Corso di Sistemi Multivariabili

Esercizi: serie 5

1) Il sistema a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

rappresenta la dinamica di un sistema meccanico ti cui devi progettare la legge di controllo.

a) Trova una matrice F in modo che il sistema retroazionato tramite il controllo $u(t) = Fx(t)$ abbia tutti gli autovalori in -1.

b) Secondo il tuo capo, la dinamica del sistema con il controllo trovato al punto a) non risulta sufficientemente veloce. Progetta, se possibile, un controllore che porti tutti gli autovalori in -2.

c) Viene aggiunto un nuovo attuatore al sistema, il modello del sistema risulta quindi

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Trova per questo sistema un controllore che porti tutti gli autovalori in -2.

2) Considera il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1, 0, 1]x(t) \end{aligned}$$

trova un osservatore per il sistema in modo che il sistema errore abbia tutti gli autovalori in -1.

3) Considera i sistemi descritti dalle seguenti matrici

i) $(A, B, C) = (\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [1, 0])$,

ii)$(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) = (\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, [1, 0.5])$.

Ricorda che i due sistemi sono internamente equivalenti se esiste una matrice invertibile T per cui $\bar{A} = TAT^{-1}$, $\bar{B} = TB$, $\bar{C} = CT^{-1}$.

I due sistemi sopra sono internamente equivalenti? Se lo sono, trova la matrice T.

4) Considera il sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k)\,, \end{aligned}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determina la scomposizione di Kalman del sistema e calcola la funzione di trasferimento.

Soluzioni

1) a) Il sistema è già nella forma standard per i sistemi non completamente controllabili. Gli autovalori controllabili sono $\{1, 2\}$, quello non controllabile è -1. Per assegnare tutti gli autovalori in -1 possiamo usare la formula di Ackermann sulla parte raggiungibile del sistema $A_R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Otteniamo $F = -[0,\, 1][B_R\, A_R B_R]^{-1} d(A_R)$, dove $d(\lambda) = (\lambda + 1)^2$, da cui $F = [-2,\, -5]$.

b) Non è possibile, in quando -1 è un autovalore non raggiungibile e quindi non può essere riassegnato con retroazione stato-ingresso.

c) Con il nuovo ingresso il sistema è completamente raggiungibile, è dunque possibile risolvere il problema. Troviamo prima la matrice K per cui la coppia $(A + BK, b_1)$ è completamente raggiungibile, dove b_1 è la prima colonna della nuova matrice B (che coincide con la matrice B del punto a)). Abbiamo che $S = [b_1,\, Ab_1,\, b2] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, da cui $K = LS^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Risulta $\bar{A} = A + BK = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$. A questo punto la coppia $(\bar{A}, b_1)$ è completamente raggiungibile e quindi possiamo assegnare gli autovalori richiesti (possiamo usare la formula di Ackermann o la forma canonica per i sistemi completamente raggiungibili). Otteniamo che $\bar{A} + f_1 b_1$ ha tutti gli autovalori in -2 con la retroazione $f_1 = -\frac{1}{4}[29,\, 32,\, 21]$. Quindi la legge di retroazione complessiva è

$$F = K + e_1 f_1 = \begin{bmatrix} -\frac{29}{4} & -8 & -\frac{21}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} .$$

2) La coppia (C, A) è completamente osservabile, quindi il problema ammette soluzione. Per trovare la matrice dei guadagni dell'osservatore passiamo al sistema duale ponendo $A_D = A^T$ e $B_D = C^T$ e assegnamo gli autovalori della matrice $A_D + B_D F_D$. Mettiamo il sistema duale nella forma canonica di controllabilità. Abbiamo che $R = [B_D, A_D B_D, A_D^2 B_D] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Quindi $q = [0, 0, 1]R^{-1} = \frac{1}{4}[1, 0, -1]$. Poniamo $T = \begin{bmatrix} q \\ qA_D \\ qA_D^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 8 & -1 \end{bmatrix}$. Facciamo il cambio di coordinate $Tx = z$, otteniamo $\dot{z}(t) = \hat{A} z(t) + \hat{B} u(t)$, dove

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \ \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Imponiamo che $\hat{A} + \hat{B}\hat{F}$ sia la forma compagna che corrisponde al polinomio $d(\lambda) = (\lambda + 1)^3$, otteniamo $\hat{F} = \begin{bmatrix} 2 & -8 & -6 \end{bmatrix}$, da cui $F_D = \hat{F} T = \begin{bmatrix} -9 & -16 & 3 \end{bmatrix}$. La matrice dei guadagni dell'osservatore è dunque $K = F_D^T = \begin{bmatrix} -9 \\ -16 \\ 3 \end{bmatrix}$ e l'osservatore è dato da

$$\dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t) + K(C\hat{x}(t) - y(t)) .$$

3) Deve essere $\bar{B} = TB$, $\bar{A}\bar{B} = TAB$, da cui $[\bar{B}, \bar{A}\bar{B}] = T[B, AB]$, essendo il sistema i) completamente raggiungibile, la matrice $[B, AB]$ è non singolare e questo ci permette di trovare T. Otteniamo

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. La matrice T è univocamente determinata, quindi se i sistemi sono internamente equivalenti devono esserlo con questa matrice di trasformazione. I sistemi sono internamente equivalenti in quanto le condizioni $TAT^{-1} = \bar{A}$, $\bar{B} = TB$, $\bar{C} = CT^{-1}$ sono verificate.

4)Abbiamo che $\operatorname{Im} R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $\ker Q = [0, 1, 0, -1]^T$. Essendo $\ker Q \subset \operatorname{Im} R$, prendiamo $T_2 = [0, 1, 0, -1]^T$, da cui $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, T_4 non è presente e possiamo scegliere $T_3 = [0, 0, 0, 1]^T$. In questo modo risulta $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, che è facilmente invertibile. Quindi $\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\hat{C} = CT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. La funzione di trasferimento dipende dalla parte raggiungibile e osservabile ed è data da

$$H(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (zI - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix})^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui si ottiene

$$H(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(z-2)^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$