Teoria della Programmazione Lineare

I problemi di PL in forma canonica

In forma scalare:

$$
\begin{array}{lll}
\max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, \ldots, m \\
& x_j \geq 0 & j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

Prodotto scalare tra vettori

Vettore di dimensione n

$$\mathbf{p} = (p_1 \quad \cdots \quad p_n)$$

Dato un altro vettore di dimensione n

$$\mathbf{q} = (q_1 \quad \cdots \quad q_n)$$

Il prodotto scalare tra i due vettori è un valore scalare:

$$\mathbf{pq} = \sum_{j=1}^{n} p_j q_j$$

Esempio:

$$\mathbf{p} = (2\ 3\ 6) \quad \mathbf{q} = (3\ 8\ 7) \quad \mathbf{pq} = 2 * 3 + 3 * 8 + 6 * 7 = 72$$

Proprietà

Siano $\mathbf{p}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in R^n$ e $\alpha, \beta \in R$. Allora:

$$\mathbf{p}(\alpha \mathbf{q}_1 + \beta \mathbf{q}_2) = \alpha(\mathbf{p}\mathbf{q}_1) + \beta(\mathbf{p}\mathbf{q}_2)$$

Esempio:

$$\mathbf{p} = (2\ 3\ 6) \quad \mathbf{q}_1 = (1\ 2\ 5) \quad \mathbf{q}_2 = (6\ 0\ 3) \quad \alpha = 2 \quad \beta = 3$$

$$\mathbf{p}(\alpha \mathbf{q}_1 + \beta \mathbf{q}_2) = 2 * 20 + 3 * 4 + 6 * 19 = 166$$

$$\alpha(\mathbf{p}\mathbf{q}_1) + \beta(\mathbf{p}\mathbf{q}_2) = 2 * 38 + 3 * 30 = 166$$

Generalizzazione della proprietà

Dati i vettori $\mathbf{p}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_t \in R^n$ e gli scalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t \in R$, si ha che

$$\mathbf{p}[\alpha_1 \mathbf{q}_1 + \alpha_2 \mathbf{q}_2 + \cdots + \alpha_t \mathbf{q}_t] = \mathbf{p}\left[\sum_{i=1}^{t} \alpha_i \mathbf{q}_i\right] = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i (\mathbf{p}\mathbf{q}_i)$$

Prodotto matrice-vettore

Data una matrice $\mathbf{A}$ di ordine $m \times n$ (m righe e n colonne)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ed un vettore $\mathbf{p}$ di dimensione n

$$\mathbf{p} = (p_1 \quad \cdots \quad p_n)$$

Il prodotto matrice-vettore è un vettore di dimensione m la cui componente i è il prodotto scalare tra la i-esima riga di $\mathbf{A}$ e il vettore $\mathbf{p}$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j$$

Prodotto vettore-matrice

Data una matrice $\mathbf{A}$ di ordine $m \times n$ (m righe e n colonne)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

e un vettore $\mathbf{q}$ di dimensione m

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 & \cdots & q_m \end{pmatrix}$$

Il prodotto vettore-matrice è un vettore di dimensione n la cui componente j è il prodotto scalare tra la j-esima colonna di $\mathbf{A}$ e il vettore $\mathbf{q}$:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_i$$

Esempi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = (3\ 8\ 7)$$

$$\mathbf{q} = (4\ 5)$$

$$\mathbf{Ap} = (7*3+6*8+3*7 \quad 2*3+4*8+8*7) = (90 \quad 94)$$

$$\mathbf{qA} = (4*7+5*2 \;\; 4*6+5*4 \;\; 4*3+5*8) = (38 \;\; 44 \;\; 52)$$

NOTA BENE: si ha che

$$\mathbf{qA} = \mathbf{A}^T\mathbf{q}.$$

PL in forma canonica

Introduciamo i seguenti vettori:

- $\mathbf{c} \in R^n$: vettore di dimensione n con componenti c_j, $j = 1, \ldots, n$, ovvero:

$$\mathbf{c} = (c_1 \;\; c_2 \;\; \cdots \;\; c_n);$$

- $\mathbf{x} \in R^n$: vettore di variabili di dimensione n con componenti x_j, $j = 1, \ldots, n$, ovvero:

$$\mathbf{x} = (x_1 \;\; x_2 \;\; \cdots \;\; x_n);$$

- $\mathbf{a}_i \in R^n$, $i = 1, \ldots, m$: m vettori di dimensione n con componenti a_{ij}, $j = 1, \ldots, n$, ovvero:

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1} \;\; a_{i2} \;\; \cdots \;\; a_{in}).$$

PL in forma canonica

Osservando che

$$\mathbf{cx} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

e

$$\mathbf{a}_i\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

abbiamo la seguente **rappresentazione vettoriale** per un problema di PL in forma canonica:

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{cx} \\ & \mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq b_i \quad i = 1, \ldots, m \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

PL in forma canonica

Si consideri la matrice $\mathbf{A} \in R^{m \times n}$ che ha tante righe quanti sono i vincoli del problema (m) e la cui i-esima riga è il vettore $\mathbf{a}_i$ e del vettore $\mathbf{b} = (b_1 \quad \cdots \quad b_m) \in R^m$ di dimensione m con componenti b_i, $i = 1, \ldots, m$. Osservando che

