Corso di Sistemi Multivariabili

Esercizi: serie 4

1) Considera il sistema a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

metti le matrici A e B nella forma standard per i sistemi non completamente raggiungibili per i casi seguenti

a)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & -6 & 8 \\ 6 & 1 & -5 & 5 \\ 5 & 0 & -5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2)

a) Calcola $X_R(k)$, per ogni $k > 0$, per il seguente sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ -3 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [-1 \quad 1 \quad 1 \quad -1].$$

b) Calcola la forma standard per i sistemi non completamente raggiungibili e la funzione di trasferimento del sistema.

3) Dato il sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

con $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, trova una funzione di controllo u che permetta di portare il sistema dallo stato iniziale $x(0) = 0$ allo stato finale $x_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ al tempo 1.

Soluzioni

1) a) Costruiamo la matrice di raggiungibilità: $AB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin \text{Im } B$, $A^2B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.
Risulta $A^2B = 2B - AB$ e non è necessario calcolare A^3B. Abbiamo che $\text{Im } R = \text{Im } [B \quad AB]$ e prendiamo $T = [T_1, T_2]$ con $T_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Questa particolare matrice T coincide con la sua inversa. Troviamo

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi $A_r = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $A_{NR} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. $B_R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Gli autovalori raggiungibili sono quindi $\sigma(A_R) = \{-2, 1\}$, quelli non raggiungibili sono $\sigma(A_{NR}) = \{-1, -2\}$.

b) Chiamiamo b_1 e b_2 le due colonne di B. Abbiamo che $\text{Im } Ab_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{Im } B$, mentre $Ab_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A^2b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \text{span}\{b_1, Ab_1\}$. Quindi $\text{Im } R = \text{span}\{b_1, b_2, Ab_1\} = \text{Im } T_1$, dove $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Completiamo T_1 con $T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e definiamo $T = [T_1, T_2]$. Abbiamo che $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ otteniamo

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori raggiungibili sono $\sigma(A_R) = \{1\}$, quelli non raggiungibili sono $\sigma(A_{NR}) = \{2\}$.

2) a)

$$X_R(1) = \text{Im } B \,,$$

$$x_R(2) = \text{Im } [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,,$$

$$x_R(3) = \text{Im } [B \quad AB \quad A^2B] = \text{Im } [B \quad AB]$$

infatti A^2B è una combinazione lineare di B e AB.

b)Scegliamo $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Da cui $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, otteniamo quindi

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{C} = CT = [-3 \quad 1 \quad 1 \quad -1].$$

La funzione di trasferimento è data da

$$H(z) = C_R(zI - A_R)^{-1}B_R = \frac{z-5}{(z-2)(z-1)} \,.$$

3) $X_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ mettiamo il sistema nella forma di raggiungibilità con la matrice $T = [T_1, T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ otteniamo $\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & -1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}$, $\hat{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Lo stato finale x_f appartiene all'insieme di raggiungibilità e ha coordinate $z_f = T^{-1}x_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Essendo il dato iniziale nullo abbiamo che $\dot{z}_1 = A_R z_1 + B_R u$. La coordinata z_1 dello stato finale è data da $z_{f,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Calcoliamo il controllo richiesto u con il metodo del gramiano di raggiungibilità costruito sulla parte raggiungibile del sistema, abbiamo

$$W_R(0,1) = \int_0^1 (e^{A_R(1-\tau)})^T B_R B_R^T e^{A_r(1-\tau)} d\tau = \begin{bmatrix} \frac{e^2-1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1-e^{-2}}{2} \end{bmatrix} \,,$$

otteniamo

$$W_R(0,1)^{-1} = \frac{4}{(e^2-1)(1-e^{-2})-4} \begin{bmatrix} \frac{1-e^{-2}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{e^2-1}{2} \end{bmatrix}$$

quindi $W_R(0,1)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{(e^2-1)(1-e^{-2})-4} \begin{bmatrix} 1-e^{-2} \\ -2 \end{bmatrix}$, essendo $e^{A_r(1-t)} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{(1-t)} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-(1-t)} \end{bmatrix}$

si ottiene $u(t) = B_R^T (e^{A_R(1-t)})^T W_R(0,T)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\frac{e^{(1-t)}(1-e^{-2})-2e^{t-1}}{(e^2-1)(1-e^{-2})-4}$.