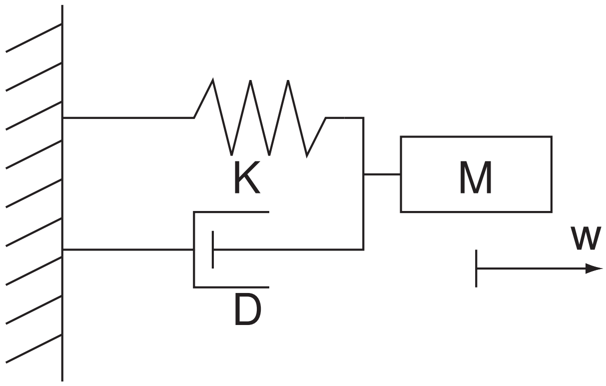
Corso di sistemi multivariabili

Esercizi: serie 2

1) Considera il seguente sistema meccanico, costituito da una massa di peso $M = 1$ kg collegata ad una molla di costante elastica $K > 0$ e ad uno smorzatore con costante $D > 0$. Considera come uscita la posizione della massa rispetto ad un sistema di riferimento orizzontale.



a) Trova le matrici A e C che descrivono il sistema nella forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax \\ y &= Cx \end{aligned}$$

dove $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ con $x_1 = w$, $x_2 = \dot{w}$.

b) Considerando $K = 2$ e $D = 2$, calcola la matrice di transizione dello stato e^{At} e determina l'evoluzione del sistema partendo dallo stato $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

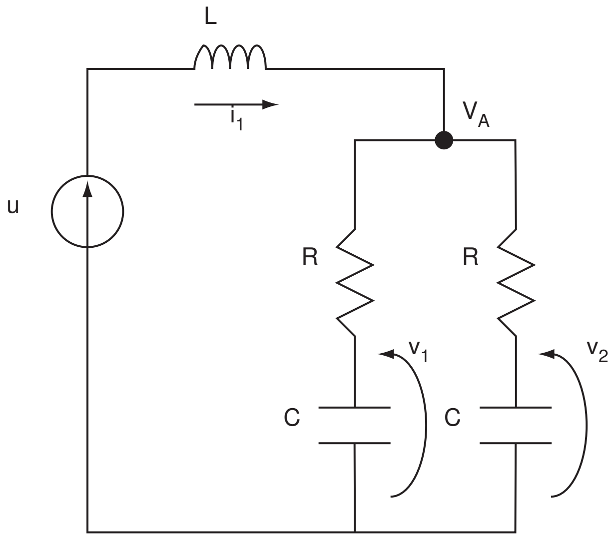
2) Considera il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

dove $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$,

determina (se possibile) $x(0) = x_0$ per cui $y(t) = te^{-t}$.

3) Considera il circuito elettrico della figura sottostante,



con $R = 1\Omega$, $C = \frac{1}{2}$ F e $L = \frac{1}{2}$ H, il generatore di tensione u rappresenta l'ingresso, lo stato del sistema è rappresentato dalla corrente i_1 sull'induttanza e dalle tensioni v_1 e v_2 ai capi delle due capacità (prendere le variabili di stato in questo ordine). L'uscita è data dalla tensione V_A.

a) Mostra che il sistema può essere descritto dal modello

$$\begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx, \end{array} ,$$

dove $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$,

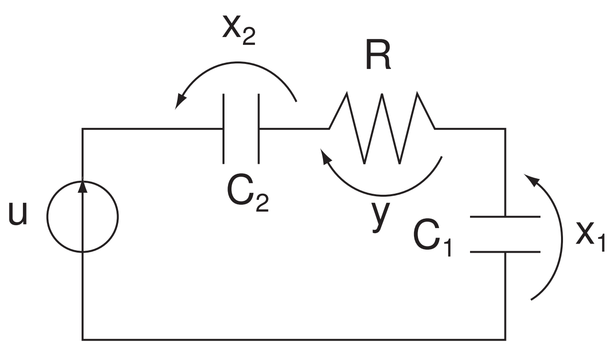
con $x = \begin{bmatrix} i_1 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$.

Nota: per ricavare il modello può essere utile, prima di tutto, esprimere la tensione V_A in funzione delle variabili di stato i_1, v_1 e v_2.

b) Determina l'evoluzione libera del sistema a partire dallo stato iniziale $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

c) Calcola la funzione di trasferimento del sistema.

4)Considera il circuito raffigurato nella figura sottostante



a) Mostra che può essere descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu\\ y &= Cx + Du,\end{aligned}$$

dove $A = \begin{bmatrix} -a & -a \\ -b & -b \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}$, $D = 1$, con $a = \frac{1}{RC_1}$, $b = \frac{1}{RC_2}$ e $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

b) Fissati $a = 1$ e $b = 1$, calcola l'uscita y del sistema a partire da $t = 0$ con $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $u(t) = 1$.