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{a}_1\mathbf{x} \ \ldots \ \mathbf{a}_m\mathbf{x})$$

possiamo scrivere la **rappresentazione matriciale** del problema di PL in forma canonica:

$$\begin{aligned} \max \qquad & \mathbf{c}\mathbf{x} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Esempio degli aiuti umanitari

$$\begin{array}{rc} \text{max} & 14x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{tenuto conto che} & \\ & 10x_1 + 30x_2 + 20x_3 \leq 5100 \\ & 10x_1 + 20x_2 + 40x_3 \leq 8000 \\ & 30x_1 + 10x_2 + 5x_3 \leq 1805 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Esempio degli aiuti umanitari

Il vettore $\mathbf{c} = (14 \;\; 5 \;\; 4)$
Il vettore di variabili $\mathbf{x} = (x_1 \;\; x_2 \;\; x_3)$
I vettori $\mathbf{a}_i$, $i = 1, 2, 3$

$$\mathbf{a}_1 = (10 \;\; 30 \;\; 20) \quad \mathbf{a}_2 = (10 \;\; 20 \;\; 40) \quad \mathbf{a}_3 = (30 \;\; 10 \;\; 5)$$

Il vettore $\mathbf{b} = (5100 \;\; 8000 \;\; 1805)$
La matrice $\mathbf{A}$

$$\begin{bmatrix} 10 & 30 & 20 \\ 10 & 20 & 40 \\ 30 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

PL canonici $\equiv$ PL generici

Osservazione Ogni problema di PL in forma generica può essere trasformato in uno equivalente in forma canonica.

- **Trasformazione da $\min$ a $\max$**

$$\min \ \mathbf{cx} \ = \ -\max \ -\mathbf{cx}$$

- **Trasformazione vincolo $\geq$ in vincolo $\leq$**

$$\mathbf{a}_i\mathbf{x} \geq b_i \quad \Leftrightarrow \quad -\mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq -b_i$$

- **Trasformazione vincolo $=$ in due vincoli $\leq$**

$$\mathbf{a}_i\mathbf{x} = b_i \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq b_i, \ \ \mathbf{a}_i\mathbf{x} \geq b_i \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq b_i, \ \ -\mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq -b_i$$

PL canonici $\equiv$ PL generici

- **Sostituzione variabile ≤ 0 con variabile ≥ 0** Data $x_i \leq 0$, effettuare il cambio di variabile $x_i = -x_i'$, dove $x_i' \geq 0$
- **Sostituzione variabile libera in segno con due variabili ≥ 0** Data x_i libera in segno, effettuare il cambio di variabile $x_i = x_i'' - x_i'$, dove $x_i', x_i'' \geq 0$

Un esempio

Si trasformi il seguente problema di PL in forma generica in un problema di PL in forma canonica

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\
& x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3 \\
& x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5 \\
& x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 3 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \leq 0 \\
& x_3 \text{ libera in segno}
\end{aligned}
$$

Insiemi convessi

Un insieme $C \subseteq R^n$ si dice *convesso* se

$$\forall\, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C\ \forall\, \lambda \in [0,1]: \quad \lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \in C,$$

ovvero se dati due punti qualsiasi in C, il segmento che li congiunge è anch'esso completamente contenuto in C.

Insiemi limitati e chiusi

Un insieme C si dice *limitato* se esiste una sfera di raggio finito R che lo contiene.

Un insieme C si dice *chiuso* se contiene la sua frontiera.

Semispazi e iperpiani

Si definisce *semispazio* in R^n l'insieme di punti che soddisfa una disequazione lineare in R^n:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq v$$

(in forma vettoriale: $\mathbf{wx} \leq v$).

Si definisce *iperpiano* in R^n l'insieme di punti che soddisfa un'equazione lineare in R^n:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j = v$$

(in forma vettoriale: $\mathbf{wx} = v$).

Poliedri e politopi

Si definisce *poliedro* l'intersezione di un numero finito di semispazi e/o iperpiani. Se il poliedro è limitato esso viene chiamato *politopo*.

La regione ammissibile S_a

La regione ammissibile S_a di un problema di PL in forma canonica

$$S_a = \{\mathbf{x} \in R^n : \ \mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq b_i, \ i = 1, \ldots, m, \ \ \mathbf{x} \geq 0\}.$$

è un poliedro.

- Semispazi e iperpiani sono insiemi chiusi
- L'intersezione di un numero finito di insiemi chiusi è un insieme chiuso

$$\Downarrow$$

I poliedri (e quindi S_a) sono insiemi chiusi

Convessità

Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S_a$, ovvero

$$\mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq b_i \quad i = 1, \ldots, m \quad \mathbf{x} \geq 0,$$

e

$$\mathbf{a}_i\mathbf{y} \leq b_i \quad i = 1, \ldots, m \quad \mathbf{y} \geq 0.$$

Per ogni $\lambda \in (0, 1)$ e per ogni $i \in \{1, \ldots, m\}$ avremo:

$$\mathbf{a}_i[\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}] =$$

$$= \underbrace{\lambda}_{>0} \underbrace{\mathbf{a}_i\mathbf{x}}_{\leq b_i} + \underbrace{(1 - \lambda)}_{>0} \underbrace{\mathbf{a}_i\mathbf{y}}_{\leq b_i} \leq$$

$$\lambda b_i + (1 - \lambda) b_i = b_i.$$

Continua

Inoltre:

$$\underbrace{\lambda}_{>0}\underbrace{\mathbf{x}}_{\geq 0} + \underbrace{(1-\lambda)}_{>0}\underbrace{\mathbf{y}}_{\geq 0} \geq 0.$$

Quindi:

$$\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in S_a.$$

$$\Downarrow$$

La regione ammissibile S_a è un insieme convesso.

