Ricerca Operativa

Ricerca Operativa

Disciplina basata sulla modellizzazione e la risoluzione tramite strumenti automatici di problemi di decisione complessi.

In tali problemi la complessità è determinata dall'ampiezza dello spazio delle scelte possibili.

I passi da compiere

Nell'affrontare un problema di decisione il ricercatore operativo tipicamente compie questi passi principali:

- individuare le componenti del problema di decisione;
- creare un modello matematico del problema;
- individuare un algoritmo di risoluzione;
- validare il modello.

Problema di decisione : componenti

- **Dati** - tutto ciò che è noto a priori e non è sotto il controllo del decisore
- **Variabili** - le quantità sotto il diretto controllo del decisore
- **Vincoli** - condizioni che limitano le possibili scelte del decisore
- **Obiettivo** - criterio attraverso cui le scelte del decisore vengono confrontate

Un (banale) esempio

In casa con voi avete:

- **una borsa** del valore di 25 Euro
- **una macchina fotografica** del valore di 100 Euro
- **un libro** del valore di 10 Euro

Potete portare fuori di casa al massimo un oggetto. Volete portare con voi il massimo valore possibile

Un (banale) esempio - continua

- **Dati** - i valori dei tre oggetti
- **Variabili** - per ogni oggetto dovete decidere se portarlo con voi oppure no
- **Vincolo** - potete portare con voi al massimo uno dei tre oggetti
- **Obiettivo** - il valore che portate con voi, da massimizzare

Variabili

$$Borsa = \begin{cases} NO & \text{non porto la borsa con me} \\ SI & \text{porto la borsa con me} \end{cases}$$

Simile per $Macchina\ Foto$ e per $Libro$.

Scelte possibili

$Borsa$	$Macchina\ Foto$	$Libro$
NO	NO	NO
SI	NO	NO
NO	SI	NO
NO	NO	SI
SI	SI	NO
SI	NO	SI
NO	SI	SI
SI	SI	SI

Scelte accettabili

$Borsa$	$Macchina\ Foto$	$Libro$	$Valore$
NO	NO	NO	0
SI	NO	NO	25
NO	SI	NO	100
NO	NO	SI	10

Un esempio più complesso

	Farina	Acqua	Medicinali	Utilità
TIPO I	10	10	30	14
TIPO II	30	20	10	5
TIPO III	20	40	5	4
Disp.max	5100	8000	1805	

Problema: individuare quanti pacchi di ciascun tipo realizzare, tenuto conto delle disponibilità massime di risorse, in modo da massimizzare l'utilità totale dei pacchi realizzati.

Un esempio più complesso - continua

- **Dati** - i valori nella tabella
- **Variabili** - per ogni tipo di pacco dovete decidere quanti pacchi di quel tipo realizzare
- **Vincoli** - non superare la disponibilità massima di risorse disponibili
- **Obiettivo** - il valore di utilità totale, da massimizzare

Creare un modello matematico

Problemi di decisione come quello precedentemente descritto possono essere riformulati in modelli di Programmazione Matematica. Un modello di Programmazione Matematica è una traduzione del problema di decisione in *linguaggio matematico*

- **Variabili** - ad ogni variabile viene associata una variabile matematica (ad esempio $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se abbiamo n variabili). Alcune di queste (diciamo le prime k) possono assumere valori reali, altre potrebbero essere vincolate ad assumere solo valori interi.
- **Vincoli** - I vincoli vengono espressi tramite equazioni e disequazioni in cui compaiono variabili e dati del problema

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) \leq (\text{o} \ \geq \ \text{o} \ =) \ 0.$$

- **Obiettivo** - L'obiettivo viene tradotto in una funzione matematica $f(x_1, \ldots, x_n)$ delle n variabili del problema.

Prog. Matematica : il problema generico

$$\begin{array}{ll} \max \ (\text{o} \ \min) & f(x_1,\ldots,x_n) \\ & g_i(x_1,\ldots,x_n) \leq 0 \quad i \in I_1 \\ & g_i(x_1,\ldots,x_n) \geq 0 \quad i \in I_2 \\ & g_i(x_1,\ldots,x_n) = 0 \quad i \in I_3 \\ & x_1,\ldots,x_k \in R \\ & x_{k+1},\ldots,x_n \in Z \end{array}$$

Regione ammissibile

L'insieme dei punti che soddisfano tutti i vincoli viene chiamato regione ammissibile del problema e nel seguito verrà indicato con S. Abbiamo quindi:

$$
\begin{aligned}
S = \{ \quad (x_1,\ldots,x_n): \quad & g_i(x_1,\ldots,x_n) \leq 0, \quad \forall\, i \in I_1 \\
& g_i(x_1,\ldots,x_n) \geq 0, \quad \forall\, i \in I_2 \\
& g_i(x_1,\ldots,x_n) = 0, \quad \forall\, i \in I_3 \\
& x_1,\ldots,x_k \in R \\
& x_{k+1},\ldots,x_n \in Z \}
\end{aligned}
$$

Risolvere il modello

Risolvere il problema di Programmazione Matematica vuol dire determinare un punto $(x_1^*, \ldots, x_n^*) \in S$, che verrà detto *soluzione ottima* del problema, tale che

$$f(x_1^*, \ldots, x_n^*) \leq f(x_1, \ldots, x_n) \quad \forall \, (x_1, \ldots, x_n) \in S,$$

se il problema è di minimo, oppure

$$f(x_1^*, \ldots, x_n^*) \geq f(x_1, \ldots, x_n) \quad \forall \, (x_1, \ldots, x_n) \in S,$$

se il problema è di massimo.

