Ricerca operativa

Ollari Ischimji Dmitri

13 ottobre 2023

Indice

Elenco delle figure

Elenco delle tabelle

Capitolo 1

Modelli

1.1 Flusso a costo minimo

Tipico problema di calcolo computazionale che ha le seguenti caratteristiche per i nodi:

- **Nodi sorgente**: nodi che producono il flusso
- **Nodi destinazione**: nodi che consumano il flusso
- **Nodi transito**: nodi che non sono né sorgenti né destinazioni

Per ogni arco $(i, j) \in A$ sono associati dei costi unitari c_{ij} per unità di flusso che si spostano da i a j, è possibile la presenza di d_{ij} che indica la capacità massima dell'arco (i, j).

Il prodotto *trasmesso* lungo un'arco del grafo è il flusso x_{ij}, che deve essere minore o uguale alla capacità ma non negativo.

Per calcolare il flusso uscente dal nodo i:

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} \tag{1.1}$$

Mentre il flusso uscente dal nodo i:

$$\sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} \tag{1.2}$$

I vincoli del problema derivanti dalla conservazione del flusso sono:

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} = b_i \quad \forall i \in V \tag{1.3}$$

Il modello matematico completo è:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \tag{1.4}$$

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} = b_i \quad \forall i \in V \tag{1.5}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij} \quad \text{interi} \quad \forall (i, j) \in A \tag{1.6}$$

1.1.1 Matrice dei vincoli

La matrice cha ha tante **righe** quanti sono i **vincoli** e tante **colonne** quante sono le **variabili**.

La matrice dei vincoli di uguaglianza per i problemi di flusso a costo minimo coincide con la matrice di incidenza **nodo-arco** della rete.

	x_{12}	x_{13}	x_{15}	x_{23}	x_{42}	x_{34}	x_{53}	x_{45}
1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	-1	0	0	1	-1	0	0	0
3	0	-1	0	-1	0	1	-1	0
4	0	0	0	0	0	-1	0	1
5	0	0	-1	0	0	0	0	-1

1.1.2 Esempio

Rete $G = (V, A)$ con $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e

$$A = \{(1,2); (1,3); (1,5); (2,3); (3,4); (4,2); (4,5); (5,3)\}$$

(i,j)	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(3,4)$	$(4,2)$	$(4,5)$	$(5,3)$
c_{ij}	5	-2	2	-4	0	6	3	4

i	1	2	3	4	5
b_i	2	5	1	-4	-4

Figura 1.1: Matrice dei vincoli

Il modello matematico dell'esempio è:

$$\min 5x_{12} - 4x_{23} + 6x_{42} - 2x_{13} + 0x_{34} + 3x_{15} + 4x_{53} + 3x_{45} \tag{1.7}$$

$$x_{12} + x_{13} + x_{15} = 2 \tag{1.8}$$

$$x_{23} - x_{12} - x_{42} = 5 \tag{1.9}$$

$$x_{34} - x_{13} - x_{23} - x_{53} = 1 \tag{1.10}$$

$$x_{42} + x_{45} - x_{34} = -4 \tag{1.11}$$

$$x_{53} + x_{15} - x_{45} = -4 \tag{1.12}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A \tag{1.13}$$

La matrice dei vincoli è:
Il modello matematico per la risoluzione scritto in **ampl** è:

```
### INSIEMI ###
  set NODI ;
  set ARCHI within NODI cross NODI ;
### PARAMETRI ###
  param b{NODI};
  param c{ARCHI} ;
  param d{ARCHI} >= 0, default Infinity ;
### VARIABILI ###
  var x{(i, j) in ARCHI} >= 0, <= d[i,j], integer ;
### VINCOLI ###
  subject to bilancio{i in NODI} : sum{j in NODI : (i, j) in ARCHI} x[i,j] -
     sum{j in NODI :
  (j, i) in ARCHI} x[j,i] = b[i] ;
### OBIETTIVO ###
  minimize costo_totale : sum{(i, j) in ARCHI} c[i,j]*x[i,j] ;
```