Limitatezza e illimitatezza

La regione ammissibile S_a può essere:

- $= \emptyset$

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 \leq -1 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- un poliedro limitato (politopo)

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Continua

- un poliedro illimitato

$$\begin{aligned} \max \qquad & x_1 + x_2 \\ & x_1 - x_2 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ricapitolando ...

... la regione ammissibile S_a di un problema di PL è un poliedro e come tale è un insieme chiuso e convesso. Inoltre, può essere un insieme vuoto, un insieme limitato (politopo) oppure un insieme illimitato.

Vertici di S_a

Si definisce *vertice* di S_a un punto $\overline{\mathbf{x}} \in S_a$ tale che non esistono due punti distinti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S_a$, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, tali che

$$\overline{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_2.$$

ovvero $\overline{\mathbf{x}}$ è il punto medio del segmento che congiunge $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$.

Alcuni risultati

Teorema

Dato un problema di PL in forma canonica, se $S_a \neq \emptyset$, allora S_a contiene almeno un vertice.

Osservazione

S_a ha sempre un numero finito di vertici.

Raggi

Nel caso S_a sia un poliedro illimitato possiamo anche introdurre le definizioni di raggio e raggio estremo.

Si definisce *raggio* di S_a un vettore $\mathbf{r}$ tale che

$$\forall\ \mathbf{x}_0 \in S_a\ \ \forall\ \lambda \geq 0 : \quad \mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{r} \in S_a,$$

cioè la semiretta con origine in $\mathbf{x}_0$ e direzione $\mathbf{r}$ è completamente contenuta in S_a per qualsiasi punto $\mathbf{x}_0 \in S_a$.

Raggi estremi

Un raggio $\mathbf{r}$ di S_a si definisce *raggio estremo* di S_a se non esistono altri due raggi $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ di S_a con direzioni distinte, ovvero

$$\mathbf{r}_1 \neq \mu \mathbf{r}_2 \quad \forall\, \mu \in R,$$

tali che

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}\mathbf{r}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{r}_2.$$

Osservazione

S_a ha sempre un numero finito di raggi estremi.

Teorema di rappresentazione di S_a

Teorema *Sia dato un problema di PL in forma canonica con* $S_a \neq \emptyset$. *Siano* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ *i vertici di* S_a *e, nel caso in cui* S_a *sia un poliedro illimitato, siano* $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_h$ *i raggi estremi di* S_a. *Allora*

$$\mathbf{x} \in S_a$$

se e solo se

$$\exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0, \ \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \ \ \exists\ \mu_1, \ldots, \mu_h \geq 0$$

tali che

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^{h} \mu_j \mathbf{r}_j .$$

Ovvero ...

... i punti in S_a sono tutti e soli i punti ottenibili come somma di

- una *combinazione convessa* dei vertici di S_a
- una *combinazione lineare con coefficienti non negativi* dei raggi estremi di S_a

Quindi un numero finito di oggetti (vertici e raggi estremi) mi permettono di rappresentare tutto l'insieme S_a.

L’insieme delle soluzioni ottime S_{ott}

Insieme soluzioni ottime

$$S_{ott} = \{\mathbf{x}^* \in S_a : \ \mathbf{cx}^* \geq \mathbf{cx} \ \ \forall\, \mathbf{x} \in S_a\},$$

$S_{ott} \subseteq S_a$, quindi $S_a = \emptyset \Rightarrow S_{ott} = \emptyset$.

Una, nessuna, infinite

Osservazione

Se S_{ott} *è un insieme finito e non vuoto,* S_{ott} *contiene un solo punto.*

Dimostrazione Per assurdo sia S_{ott} un insieme finito e contenga più di un punto. Siano $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S_{ott}$, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, due punti distinti di S_{ott}.

Continua

Per l'ottimalità di $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ si deve avere $\mathbf{c}\mathbf{x}_1 = \mathbf{c}\mathbf{x}_2$.

Per la convessità di S_a e $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S_a$:

$$\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \in S_a \quad \forall\, \lambda \in (0,1),$$

Per la linearità della funzione obiettivo $\forall\, \lambda \in (0,1)$:

$$\mathbf{c}[\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2] = \lambda \mathbf{c}\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{c}\mathbf{x}_2 = \lambda \mathbf{c}\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{c}\mathbf{x}_1 = \mathbf{c}\mathbf{x}_1.$$

Quindi:

$$\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \in S_{ott} \quad \forall\, \lambda \in (0,1)$$

cioè tutto il segmento che congiunge $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ è contenuto in S_{ott}, il che contraddice la finitezza dell'insieme S_{ott}.

