Stabilità: sistemi a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (*)$$

Def: $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è uno stato di equilibrio per $(*)$ se la soluzione di $(*)$ è data da $x(t) = x_0 \ \forall t \in \mathbb{R}$

Proprietà: x_0 è uno stato di equilibrio $\Leftrightarrow x_0 \in \operatorname{Ker} A$

Dim: $(\Rightarrow)$ $x(t) = x_0$ è soluzione di $(*)$, ma quindi $\dot{x}(t) = 0 = Ax(t) = Ax_0$, quindi $x_0 \in \operatorname{Ker} A$.

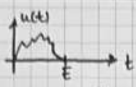
$(\Leftarrow)$ $x_0 \in \operatorname{Ker} A$: verifichiamo che $x(t) = x_0$ è soluzione: $\dot{x}(t) = 0$, $Ax(t) = Ax_0 = 0 \Rightarrow \dot{x}(t) = Ax(t)$. $\square$

Esempio: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 5/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

Def: Il sistema $(*)$ è asintoticamente stabile se $(\forall x_0 \in \mathbb{R}^n) \lim_{t \to +\infty} e^{At} \cdot x_0 = 0$.

Def: Il sistema $(*)$ è semplicemente stabile se $(\forall x_0 \in \mathbb{R}^n)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall t \geq 0) \| e^{At} x_0 \| \leq M$.

Stabilità asintotica $\Rightarrow$ stabilità semplice

Simile a quanto visto in FCA  $\xrightarrow{u(t)} \boxed{P(s)} \xrightarrow{y(t)}$ ma nel nostro caso il sistema è autonomo.

Ma le condizioni che vedremo sono molto simili a quelle viste nel corso di FCA.

Ricordiamo quali sono i modi del sistema lineare autonomo che sono legati al polinomio minimo $\mu_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{\mu_1} \cdots (\lambda-\lambda_\ell)^{\mu_\ell}$, modi $= \{t^l e^{\lambda_i t},\ i=1,\dots,\ell;\ l=0,\dots,\mu_i-1\}$. Ci interessa sapere il comportamento dei modi quando $t \to +\infty$.

Proprietà: Se $l \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$: 1. $\lim_{t\to+\infty} |t^l e^{\lambda t}| = 0 \iff \mathrm{Re}\{\lambda\} < 0$

2. $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall t \geq 0)\ |t^l e^{\lambda t}| \leq M \iff \mathrm{Re}\{\lambda\} < 0$ oppure $\mathrm{Re}\{\lambda\} = 0$ e $l = 0$.

e^{bjt} è un fasore: formula di Eulero, muove sul cerchio unitario

Dim: $\lambda = a + jb$. $\lim_{t\to+\infty} |t^l e^{\lambda t}| = \lim_{t\to+\infty} |t^l e^{(a+jb)t}| = \lim_{t\to+\infty} |t^l e^{at} \cdot e^{bjt}| = \lim_{t\to+\infty} |t^l| \cdot |e^{at}| \cdot \overbrace{|e^{bjt}|}^{=1} =$

$= \lim_{t\to+\infty} t^l \cdot e^{at} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } a > 0 \\ 0, & \text{se } a < 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} +\infty, & \text{se } a = 0 \text{ e } l > 0 \\ 1, & \text{se } a = 0 \text{ e } l = 0 \end{cases}$; $\lim_{t\to+\infty} t^l e^{\lambda t} = 0 \iff a < 0 \iff \mathrm{Re}\{\lambda\} < 0$

Inoltre $|t^l e^{\lambda t}|$ è limitato $\iff \mathrm{Re}\{\lambda\} < 0$ oppure $\mathrm{Re}\{\lambda\} = 0$ e $l = 0$. □

Proprietà: Il sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ è asintoticamente stabile $\iff (\forall \lambda \in \sigma(A))\ \mathrm{Re}\{\lambda\} < 0$.

