = e^{A+B}$? In generale questo non è vero, ma è vero quando le matrici commutano

Proprietà: Se $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $AB = BA$, allora $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$

Dim: Facciamo vedere che $e^{At}\cdot e^{Bt} = e^{(A+B)t}$, poi per $t=1$ otteniamo la tesi.
NO DIM
Per prima cosa mostriamo che $Ae^{Bt} = e^{Bt}A$. Per farciò definiamo
$\ast\, z(t) = Ae^{Bt} - e^{Bt}A$ e facciamo vedere che vale zero. Calcoliamo la derivata:
$\dot z(t) = ABe^{Bt} - Be^{Bt}A = B(\underline{Ae^{Bt} - e^{Bt}A}) = Bz(t)$, inoltre $z(0) = Ae^{B\cdot 0} - e^{B\cdot 0}A =$
$= AI - IA = 0$. Ma allora l'unica soluzione può essere solo quella identicamente nulla e quindi $Ae^{Bt} = e^{Bt}A$. Ora definiamo $w(t) = e^{At}e^{Bt} - e^{(A+B)t}$
$\dot w(t) = Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt} - (A+B)e^{(A+B)t} = (A+B)e^{At}e^{Bt} - (A+B)e^{(A+B)t} =$
$= (A+B)(\underline{e^{At}e^{Bt} - e^{(A+B)t}}) = (A+B)w(t)$, inoltre $w(0) = e^{A0}e^{B0} - e^{(A+B)0} = I - I = 0$,
quindi, come per $\ast$, $w(t) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ e quindi vale che $e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$. $\square$

Nel caso scalare abbiamo che $e^{-a} = (e^a)^{-1}$

Proprietà: $e^{-A} = (e^A)^{-1}$

Dim: $e^A \cdot e^{(-A)}$, A e $(-A)$ commutano quindi $e^A \cdot e^{(-A)} = e^{(A-A)} = e^0 = I$ $\square$

$\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}$	$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$
$e^0 = 1$	$e^0 = I$
$e^a = \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{a^i}{i!}$	$e^A = \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{A^i}{i!}$
$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$	se $AB = BA$ $e^A e^B = e^{(A+B)}$
$e^{-a} = (e^a)^{-1}$	$e^{-A} = (e^A)^{-1}$

Proprietà: $\Phi(t_1,t_0) = e^{A(t_1-t_0)}$

Dim: $\Phi(t_1,t_0) = \Phi(t_1,0)\cdot\Phi(0,t_0) = \Phi(t_1,0)\cdot(\Phi(t_0,0))^{-1} = e^{At_1}(e^{At_0})^{-1} = e^{At_1}\cdot e^{-At_0} \overset{\text{A e -A commutano}}{=} e^{(At_1-At_0)}$ $\square$

Sistemi autonomi: calcolo esponenziale di matrice

Metodo: $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ base di $\mathbb{C}^n$, $e^{At} = e^{At}[b_1,b_2,\dots,b_n][b_1,b_2,\dots,b_n]^{-1} = [e^{At}b_1, e^{At}b_2,\dots, e^{At}b_n][b_1,b_2,\dots,b_n]^{-1}$

la base andrà scelta in modo efficiente in modo tale da rendere conveniente il calcolo di questi prodotti.

Proprietà: Se $v\in\mathbb{C}^n$, $z(t)=e^{At}v$, allora $\begin{cases}\dot z(t) = Az(t)\\ z(0)=v\end{cases}$

Dim: $\dot z(t) = A\underbrace{e^{At}v}_{} = Az(t)$, inoltre $z(0)=e^{A0}\cdot v = Iv = v$.

Proprietà: Se v è un autovettore di A associato all'autovalore λ, allora vale che $e^{At}v = e^{\lambda t}v$

(Quindi in questo caso vale un'equivalenza tra esponenziale matriciale ed esponenziale scalare)

Dim: $z(t) := e^{\lambda t}v$. Verifichiamo che soddisfi l'eq. differenziale: $\dot z(t) = \lambda e^{\lambda t}v = e^{\lambda t}\lambda v$ ma v è un autovettore ($Av=\lambda v$) e quindi $e^{\lambda t}\lambda v = e^{\lambda t}Av = A\underbrace{e^{\lambda t}v}_{} = Az(t)$. Inoltre $z(0)=e^{\lambda 0}v = 1\cdot v = v$. $\square$

Se A è diagonalizzabile, allora esiste una base di $\mathbb{C}^n$ fatta di autovettori di A: $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ e siano $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ gli autovalori associati alla base. Quindi $e^{At} = e^{At}[b_1,\dots,b_n][b_1,\dots,b_n]^{-1} = [e^{At}b_1,\dots,e^{At}b_n][b_1,\dots,b_n]^{-1} = [e^{\lambda_1 t}b_1,\dots,e^{\lambda_n t}b_n][b_1,\dots,b_n]^{-1}$, questa è una espressione in forma chiusa che ci permette di calcolare l'esponenziale di matrice.

Esempio: $A=\begin{bmatrix}-4&-2&6\\0&0&0\\-3&-2&5\end{bmatrix}$ $\chi_A(\lambda) = \det\begin{bmatrix}\lambda+4&2&-6\\0&\lambda&0\\3&2&\lambda-5\end{bmatrix} = \lambda((\lambda+4)(\lambda-5)+18) = \lambda(\lambda^2-\lambda-2) = \lambda(\lambda-2)(\lambda+1)$

$\sigma(A)=\{0,-1,2\}$ quindi essendo tre autovalori distinti avremo che A è diagonalizzabile perché ognuno di questi autovalori avrà un autovettore e questi costituiranno una base

* $\lambda=0$ $\operatorname{Ker}A = \operatorname{Ker}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}-4&-2&6\\0&0&0\\-3&-2&5\end{bmatrix}\\ -1\ \ +1\ \ +1\end{array} = \operatorname{Im}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\\ v_1\end{array}$ (rank = 2)
* $\lambda=-1$ $\operatorname{Ker}(A+I) = \operatorname{Ker}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}-3&-2&6\\0&1&0\\-3&-2&6\end{bmatrix}\\ 2\ \ 0\ \ 1\end{array} = \operatorname{Im}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\\ v_2\end{array}$
* $\lambda=2$ $\operatorname{Ker}(A-2I) = \operatorname{Ker}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}-6&-2&6\\0&-2&0\\-3&-2&3\end{bmatrix}\\ 1\ \ 0\ \ 1\end{array} = \operatorname{Im}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\\ v_3\end{array}$

$$e^{At} = [e^{At}v_1, e^{At}v_2, e^{At}v_3][v_1,v_2,v_3]^{-1} = \begin{bmatrix}1&2e^{-t}&e^{2t}\\1&0&0\\1&e^{-t}&e^{2t}\end{bmatrix}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}1&2&1\\1&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}}_{\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}} =$$

$$\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{2t}&1-e^{2t}&2e^{2t}-2e^{-t}\\0&1&0\\e^{-t}-e^{2t}&1-e^{2t}&2e^{2t}-e^{-t}\end{bmatrix}$$

potremmo verificare che $\begin{cases}\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}\\ e^{At}|_{t=0} = I\end{cases}$

Una volta che conosciamo e^{At} poi riusciamo a calcolare la soluzione a partire da qualunque dato iniziale

Ad esempio $\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) \\ x(1) = [1,0,0]^T \end{cases}$ $\quad x(t) = \Phi(t,1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = e^{A(t-1)}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2e^{-(t-1)} - e^{2(t-1)} \\ 0 \\ e^{-(t-1)} - e^{2(t-1)}\end{bmatrix}$

Vediamo ora come calcolare l'esponenziale di matrice nel caso generale

<u>Proprietà</u>: Se $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 1$ e $A^l v = 0$, cioè $v \in \operatorname{Ker} A^l$, allora $e^{At} v = \sum_{i=0}^{l-1} \frac{t^i}{i!} A^i v$.