Le diverse forme possibili di S_{ott}

- **Caso 1** $S_a = \emptyset \Rightarrow S_{ott} = \emptyset$.
- **Caso 2** $S_a \neq \emptyset$ e politopo.
  Politopo è insieme chiuso e limitato, funzione obiettivo è lineare e quindi continua $\Rightarrow$ (Teorema di Weierstrass) $S_{ott} \neq \emptyset$.
  Sono possibili due sottocasi.

Caso 2.1 S_{ott} è costituito da un solo punto.

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 2x_1 + x_2 \\
& x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Continua

Caso 2.2 S_{ott} è costituito da un insieme infinito e limitato di punti.

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Continua

- **Caso 3** $S_a \neq \emptyset$ e poliedro illimitato. Sono possibili quattro sottocasi.

  Caso 3.1 $S_{ott} = \emptyset$ in quanto l'obiettivo è illimitato, ovvero esiste una sequenza infinita di punti $\{\mathbf{x}_k\}$ di S_a lungo cui la funzione obiettivo cresce a $+\infty$. Formalmente:

$$\exists \; \{\mathbf{x}_k\} \; : \; \mathbf{x}_k \in S_a \; \forall \; k \;\; \text{e} \;\; \mathbf{c}\mathbf{x}_k \to +\infty \;\; k \to +\infty.$$

$$\begin{aligned} \max \qquad & x_1 + x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 0 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Continua

Caso 3.2 S_{ott} è costituito da un solo punto.

$$\begin{array}{ll} \max & -x_1 \\ & -x_1 + x_2 \leq 0 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Continua

Caso 3.3 S_{ott} è costituito da un insieme infinito e limitato di punti.

$$
\begin{array}{ll}
\max & -x_2 \\
 & -x_1 + x_2 \leq 0 \\
 & x_1 - x_2 \leq 1 \\
 & x_2 \geq 1 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Continua

Caso 3.4 S_{ott} è costituito da un insieme infinito e illimitato di punti.

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 0 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Un lemma

Lemma

Dato un problema di PL in forma canonica, se $S_{ott} \neq \emptyset$, allora per ogni raggio estremo $\mathbf{r}$ di S_a si ha:

$$\mathbf{cr} \leq 0.$$

Dimostrazione

Per assurdo supponiamo esista un raggio estremo $\mathbf{r}$ tale che

$$\mathbf{cr} > 0$$

$S_{ott} \neq \emptyset \Rightarrow S_a \neq \emptyset$.

Sia $\mathbf{x}_0 \in S_a$. Per definizione di raggio avremo che

$$\forall\ \lambda \geq 0\ \ :\ \ \ \mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{r} \in S_a.$$

Valore funzione obiettivo in punti $\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{r}$:

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{r}) = \mathbf{cx}_0 + \lambda \underbrace{\mathbf{cr}}_{>0} \underbrace{\rightarrow}_{\lambda \rightarrow +\infty} +\infty$$

Allora $S_{ott} = \emptyset$ in quanto l'obiettivo è illimitato sulla regione ammissibile, il che contraddice $S_{ott} \neq \emptyset$.

Teorema fondamentale della PL

Teorema

Dato un problema di PL in forma canonica, se $S_{ott} \neq \emptyset$*, allora* S_{ott} *contiene almeno un vertice di* S_a*.*

Dimostrazione

Siano $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ i vertici di S_a e, nel caso in cui S_a sia un poliedro illimitato, indichiamo con $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_h$ i raggi estremi di S_a.

Se $S_{ott} \neq \emptyset$, sia $\mathbf{x}^* \in S_{ott}$.

Per assurdo supponiamo che

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \notin S_{ott}$$

da cui:

$$\mathbf{c}\mathbf{v}_i < \mathbf{c}\mathbf{x}^* \quad i = 1, \ldots, k$$

Continua

Per il teorema di rappresentazione di S_a, $\mathbf{x}^* \in S_a$ implica che

$$\exists\ \lambda_1^*, \ldots, \lambda_k^* \geq 0, \ \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* = 1, \ \ \exists\ \mu_1^*, \ldots, \mu_h^* \geq 0$$

tali che

$$\mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^{h} \mu_j^* \mathbf{r}_j.$$

Quindi:

$$\mathbf{c}\mathbf{x}^* = \mathbf{c} \left[\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^{h} \mu_j^* \mathbf{r}_j \right]$$

Continua

Per la linearità della funzione obiettivo

$$\mathbf{c}\mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* (\mathbf{c}\mathbf{v}_i) + \sum_{j=1}^{h} \mu_j^* (\mathbf{c}\mathbf{r}_j).$$

Dal lemma precedente:

$$\mathbf{c}\mathbf{r}_j \leq 0 \quad j = 1, \ldots, h.$$

Continua

Quindi:

$$\mathbf{c}\mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* (\mathbf{c}\mathbf{v}_i) + \sum_{j=1}^{h} \underbrace{\mu_j^*}_{\geq 0} \underbrace{(\mathbf{c}\mathbf{r}_j)}_{\leq 0}.$$

da cui:

$$\mathbf{c}\mathbf{x}^* \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* (\mathbf{c}\mathbf{v}_i).$$

Continua

Da $\mathbf{c}\mathbf{v}_i < \mathbf{c}\mathbf{x}^*$, $\forall\ i$ segue che:

$$\mathbf{c}\mathbf{x}^* \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \underbrace{(\mathbf{c}\mathbf{v}_i)}_{<\mathbf{c}\mathbf{x}^*} < \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* (\mathbf{c}\mathbf{x}^*).$$

NB: lo strettamente minore vale perchè almeno uno dei λ_i^* è strettamente positivo in quanto la loro somma deve essere pari a 1.