I dati del problema sono:

```
### INSIEMI ###
    set NODI := n1 n2 n3 n4 n5 ;
    set ARCHI := (n1,n2) (n1,n3) (n1,n5) (n2,n3) (n3,n4) (n4,n2) (n4,n5)
        (n5,n3) ;
### PARAMETRI ###
    param b :=
    n1 2
    n2 5
    n3 1
    n4 -4
    n5 -4 ;

    param c :=
    n1 n2 5
    n1 n3 -2
    n1 n5 2
    n2 n3 -4
    n3 n4 0
    n4 n2 6
    n4 n5 3
    n5 n3 4 ;
```

1.2 Flusso massimo

Simile al problema di flusso a costo minimo, ma senza i costi unitari c_{ij}, quindi si vuole massimizzare il flusso che attraversa la rete.

1.2.1 Modello matematico

Le variabili del modello matematico per questo problema sono:

- $x_{ij} \geq 0$: flusso lungo l'arco (i, j)
- d_{ij}: capacità massima dell'arco (i, j)
- $x_{ij} \leq d_{ij} \quad \forall (i, j) \in A$
- $\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} = \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} \quad \forall i \in V \backslash \{S, D\}$ equivalente a dire che il flusso entrante in un nodo è uguale al flusso uscente dal nodo

L'obiettivo del problema è quello di massimizzare la quantità di flusso che esce dal nodo sorgente S:

$$\sum_{j:(S,j)\in A} x_{Sj} \tag{1.14}$$

Che corrisponde al'aumentare il flusso del nodo destinazione D:

$$\sum_{j:(j,D)\in A} x_{jD} \tag{1.15}$$

Il modello matermatico completo è:

$$\max \sum_{j:(S,j)\in A} x_{Sj} \tag{1.16}$$

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} = \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} \quad \forall i \in V \backslash \{S, D\} \tag{1.17}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \tag{1.18}$$

OSS: La matrice dei vincoli di uguaglianza del problema di flusso massimo coincide con la matrice di incidenza node-arco della rete senza i nodi sorgente e destinazione.

1.2.2 Esempio

La rete ha le seguenti caratteristiche:

Arco	$(S,1)$	$(S,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(2,3)$	$(2,1)$	$(3,D)$	$(4,D)$
Capacità	3	2	1	4	1	1	1	7

Il modello matematico per l'esempio è:

$$\max x_{S1} + x_{S2} \tag{1.19}$$
$$x_{13} + x_{14} - x_{S1} = 0 \tag{1.20}$$
$$x_{23} + x_{24} - x_{S2} = 0 \tag{1.21}$$
$$x_{3D} - x_{13} - x_{23} = 0 \tag{1.22}$$
$$x_{4D} - x_{14} - x_{24} = 0 \tag{1.23}$$
$$0 \leq x_{S1} \leq 3 \tag{1.24}$$
$$0 \leq x_{S2} \leq 2 \tag{1.25}$$
$$0 \leq x_{13} \leq 1 \tag{1.26}$$
$$0 \leq x_{14} \leq 4 \tag{1.27}$$
$$0 \leq x_{23} \leq 1 \tag{1.28}$$
$$0 \leq x_{24} \leq 1 \tag{1.29}$$
$$0 \leq x_{3D} \leq 1 \tag{1.30}$$
$$0 \leq x_{4D} \leq 7 \tag{1.31}$$
$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{interi} \quad \forall (i,j) \in A \tag{1.32}$$

La matrice dei vincoli che ne consegue è:

	x_{S1}	x_{S2}	x_{13}	x_{14}	x_{23}	x_{24}	x_{3D}	x_{4D}
1	-1	0	1	1	0	0	0	0
2	0	-1	0	0	1	1	0	0
3	0	0	-1	0	-1	0	1	0
4	0	0	0	-1	0	-1	0	1

Il modello matematico per la risoluzione scritto in **ampl** è:

```
### INSIEMI ###
   set NODI ;
   set ARCHI within NODI cross NODI ;
### PARAMETRI ###
   param Sorgente symbolic in {NODI};
   param Destinazione symbolic in {NODI} , != Sorgente ;
   param d{ARCHI} >= 0, default Infinity ;
### VARIABILI ###
   var x{(i, j) in ARCHI} >= 0, <= d[i,j], integer ;
### VINCOLI ###
   subject to equilibrio{i in NODI diff {Sorgente, Destinazione}} : sum{j
      in NODI : (i, j) in
```

```
   ARCHI} x[i,j] - sum{j in NODI : (j, i) in ARCHI} x[j,i] = 0 ;
### OBIETTIVO ###
   maximize flusso_uscente : sum{j in NODI : (Sorgente,j) in ARCHI}
      x[Sorgente,j] ;
```

Capitolo 2

Teoria della programmazione lineare

I problemi di programmazione lineare(PL) in forma scalare canonica sono sempre problemi di massimo con vincoli di minore uguale e con vincoli non negativi.