Dim: Definiamo $z(t) = \sum_{i=0}^{l-1} \frac{t^i}{i!} A^i v$, se $z(t)$ risolve $\begin{cases} \dot{z}(t) = A z(t) \\ z(0) = v \end{cases}$ allora effettivamente $z(t) = e^{At} v$.

$$\dot{z}(t) = \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{l-1} \frac{t^i}{i!} A^i v = \sum_{i=0}^{l-1} \frac{i t^{i-1}}{i!} A^i v = \sum_{i=1}^{l-1} \frac{i t^{i-1}}{i!} A^i v = \sum_{i=1}^{l-1} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} A^i v = A \sum_{i=1}^{l-1} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} A^{i-1} v =$$

$\underbrace{A \cdot A^{l-1} v}_{=0 \text{ per ipotesi}} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}$

$$= A \sum_{i=1}^{l} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} A^{i-1} v \overset{k=i-1}{=} A \underbrace{\sum_{k=0}^{l-1} \frac{t^k}{k!} A^k v} = A z(t). \quad z(0) = \sum_{i=0}^{l-1} \frac{t^i}{i!} A^i v \Big|_{t=0} = 1 \cdot I \cdot v = v.$$

In alternativa avremmo potuto verificare questa proprietà a partire dallo sviluppo in serie di $e^{At} v = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{t^i}{i!} A^i v$ ma poiché $A^l v = 0$, $A^i v = 0$ per $i \geq l$ $\; e^{At} v = \sum_{i=0}^{l-1} \frac{t^i}{i!} A^i v$.

<u>Proprietà</u>: Se $a \in \mathbb{C}$, allora $e^{aI} = e^a I$

Dim: $e^{aIt} \overset{?}{=} e^{at} I$. Definiamo $z(t) := e^{at} I$ e verifichiamo che $\dot{z}(t) = aI z(t)$ e $z(0) = I$.

$\dot{z}(t) = a e^{at} I = aI \underbrace{e^{at} I} = aI z(t)$, $\quad z(0) = e^{a \cdot 0} I = 1 \cdot I = I$. $\square$

<u>Proprietà</u>: Siano $l \in \mathbb{N}$, $l > 0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $(A - \lambda I)^l v = 0$, cioè v è un autovettore generalizzato di A associato a λ, allora $e^{At} v = e^{\lambda t} \sum_{i=0}^{l-1} \frac{t^i}{i!} (A - \lambda I)^i v$.

* ogni matrice commuta con l'identità

Dim: $e^{At} v = e^{(A - \lambda I + \lambda I)t} v \overset{*}{=} e^{\lambda I t} \cdot e^{(A - \lambda I)t} \cdot v = e^{\lambda t} \cancel{I} \cdot \sum_{i=0}^{l-1} \frac{t^i}{i!} (A - \lambda I)^i v$ $\square$

<u>Casi particolari</u>: • se $l = 1$ $\quad (A - \lambda I) v = 0$, v è un autovettore semplice: $e^{At} v = e^{\lambda t} v$

• se $l = 2$, $(A - \lambda I)^2 v = 0$, quindi $e^{At} v = e^{\lambda t}(v + t(A - \lambda I) v)$

• se $l = 3$, $(A - \lambda I)^3 v = 0$, abbiamo che $e^{At} v = e^{\lambda t}(v + t(A - \lambda I) v + \frac{t^2}{2} (A - \lambda I)^2 v)$

difficilmente saliremo oltre $l = 3$.

Esercizio: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad e^{At} = ?$ Come prima cosa cerchiamo gli autovalori

$\chi_A(\lambda) = (\lambda^2 - \underset{\text{traccia}}{4}\lambda + \underset{\text{det.}}{4})(\lambda + 1) = (\lambda - 2)^2 (\lambda + 1)$, $\sigma(A) = \{2, -1\}$

con $m_a(2) = 2$.

• $\lambda = 2$ $\operatorname{Ker}(A - 2I) = \operatorname{Ker} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (1) & (2) & (-2) \end{array} \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \end{array} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ (dim 1, rank 2) non abbiamo ancora raggiunto la molteplicità algebrica e quindi calcoliamo

$\operatorname{Ker}(A - 2I)^2 = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -18 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$

e abbiamo raggiunto la dimensione corretta quindi ci possiamo fermare

• $\lambda = -1$ $\operatorname{Ker}(A + I) = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \begin{array}{c} v_3 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$ A questo punto possiamo scegliere come base questi tre vettori $\{v_1, v_2, v_3\}$

$e^{At} = [e^{At}v_1, e^{At}v_2, e^{At}v_3][v_1, v_2, v_3]^{-1}$. $\quad e^{At}v_1 = e^{\lambda t}v_1 + te^{\lambda t}(A-\lambda I)v_1 = e^{2t}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + te^{2t}\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}te^{2t}\\ e^{2t}+2te^{2t}\\ -2te^{2t}\end{bmatrix}$

$e^{At}v_2 = e^{2t}\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix} + te^{2t}\begin{bmatrix}-2\\-4\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{2t}-2te^{2t}\\ -4te^{2t}\\ -2e^{2t}+4te^{2t}\end{bmatrix}$. $\quad e^{At}v_3 = e^{\lambda t}v_3 = e^{-t}v_3 = e^{-t}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\e^{-t}\end{bmatrix}$.

$$e^{At} = \left[\begin{array}{c|c|c} te^{2t} & e^{2t}-2te^{2t} & 0 \\ e^{2t}+2te^{2t} & -4te^{2t} & 0 \\ -2te^{2t} & -2e^{2t}+4te^{2t} & e^{-t}\end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \text{''} & \text{''} \\ & \\ & \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} e^{2t}-2te^{2t} & te^{2t} & 0 \\ -4te^{2t} & e^{2t}+2te^{2t} & 0 \\ -2e^{2t}+4te^{2t}+2e^{-t} & -2te^{2t} & e^{-t}\end{array}\right]$$

In generale quindi per calcolare l'esponenziale di matrice possiamo usare questo metodo:
$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ base di $\mathbb{C}^n$, $e^{At} = [e^{At}b_1, \dots, e^{At}b_n][b_1, \dots, b_n]^{-1}$, quando possiamo scegliamo una base di autovettori oppure di autovettori generalizzati.

<u>Proprietà</u>: Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $Av = \lambda v \Rightarrow A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$
Dim: $Av = \lambda v \Rightarrow \overline{Av} = \overline{\lambda v} \Rightarrow \bar{A}\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v} \overset{A \text{ è reale}}{\Rightarrow} A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$ □

<u>Proprietà</u>: Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $e^{At}\bar{v} = \overline{e^{At}v}$
Dim: $\overline{e^{At}v} = \overline{e^{At}}\,\bar{v} = e^{At}\bar{v}$. □

<u>Proprietà</u>: Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $e^{At}\,\mathrm{Re}\{v\} = \mathrm{Re}\{e^{At}v\}$ e $e^{At}\,\mathrm{Im}\{v\} = \mathrm{Im}\{e^{At}v\}$.
Dim: $\mathrm{Re}\{e^{At}v\} = (e^{At}v + \overline{e^{At}v})/2 = (e^{At}v + e^{At}\bar{v})/2 = e^{At}(v+\bar{v})/2 = e^{At}\,\mathrm{Re}\{v\}$, per Im è analoga □

<u>Proprietà</u>: $\mathrm{Span}\{v, \bar{v}\} = \mathrm{span}\{\mathrm{Re}\{v\}, \mathrm{Im}\{v\}\}$
Dim: Facciamo vedere la doppia inclusione. $v = \mathrm{Re}\{v\} + j\,\mathrm{Im}\{v\}$, $\bar{v} = \mathrm{Re}\{v\} - j\,\mathrm{Im}\{v\}$
$\mathrm{Re}\{v\} = (v+\bar{v})/2$, $\mathrm{Im}\{v\} = (v-\bar{v})/2j$ □

Consideriamo un caso in cui abbiamo autovettori complessi e coniugati, quindi consideriamo una base $B = \{b_1, \bar{b}_1, b_3, \dots, b_n\}$, $e^{At} = [e^{At}b_1, e^{At}\bar{b}_1, e^{At}b_3, \dots e^{At}b_n][b_1, \bar{b}_1, b_3, \dots, b_n]^{-1}$, il problema di questa espressione è che contiene dei numeri complessi e dovremmo fare l'inversa di una matrice che contiene numeri complessi che però essere un'operazione complicata, quindi conviene fare questa sostituzione $\{b_1, \bar{b}_1\} \to \{\mathrm{Re}\{b_1\}, \mathrm{Im}\{b_1\}\}$, così facendo facciamo sparire i complessi dalla matrice di destra; inoltre possiamo sfruttare le proprietà precedenti e quindi abbiamo che
$e^{At} = [\mathrm{Re}\{e^{At}b_1\}, \mathrm{Im}\{e^{At}b_1\}, e^{At}b_3, \dots, e^{At}b_n][\mathrm{Re}\{b_1\}, \mathrm{Im}\{b_1\}, b_3, \dots, b_n]^{-1}$.