I problemi lineari

La Programmazione Matematica comprende un grande numero di problemi. Tra questi una particolare rilevanza hanno i problemi di Programmazione Lineare (PL) e Programmazione Lineare Intera (PLI).

In entrambi tutte le funzioni (quella obiettivo e quelle che definiscono i vincoli) sono funzioni lineari. La sola differenza tra PL e PLI è rappresentata dal fatto che nella PL sono presenti solo variabili reali, mentre nella PLI sono presenti solo variabili che possono assumere valori interi (si possono avere anche casi misti con alcune varaibili reali e altre intere ma qui non ce ne occuperemo visto che le tecniche risolutive per questi sono analoghe a quelle per i problemi di PLI).

Problemi di PL e PLI

Il generico problema di PL avrà la seguente forma:

$$
\begin{array}{rl}
\max \ (\text{o} \ \min) & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
 & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i \in I_1 \\
 & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i \in I_2 \\
 & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i \in I_3 \\
 & x_1, \ldots, x_n \in R
\end{array}
$$

Nei problemi di PLI la sola differenza sarà rappresentata dal vincolo sulle variabili che sarà

$$x_1, \ldots, x_n \in Z$$

Importanza di PL e PLI

I problemi lineari sono molto importanti perchè:

- molti problemi reali hanno un modello di PL o PLI;
- per quanto riguarda la PL, la relativa semplicità di risoluzione di tali problemi implica che anche metodi di risoluzione per problemi più complessi (tra cui anche quelli di PLI, come avremo modo di vedere) si basano sulla risoluzione multipla di problemi di PL.

Il modello dell'esempio

- **Dati** - i valori numerici nella tabella
- **Variabili** - $x_i =$quantità di pacchi di tipo i che decidete di realizzare ($i = 1, 2, 3$)
- **Vincoli** -

$$10x_1 + 30x_2 + 20x_3 \leq 5100 \quad \text{(disp. max farina)}$$

$$10x_1 + 20x_2 + 40x_3 \leq 8000 \quad \text{(disp. max acqua)}$$

$$30x_1 + 10x_2 + 5x_3 \leq 1805 \quad \text{(disp. max medicinali)}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad \text{quantità di pacchi non negativa}$$

- **Obiettivo** -

$$14x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

Modello matematico dell'esempio

$$
\begin{array}{rc}
\text{max} & 14x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{tenuto conto che} & \\
& 10x_1 + 30x_2 + 20x_3 \leq 5100 \\
& 10x_1 + 20x_2 + 40x_3 \leq 8000 \\
& 30x_1 + 10x_2 + 5x_3 \leq 1805 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Si tratta quindi di un modello di PL (o PLI se volessimo imporre anche la non frazionabilità dei pacchi).

Perché i modelli matematici?

Una volta che abbiamo a disposizione il modello matematico del problema *non* abbiamo ancora risolto il problema stesso, lo abbiamo semplicemente tradotto in un altro linguaggio. Ma perché allora abbiamo fatto questa traduzione?

Sostanzialmente perché una volta trasportato il nostro problema reale nel mondo astratto della matematica, possiamo utilizzare tutti gli strumenti che ci fornisce questa disciplina per studiarlo.

Questo vuol dire che possiamo studiare la teoria dei modelli matematici e attraverso questa, arivare infine alla definizione di *algoritmi di risoluzione* per essi, ovvero procedure che ricevono in input i modelli e ne restituiscono le soluzioni.

Individuare un algoritmo di risoluzione

I modelli di programmazione matematica includono moltissime sottoclassi che possono differire parecchio tra loro per quanto riguarda:

- le proprietà della funzione obiettivo;
- le proprietà delle funzioni che definiscono i vincoli;
- il numero e la natura (continue o discrete) delle variabili.

Tali differenze implicano a loro volta differenze per quanto riguarda:

- la complessità dei problemi;
- gli algoritmi di risoluzione.

Quindi ...

... una volta costruito il modello matematico, occorre riconoscere a quale classe appartiene e di conseguenza, scegliere un opportuno algoritmo di risoluzione.

Durante il corso avremo modo di presentare algoritmi per diversi problemi, con una particolare attenzione per i già citati problemi di PL e PLI.

Validazione del modello

Quando applichiamo l'algoritmo di risoluzione otteniamo *la solzuione del modello matematico*.

È bene rimarcare che questa può non coincidere con la soluzione del problema di decisione. Infatti, non dobbiamo dimenticare che un modello è una *rappresentazione* della realtà, non la realtà stessa.

Tale rappresentazione potrebbe non essere aderente alla realtà. Per esempio, potremmo aver dimenticato una qualche variabile di decisione e/o un qualche vincolo del problema.

Occorre quindi sempre effettuare, anche dopo aver risolto un modello, un'analisi critica del modello stesso e capire se sia o meno necessario correggerlo. Nel caso sia necessario, si dovrà tornare a risolvere il modello aggiornato.

Durante il corso non ci occuperemo oltre di questa fase detta di *validazione del modello*, ma teniamo sempre presente che è un'operazione importante da compiere.