Dim: ($\Leftarrow$) $\mu_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{\mu_1} \cdots (\lambda-\lambda_\ell)^{\mu_\ell}$, se $a(t)$ è un elemento di e^{At} allora possiamo scrivere $a(t)$ come $a(t) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{k=0}^{\mu_i-1} \alpha_{i,k} t^k e^{\lambda_i t}$; $\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} a(t) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{k=0}^{\mu_i-1} \alpha_{i,k} \underbrace{\lim_{t\to+\infty} t^k e^{\lambda_i t}}_{=0} = 0$, e quindi anche $\lim_{t\to+\infty} e^{At} = 0$

($\Rightarrow$) Per assurdo $(\exists \lambda \in \sigma(A))\ \mathrm{Re}\{\lambda\} \geq 0$; $\lambda = a + jb$, $a \geq 0$, $(\exists x_0 \in \mathbb{R}^n)\ x_0 \neq 0$ e $Ax_0 = \lambda x_0$

Consideriamo $\lim_{t\to+\infty} \|e^{At} x_0\| = \lim_{t\to+\infty} \|e^{\lambda t} x_0\| = \lim_{t\to+\infty} \|e^{(a+bj)t} x_0\| =$

$= \lim_{t\to+\infty} |e^{at}| \cdot \underbrace{|e^{bjt}|}_{=1} \cdot \|x_0\| = \lim_{t\to+\infty} e^{at} \cdot \|x_0\| = \begin{cases} +\infty, & \text{se } a > 0 \\ \|x_0\|, & \text{se } a = 0 \end{cases}$, in ogni caso il limite è $\neq 0$ e quindi il sistema non è asintoticamente stabile ↯. □

Osservazione: Questa condizione è molto simile a quella vista in FCA per sistemi descritti da funzioni di trasferimento $P(s)$: un sistema è asintoticamente stabile $\iff$ tutti i poli di P hanno parte reale strettamente negativa. Noi non guardiamo i poli ma gli autovalori della matrice A.

Proprietà: Il sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ con $\mu_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{\mu_1} \cdots (\lambda-\lambda_\ell)^{\mu_\ell}$ è semplicemente stabile $\iff$ $(\forall i \in \{1,\dots,\ell\})\ \mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0 \lor (\mathrm{Re}\{\lambda_i\} = 0 \land \mu_i = 1)$.

Dim: ($\Leftarrow$) $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $a(t)$: elemento generico di $e^{At} x_0$: $a(t) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{k=0}^{\mu_i-1} \alpha_{i,k} t^k e^{\lambda_i t}$

$|a(t)| \leq \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{k=0}^{\mu_i-1} |\alpha_{i,k}| \underbrace{|t^k e^{\lambda_i t}|}_{\text{limitato}}$ quindi $\exists C_{ik} : (\forall t \geq 0)\ |t^k e^{\lambda_i t}| \leq C_{ik}$, e quindi

$|a(t)| \leq \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{k=0}^{\mu_i-1} |\alpha_{ik}| C_{ik}$, questo non dipende da t, $|a(t)|$ è limitato per $t \geq 0$ e quindi $\|e^{At} x_0\|$ è limitato per $t \geq 0$.

($\Rightarrow$) Per assurdo $(\exists i \in \{1,\dots,\ell\})\ \mathrm{Re}\{\lambda_i\} > 0$ oppure $(\exists i \in \{1,\dots,\ell\})\ \mathrm{Re}\{\lambda_i\} = 0 \land \mu_i > 1$.

Nel primo caso $(\exists x_0 \neq 0)\ Ax_0 = \lambda_i x_0$, $\lim_{t\to+\infty} \|e^{At} x_0\| = \lim_{t\to+\infty} \|e^{\lambda_i t} x_0\|$, $\lambda_i = a + bj$

$$\lim_{t\to+\infty}\|e^{At}x_0\| = \lim_{t\to+\infty}|e^{at}|\cdot\overbrace{|e^{bjt}|}^{=1,\ \text{fasore}}\cdot\|x_0\| = \lim_{t\to+\infty}e^{at}\|x_0\| \overset{a>0}{\uparrow}{=} +\infty \ ↯$$

Nel secondo caso per far emergere il modo instabile utilizzeremo un autovettore generalizzato.