Esempio: $A = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hline 6 & -2 & -2 \end{array}\right]$ $\quad e^{At} = ?$ $\quad \chi_A(\lambda) = (\lambda^2+1)(\lambda+2) = (\lambda-j)(\lambda+j)(\lambda+2)$, $\sigma(A) = \{j, -j, -2\}$

$\cdot\ \mathrm{Ker}(A - jI) = \mathrm{Ker}\begin{array}{c}\\ -j\\ -6j\end{array}\begin{bmatrix}-j & 1 & 0\\ 1 & -j & 0\\ 6 & -2 & -2-j\end{bmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix}j & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -2-6j & -2-j\end{bmatrix} = \mathrm{Ker}\underbrace{\begin{bmatrix}-j & 1 & 0\\ 0 & -2-6j & -2-j\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{M}$

riduzione di Gauss

$$M\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=0,\quad \begin{array}{l}(-2-6j)b+(-1-j)c=0\\ c=t,\ b=\dfrac{(2+j)t}{-2-6j}=\dfrac{t(2+j)(-2+6j)}{40}=\dfrac{t(-10+10j)}{40}=\dfrac{t}{4}(j-1)\\ -ja+b=0 \Rightarrow a=\dfrac{b}{j}=-jb=-j\dfrac{t}{4}(j-1)=\dfrac{t}{4}(1+j)\end{array}$$

Quindi $Ker(A-jI)=Im\underbrace{\begin{bmatrix}1+j\\j-1\\4\end{bmatrix}}_{b_1}$ non è necessario calcolare l'autovettore associato all'autovalore complesso e coniugato, rimane da calcolare quello relativo a $\lambda=-2$.

$$Ker(A+2I)=Ker\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&2&0\\6&-2&0\end{bmatrix}=Im\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}_{b_3}$$

$e^{At}b_1=e^{\lambda t}b_1=e^{jt}\begin{bmatrix}1+j\\j-1\\4\end{bmatrix}$ sviluppiamo con la formula di Eulero per separare la parte reale dalla parte immaginaria $e^{jt}=\cos t+j\sin t$ e quindi

$$e^{At}b_1=(\cos t+j\sin t)\begin{bmatrix}1+j\\j-1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos t-\sin t\\-\cos t-\sin t\\4\cos t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\sin t+\cos t\\\cos t-\sin t\\4\sin t\end{bmatrix}j$$

$$e^{At}=[Re\{e^{At}b_1\},Im\{e^{At}b_1\},e^{At}b_3][Re\{b_1\},Im\{b_1\},b_3]^{-1}=\begin{bmatrix}\cos t-\sin t&\sin t+\cos t&0\\-\cos t-\sin t&\cos t-\sin t&0\\4\cos t&4\sin t&e^{-2t}\end{bmatrix}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\4&0&1\end{bmatrix}^{-1}}$$

$$=\begin{bmatrix}" & "\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1/2&-1/2&0\\1/2&1/2&0\\-2&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos t&\sin t&0\\-\sin t&\cos t&0\\2\cos t+2\sin t-2e^{-2t}&-2\cos t+2\sin t+2e^{-2t}&e^{-2t}\end{bmatrix}$$

la presenza di autovalori complessi e coniugati determina la presenza di funzioni trigonometriche nell'esponenziale di matrice e quindi la soluzione di questo problema sarà oscillatoria

---

Sistemi autonomi: calcolo esponenziale di matrice, parte 2

Proprietà: Sia $A\in\mathbb{C}^{m\times m}$ tale che $gy_{\mu_A}=\ell$, allora esistono funzioni $\alpha_0,\alpha_1,\dots\alpha_{\ell-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ tali che

$$e^{At}=\alpha_0(t)I+\alpha_1(t)A+\dots+\alpha_{\ell-1}(t)A^{\ell-1}$$

Dim: $\mu_A(\lambda)=b_0+b_1\lambda+b_2\lambda^2+\dots+\lambda^\ell$, $\mu_A(A)=0\Rightarrow b_0I+b_1A+\dots+A^\ell=0\Rightarrow A^\ell=-\sum_{i=0}^{\ell-1}b_iA^i$

ricordiamo che $\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}$, $e^{At}|_{t=0}=I$, vogliamo far vedere che troviamo una soluzione della forma $e^{At}=\sum_{i=0}^{\ell-1}\alpha_i(t)A^i$: $\frac{d}{dt}e^{At}=\underbrace{\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{\ell-1}}\alpha_i(t)A^i=\boxed{\sum_{i=0}^{\ell-1}\dot\alpha_i(t)A^i}^{\,p_1(A)}$ Ora calcoliamo $A\sum_{i=0}^{\ell-1}\alpha_i(t)A^i=\sum_{i=0}^{\ell-1}\alpha_i(t)A^{i+1}=\sum_{k=1}^{\ell}\alpha_{k-1}(t)A^k$ ora sfruttiamo il fatto che $A^\ell=-\sum_{i=0}^{\ell-1}b_iA^i$:

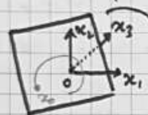
$=\boxed{\sum_{k=1}^{\ell-1}\alpha_{k-1}(t)A^k+\alpha_{\ell-1}(t)\left(-\sum_{i=0}^{\ell-1}b_iA^i\right)}^{\,p_2(A)}$ Vogliamo che $p_1(A)=p_2(A)$, possiamo imporre che tutti i coefficienti siano uguali e quindi $p_1=p_2$: $\dot\alpha_0(t)=\alpha_{\ell-1}(t)b_0$, $\dot\alpha_1(t)=\alpha_0(t)-\alpha_{\ell-1}(t)b_1$

$\dot\alpha_2(t)=\alpha_1(t)-\alpha_{\ell-1}(t)b_2,\dots,\dot\alpha_{\ell-1}(t)=\alpha_{\ell-2}(t)-\alpha_{\ell-1}(t)b_{\ell-1}$ è un sistema di eq. diff. lineari una volta fissate le condizioni iniziali abbiamo un'unica soluzione. Imponiamo che $\sum_{i=0}^{\ell-1} \alpha_i(t)A^i|_{t=0} = I$, $\alpha_0(0)I + \alpha_1(0)A + \alpha_2(0)A^2 + \dots + \alpha_{\ell-1}(0)A^{\ell-1} = I$, possiamo ad esempio imporre che $\alpha_0(0)=1$, $\alpha_1(0)=\alpha_2(0)=\dots=\alpha_{\ell-1}(0)=0$. Per il teorema di esistenza e unicità otteniamo la soluzione che ha la forma che cercavamo. □

<u>Proprietà</u>: Se $A\in\mathbb{C}^{m\times m}$ e V è un sottospazio di $\mathbb{C}^m$ tale che $A(V)\subseteq V$, allora $e^{At}(V)\subseteq V$.

Dim: Vogliamo mostrare che se $x\in V \Rightarrow e^{At}x\in V$, $\forall t\in\mathbb{R}$, (quindi se il dato iniziale appartiene a V ci appartiene anche tutta la soluzione) $e^{At} = \underbrace{\sum_{i=0}^{\ell-1}\alpha_i(t)A^i}_{(*)}$, per definizione di invarianza $Ax\in V \Rightarrow A(Ax) = A^2x\in V \Rightarrow A^ix\in V$, $i=0,\dots,\ell-1$, quindi tutti gli elementi di questa somma (*) stanno in V □

Geometricamente possiamo interpretare la proprietà in questo modo:

$\mathbb{R}^3$ 

piano invariante. Se partiamo da un dato iniziale che appartiene al piano, rimaniamo sempre su quel piano

<u>Proprietà</u>: Sia $A\in\mathbb{C}^{m\times m}$, V un sottospazio di $\mathbb{C}^m$ con $A(V)\subseteq V$. Sia B una base di V e sia x la soluzione di $\begin{cases}\dot x(t) = Ax(t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$ con $x_0\in V$. Allora $x(t)\in V$, $\forall t\in\mathbb{R}$ e $\frac{d}{dt}[x(t)]_B = [Q|_V]_{B,B}[x(t)]_B$ dove $Q:\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}^m$ trasformazione lineare associata ad A è tale che $Q(x)=Ax$.