In forma scalare i problemi di programmazione lineare sono espressi come:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \tag{2.2}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \tag{2.3}$$

Mediante l'uso dei **vettori** osservo che:

$$cx = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.4}$$

$$\tag{2.5}$$

$$a_i x = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \tag{2.6}$$

In questo modo posso riscrivere il problema di programmazione lineare come:

$$\max cx \tag{2.7}$$

$$a_i x \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \tag{2.8}$$

$$x \geq \tag{2.9}$$

Anche le matrici vengono in aiuto, considerando una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ che ha tante **righe** quanti i vincoli (m) e la ci i-esima riga è il vettore a_i.

Si considera anche il vettore $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ di dimensione m che contiene i termini noti dei vincoli.

Nota che $Ax = (a_1 x, \dots, a_m x)$, la reppresentazione **matriciale** è :

$$\max cx \tag{2.10}$$

$$Ax \leq b \tag{2.11}$$

$$x \geq 0 \tag{2.12}$$

2.1 PL canonici $\equiv$ PL generici

2.1.1 Trasformazione da min a max

$$\min cx \equiv -\max -cx \tag{2.13}$$

2.1.2 Trasformazione da $\geq$ a $\leq$

$$a_i x \geq b_i \equiv -a_i x \leq -b_i \tag{2.14}$$

2.1.3 Trasformazione da = a $\leq$

$$a_i x = b_i \equiv \begin{cases} a_i x \leq b_i \\ -a_i x \leq -b_i \end{cases} \tag{2.15}$$

2.1.4 Sostituzione variabili ≤ 0 con variabili ≥ 0

Data una variabile $x_j \leq 0$ si sostituisce con $x_j = -x'_j$ dove $x'_j \geq 0$.

2.1.5 Sostituzione variabili libere con differenza di variabili ≥ 0

Avendo una variabile x_j libera si sostituisce con $x'_j - x''_j$ con $x'_j, x''_j \geq 0$.

2.2 Insiemi

2.2.1 Insieme convesso

Un'insieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso se:

$$\forall x_1, x_2 \in C, \quad \forall \lambda \in [0,1]: \quad \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C \tag{2.16}$$

Il segmento che unisce i due punti fa parte dell'insieme.

2.2.2 insiemi limitati e chiusi

Un'insieme C è limitato se esiste una sfera di raggio finito che contiene C.

Un'insieme C è chiuso se contiene tutti i suoi punti di frontiera.

2.2.3 Semispazio e iperpiano

Si definisce semispazio in $\mathbb{R}^n$ l'insieme di punti che soddisfano una disequazione lineare del tipo:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq v \tag{2.17}$$

In forma vettoriale posso riscrivere come:

$$wx \leq v \tag{2.18}$$

Si definisce iperpiano in $\mathbb{R}^n$ l'insieme di punti che soddisfano una disequazione lineare del tipo:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j = v \tag{2.19}$$

In forma vettoriale posso riscrivere come:

$$wx = v \tag{2.20}$$

2.2.4 Poliedro e politopo

Si definisce poliedro l'insieme di un numero finito di semispazi e/o iperpiani, se il poliedro è limitato, l'intersezione prende il nome di politopo(letto come politopò e non politòpo).

2.3 Regione ammissibile

La regione ammissibile S_a di un problema di PL in forma canonica è un poliedro:

$$S_a = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i x \leq b_i, i = 1, \ldots, m, x \geq 0\} \tag{2.21}$$

Si noti che:

- I sempispazi e iperspazi sono insiemi chiusi
- L'intersezione di insiemi chiusi è un insieme chiuso

I poliedri sono insiemi chiusi, quindi anche la regione ammissibile S_a è un'insieme chiuso.