$\mu_i > 1 \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(A-\lambda_i I)^2) > \dim(\mathrm{Ker}(A-\lambda_i I)) \Rightarrow (\exists x_0 \neq 0)\ (A-\lambda_i I)^2 x_0 = 0 \wedge (A-\lambda_i I)x_0 \neq 0$

Calcoliamo $\lim_{t\to+\infty}\|e^{At}x_0\| = \lim_{t\to+\infty}\|e^{\lambda_i t}x_0 + te^{\lambda_i t}(A-\lambda_i I)x_0\|$; inoltre $\lambda_i = bj$

Ora sfruttiamo il fatto che $\|a+b\| \leq |\|a\| - \|b\||$ che è una conseguenza della disuguaglianza triangolare: $\lim_{t\to+\infty}\|e^{At}x_0\| \leq \lim_{t\to+\infty}|\|te^{bjt}(A-\lambda_i I)x_0\| - \|e^{bjt}x_0\||=$

$= \lim_{t\to+\infty}||t||e^{bjt}|\|(A-\lambda_i I)x_0\| - |e^{bjt}|\|x_0\|| = \lim_{t\to+\infty}||t|\|\underbrace{(A-\lambda_i I)x_0}_{\neq 0}\| - \|x_0\|| = +\infty \ ↯$ □

Def: Un sistema è <u>instabile</u> se non è semplicemente stabile

Esempio: • $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, $\sigma(A) = \{1,-2,-3\}$ poiché abbiamo un autovalore a parte reale >0 questo sistema è instabile.

• $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ $\sigma(A) = \{-1,-3\}$, il sistema è asintoticamente stabile

• $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\sigma(A) = \{0,-2\}$, il sistema potrebbe essere instabile o semplicemente stabile a seconda che la molteplicità di 0 nel polinomio minimo sia 1 o 2.

$\mathrm{Ker}(A-0I) = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ quindi $\mu_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda+2)$, pertanto il sistema è instabile.

• $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\chi_A(\lambda) = (\lambda^2+1)(\lambda+2)$, $\sigma(A) = \{j,-j,-2\}$, quindi il sistema è semplicemente stabile poiché tutti gli autovalori hanno parte reale ≤ 0 e quelli a parte reale $=0$ hanno molteplicità 1 in $\mu_A(\lambda)$.

• $A = \begin{bmatrix} a-2 & 0 & 0 \\ -a & 1-a & a-2 \\ 3-3a & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ $\chi_A(\lambda) = (\lambda-(a-2))(\lambda^2+a\lambda+a-1)$

A.S. $\iff \begin{cases} a-2<0 \\ a>0 \\ a-1>0 \end{cases} \iff \begin{cases} a<2 \\ a>1 \end{cases} \iff a \in (1,2)$.

Regola di Cartesio: radici $\mathrm{Re}(\lambda)<0 \iff$ coeff >0

Cosa succede al di fuori di $(1,2)$? $\lambda^2 + a_0\lambda + a_1 = 0$ se $a_0<0$ o $a_1<0 \Rightarrow$ radice con $\mathrm{Re}(\lambda)>0$

se $a<1$ il sistema è instabile, così come nel caso in cui $a>2$.

se $a=1$ $\chi_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda^2+\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2$ quindi il sistema è semplicemente stabile

se $a=2$ $\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2$, anche in questo caso il sistema è semplicemente stabile.

<u>Osservazione</u>: anche per la stabilità semplice la condizione vista in FCA per cui $P(s)$ deve avere poli a parte reale negativa oppure a parte reale nulla ma con molteplicità 1 nell'eq. caratteristica.

Nel nostro caso consideriamo il polinomio minimo.

Bounded Input
Bounded Output

Def: Il sistema $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ (A) è <u>stabile ingresso limitato-uscita limitata</u> (<u>BIBO-stabile</u>) se posto $x_0 = 0$ $(\exists M_u)(\forall t \geq 0) \|u(t)\| \leq M_u \Rightarrow (\exists M_y)(\forall t \geq 0)$ $\|y(t)\| \leq M_y$.