Dim: $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 \subseteq V$ $\forall t\in\mathbb{R}$ poiché $e^{At}(V)\subseteq V$ e $x_0\in V$. Vediamo che le coordinate di x in base B soddisfano l'equazione. Sia $\bar B = \{\underbrace{b_1,b_2,\dots,b_n}_{B}, b_{n+1},\dots,b_m\}$ un completamento di B, base di $\mathbb{C}^m$. Consideriamo $\dot x(t)=Ax(t)$ e prendiamo le coordinate rispetto a $\bar B$: $[\dot x(t)]_{\bar B} = [Ax(t)]_{\bar B} = [Q]_{\bar B,\bar B}[x(t)]_{\bar B}$, ma $[Q]_{\bar B,\bar B} = \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix}A_1 & A_{12}\\ 0 & A_2\end{bmatrix} \\ \scriptstyle n \quad m-n\end{array}\begin{array}{l}\}n\\ \}m-n\end{array}$ e $A_1 = [Q|_V]_{B,B}$, inoltre $\underset{\in V}{[x(t)]_{\bar B}} = \begin{bmatrix}[x(t)]_B\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\}n\\ \}m-n\end{array}$

Quindi sostituendo otteniamo che $[\dot x(t)]_{\bar B} = \begin{bmatrix}A_1&A_{12}\\0&A_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}[x(t)]_B\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_1[x(t)]_B\\0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\}n\\ \}m-n\end{array}$. Quindi

$[\dot x(t)]_B = A_1[x(t)]_B$

Infine $[x(t)]_B = I_{B,C}\,x(t)$ (C: base canonica) e quindi $\frac{d}{dt}[x(t)]_B = I_{B,C}\,\dot x(t) = [\dot x(t)]_B$ □

Esempio: $A = \begin{bmatrix}-1&1&0&0\\-1&-3&0&0\\6&10&3&1\\2&4&3&-1\end{bmatrix}$, sottospazio $V = \operatorname{Im}\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\\1&-2\\-1&1\end{bmatrix}$ vogliamo verificare che $A(V)\subseteq V$ e calcolare il sistema lineare che ci descrive le soluzioni di questo sistema per dati iniziali in V

Partiamo dall'invarianza $AV = A\operatorname{Im}M = \operatorname{Im}AM = \operatorname{Im}\begin{bmatrix}-2&1\\2&-3\\-2&5\\2&-3\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rid. Gauss}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \times & \times \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Quindi la terza e la quarta colonna sono dipendenti dalle prime due e quindi abbiamo provato che V è invariante rispetto ad A. Calcoliamoci ora

$[a|_V]_{B,B}$. $B = \left\{ \underset{b_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \underset{b_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\}$

* somma dei due vettori per una base più semplice

$$[a|_V]_{B,B} = [[a(b_1)]_B, [a(b_2)]_B] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$a(b_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = -b_2 - b_1 \quad a(b_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} = -3b_2 + b_1$$

Quindi $[x]_B = \overset{A_1}{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}} [x]_B$ se $x_0 \in V$ possiamo trovare le soluzioni del sistema rispetto alle coordinate B risolvendo questo sistema 2×2 anziché quello di partenza 4×4

Calcoliamo ora l'esponenziale di matrice di A_1: $\chi_{A_1}(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2$, $\sigma(A) = \{-2\}$

$V_2 = \mathbb{C}^2$ per il teorema di decomposizione primaria. $Ker(A_1 + 2I) = Ker \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = Im \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ non abbiamo raggiunto la molteplicità algebrica e quindi per completare dovremo calcolare $Ker(A+2I)^2$, questo vuol dire che $\mu_{A_1}(\lambda) = \chi_{A_1}(\lambda) = (\lambda+2)^2$

$e^{At} = \left[e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e^{At} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = I$ possiamo prendere la base canonica perché tanto qualsiasi base va bene

$$e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t e^{-2t} [A + 2I] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-2t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} e^{-2t}(1+t) \\ -t e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t e^{-2t} [A + 2I] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t e^{-2t} \\ e^{-2t}(1-t) \end{bmatrix}$$

Quindi $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t}(1+t) & t e^{-2t} \\ -t e^{-2t} & e^{-2t}(1-t) \end{bmatrix}$

Per il calcolo dell'esponenziale di matrice potremo usare anche la trasformata di Laplace

<u>Def</u>: Sia $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, la trasformata di Laplace di A è la funzione $\mathcal{L}\{A\} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ tale che $\mathcal{L}\{A\}(s) = \int_0^{+\infty} A(t) e^{-st} dt$. $(\mathcal{L}\{A\}(s))_{ij} = \left(\int_0^{+\infty} A(t) e^{-st} dt\right)_{ij} = \int_0^{+\infty} a_{ij}(t) e^{-st} dt$

<u>Proprietà</u>: $\mathcal{L}\{\frac{d}{dt} A(t)\} = s\mathcal{L}\{A(t)\} - A(0)$ [dim. vista in FCA]

<u>Proprietà</u>: $\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}$

Dim: $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$, $e^{At}|_{t=0} = I$ quindi $\mathcal{L}\{\frac{d}{dt} e^{At}\} = \overset{\mathcal{L} \text{ è lineare}}{\mathcal{L}\{A e^{At}\}} \iff s\mathcal{L}\{e^{At}\} - \overset{I}{\overbrace{e^{At}|_{t=0}}} = A\mathcal{L}\{e^{At}\} \iff (sI - A)\mathcal{L}\{e^{At}\} = I \Rightarrow \mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}$ □

Conseguenza: se $t \geq 0$ $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}(t)$, t deve essere ≥ 0 perché $\mathcal{L}$ è una trasformazione monolatera e quindi ci dà informazione solo sulla parte della funzione trasformata per valori di $t \geq 0$

scambio elem. sulla diag. princ., cambio segno su antidiag. e divido per det.

Esempio: $A=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$. $(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s+3 & -1\\ 1 & s+1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}s+1 & 1\\ -1 & s+3\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{(s+3)(s+1)+1}=\frac{1}{s^2+4s+4}\begin{bmatrix}s+1 & 1\\ -1 & s+3\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}\frac{s+1}{(s+2)^2} & \frac{1}{(s+2)^2}\\ \frac{-1}{(s+2)^2} & \frac{s+3}{(s+2)^2}\end{bmatrix}$ Una delle difficoltà di questa formula è data dal fatto che invertiamo una matrice che dipende da un parametro s, per questo quando utilizziamo questo metodo sarà conveniente utilizzare il metodo dell'aggiunta per il calcolo della matrice inversa.

Ricordiamo ora come calcolare l'antitrasformata di Laplace, consideriamo una trasformata di Laplace razionale fratta data da $X(s)=\frac{N(s)}{(s-p_1)^{m_1}\cdots(s-p_\ell)^{m_\ell}}$, con p_i poli. Sappiamo che

$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t)=\sum_{p\in\text{poli di }X(s)}\overset{\text{residuo}}{\mathrm{Res}}\{X(s)e^{st},\overset{\text{valutato in p}}{p}\}$. Per quanto riguarda il calcolo dei residui, se p è un polo di ordine ℓ di $F(s)$ funzione di variabile complessa, allora abbiamo che $^{(*)}$ derivata di ordine $\ell-1$ rispetto ad s

$\mathrm{Res}\{F(s),p\}=\frac{1}{(\ell-1)!}\cdot\frac{d^{\ell-1}}{ds^{\ell-1}}\Big(F(s)\underbrace{(s-p)^{\ell}}_{\text{cancellazione polo}}\Big)\Big|_{s=p}$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+2)^2}\right\}=\mathrm{Res}\left\{\frac{s+1}{(s+2)^2}e^{st},-2\right\}=\frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left(\frac{(s+1)e^{st}}{\cancel{(s+2)^2}}\cancel{(s+2)^2}\right)\Big|_{s=-2}=e^{st}+t(s+1)e^{st}\Big|_{s=-2}=e^{-2t}-te^{-2t}$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}=\mathrm{Res}\left\{\frac{e^{st}}{(s+2)^2},-2\right\}=\frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{st}}{\cancel{(s+2)^2}}\cancel{(s+2)^2}\right)\Big|_{s=-2}=te^{st}\Big|_{s=-2}=te^{-2t}$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{(s+2)^2}\right\}=-te^{-2t}$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+2)^2}\right\}=\mathrm{Res}\left\{\frac{s+3}{(s+2)^2}e^{st},-2\right\}=\frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left(\frac{(s+3)e^{st}}{\cancel{(s+2)^2}}\cancel{(s+2)^2}\right)\Big|_{s=-2}=e^{st}+t(s+3)e^{st}\Big|_{s=-2}=e^{-2t}+te^{-2t}$