Quindi:

$$\mathbf{c}\mathbf{x}^* < (\mathbf{c}\mathbf{x}^*) \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* = \mathbf{c}\mathbf{x}^*.$$

il che è assurdo.

Un commento

Il teorema fondamentale della PL è alla base della procedura di risoluzione che descriveremo, l'*algoritmo del simplesso*.

Infatti, tale algoritmo ricerca la soluzione ottima cercando di spostarsi ad ogni iterazione in modo intelligente da un vertice all'altro di S_a. Per modo intelligente si intende che l'algoritmo tenta di spostarsi ad una data iterazione da un vertice a uno con valore della funzione obiettivo maggiore.

I problemi di PL in forma standard

I problemi di PL in forma *standard* hanno la seguente formulazione:

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{c}\mathbf{x} \\ & \mathbf{a}_i\mathbf{x} = b_i \quad i = 1, \ldots, m \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

o, equivalentemente, in forma matriciale:

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{c}\mathbf{x} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

Un'osservazione

Osservazione

Ogni problema di PL in forma canonica può essere trasformato in uno equivalente in forma standard.

Dimostrazione

Problema di PL in forma canonica

$$\begin{array}{rl} \max & \mathbf{c}\mathbf{x} \\ & \mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq b_i \quad i = 1, \ldots, m \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

$$\mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq b_i \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a}_i\mathbf{x} + y_i = b_i, \quad y_i \geq 0.$$

Quindi, il problema di PL in forma canonica è equivalente al seguente:

$$\begin{array}{rl} \max & \mathbf{c}\mathbf{x} \\ & \mathbf{a}_i\mathbf{x} + y_i = b_i \quad i = 1, \ldots, m \\ & \mathbf{x} \geq 0 \\ & y_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

che è in forma standard.

Continua

Ogni problema di PL può essere ricondotto ad uno equivalente in forma canonica.

Ogni problema in forma canonica può essere ricondotto ad uno equivalente in forma standard.

Quindi: ogni problema di PL può essere ricondotto ad uno equivalente in forma standard.

NB: nella pratica si passa direttamente da un problema di PL in forma generica ad uno equivalente in forma standard, senza passare necessariamente attraverso un problema in forma canonica.

Un esempio

Si trasformi il seguente problema di PL in forma generica in un problema di PL in forma standard

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\
& x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3 \\
& x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5 \\
& x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 3 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \leq 0 \\
& x_3 \text{ libera in segno}
\end{aligned}
$$

Ipotesi aggiuntiva

Si richiede che la matrice dei vincoli $\mathbf{A} \in R^{m \times n}$ *abbia rango (= numero di righe linearmente indipendenti = numero di colonne linearmente indipendenti) pari a* m*, il numero delle sue righe*, il che equivale a richiedere che:

- non ci sono righe di $\mathbf{A}$ ottenibili come combinazioni lineari di altre righe di $\mathbf{A}$;
- esistono m colonne della matrice $\mathbf{A}$ che formano una matrice quadrata invertibile.

NB: Si può dimostrare che anche questa non è una condizione restrittiva e che ci si può sempre ricondurre ad essa.

Esempi

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Rango di $\mathbf{A}_1 < m = 3$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Rango di $\mathbf{A}_2 = m = 2$

Base di un problema di PL

Si definisce *base* di un problema di PL in forma standard un sottinsieme:

$$B = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\}$$

di m delle n variabili del problema di PL con la proprietà che la matrice $\mathbf{A}_B \in R^{m \times m}$ ottenuta considerando le sole colonne di $\mathbf{A}$ relative alle variabili x_{i_k}, $k = 1, \dots, m$, sia invertibile.

Le variabili dell'insieme B verranno dette *variabili in base*, quelle al di fuori di B verranno raggruppate nell'insieme:

$$N = \{x_{i_{m+1}}, \dots, x_{i_n}\}$$

e verranno dette *variabili fuori base*.

Un esempio

Dato

$$
\begin{array}{ll}
\max & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \\
& x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 2 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

Matrice dei vincoli

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}
$$

Continua

$B_1 = \{x_1, x_2\} \rightarrow$ non è una base. Infatti

$$\mathbf{A}_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{non è invertibile}$$

Invece, $B_2 = \{x_1, x_3\}$ è una base in quanto:

$$\mathbf{A}_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{è invertibile}$$

Allo stesso modo si verifichi che $B_3 = \{x_3, x_4\}$ e $B_4 = \{x_4, x_5\}$ sono basi.

Riformulazione rispetto alla base B

Data una base B, indichiamo con:

- $\mathbf{x}_B \in R^m$ il vettore delle variabili in base
- $\mathbf{x}_N \in R^{n-m}$ il vettore delle variabili fuori base
- $\mathbf{c}_B \in R^m$ il vettore dei costi relativi alle variabili in base
- $\mathbf{c}_N \in R^{n-m}$ il vettore dei costi relativi alle variabili fuori base
- $\mathbf{A}_N \in R^{m \times (n-m)}$ la matrice ottenuta da $\mathbf{A}$ considerando le sole colonne relative alle variabili fuori base.