<u>Osservazione</u>: In FCA avete visto che un sistema è BIBO-stabile $\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} |\underbrace{p(t)}_{\text{risposta all'impulso}}| dt < +\infty$

<u>Proprietà</u>: Il sistema (A) è BIBO-stabile $\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} |h_{ij}(t)| dt < +\infty$, $\underbrace{i = 1, \dots, p}_{\#\text{uscite}}$, $\underbrace{j = 1, \dots, m}_{\#\text{ingressi}}$ dove $h(t) = (h_{ij}(t))$ è la matrice delle risposte all'impulso di (A)

Dim: ($\Leftarrow$) $\|u(t)\| \leq M_u$ $\forall t \geq 0$; avevamo visto che $y(t) = h(t) * (u(t)1(t))$, in particolare $y_i(t) = h_i(t) * (u(t)1(t))$
$= \int_{-\infty}^{+\infty} h_i(t-\tau)u(\tau)1(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} [h_{i1}(t-\tau), \dots, h_{im}(t-\tau)][u_1(\tau), \dots, u_m(\tau)]^T 1(\tau) d\tau$ da cui
$|y_i(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\sum_{k=1}^m h_{ik}(t-\tau)u_k(\tau)1(\tau)| d\tau \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^m |h_{ik}(t-\tau)u_k(\tau)1(\tau)| d\tau =$
$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^m |h_{ik}(t-\tau)| |u_k(\tau) 1(\tau)| d\tau = M_u \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^m |\underbrace{h_{ik}(t-\tau)}_{=0 \text{ se } \tau > t}| \underbrace{1(\tau)}_{=0 \text{ se } \tau < 0} d\tau =$
$= M_u \int_0^t \sum_{k=1}^m |h_{ik}(\underbrace{t-\tau}_{\ell})| d\tau$, quindi $\frac{d\ell}{d\tau} = -1$, da cui $d\tau = -d\ell$, e quindi otteniamo
$= M_u \int_t^0 - \sum_{k=1}^m |h_{ik}(\ell)| d\ell = M_u \int_0^t \sum_{k=1}^m |h_{ik}(\ell)| d\ell = M_u \sum_{k=1}^m \overbrace{\int_0^t |h_{ik}(\ell)| d\ell}^{\text{limitata per hp.}} < +\infty$. Questo vale per ogni componente e quindi $\|y(t)\|$ è limitata per $t \geq 0$.

($\Rightarrow$) Per assurdo sia $\int_0^{+\infty} |h_{ij}(t)| dt = +\infty$ e mostriamo che $(\forall M \in \mathbb{R})(\exists u) \|u(t)\| \leq 1, t \geq 0 \wedge$ $(\exists \bar{t} \in \mathbb{R}) \|y(\bar{t})\| > M$. $\hookrightarrow (\exists \bar{t} \in \mathbb{R}) \int_0^{\bar{t}} |h_{ij}(t)| dt > M$, consideriamo $u(t) = [0, \dots, 0, \underbrace{\bar{u}(t)}_{j\text{-esima}}, 0, \dots, 0]^T$
$y_i(t) = h_i(t) * (u(t)1(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{h_{ij}(t-\tau)} \bar{u}(\tau) \underline{1(\tau)} d\tau = \int_0^t h_{ij}(t-\tau)\bar{u}(\tau) d\tau$. Quindi
$y_i(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} h_{ij}(\bar{t}-\tau)\bar{u}(\tau) d\tau$, definiamo $\bar{u}(\tau) = \text{sign}\, h_{ij}(\bar{t}-\tau)$, con $\text{sign}\, x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$
$\text{sign}\, x \cdot x = |x|$, da cui $y_i(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} |h_{ij}(\bar{t}-\tau)| d\tau$, $\bar{t} - \tau =: \ell$
$y_i(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} |h_{ij}(\ell)| d\ell > M$, abbiamo trovato un ingresso limitato in norma ma $\|y(\bar{t})\| > M$ $\lightning$ $\square$

Stabilità: sistemi a tempo discreto.

<u>Def</u>: Il sistema (A, B, C, D) è <u>asintoticamente stabile</u> (<u>semplicemente stabile</u> rispettivamente) se il sistema autonomo $\dot{x}(t) = Ax(t)$ è asintoticamente stabile (semplicemente stabile rispettivamente)

Che relazione c'è tra la stabilità asintotica e quella BIBO? A.S. $\overset{\Rightarrow}{\cancel{\Leftarrow}}$ BIBO-S.