$e^{At}=\left[\begin{array}{c|c}e^{-2t}-te^{-2t} & te^{-2t}\\ \hline -te^{-2t} & e^{-2t}+te^{-2t}\end{array}\right]$

<u>Proprietà</u>: Sia $A\in\mathbb{C}^{m\times m}$ con polinomio minimo $\mu_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\mu_1}\cdots(\lambda-\lambda_\ell)^{\mu_\ell}$ allora gli elementi di e^{At} sono combinazioni lineari di $e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t},\dots,t^{\mu_1-1}e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t},\dots,t^{\mu_2-1}e^{\lambda_2 t},\dots,e^{\lambda_\ell t}, te^{\lambda_\ell t},\dots,t^{\mu_\ell-1}e^{\lambda_\ell t}$ che si dicono i modi del sistema $\dot{x}(t)=Ax(t)$

Dim: Per il teorema di decomposizione primaria $\mathbb{C}^m=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_\ell}$, inoltre sappiamo che $e^{At}[1,0,\dots,0]^T$ prima colonna di e^{At}, decomponiamo $[1,0,\dots,0]^T=x_1+x_2+\dots+x_\ell$ con $x_i\in V_{\lambda_i}$, $i=1,\dots,\ell$

$e^{At}[1,0,\dots,0]^T=e^{At}(x_1+x_2+\dots+x_\ell)$; x_1 è un autovettore generalizzato di V_{λ_1}

$e^{At}x_1=e^{\lambda_1 t}\sum_{i=0}^{\mu_1-1}\frac{t^i}{i!}(A-\lambda_1 I)^i x_1\Rightarrow$ le componenti di questo vettore sono combinazioni lineari di queste funzioni del tempo $e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t},\dots,t^{\mu_1-1}e^{\lambda_1 t}$, ripetiamo il procedimento per $e^{At}x_2,\dots,e^{At}x_\ell\Rightarrow$ la tesi è valida per la prima colonna di e^{At}. Analogamente si procede per le altre colonne $\square$

Esempio: $A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 1 & -2 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$ Vogliamo calcolare il polinomio minimo e i modi del sistema associato ad A. $\chi_A(\lambda)=\det\begin{bmatrix}\lambda+1 & 2 & -1 & -1\\ 0 & \lambda+2 & 0 & 0\\ -1 & 2 & \lambda+1 & -1\\ -2 & 0 & 2 & \lambda\end{bmatrix}=$

$=(\lambda+2)\big((\lambda+1)((\lambda+1)\lambda+2)+$

$+(-\lambda-2)-(-2+2(\lambda+1))\big)=$

$=(\lambda+2)\big((\lambda+1)(\lambda^2+\lambda+2)-2-\lambda-2\lambda\big)=(\lambda+2)\big((\lambda+1)(\lambda^2+\lambda+2)-3\lambda-2\big)=$

$=(\lambda+2)(\lambda^3+2\lambda^2+\cancel{3\lambda}+\cancel{2}-\cancel{3\lambda}-\cancel{2})=\lambda^2(\lambda+2)$ $\sigma(A)=\{0,-2\}$ ogni autovalore ha $m_a=2$

$\mu_A(\lambda) = \lambda^{?}(\lambda+2)^{?}$ per capire gli esponenti del polinomio minimo dobbiamo calcolare i kernel.

- $\lambda = 0$, $\ker(A-0I) = \ker \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ci basta capire la dimensione. $\dim\ker(A-0I) = 1$ poiché il rango è 3, quindi per raggiungere $m_a = 2$ dovremo fare il kernel di $(A-0I)^2$ e quindi in μ_A λ ha esponente 2.

- $\lambda = 2$ $\ker(A-2I) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ la seconda riga è nulla, la terza coincide con la prima, la prima e la quarta sono indipendenti, quindi il rango è 2, quindi $\dim\ker(A-2I) = 2$, quindi l'esponente di $(\lambda+2)$ sarà 1.

<u>$\mu_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda+2)$</u>, quindi avremo 3 modi: modi $= \{1, t, e^{-2t}\}$

Sistemi autonomi a tempo discreto e tempo invariante

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) \\ x(k_0) = x_0 \end{cases} \quad (*) \qquad \begin{aligned} x(k_0+1) &= Ax(k_0) = Ax_0 \\ x(k_0+2) &= Ax(k_0+1) = A^2x_0 \end{aligned} \quad \dots x(k_0+i) = A^i x_0$$

<u>Proprietà</u>: La soluzione di $(*)$ esiste ed è unica per $k \geq k_0$ ed è data da $x(k) = A^{k-k_0}x_0$

Dim: Verifichiamo che $(*)$ è soddisfatta $x(k+1) = A^{k+1-k_0}x_0 = A \cdot A^{k-k_0}x_0 = Ax(k)$, $x(k_0) = A^{k_0-k_0}x_0 = Ix_0$

Unicità: per assurdo assumiamo che $\bar{x}$ sia soluzione di $(*)$ con $\bar{x} \neq x$, sia $\bar{k} = \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geq k_0 : x(k) \neq \bar{x}(k)\}$. Di conseguenza $\bar{x}(\bar{k}) - x(\bar{k}) = A\bar{x}(\bar{k}-1) - Ax(\bar{k}-1) = A(\bar{x}(\bar{k}-1) - x(\bar{k}-1)) = A0 = 0$ ↯ □

invece per $k < k_0$ la sol potrebbe $\exists$ o non essere unica

Esempio: $\begin{cases} x(k+1) = 0 \cdot x(k), \ x(k) \in \mathbb{C} \\ x(0) = 1 \end{cases}$ per $k > 0$ sappiamo che $x(k) = 0$, $x(-1) = ?$
$1 = x(0) = 0 \cdot x(-1)$ impossibile, la sol in -1 non esiste.

$\begin{cases} x(k+1) = 0 \cdot x(k) \\ x(0) = 0 \end{cases}$, $x(k) = 0$ per $k \geq 0$. $x(-1) = ?$ $x(0) = 0 \cdot x(-1)$, questa equazione è soddisfatta per qualunque $s \in \mathbb{C}$.

In entrambi i casi la matrice di sistema $[0]$ è una matrice singolare.

<u>Proprietà</u>: Se A è invertibile, la soluzione di $(*)$ esiste ed è unica per $k \in \mathbb{Z}$, ed è data da $x(k) = A^{k-k_0}x_0$, $k \in \mathbb{Z}$.

La dim è identica alla precedente, cambia solo che $k \in \mathbb{Z}$

<u>Def</u>: La matrice di transizione dello stato è data da $\Phi(k, k_0) = A^{k-k_0}x_0$, se A è invertibile Φ è ben definita $\forall k, k_0 \in \mathbb{Z}$. Se invece A non è invertibile Φ è ben definita per $k \geq k_0$

Calcolo di A^k non possiamo farlo per iterazione, troppo lungo, metodo simile al calcolo di e^{At}

Sia $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ base di $\mathbb{C}^n$, $A^k = A^k[b_1, \dots, b_n][b_1, \dots, b_n]^{-1} = [A^kb_1, \dots, A^kb_n][b_1, \dots, b_n]^{-1}$

dobbiamo scegliere gli elementi della base in modo tale da far sì che il calcolo delle potenze A^kb_i sia particolarmente semplice e la regola è la stessa del calcolo dell'esponenziale di matrice. Se possibile scegliamo gli autovettori altrimenti gli autovettori generalizzati.

δ di Dirac: $\delta : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ $\quad \delta(k) = \begin{cases} 1, & \text{se } k=0 \\ 0, & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$

<u>Proprietà</u>: Se $Ax=0$ allora $A^k x = \delta(k)x$, $k \geq 0$

Dim: $A^0 x = Ix = x$, se $k>0$, $A^k x = A^{k-1} Ax = A^{k-1} 0 = 0$

<u>Proprietà</u>: Se $Ax = \lambda x$ allora $A^k x = \lambda^k x$, $k \geq 0$

Dim: $A^0 x = Ix = x$, $Ax = \lambda x$, $A^2 x = A \cdot Ax = A\lambda x = \lambda Ax = \lambda^2 x, \dots, A^k x = \lambda^k x$

Caso particolare $Ax=0$, $A^k x = 0^k x = \delta(k) x$, supponendo che $0^0 = 1$.