Nell'esempio

Con la base $B = \{x_1, x_3\}$ abbiamo:

- $\mathbf{x}_B = (x_1 \;\; x_3)$
- $\mathbf{x}_N = (x_2 \;\; x_4 \;\; x_5)$
- $\mathbf{c}_B = (3 \;\; 2)$
- $\mathbf{c}_N = (4 \;\; 2 \;\; 1)$
- $$\mathbf{A}_N = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Riscrittura della riformulazione

Possiamo ora riscrivere il problema di PL in forma standard nella seguente forma equivalente:

$$\begin{array}{rc} \max & \mathbf{c}_B\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N\mathbf{x}_N \\ & \mathbf{A}_B\mathbf{x}_B + \mathbf{A}_N\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq 0 \end{array}$$

e quindi anche in questo modo:

$$\begin{array}{rc} \max & \mathbf{c}_B\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N\mathbf{x}_N \\ & \mathbf{A}_B\mathbf{x}_B = \mathbf{b} - \mathbf{A}_N\mathbf{x}_N \\ & \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq 0 \end{array}$$

Nell’esempio

$$\max \quad \overbrace{3x_1 + 2x_3}^{\mathbf{c}_B\mathbf{x}_B} + \overbrace{4x_2 + 2x_4 + x_5}^{\mathbf{c}_N\mathbf{x}_N}$$

$$\overbrace{x_1 + 2x_3}^{\mathbf{A}_B\mathbf{x}_B} + \overbrace{2x_2 + \ x_4 - x_5}^{\mathbf{A}_N\mathbf{x}_N} = 2$$

$$x_1 + \ x_3 + 2x_2 + 4x_4 - 2x_5 = 2$$

$$\underbrace{x_1, x_3}_{\mathbf{x}_B}, \underbrace{x_2, x_4, x_5}_{\mathbf{x}_N} \geq 0$$

E quindi ...

$$\max \quad \overbrace{3x_1 + 2x_3}^{\mathbf{c}_B\mathbf{x}_B} + \overbrace{4x_2 + 2x_4 + x_5}^{\mathbf{c}_N\mathbf{x}_N}$$

$$\overbrace{x_1 + 2x_3}^{\mathbf{A}_B\mathbf{x}_B} = \overbrace{2 - 2x_2 - x_4 + x_5}^{\mathbf{b}-\mathbf{A}_N\mathbf{x}_N}$$

$$x_1 + x_3 = 2 - 2x_2 - 4x_4 + 2x_5$$

$$\underbrace{x_1, x_3}_{\mathbf{x}_B}, \underbrace{x_2, x_4, x_5}_{\mathbf{x}_N} \geq 0$$

Continua

Moltiplichiamo ora i vincoli di uguaglianza per $\mathbf{A}_B^{-1}$:

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{c}_B\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N\mathbf{x}_N \\ & \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_B\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\mathbf{x}_N \\ & \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq 0 \end{array}$$

e quindi da $\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_B\mathbf{x}_B = \mathbf{I}\mathbf{x}_B = \mathbf{x}_B$

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{c}_B\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N\mathbf{x}_N \\ & \mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\mathbf{x}_N \\ & \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq 0 \end{array}$$

Questo equivale a risolvere il sistema dato dai vincoli di uguaglianza considerando la variabili in base come *incognite* del sistema e quelle fuori base come *parametri*.

Nell'esempio

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_3 + 4x_2 + 2x_4 + x_5 \\ & x_1 = 2 - 2x_2 - 7x_4 + 3x_5 \\ & x_3 = 0 + 3x_4 - x_5 \\ & x_1, x_3, x_2, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Riformulazione rispetto alla base B

Infine, sostituendo $\mathbf{x}_B$ nell'obiettivo:

$$\mathbf{c}_B\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N\mathbf{x}_N = \mathbf{c}_B\left(\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\mathbf{x}_N\right) + \mathbf{c}_N\mathbf{x}_N$$

da cui:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}_B\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N)\mathbf{x}_N \\ & \mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\mathbf{x}_N \\ & \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq 0 \end{aligned}$$

Questa riformulazione viene detta *riformulazione del problema di PL rispetto alla base B*.

NB: tale riformulazione è del tutto equivalente al problema originario di PL.

Nell'esempio

Riformulazione rispetto alla base $B = \{x_1, x_3\}$:

$$\begin{array}{ll} \max & 6 - 2x_2 - 13x_4 + 8x_5 \\ & x_1 = 2 - 2x_2 - 7x_4 + 3x_5 \\ & x_3 = 0 + 3x_4 - x_5 \\ & x_1, x_3, x_2, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Soluzioni di base

Si definisce *soluzione di base* associata alla base B, la seguente soluzione del sistema di vincoli di uguaglianza ottenuta ponendo $\mathbf{x}_N = 0$:

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} \quad \mathbf{x}_N = 0.$$

Nell'esempio:

$$x_1 = 2 \;\; x_3 = 0 \;\; x_2 = x_4 = x_5 = 0$$

Ammissibilità e non degenerazione

Se $\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} \geq 0$ la soluzione di base si dice *ammissibile*. Questo vuol dire che appartiene alla regione ammissibile del problema di PL in quanto, oltre a soddisfare i vincoli di uguaglianza del problema, soddisfa anche quelli di non negatività delle variabili.