<u>Proprietà</u>: Se (A, B, C, D) è asintoticamente stabile, allora è anche BIBO-stabile.
Dim: Dobbiamo verificare che $\int_0^{+\infty} |h_{ij}(t)| dt < +\infty$. Scriviamo $\mu_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (\lambda - \lambda_\ell)^{\mu_\ell}$, inoltre
$h(t) = Ce^{At}B1(t) + D\delta(t)$, quindi $h_{ij}(t) = \underline{c_i e^{At} b_j} 1(t) + d_{ij}\delta(t)$, sia $f(t) = c_i e^{At} b_j$
$f(t) = \sum_{i=1}^\ell \sum_{k=0}^{\mu_i - 1} \alpha_{i,k} t^k e^{\lambda_i t}$, $|f(t)| \leq \sum_{i=1}^\ell \sum_{k=0}^{\mu_i - 1} |\alpha_{i,k}| \cdot |t^k| \cdot | e^{\lambda_i t}|$, $\lambda_i = a_i + jb_i$, quindi
$|f(t)| \leq \sum_{i=1}^\ell \sum_{k=0}^{\mu_i - 1} |\alpha_{i,k}| \cdot |t^k| \cdot |e^{a_i t}| \cdot \underbrace{|e^{jb_i t}|}_{=1}$, per ipotesi $a_i < 0$. $\int_0^{+\infty} |h_{ij}(t)| dt \leq$
$\leq \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^\ell \sum_{k=0}^{\mu_i - 1} |\alpha_{i,k}| t^k \cdot e^{a_i t} dt + d_{ij} = \sum_{i=1}^\ell \sum_{k=0}^{\mu_i - 1} |\alpha_{i,k}| \cdot \underbrace{\int_0^{+\infty} t^k e^{a_i t} dt}_{\text{exp. negativo} < +\infty} + d_{ij} < +\infty$ $\square$

Controesempio: $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [1, 0]$, $D = 0$. Calcoliamo $h(t) = Ce^{At}B1(t) + D\delta(t)$

$= C\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix} B1(t) = [1, 0]\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} 1(t)$, quindi $h(t) = e^{-t}1(t)$ e il sistema è BIBO-stabile ma non è asintoticamente stabile poiché $\sigma(A) = \{-1, 1\}$.

Proprietà: Un sistema con matrice delle funzioni di trasferimento $H(s)$ è BIBO-stabile <=> i poli di tutti gli elementi di $H(s)$ sono a parte reale < 0.

Nell'esempio precedente: $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = [1, 0]\cdot\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + [0] =$

$= [1, 0]\cdot\begin{bmatrix} 1/(s+1) & * \\ * & * \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s+1}$, unico polo $p = 1$ $\operatorname{Re}\{p\} < 0$ quindi il sistema è BIBO-stabile

Consideriamo ora sistemi a tempo discreto $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ (*)

Def: x_0 è uno stato di equilibrio per il sistema (*) se $x(k) = x_0$, $k \geq 0$ è soluzione di (*).

Proprietà: x_0 è uno stato di equilibrio <=> $x_0 \in \operatorname{Ker}(A - I)$

Dim: x_0 è stato di equilibrio <=> $x(k) = x_0$ è soluzione di (*) <=> $x(k+1) = Ax(k)$ <=>
$x_0 = Ax_0$ <=> $(A - I)x_0 = x_0$ <=> $x_0 \in \operatorname{Ker}(A - I)$. □

Esempio: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ Vogliamo trovare $\operatorname{Ker}(A - I)$ $\operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Ricordiamo che $x(k) = A^k x_0$, $\mu_A(\lambda) = \lambda^{\mu_0}(\lambda - \lambda_1)^{\mu_1}\cdots(\lambda - \lambda_e)^{\mu_e}$ e $a(k)$: elemento generico di A^k
allora $a(k) = \sum_{i=1}^{e}\sum_{r=0}^{\mu_i - 1}\alpha_{ir}k^r\cdot\lambda_i^k + \sum_{r=0}^{\mu_0 - 1}\beta_r\delta(k - r)$

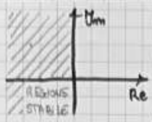
Def: Il sistema (*) è asintoticamente stabile se $(\forall x_0 \in \mathbb{R}^n)\ \lim_{k\to+\infty} x(k) = 0$.
Il sistema (*) è semplicemente stabile se $(\forall x_0 \in \mathbb{R}^n)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall k \geq 0)\ \|x(k)\| \leq M$.
Il sistema (*) è instabile se non è semplicemente stabile.