Se A è diagonalizzabile, sia $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ una base di autovettori $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, quindi $A^k = A^k [b_1, \dots, b_m][b_1, \dots, b_m]^{-1}$
$= [A^k b_1, \dots, A^k b_m][b_1, \dots, b_m]^{-1} = [\lambda_1^k b_1, \lambda_2^k b_2, \dots, \lambda_m^k b_m][b_1, \dots, b_m]^{-1}$ per ogni $k \geq 0$

Esempio: $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad \chi_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda-4 & 0 & -2 \\ 4 & \lambda-2 & 4 \\ 4 & 0 & \lambda+2 \end{bmatrix} = (\lambda-2)((\lambda-4)(\lambda+2)+8) = (\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda-8+8) =$
$= \lambda(\lambda-2)^2 \quad \sigma(A) = \{0, 2\}$

$\text{Ker}(A-2I) = \text{Ker} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \text{Im} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \ \ b_1 \ \ b_2 \end{array}$, $\text{Ker}(A) = \text{Ker} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \text{Im} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \\ b_3 \end{array}$

rango 1, dim 2 quindi è diagonalizzabile A

$A^k = [A^k b_1, A^k b_2, A^k b_3][b_1, b_2, b_3]^{-1} = [2^k b_1, 2^k b_2, \delta(k) b_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = [\dots] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 2^k & 0 & \delta(k) \\ 0 & 2^k & -2\delta(k) \\ -2^k & 0 & -2\delta(k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2^k - \delta(k) & 0 & 2^k - \delta(k) \\ -2 \cdot 2^k + 2\delta(k) & 2^k & -2 \cdot 2^k + 2\delta(k) \\ -2 \cdot 2^k + 2\delta(k) & 0 & -2^k + 2\delta(k) \end{bmatrix}$

Potremmo fare la verifica che $A^k|_{k=0} = I$ e $A^k|_{k=1} = A$, per mettere in evidenza errori di calcolo.

<u>Def</u>: Se $m, k \in \mathbb{N}$ il coefficiente binomiale $\binom{m}{k}$ è definito come $\binom{m}{k} = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-k)!\,k!} & \text{se } k \leq m \\ 0 & \text{se } k > m \end{cases}$

$\binom{m}{k} = \#$ sottoinsiemi di k elementi presi da un insieme di m elementi.

Possiamo estendere la definizione consentendo che $k \in \mathbb{Z}$ e $\binom{m}{k} = 0$ se $k < 0$.

<u>Proprietà</u> (Regola di Pascal): $\forall m \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{Z}$ $\quad \binom{m+1}{k} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}$

Immaginiamo di avere A con $m+1$ elementi, e di questi vogliamo sceglierne k, tutte le possibili scelte possono essere divise in due gruppi, il primo contiene tutti i sottoinsiemi che contengono il primo elemento di A, mentre l'altro contiene tutti i sottoinsiemi che non contengono il 1° elemento di A.
i primi sono $\binom{m}{k-1}$, i secondi sono $\binom{m}{k}$.

$A \begin{cases} 1° \in A \to \binom{m}{k-1} \\ \text{no } 1° \in A \to \binom{m}{k} \end{cases}$

Dim: 1. $k \leq 0$, 2. $k > m$, 3. $0 < k \leq m$.

1. Se $k \leq 0$ $\quad \binom{m+1}{k} = \begin{cases} 0 & \text{se } k < 0 \\ 1 & \text{se } k = 0 \end{cases}$, $\binom{m}{k} = \begin{cases} 0 & \text{se } k < 0 \\ 1 & \text{se } k = 0 \end{cases}$ $\quad \binom{m}{k-1} = 0$

2. $\binom{m+1}{k} = \begin{cases} 0 & se\ k > m+1 \\ 1 & se\ k = m+1 \end{cases}$ $\quad \binom{m}{k} = 0 \quad \binom{m}{k-1} = \begin{cases} 0 & se\ k > m+1 \\ 1 & se\ k = m+1 \end{cases}$

3. $\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \frac{m!}{k!(m-k)!} + \frac{m!}{(k-1)!(m-k+1)!} = \frac{m!((m-k+1)+k)}{k!(m-k+1)!} = \frac{m!(m+1)}{k!(m-k+1)!} = \frac{(m+1)!}{k!(m+1-k)!} = \binom{m+1}{k}$

<u>Teorema binomiale</u>: Se $A, B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ con $AB=BA$, allora $\forall k \in \mathbb{N}$ $(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i}$

Dim: Per induzione: 1. vale per $k=0$, 2. assunta per k, vale per $k+1$.

1. $(A+B)^0 = I = \binom{0}{0} A^0 \cdot B^0 = 1 \cdot I \cdot I$
2. $(A+B)^{k+1} = (A+B)^k (A+B) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i} (A+B) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i} A + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i} B =$
$= \sum_{\ell=1}^{k+1} \binom{k}{\ell-1} A^\ell B^{k-\ell+1} + \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k}{i} A^i B^{k-i+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \underbrace{\left(\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i}\right)} A^i B^{k-i+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} A^i B^{k+1-i}.$ □

$\ell = 1 \to 0$ infatti $\binom{k}{-1} = 0$ $\quad \binom{k}{k+1} = 0$

Torniamo ora al problema di calcolare $A^k x$ con x autovettore generalizzato di A. Distinguiamo 2 casi

$A^k x \begin{cases} \nearrow \lambda = 0 \\ \searrow \lambda \text{ generale} \end{cases}$

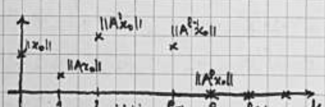
<u>Proprietà</u>: Se $A^\ell x = 0$, allora $A^k x = \sum_{i=0}^{\ell-1} \delta(k-i) A^i x \quad \forall k \geq 0$.

Dim: se $k \geq \ell$, $A^k x = 0$ infatti $A^k x = A^{k-\ell} \underbrace{A^\ell x} = A^{k-\ell} \cdot 0 = 0$. $\quad A^k x = \begin{cases} A^k x, & se\ k < \ell \\ 0, & se\ k \geq \ell \end{cases}$

$\sum_{i=0}^{\ell-1} \delta(k-i) A^i x = \begin{cases} A^0 x = x, & se\ k = 0 \\ A^1 x = Ax, & se\ k = 1 \\ \vdots \\ A^{\ell-1} x, & se\ k = \ell-1 \end{cases}$ mentre sarà 0 se $k \geq \ell$

□

$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) \\ x(0) = 0 \end{cases}$ se $A^\ell x_0 = 0$ allora $x(k) = 0 \ \forall k \geq \ell$ si chiama soluzione <u>dead beat</u> ed è tipica dei sistemi a tempo discreto perché nel caso continuo non possono verificarsi



<u>Proprietà</u>: Se $(A-\lambda I)^\ell x = 0$, allora $A^k x = \sum_{i=0}^{\ell-1} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} (A-\lambda I)^i x \quad \forall k \geq 0$

Dim: $A^k x = ((A-\lambda I) + \lambda I)^k x \overset{\text{per il teorema binomiale}}{=} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (A-\lambda I)^i (\lambda I)^{k-i} x = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} (A-\lambda I)^i x, \Rightarrow$

$k \to +\infty$, per $i > k$ $\binom{k}{i} = 0$

$\Rightarrow$ si $i \geq \ell$, $(A-\lambda I)^i x = 0$ quindi otteniamo $\sum_{i=0}^{\ell-1} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} (A-\lambda I)^i x$ □

Casi particolari: $\cdot\ \ell = 1$ $\quad (A-\lambda I)x = 0$, $\quad x$ è un autovettore $\quad A^k x = \binom{k}{0} \lambda^k (A-\lambda I)^0 x = \frac{k!}{k!\,0!} \lambda^k \cdot I \cdot x = \lambda^k x$.

i modi associati a questa soluzione è solo $\{\lambda^k\}$.

- $\ell = 2$ $\quad A^k x = \lambda^k x + \binom{k}{1} \lambda^{k-1} (A-\lambda I)^1 x = \lambda^k x = \frac{k!}{(k-1)!\,1!} \lambda^{k-1} (A-\lambda I)x = \lambda^k x + k\lambda^{k-1}(A-\lambda I)x$

in questo caso i modi sono: modi $= \{\lambda^k, k\lambda^{k-1}\}$.