Se inoltre si ha $\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} > 0$ si parla di soluzione di base *non degenere*, altrimenti si parla di soluzione di base *degenere*.

Nell'esempio

$B_2 = \{x_1, x_3\} \rightarrow$ soluzione di base ammissibile e degenere

$B_3 = \{x_3, x_4\}$: la soluzione di base è

$$x_3 = 6/7 \;\; x_4 = 2/7 \;\; x_1 = x_2 = x_5 = 0,$$

che è ammissibile e non degenere

$B_4 = \{x_4, x_5\}$: la soluzione di base è

$$x_4 = -1 \;\; x_5 = -3 \;\; x_1 = x_2 = x_3 = 0,$$

che è non ammissibile.

Osservazione

Data una soluzione di base ammissibile e non degenere esiste un'unica base che la rappresenta, mentre una soluzione di base ammissibile e degenere è rappresentata da più basi.

Si verifichi, ad esempio, che la base $B_5 = \{x_1, x_4\}$ ha come soluzione di base associata:

$$x_1 = 2 \quad x_4 = 0 \quad x_2 = x_3 = x_5 = 0,$$

che è la stessa associata alla base B_2.

Ma ...

... cosa hanno a che fare le basi e le soluzioni di base con il teorema fondamentale della PL?

La risposta ci viene dalla seguente osservazione.

Osservazione *L'insieme dei vertici di* S_a *coincide con l'insieme delle soluzioni di base ammissibili del problema di PL.*

In pratica, vertici e di soluzioni di base ammissibili sono la stessa cosa vista da due punti di vista diversi: quello geometrico (i vertici) e quello algebrico (le soluzioni di base ammissibili).

Basi adiacenti

Due basi B' e B'' si definiscono *adiacenti* se hanno $m-1$ variabili uguali e differiscono per una sola variabile.

Nell'esempio le basi $B_3 = \{x_3, x_4\}$ e $B_4 = \{x_4, x_5\}$ sono adiacenti, mentre non lo sono $B_2 = \{x_1, x_3\}$ e B_4.

Soluzioni di base adiacenti

Due soluzioni di base *distinte* si definiscono adiacenti se esistono due basi B' e B'' che le rappresentano e che sono tra loro adiacenti.

Si noti che due basi adiacenti non corrispondono necessariamente a due soluzioni di base adiacenti. Esse infatti possono corrispondere alla stessa soluzione di base come accade, ad esempio, con le basi $B_2 = \{x_1, x_3\}$ e $B_5 = \{x_1, x_4\}$.

Riformulazione rispetto alla base B

Sia data la base:

$$B = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\}.$$

con

$$N = \{x_{i_{m+1}}, \ldots, x_{i_n}\}$$

l'insieme delle variabili fuori base. Abbiamo visto che, data la base B, la riformulazione del problema di PL rispetto alla base B è data da

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{c}_B\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N)\mathbf{x}_N \\ & \mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\mathbf{x}_N \\ & \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq 0 \end{array}$$

Continua

Indichiamo con:

- γ_0 il valore $\mathbf{c}_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b}$;
- γ_j, $j = 1, \ldots, n-m$, le componenti del vettore

$$\mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N;$$

- β_r, $r = 1, \ldots, m$, le componenti del vettore $\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b}$;
- α_{rj}, $r = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n-m$, le componenti della matrice $-\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N$

Continua

In forma scalare possiamo riscrivere la riformulazione rispetto alla base B nel seguente modo:

$$
\begin{array}{ll}
\max & \gamma_0 + \sum_{j=1}^{n-m} \gamma_j x_{i_{m+j}} \\
& x_{i_1} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{n-m} \alpha_{1j} x_{i_{m+j}} \\
& \cdots \\
& x_{i_k} = \beta_k + \sum_{j=1}^{n-m} \alpha_{kj} x_{i_{m+j}} \\
& \cdots \\
& x_{i_m} = \beta_m + \sum_{j=1}^{n-m} \alpha_{mj} x_{i_{m+j}} \\
& x_1, \ldots, x_n \geq 0
\end{array}
$$

Nell'esempio

Riformulazione rispetto alla base $B_2 = \{x_1, x_3\}$:

$$\begin{array}{rl} \max & 6 - 2x_2 - 13x_4 + 8x_5 \\ & x_1 = 2 - 2x_2 - 7x_4 + 3x_5 \\ & x_3 = 0 + 3x_4 - x_5 \\ & x_1, x_3, x_2, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Passaggio ad una base adiacente

Supponiamo ora di voler passare dalla base B alla base adiacente B' ottenuta rimuovendo da B la variabile x_{i_k}, $1 \leq k \leq m$, e sostituendola con la variabile fuori base $x_{i_{m+h}}$, $1 \leq h \leq n-m$, ovvero:

$$B' = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}}, x_{i_{m+h}}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_m}\}.$$

La prima domanda che ci dobbiamo porre è :

quando B' è effettivamente una base. Perché lo sia si deve avere che $A_{B'}$ è invertibile.

