Corso di Sistemi Multivariabili

Esercizi: serie 1

1) Per le seguenti matrici trova il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo

$$a)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad c)A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$b)A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad d)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2) Trova tutte le soluzioni dell'equazione $Ax = y$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3) Trova l'immagine ed il kernel delle seguenti matrici

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad c)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4) Calcola l'esponenziale di matrice e^{At} nei casi seguenti

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad b)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad c)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzioni

1) a) La matrice è triangolare superiore e si trova subito $\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$, inoltre $\dim\ker(A-I) = 2$ e $\dim\ker(A-2I) = 2$, da cui $m_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)$. b) Sviluppando lungo la seconda riga si trova $\chi_A(\lambda) = -(\lambda-2)^3$. Inoltre $(A-2I) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ha rango 1, quindi kernel di dimensione 2, da cui necessariamente $(A-2I)^2 = 0$ e quindi il polinomio minimo è $m_a(\lambda) = (\lambda-2)^2$.

c)$\chi_a(\lambda) = -(\lambda-3)^2(\lambda-1)$, inoltre $\dim\ker(A-3I) = 1$, quindi il polinomio minimo coincide con quello caratteristico. d)$\chi_a(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-j)(\lambda+j)$. Visto che tutte le radici hanno molteplicità algebrica 1 il polinomio minimo coincide con quello caratteristico.

2) Costruiamo la matrice composta

$$[A|y] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

applichiamo la riduzione a gradini di Gauss: scambiamo le prime due righe e sottraiamo alla terza due volte la prima

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & -8 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

aggiungiamo alla terza riga la seconda moltiplicata per 4

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] .$$

Chiamiamo $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T$. Il sistema di equazioni diventa (scartando la terza riga che non da informazioni)

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 1$$
$$x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 .$$

Partiamo dalla seconda equazione, questa ha 4 nuove incognite, quindi ne possiamo scegliere 3 a piacimento:

$$x_5 = t,\ x_4 = s,\ x_3 = r$$

da cui $x_2 = -t - 2s - r$, dalla prima equazione

$$x_1 = -2(-t - 2s - r) - 3r - 4s + t + 1 = -r - t + 1 .$$

Le soluzioni sono date quindi da

$$\left\{ x = \begin{bmatrix} -r - t + 1 \\ -t - 2s - r \\ r \\ s \\ t \end{bmatrix} | r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

possono essere scritte anche in forma di sottospazio affine come

$$x = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

3) a) La matrice ha rango 2 quindi Im $A = \mathbb{R}^2$, il teorema nullità più rango ci dice che il kernel ha dimensione 1 (numero di colonne della matrice meno la dimensione dell'immagine), visto che la prima e la terza colonna della matrice sono uguali, $\ker A = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

b) La matrice ha rango 1, quindi Im $A = \mathbb{R}$, il kernel ha dimensione 2 ed è dato da $\ker A = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

c) Per stabilire il rango della matrice eseguiamo la riduzione a gradini di Gauss, otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui vediamo che A ha rango due, una base dell'immagine di A è data ad esempio dalle sue prime due colonne, quindi Im $A = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. Per il teorema N+R il kernel di A ha dimensione 2. Vediamo che nella forma ridotta a gradini la terza colonna si ottiene sommando le prime 2 e la quarta sommando alla seconda due volte la prima, quindi $\ker A = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$.

4) a) Il polinomio caratteristico è dato da $\chi_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2$. Inoltre $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \ker(A-I)$ mentre $\ker(A-2I)$ ha dimensione 2, due suoi generatori sono dati da $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_3 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Visto che A ha una base di autovalori, scegliamo questi come dati iniziali di un insieme fondamentale di soluzioni

$$\Psi(t) = [e^{At}v_1, e^{At}v_2, e^{At}v_3] = [e^t v_1, e^{2t}v_2, e^{2t}v_3],$$

infine

$$e^{At} = \Phi(t,0) = \Psi(t)\Psi(0)^{-1} = [e^t v_1, e^{2t}v_2, e^{2t}v_3][v_1, v_2, v_3]^{-1}.$$

Nota che $[v_1, v_2, v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ è facilmente invertibile e la sua inversa è $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Si ottiene dunque

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t & 4\,\mathrm{e}^{2\,t} - 4\,\mathrm{e}^t & 10\,\mathrm{e}^{2\,t} - 10\,\mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^{2\,t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2\,t} \end{bmatrix}.$$

b) Il polinomio caratteristico è $\chi_A(\lambda) = -(\lambda-4)^3$. Inoltre $A - 4I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ha il kernel di dimensione 2, quindi $(A-4I)^2 = 0$. Dunque

$$e^{(A-4I)t} = I + (A-4I) \to e^{At} = e^4 t(I + (A-4I)t) = e^{4t}\begin{bmatrix} 1-t & t & 0 \\ -t & t+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Il polinomio caratteristico è $\chi_A(\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda-1)$. Per costruire una matrice fondamentale, scegliamo $v_1 = e_3 \in \ker(A-I)$ (autovettore di $\lambda = 1$), $v_2 = e_1 \in \ker(A-2I)$ (autovettore di $\lambda = 2$) e infine $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \ker(A-2I)^2$ (autovettore generalizzato di $\lambda = 2$). Una matrice fondamentale è data da

$$\Psi(t) = [e^t v_1, e^{2t} v_2, e^{2t}(I + (A-2I)t)v_3] = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{e}^{2\,t} & t\,\mathrm{e}^{2\,t} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2\,t} \\ \mathrm{e}^{t} & 0 & \mathrm{e}^{2\,t} \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$e^{At} = \Psi(t)\Psi(0)^{-1} = \Psi(t)[v_1, v_2, v_2]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2\,t} & t\,\mathrm{e}^{2\,t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2\,t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2\,t} - \mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{t} \end{bmatrix}.$$