- $\ell = 3$ $\quad A^k x = \lambda^k x + k\lambda^{k-1}(A-\lambda I)x + \binom{k}{2} \lambda^{k-2} \cdot (A-\lambda I)^2 x = \lambda^k x + k\lambda^{k-1}(A-\lambda I)x + \frac{k(k-1)}{2} \lambda^{k-2} (A-\lambda I)^2 x$

modi $= \{\lambda^k, k\lambda^k, k^2\lambda^k\}$ ⊛ possiamo scrivere λ^k perché è comunque un multiplo

Sistemi autonomi a tempo discreto, parte 2

Esempio: $A=\begin{bmatrix}4&1&2\\0&2&0\\-4&-1&-2\end{bmatrix}$, $\chi_A(\lambda)=\det\begin{bmatrix}\lambda-4&-1&-2\\ \boxed{0\quad\lambda-2\quad 0}\\4&1&\lambda+2\end{bmatrix}=(\lambda-2)((\lambda-4)(\lambda+2)+8)=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda-8+8)=$
$=\lambda(\lambda-2)^2$ $\quad\sigma(A)=\{0,2\}$

$\lambda=2$ $\ Ker(A-2I)=\underset{\text{rango 2}}{Ker}\begin{bmatrix}2&1&2\\0&0&0\\-4&-1&-4\end{bmatrix}=Im\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\\ b_1\end{array}$ dimensione inferiore alla molteplicità algebrica di 2 in $\chi_A(\lambda)$, quindi dobbiamo calcolare anche

$Ker(A-2I)^2=\underset{\text{rango 1}}{Ker}\begin{bmatrix}-4&0&-4\\0&0&0\\8&0&8\end{bmatrix}=Im\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-1&0\end{bmatrix}\\ b_1\quad b_2\end{array}$; $\lambda=0$ $\ Ker\begin{bmatrix}4&1&2\\0&2&0\\-4&-1&-2\end{bmatrix}=Im\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}\\ b_3\end{array}$

Quindi $A^k=[A^kb_1,A^kb_2,A^kb_3][b_1,b_2,b_3]^{-1}$ $\quad A^kb_1=2^kb_1=\begin{bmatrix}2^k\\0\\2^k\end{bmatrix}$, b_2 è autovettore generalizzato di indice 2 quindi dobbiamo usare la formula $A^kb_2=2^kb_2+k2^{k-1}(A-2I)b_2=$

$\begin{bmatrix}0\\2^k\\0\end{bmatrix}+k2^{k-1}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k2^{k-1}\\2^k\\-k2^{k-1}\end{bmatrix}$, $A^kb_3=\delta(k)b_3=\begin{bmatrix}\delta(k)\\0\\-2\delta(k)\end{bmatrix}$ $\quad$ Quindi $A^k=$

$=\begin{bmatrix}2^k&k2^{k-1}&\delta(k)\\0&2^k&0\\-2^k&-k2^{k-1}&-2\delta(k)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-1&0&-2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}''&''\\ \\ \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot2^k-\delta(k)&k2^{k-1}&2^k-\delta(k)\\0&2^k&0\\-2\cdot2^k+2\delta(k)&-k2^{k-1}&-2^k+2\delta(k)\end{bmatrix}$

In presenza di autovalori complessi e coniugati conviene procedere come abbiamo fatto nel caso di e^{At}

$B=\{b_1,\bar{b}_1,b_3,\dots,b_n\}$ conviene sostituirla con $B=\{Re\{b_1\},Im\{b_1\},b_3,\dots,b_n\}$ così da rimuovere i complessi dalla base, inoltre se $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ $\ A^kRe\{b\}=Re\{A^kb\}$, $A^kIm\{b\}=Im\{A^kb\}$.
E quindi $A^k=[Re\{A^kb_1\},Im\{A^kb_1\},A^kb_3,\dots,A^kb_n][Re\{b_1\},Im\{b_1\},b_3,\dots,b_n]^{-1}$

Esempio: $A=\begin{bmatrix}-3&-4&0\\2&1&0\\-2&-4&-1\end{bmatrix}$ $\quad\chi_A(\lambda)=\det\begin{bmatrix}\lambda+3&4&0\\-2&\lambda-1&0\\2&4&\lambda+1\end{bmatrix}=((\lambda+3)(\lambda-1)+8)(\lambda+1)=(\lambda^2+2\lambda+5)(\lambda+1)=$
$=(\lambda+1)(\lambda-(-1+2j))(\lambda-(-1-2j))$
$\sigma(A)=\{-1+2j,-1-2j,-1\}$, la matrice sarà diagonalizzabile perché abbiamo tre autovalori distinti

dividiamo la 1° riga per $(1-j)$

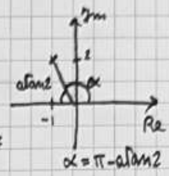
$\lambda=-1+2j$ $\ Ker(A-(-1+2j)I)=Ker(A+(1-2j)I)=\underset{\text{dividiamo tutto per 2}}{Ker}\begin{bmatrix}2-2j&-4&0\\2&2+2j&0\\-2&-4&-2j\end{bmatrix}=Ker\begin{bmatrix}1-j&-2&0\\1&1+j&0\\-1&-2&-j\end{bmatrix}=$

$=\underset{\text{Gauss}}{Ker}\begin{bmatrix}1&1-j&0\\1&1+j&0\\-2&-2&-j\end{bmatrix}=Ker\begin{bmatrix}1&1-j&0\\0&0&0\\0&-1-j&-j\end{bmatrix}=Ker\underbrace{\begin{bmatrix}1&1-j&0\\0&-1-j&-j\\0&0&0\end{bmatrix}}_{M}$ $\quad M\cdot\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=0$ $\quad\Rightarrow(-1-j)b-jc=0,\ c=s$
$b=\frac{j}{-1-j}s=\frac{j(-1+j)}{2}s=\frac{-1-j}{2}s$
$a+(1-j)b=0\Rightarrow a=(j-1)b=$

$=\frac{(j-1)(-1-j)}{2}s=\frac{1}{2}\cdot2s=s$

Poniamo $s=1$ e otteniamo che il kernel è $\operatorname{Im}\begin{bmatrix}1\\ \frac{-1-j}{2}\\ 1\end{bmatrix} = \operatorname{Im}\begin{bmatrix}2\\ -1-j\\ 2\end{bmatrix}$ e questo è l'autovettore associato a $-1+2j$, non dobbiamo considerare il coniugato, rimane

$\lambda=-1$ $\operatorname{Ker}(A+I) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix}-2 & -4 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ -2 & -4 & 0\end{bmatrix} = \operatorname{Im}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, $\lambda=-1+2j \Rightarrow v=\begin{bmatrix}2\\ -1-j\\ 2\end{bmatrix}$



$$B=\{\underbrace{[2,-1,2]^T}_{Re(v)},\ \underbrace{[0,-1,0]^T}_{Im(v)},\ [0,0,1]^T\}$$ Calcoliamo ora $A^k v = (-1+2j)^k v =$

riscriviamo in modulo fase

$$= (\sqrt{5}e^{j\alpha})^k v = \sqrt{5}^k e^{jk\alpha}[2,-1-j,2]^T \underset{\text{formula Eulero}}{=} \sqrt{5}^k(\cos\alpha k + j\sin\alpha k)[2,-1-j,2]^T =$$

$$= \sqrt{5}^k[2\cos\alpha k, -\cos\alpha k+\sin\alpha k, 2\cos\alpha k]^T + j[2\sin\alpha k, -\cos\alpha k - \sin\alpha k, 2\sin\alpha k]^T$$

$$A^k = \left[\begin{array}{c|c|c} 2\sqrt{5}^k\cos\alpha k & 2\sqrt{5}^k\sin\alpha k & 0\\ \sqrt{5}^k(-\cos\alpha k+\sin\alpha k) & \sqrt{5}^k(-\cos\alpha k-\sin\alpha k) & 0\\ 2\sqrt{5}^k\cos\alpha k & 2\sqrt{5}^k\sin\alpha k & (-1)^k\end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \text{“ ”} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} \sqrt{5}^k(\cos\alpha k - \sin\alpha k) & -2\sqrt{5}^k\sin\alpha k & 0\\ \sqrt{5}^k\sin\alpha k & \sqrt{5}^k(\cos\alpha k+\sin\alpha k) & 0\\ \sqrt{5}^k(\cos\alpha k - \sin\alpha k) - (-1)^k & -2\sqrt{5}^k\sin\alpha k & (-1)^k\end{array}\right]$$

Abbiamo visto che l'esponenziale di matrice può essere calcolato con la trasformata di Laplace

Def: Sia $x:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}^{m\times m}$, la trasformata zeta di x è la funzione $Z\{x\}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^{m\times m}$ tale che $Z\{x\}(z) := \sum_{i=0}^{+\infty} x(i)z^{-i}$.