Nel caso dei sistemi a tempo discreto, i modi dati dalla delta di Dirac non giocano nessun ruolo nella stabilità perché sono modi che si esauriscono in un numero finito di passi.

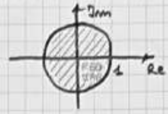
Proprietà: Se $r \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, allora 1. $\lim_{k\to+\infty} k^r\cdot\lambda^k = 0$ <=> $|\lambda| < 1$
2. $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall k \geq 0)\ |k^r\cdot\lambda^k| \leq M$ <=> $|\lambda| < 1 \vee |\lambda| = 1$ e $r = 0$

Dim: $\lambda = \rho e^{j\varphi}$ con $\overset{\text{modulo}}{\rho = |\lambda|}$, $\overset{\text{fase}}{\varphi = \arg\lambda}$, $\lim_{k\to+\infty}|k^r\cdot\lambda^k| = \lim_{k\to+\infty}|k^r\cdot(\rho e^{j\varphi})^k| =$
$= \lim_{k\to+\infty}|k^r|\cdot|\rho^k|\cdot\underline{|e^{j\varphi k}|} = \lim_{k\to+\infty} k^r\cdot\rho^k = \begin{cases} +\infty, & \rho > 1 \\ 0, & \rho < 1 \end{cases}$ $\begin{cases} +\infty, & \rho = 1, r > 0 \\ 1, & \rho = 1, r = 0 \end{cases}$
Quindi $\lim_{k\to+\infty} k^r\cdot\rho^k = 0$ <=> $\rho < 1$ e
$|k^r\cdot\rho^k|$ è limitata <=> $\rho < 1$ oppure $\rho = 1$ e $r = 0$ □

$t^n \cdot e^{\lambda t} \to 0 \iff Re\{\lambda\}<0$



$k^n \cdot \lambda^k \to 0 \iff |\lambda|<1$



Proprietà: Il sistema $x(k+1)=Ax(k)$ con $\mu_A(\lambda)=\lambda^{\mu_0}(\lambda-\lambda_1)^{\mu_1}\dots(\lambda-\lambda_\ell)^{\mu_\ell}$ è asintoticamente stabile

DIM. ANALOGA A T. CONT.

$\iff |\lambda_i|<1$ per $i=1,\dots,\ell$, ed è semplicemente stabile $\iff$ per ogni $i=1,\dots,\ell$ $|\lambda_i|<1$ oppure $|\lambda_i|=1$ e $\mu_i=1$.

Esempio:

- $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, $\sigma(A)=\{2,-1,0\}$, il sistema è instabile (2 non sta nel cerchio unitario)

- $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-1/2&0\\0&0&2/3\end{bmatrix}$, $\sigma(A)=\{0,-\frac{1}{2},\frac{2}{3}\}$, il sistema è asintoticamente stabile (tutti gli autovalori stanno nel cerchio unitario)

- $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&-1/2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\sigma(A)=\{1,-\frac{1}{2}\}$ il sistema potrebbe essere semplicemente stabile o instabile calcoliamo $\mu_A(\lambda)$. $\chi_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+\frac{1}{2})$.

$Ker(A-I)=Ker\begin{bmatrix}0&2&0\\0&-\frac{3}{2}&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ quindi $\dim Ker(A-I)=2$ e $\mu_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+\frac{1}{2})$ e quindi il sistema è semplicemente stabile.

- $A=\left[\begin{array}{c|c|c}0&0&0\\\hline 2&-3&4\\1&-1&1\end{array}\right]$ $\chi_A(\lambda)=\lambda(\lambda^2+2\lambda+1)=\lambda(\lambda+1)^2$, $\sigma(A)=\{0,-1\}$, calcoliamo $Ker(A-\lambda I)=$

$=Ker(A+I)=Ker\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-2&4\\1&-1&2\end{bmatrix}$, $\dim Ker(A+I)=1$ e quindi $\mu_A(\lambda)=\chi_A(\lambda)$ e il sistema è instabile.