Continua

Si ha che $\mathbf{A}_{B'}$ è invertibile e quindi B' è una base **se e solo se** nella riformulazione associata alla base B il coefficiente di $x_{i_{m+h}}$ nell'equazione relativa a x_{i_k} è diverso da 0, ovvero se e solo se:

$$\alpha_{kh} \neq 0.$$

Nell'esempio:
$\{x_1, x_2\}$ non è una base
$\{x_1, x_5\}$ è una base

L'operazione di cardine

Tale operazione consente di passare dalla riformulazione rispetto alla base B a quella rispetto alla base adiacente B'. Per fare questo dovremo compiere le seguenti operazioni.

- Ricavare $x_{i_{m+h}}$ dall'equazione relativa a x_{i_k}, cioè:

$$x_{i_{m+h}} = -\frac{\beta_k}{\alpha_{kh}} + \frac{1}{\alpha_{kh}} x_{i_k} - \sum_{j=1,\ j\neq h}^{n-m} \frac{\alpha_{kj}}{\alpha_{kh}} x_{i_{m+j}}.$$

- sostituire ogni occorrenza della variabile $x_{i_{m+h}}$ nelle restanti equazioni e nell'obiettivo con la parte destra di tale equazione

Esempio

Dalla riformulazione rispetto a $B_2 = \{x_1, x_3\}$ a quella rispetto a $B_6 = \{x_1, x_5\}$

- Ricavo x_5 dall'equazione relativa a x_3

$$x_5 = 0 - x_3 + 3x_4$$

- Sostituisco la parte destra dell'equazione nei restanti vincoli e nell'obiettivo

$$\begin{aligned}
\max \qquad & 6 - 2x_2 - 13x_4 + 8(0 - x_3 + 3x_4) \\
& x_1 = 2 - 2x_2 - 7x_4 + 3(0 - x_3 + 3x_4) \\
& x_5 = 0 - x_3 + 3x_4 \\
& x_1, x_3, x_2, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

Riformulazione rispetto a $B_6 = \{x_1, x_5\}$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 6 - 2x_2 - 8x_3 + 11x_4 \\
& x_1 = 2 - 2x_2 + 2x_4 - 3x_3 \\
& x_5 = 0 - x_3 + 3x_4 \\
& x_1, x_3, x_2, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Nota bene

Per poter recuperare dalle riformulazioni alcune informazioni (nel seguito vedremo, ad esempio, come sfruttare la riformulazione rispetto a una base B per poter ottenere la matrice $\mathbf{A}_B^{-1}$) è necessario mantenere un ordine tra le variabili in una base. Quindi se nella base B' la variabile $x_{i_{m+h}}$ sostituisce la variabile x_{i_k} a cui corrisponde la k-esima equazione della riformulazione rispetto a B, nella riformulazione rispetto a B' l'equazione relativa alla variabile $x_{i_{m+h}}$ dovrà ancora essere la k-esima, mentre la posizione delle equazioni relative a tutte le altre variabili deve rimanere invariata rispetto alla precedente riformulazione.

Nell'esempio ...

... la variabile x_5 ha preso il posto della x_3 e l'equazione relativa alla x_5 è stata messa nella stessa posizione (la seconda) in cui si trovava quella della x_3, mentre la restante equazione ha mantenuto la posizione originaria.

Un altro esempio

Passaggio da $B_6 = \{x_1, x_5\}$ a $B_4 = \{x_4, x_5\}$

- Ricavo x_4 dall'equazione relativa a x_1

$$x_4 = -1 + 1/2x_1 + x_2 + 3/2x_3$$

- Sostituisco la parte destra dell'equazione nei restanti vincoli e nell'obiettivo

$$\begin{array}{rl} \max & 6 - 2x_2 - 8x_3 + 11(-1 + 1/2x_1 + x_2 + 3/2x_3) \\ & x_4 = -1 + 1/2x_1 + x_2 + 3/2x_3 \\ & x_5 = 0 - x_3 + 3(-1 + 1/2x_1 + x_2 + 3/2x_3) \\ & x_1, x_3, x_2, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Continua

Riformulazione rispetto a $B_4 = \{x_4, x_5\}$:

$$\begin{aligned} \max \qquad & -5 + 11/2x_1 + 9x_2 + 17/2x_3 \\ x_4 &= -1 + 1/2x_1 + x_2 + 3/2x_3 \\ x_5 &= -3 + 3/2x_1 + 3x_2 + 7/2x_3 \\ & x_1, x_3, x_2, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Nota bene

Le operazioni di cardine che abbiamo eseguito sugli esempi ci hanno consentito di passare da una base ad una adiacente e, nel secondo esempio, anche da una soluzione di base ad una adiacente. Tuttavia, nel secondo caso siamo passati da una soluzione di base ammissibile (quella associata a B_6) ad una non ammissibile (quella associata a B_4). Nell'algoritmo di risoluzione che ci apprestiamo a discutere la scelta della base adiacente verso cui muoversi non verrà fatta a caso come abbiamo fatto nei precedenti esempi, ma sarà guidata da regole precise che fondamentalmente ci consentiranno di spostarsi tra vertici della regione ammissibile migliorando il valore della funzione obiettivo.