2.3.1 Convessità

Siano $x, y \in S_a$:

$$a_i x \leq b_i, i = 1, \ldots, m, x \geq 0 \tag{2.22}$$
$$a_i y \leq b_i, i = 1, \ldots, m, y \geq 0 \tag{2.23}$$

Quindi $\forall \lambda \in (0, 1)$ e $\forall i = 1, \ldots, m$:

$$a_i[\lambda x + (1 - \lambda)y] = \tag{2.24}$$
$$= \lambda b_i + (1 - \lambda) b_i \tag{2.25}$$
$$= b_i \tag{2.26}$$

Inoltre:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in S_a \tag{2.27}$$

Che ci fa capire che S_a è convesso.

2.3.2 Limitatezza e illimitatezza

La regione ammissibile Sa di un problema di PL è un poliedro e come tale è un insieme chiuso e convesso. Inoltre, può essere un insieme vuoto, un insieme limitato (politopo) oppure un insieme illimitato.

2.4 Vertici della regione ammissibile

Si definisce vertice di S_a un punto $\bar{x} \in S_a$ tale che $\nexists x_1, x_2 \in S_a, x \neq x_2$ tali che:

$$\bar{x} = 0.5x_1 + 0.5x_2 \tag{2.28}$$

Ovvero $\bar{x}$ è il punto medio del segmento che unisce x_1 e x_2.

Ne derica che se un problema di programmazione in forma canonica ha $S_a \neq \emptyset$, allora ha almeno un vertice.

2.5 Raggi

Nel caso S_a sia un poliedro illimitato, si definisce **raggio** di S_a un vettore r tale che:

$$\forall x_0 \in S_a, \quad \forall \lambda \geq 0, \quad x_0 + \lambda r \in S_a \tag{2.29}$$

La semiretta con origine in x_0 e direzione r è completamente contenuta in S_a per qualunque valore di $x_0 \in S_a$.

2.6 Raggi estremi

Un raggio r di S_a è detto **estremo** se non esistono altri due raggi r_1 e r_2 con direzioni distinte tali che:

$$r_1 \neq \mu r_2 \forall \mu \in \mathbb{R} \tag{2.30}$$

tali che:

$$r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) \tag{2.31}$$

S_a ha sempre un numero finto di raggi estremi.

2.7 Teorema di S_a

Sia dato un problema di Programmazione lineare in forma canonica con $S_a \neq \emptyset$. Siano $v_1, \ldots, v_k$ i vertici di S_a e nel caso in cui S_a sia un poliedro illimitato, siano $r_1, \ldots, r_h$ i raggi estremi di S_a.

Allora $x \in S_a$ se e solo se:

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \quad \exists \mu_1, \ldots, \mu_h \geq 0 \tag{2.32}$$

tali che:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{h} \mu_j r_j \tag{2.33}$$

NOTA: I punti in S_a sono tutti e soli i punti ottenibili come somma di:

- una combinazione convessa dei vertici di S_a
- una combinazione lineare con coefficienti non negativi dei raggi estremi di S_a

Quindi un numero finito di oggetti (vertici e raggi estremi) mi permettono di rappresentare tutto l'insieme S_a.

2.8 Insieme delle soluzioni ottime di S_{ott}

$$S_{ott} = \{x^* \in S_a : cx^* \geq cx \forall x \in S_a\} \tag{2.34}$$

L'insieme delle soluzioni ottime è un sottoinsieme di S_a.

2.8.1 Forme di S_{ott}

- $S_a = \emptyset \implies S_{ott}$
- $S_a \neq \emptyset$ e politopo(insieme chiuso e limitato) $\implies S_{ott} \neq \emptyset$:
  - S_{ott} ha un solo punto
  - S_{ott} ha infiniti punti
- $S_a \neq \emptyset$ e poliedro illimitato:
  - $S_{ott} = \emptyset$ obiettivo illimitato(sequenza infinita di punti che aumento la funzione obiettivo all'infinito)
  - S_{ott} è costituito da un solo punto
  - S_{ott} è costituito da un'insieme infinito e limitato di punti
  - S_{ott} è costituito da un'insieme infinito e illimitato di punti