- $A=\left[\begin{array}{cc|c}a+1&1&0\\-1&a-1&0\\\hline 2&4-4a&1-a\end{array}\right]$, $a\in\mathbb{R}$ $\quad \chi_A(\lambda)=(\lambda^2-2a\lambda+a^2)(\lambda-(1-a))=(\lambda-a)^2(\lambda-(1-a))$

$\sigma(A)=\{a,1-a\}$.

Se $-1<a<1$ e $-1<1-a<1$, cioè $\begin{cases}-1<a<1\\0<a<2\end{cases} \iff$

$\iff a\in(0,1)$ allora il sistema è asintoticamente stabile.

Invece se $a>1$ o $a<0$ il sistema è instabile. Vediamo cosa accade per $a=0$ o $a=1$.

Se $a=1$ $\quad A=\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&0&0\\2&0&0\end{bmatrix}$ $\quad \chi_A(\lambda)=(\lambda^2-2\lambda+1)\lambda=(\lambda-1)^2\lambda$ $\quad Ker(A-I)=Ker\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&-1&0\\2&0&1\end{bmatrix}$, $\dim Ker(A-I)=1$

quindi $\mu_A(\lambda)=(\lambda-1)^2\lambda$ e il sistema è instabile.

Se $a=0$ $\quad A=\left[\begin{array}{cc|c}1&1&0\\-1&-1&0\\\hline 2&4&1\end{array}\right]$ $\quad \chi_A(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)$ in questo caso il sistema è semplicemente stabile.

Def: Il sistema $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ $(*)$ è <u>BIBO-stabile</u> se, con la condizione iniziale $x_0 = 0$,

$(\exists M_u)(\forall k \geq 0)\|u(k)\| \leq M_u \Rightarrow (\exists M_y)(\forall k \geq 0)\|y(k)\| \leq M_y$

<u>Proprietà</u>: Il sistema $(*)$ è BIBO-stabile $\iff \sum_{k=0}^{+\infty} |h_{ij}(k)| < +\infty, \; i = 1, .., p; \; j = 1, ..., m$, dove $h(k) = (h_{ij}(k))$ è la matrice delle risposte all'impulso di $(*)$.

p = # uscite, m = # ingressi

<u>Proprietà</u>: Il sistema $(*)$ è BIBO-stabile $\iff$ tutti i poli degli elementi di $H(z)$ hanno modulo < 1.

<u>Proprietà</u>: Se (A, B, C, D) è asintoticamente stabile, allora è anche BIBO-stabile.

<u>Controesempio</u>: $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1, 0], D = 0$. Calcoliamo $H(z) = C(zI-A)^{-1}B + D =$

$= [1, 0] \cdot \begin{bmatrix} z-1/2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1, 0] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1/2} & * \\ * & * \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{z - \frac{1}{2}}$ BIBO-stabile ma non asintoticamente stabile poiché $\sigma(A) = \{\frac{1}{2}, 2\}$.

Esempio: $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 2a & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1, 0], D = 0, a \in \mathbb{R}$ per quali valori di a abbiamo che il sistema è BIBO-stabile?

$H(z) = C(zI-A)^{-1}B + D = [1, 0] \cdot \begin{bmatrix} z-a & -2 \\ -2a & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1, 0] \cdot \begin{bmatrix} z-1 & * \\ * & * \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{(z-a)(z-1) - 4a} =$

* CRITERIO DI JURY

$= \frac{z-1}{z^2 + z(-1-a) - 3a}$ Sfruttiamo un risultato visto in FCA* per cui un polinomio di secondo grado $z^2 + a_1 z + a_0$ ha radici nel cerchio unitario $\iff$ valgono 3 condizioni: 1. $|a_0| < 1$ 2. $z^2 + a_1 z + a_0|_{z=1} > 0$ 3. $z^2 + a_1 z + a_0|_{z=-1} > 0$. $[(-1)^m p(-1) > 0]$

1. $|-3a| < 1$ 2. $1 - 1 - a - 3a > 0$ 3. $1 + 1 + a - 3a > 0$.

1. $|a| < \frac{1}{3}$ 2. $a < 0$ 3. $a < 1$ Quindi mettendo insieme le tre condizioni otteniamo che per $a \in (-\frac{1}{3}, 0)$ il sistema è BIBO-stabile.