Osservazione: $x=(x_{ek})$, $(Z\{x\}(z))_{ek} = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} x(i)z^{-i}\right)_{ek} = \sum_{i=0}^{+\infty} x_{ek}(i)z^{-i}$

Proprietà: $Z\{\overset{(*)}{x(k+1)}\} = zZ\{x(k)\} - z\,x(0)$ (*) trasformata del segnale anticipato di un passo

La trasformata zeta è una trasformazione monolatera, tutta la parte del segnale per k negativo viene esclusa, quando anticipiamo, il campione che prima era in zero, passa a -1, quindi viene escluso dal dominio della trasformata. z può essere considerato come l'operatore di anticipo

Proprietà: $Z\{A^k\} = z(zI-A)^{-1}$

Dim: $\begin{cases}A^{k+1} = A\cdot A^k\\ A^k|_{k=0} = I\end{cases}$, $Z\{A^{k+1}\} = zZ\{A^k\} - zA^0$, $Z\{A\cdot A^k\} = AZ\{A^k\}$ per linearità, quindi $zZ\{A^k\} - zI = A\cdot Z\{A^k\} \iff (zI-A)Z\{A^k\} = zI \iff Z\{A^k\} = z(zI-A)^{-1}$ □

Quindi possiamo ottenere $A^k = Z^{-1}\{z(zI-A)^{-1}\}$

Esempio: $A=\begin{bmatrix}-4 & 1\\ -4 & 0\end{bmatrix}$ $A^k = Z^{-1}\{z(zI-A)^{-1}\} = Z^{-1}\left\{z\begin{bmatrix}z+4 & -1\\ 4 & z\end{bmatrix}^{-1}\right\} \underset{\text{usiamo formula dell'aggiunta}}{=} Z^{-1}\left\{\frac{z}{\underbrace{z(z+4)+4}_{z^2+4z+4=(z+2)^2}}\begin{bmatrix}z & 1\\ -4 & z+4\end{bmatrix}\right\} =$

$$= Z^{-1}\left\{\left[\begin{array}{c|c} z^2/(z+2)^2 & z/(z+2)^2\\ -4z/(z+2)^2 & z(z+4)/(z+2)^2\end{array}\right]\right\}$$ Ora dobbiamo fare la Z inversa.

Se $X(z)$ è una funzione razionale fratta, allora $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \sum_{p \in \text{poli di } X(z)z^{k-1}} \text{Res}\{X(z)z^{k-1}, p\}$

k è sempre ≥ 0 — quindi indipendentemente da k c'è solo un polo in -2

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^2}{(z+2)^2}\right\} = \sum \text{Res}\left\{\frac{z^2 z^{k-1}}{(z+2)^2}, p\right\} = \sum_{p \in \{-2\}} \text{Res}\left\{\frac{z^{k+1}}{(z+2)^2}, p\right\} = \frac{1}{(2-1)!} \cdot \frac{d}{dz} \frac{(z^{k+1})}{(z+2)^2}(z+2)^2 \Big|_{z=-2} = (k+1)z^k \Big|_{z=-2} = (k+1)(-2)^k$$

$p \in \{-2\} \rightarrow$ polo di ordine 2

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z+2)^2}\right\} = \sum_{p \in \{-2\}} \text{Res}\left\{\frac{z \cdot z^{k-1}}{(z+2)^2}, p\right\} = \frac{d}{dz} \frac{(z^k)}{(z+2)^2} \cdot (z+2)^2 \Big|_{z=-2} = k z^{k-1} \Big|_{z=-2} = k(-2)^{k-1}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{-4z}{(z+2)^2}\right\} = -4k(-2)^{k-1}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z(z+4)}{(z+2)^2}\right\} = \sum_{p \in \{-2\}} \text{Res}\left\{\frac{z \cdot (z+4) z^{k-1}}{(z+2)^2}, p\right\} = \frac{d}{dz} \frac{z^k(z+4)}{(z+2)^2} \cdot (z+2)^2 \Big|_{z=-2} = k z^{k-1}(z+4) + z^k \Big|_{z=-2} = k(-2)^{k-1} \cdot 2 + (-2)^k$$

$$A^k = \left[\begin{array}{c|c} (k+1)(-2)^k & k(-2)^{k-1} \\ -4k(-2)^{k-1} & 2k(-2)^{k-1} + (-2)^k \end{array}\right]$$

Proprietà: Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ con polinomio minimo $\mu_A(\lambda) = \lambda^{\mu_0}(\lambda-\lambda_1)^{\mu_1}(\lambda-\lambda_2)^{\mu_2} \dots (\lambda-\lambda_e)^{\mu_e}$, allora le componenti della potenza di matrice A^k sono combinazioni lineari di $\delta(k), \delta(k-1), \dots, \delta(k-\mu_0+1)$, $\lambda_1^k, k\lambda_1^k, \dots, k^{\mu_1-1}\lambda_1^k, \dots, \lambda_e^k, k\lambda_e^k, \dots k^{\mu_e-1}\lambda_e^k$, detti modi del sistema.

Dim: Consideriamo $A^k e_1 \rightarrow$ la prima colonna di A^k. Per il teorema di decomposizione primaria $\mathbb{C}^n = \text{Ker} A^{\mu_0} \oplus \text{Ker}(A-\lambda_1 I)^{\mu_1} \oplus \dots \oplus \text{Ker}(A-\lambda_e I)^{\mu_e}$, quindi $e_1 = x_0 + x_1 + \dots + x_e$ con $A^{\mu_0}x_0 = 0$, $(A-\lambda_i I)^{\mu_i}x_i = 0$ per $i = 1, \dots, e$. Quindi $A^k e_1 = A^k x_0 + A^k x_1 + \dots + A^k x_e$, partiamo dal 1° termine
$A^k x_0 = \sum_{i=0}^{\mu_0-1} \delta(k-i)A^i x_0$ = combinazione lineare di $\{\delta(k), \delta(k-1), \dots, \delta(k-\mu_0+1)\}$
$A^k x_1 = \sum_{i=0}^{\mu_1-1} \binom{k}{i} \lambda_1^{k-i}(A-\lambda_1 I)^i x_1$, ma $\binom{k}{i} = \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)!}{i!}$ è combinazione lineare di $\{1, k, \dots, k^{i-1}\}$
quindi le componenti di $A^k x_1$ sono combinazioni lineari di $\{\lambda_1^k, k\lambda_1^k, \dots, k^{\mu_1-1}\lambda_1^k\}$. Analogamente si procede per gli altri termini x_i e per le altre colonne di A^k. $\square$

Esempio: $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ vogliamo trovare i modi associati al sistema a tempo discreto

$$\chi_A(\lambda) = \det \left[\begin{array}{cc|c} \lambda-4 & -1 & -2 \\ 1 & \lambda-2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & \lambda \end{array}\right] = ((\lambda-4)(\lambda-2)+1)\lambda = (\lambda^2-6\lambda+9)\lambda = (\lambda-3)^2\lambda \quad \sigma(A) = \{0, 3\}$$

$m_a(0) = 1 \quad m_a(3) = 2$

$\mu_A(\lambda) = (\lambda-3)^{1 \text{ o } 2}\lambda$, calcoliamo $\text{Ker}(A-3I) = \text{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \text{Im}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ non abbiamo raggiunto $m_a(3) = 2$ quindi abbiamo

rango 2
dim 1

che $\mu_A(\lambda) = (\lambda-3)^2\lambda = \chi_A(\lambda)$. Avremo quindi 3 modi, due associati a 3 e uno a 0.
modi $= \{3^k, k \cdot 3^k, \delta(k)\}$.

A tempo continuo avevamo visto che se $A(V) \subseteq V$ allora $\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) \\ x(t_0) = x_0 \in V \end{cases}$ allora $x(t) \in V, \forall t \in \mathbb{R}$

Proprietà: Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e V un sottospazio di $\mathbb{C}^n$ tale che $A(V) \subseteq V$ e sia $x_0 \in V$, allora la soluzione dell'equazione alle differenze $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) \\ x(k_0) = x_0 \end{cases}$ è tale che $x(k) \in V$, $\forall k \geq k_0$

Inoltre se B è una base di V, $[x(k+1)]_B = [a|_V]_{B,B}\,[x(k)]_B$, dove $a : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $a(x) = Ax$.

Dim: $x(k_0+1) = Ax(k_0) = Ax_0 \in V$ e così via $x(k_0+2) = A\underbrace{x(k_0+1)}_{\in V} \in V \dots$ $\square$