Risposte

1)

a)Usando le equazioni dinamiche della molla e dello smorzatore si trova $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K & -D \end{bmatrix}$; $\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

b)Con i valori dati $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ e $\chi_a(\lambda) = (\lambda - (-1+j))(\lambda - (-1-j))$. A ha i due autovettori complessi coniugati $v = [1, -1 + j]^T$ e $v^* = [1, -1 + j]^T$. Per costruire la matrice fondamentale, prendiamo la parte reale e la parte immaginaria di

$$e^{At}v = e^{(-1+j)t}v = e^{-t}\begin{bmatrix} \cos t + j\sin t \\ -\cos(t) - \sin(t) + j(-\sin(t) + \cos(t)) \end{bmatrix},$$

da cui otteniamo

$$\Psi(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) - \cos(t) & -\sin(t) + \cos(t) \end{bmatrix},$$

quindi

$$e^{At} = \Psi(t)\Psi(0)^{-1} = e^{-t}\begin{bmatrix}\cos(t)+\sin(t) & \sin(t)\\ -2\sin(t) & -\sin(t)+\cos(t)\end{bmatrix}.$$

Infine

$$e^{At}\left[\begin{array}{c}1\\0\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\cos(t)+\sin(t)\\ -2\sin(t)\end{array}\right].$$

2)

Il polinomio caratteristico è $\chi_A(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$. Troviamo che $v_1 = \left[\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}\right] \in \ker(A+I)$, $v_2 = \left[\begin{array}{c}0\\1\\1\end{array}\right] \in \ker(A+I)^2$ $v_3 = \left[\begin{array}{c}0\\1\\0\end{array}\right] \in \ker(A-2I)$. I vettori v_1, v_2, v_3 sono una base di $\mathbb{R}^3$. Abbiamo che $e^{At}v_2 = e^{-t}(I+(A+I)t)v_2 = e^{-t}\left[\begin{array}{c}t\\1\\1\end{array}\right]$, quindi una matrice fondamentale è data da

$$\Psi(t) = [e^{At}v_1, e^{At}v_2, e^{At}v_3] = \left[\begin{array}{ccc}\mathrm{e}^{-t} & t\mathrm{e}^{-t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{2\,t}\\ 0 & \mathrm{e}^{-t} & 0\end{array}\right]$$

l'uscita del sistema è data da

$$y(t) = C\Psi(t)\Psi(0)^{-1}x_0 = [e^{-t}, \quad e^{2t}, \quad te^{-t} - e^{2t}]x_0$$

l'uscita è quindi una combinazione lineare delle funzioni $(e^{-t}, e^{2t}, te^{-t} - e^{2t})$, per avere come uscita te^{-t} dobbiamo prendere la somma della seconda e della terza, quindi $x_0 = \left[\begin{array}{c}0\\1\\1\end{array}\right]$.

3)

a) Applica il principio dell'uguaglianza delle correnti entranti ed uscenti al nodo A per trovare la tensione V_A. Usa quindi le equazioni dinamiche per il condensatore e l'induttanza.

b) Il polinomio caratteristico è

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda+2)(\lambda^2+\lambda+2)\,,$$

l'autovettore associato all'autovalore -2 è $v_1 = \left[\begin{array}{c}0\\1\\-1\end{array}\right]$, dunque

$$e^{At}v_1 = e^{-2t}v_1 = \left[\begin{array}{c}0\\e^{-2t}\\e^{-2t}\end{array}\right].$$

c) La funzione di trasferimento è data da

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{s+2}{s^2+s+2}\,.$$

4)

b) Risulta $\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda + a + b)$, un autovettore associato all'autovalore $\lambda = 0$ è $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, per l'autovalore $\lambda = -a-b$ un autovettore è $v_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. La matrice A è diagonalizzabile e

$$\begin{aligned} e^{At} &= [v_1,\, e^{-(a+b)t}v_2][v_1\, v_2]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a\mathrm{e}^{-(a+b)\,t} \\ -1 & b\mathrm{e}^{-(a+b)\,t} \end{bmatrix} \frac{1}{a+b} \begin{bmatrix} b & -a \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a+b} \begin{bmatrix} b + a\mathrm{e}^{-t\,(a+b)} & a\left(\mathrm{e}^{-t\,(a+b)} - 1\right) \\ b\left(\mathrm{e}^{-t\,(a+b)} - 1\right) & a + b\mathrm{e}^{-t\,(a+b)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Scriviamo $x(t) = x_l(t) + x_f(t)$, con x_l evoluzione libera e x_f evoluzione forzata.

Per l'evoluzione libera $x_l(0) = e^{At}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} b + ae^{-t(a+b)} \\ b(e^{-t(a+b)} - 1) \end{bmatrix}$. Per l'evoluzione forzata, osserviamo che $B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ è un autovettore dell'autovalore $a+b$ e $x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}B \cdot 1 d\tau = B\int_0^t e^{-(a+b)\tau}d\tau = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\frac{1-e^{-(a+b)t}}{a+b}$.

Quindi $x(t) = x_l(t) + x_f(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Nota che questo si sarebbe potuto capire anche ragionando sul circuito, infatti per $u(t) = 1$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ il sistema si trova in una condizione di equilibrio, cioè $\dot{x}(t) = 0$ e lo stato del sistema non varia nel tempo.