Il metodo del simplesso

Ipotesi iniziale

Data la base B e la riformulazione rispetto a essa:

$$
\begin{array}{ll}
\max & \gamma_0 + \sum_{j=1}^{n-m} \gamma_j x_{i_{m+j}} \\
& x_{i_1} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{n-m} \alpha_{1j} x_{i_{m+j}} \\
& \cdots \\
& x_{i_k} = \beta_k + \sum_{j=1}^{n-m} \alpha_{kj} x_{i_{m+j}} \\
& \cdots \\
& x_{i_m} = \beta_m + \sum_{j=1}^{n-m} \alpha_{mj} x_{i_{m+j}} \\
& x_1, \ldots, x_n \geq 0
\end{array}
$$

supponiamo che $\beta_k \geq 0, k = 1, \ldots, m$, ovvero la base B è ammissibile (la soluzione di base associata è ammissibile).

Nota bene

Due problemi non banali sono:

- stabilire se *esiste una base ammissibile* (o, equivalentemente, stabilire se $S_a \neq \emptyset$)
- nel caso esista, determinarne una.

Questi problemi li affronteremo in seguito. Per il momento supponiamo di avere già a disposizione una base ammissibile B.

Coefficienti di costo ridotto

I coefficienti γ_j delle variabili fuori base nell'obiettivo della riformulazione rispetto alla base B vengono detti *coefficienti di costo ridotto delle variabili fuori base*.

Questi esprimono la variazione dell'obiettivo in corrispondenza dell'incremento di un'unità della variabile fuori base corrispondente.

Infatti ...

... se consideriamo l'obiettivo della riformulazione:

$$\gamma_0 + \sum_{j=1}^{n-m} \gamma_j x_{i_{m+j}},$$

e supponiamo di tenere a 0 il valore di tutte le variabili fuori base tranne la variabile $x_{i_{m+h}}$ il cui valore viene incrementato a 1, otteniamo Il nuovo valore dell'obiettivo $\gamma_0 + \gamma_h$ con una variazione rispetto al valore γ_0 (quello nella soluzione di base associata a B) pari proprio al valore γ_h del coefficiente di costo ridotto della variabile fuori base $x_{i_{m+h}}$.

Un esempio

Sia data la seguente riformulazione rispetto alla base ammissibile $\{x_1, x_2\}$ di un problema di PL:

$$\begin{aligned} \max \qquad & 2 + x_3 - x_4 \\ & x_1 = 2 + x_3 + x_4 \\ & x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Il valore dell'obiettivo nella corrispondente soluzione di base è la costante che appare nell'obiettivo (2).

Continua

Se teniamo a 0 il valore di x_4 e portiamo a 1 quello di x_3, il valore dell'obiettivo diventa 3, con una variazione pari al coefficiente di costo ridotto (+1) di x_3.

Se teniamo a 0 il valore di x_3 e portiamo a 1 quello di x_4, il valore dell'obiettivo diventa 1, con una variazione pari al coefficiente di costo ridotto (-1) di x_4.

Verifica di ottimalità

Alla base ammissibile B è associata una soluzione di base ammissibile (un vertice di S_a). Posso stabilire se questa soluzione appartiene a S_{ott}?

Data una variabile fuori base, il cui valore è nullo nella soluzione di base associata a B, quando "conviene" far crescere da 0 il valore di tale variabile?

Solo quando il suo coefficiente di costo ridotto è positivo, altrimenti il valore dell'obiettivo o rimane invariato (se il coefficiente è nullo) o diminuisce (se è negativo).

Quindi ...

... se tutte le variabili fuori base hanno coefficiente di costo ridotto minore o uguale a 0, ovvero

$$\gamma_j \leq 0 \quad j = 1, \ldots, n - m.$$

la soluzione di base associata a B è soluzione ottima del problema di PL.

Una dimostrazione formale

Il valore dell'obiettivo in corrispondenza della soluzione di base associata a B è γ_0.

Inoltre in S_a si ha $x_{i_{m+j}} \geq 0$, $j = 1, \ldots, n-m$.

Quindi per il valore dell'obiettivo in S_a si avrà:

$$\gamma_0 + \sum_{j=1}^{n-m} \underbrace{\gamma_j}_{\leq 0} \underbrace{x_{i_{m+j}}}_{\geq 0} \leq \gamma_0,$$

ovvero in S_a il valore dell'obiettivo non può mai superare il valore γ_0. Essendo questo anche il valore dell'obiettivo per la nostra soluzione di base, tale soluzione di base è anche soluzione ottima del nostro problema.

In forma vettoriale

Ricordando che γ_j sono le componenti del vettore $\mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N$ (detto anche, per questa ragione, vettore dei coefficienti di costo ridotto), in forma vettoriale la condizione sufficiente di ottimalità si esprime nel modo seguente:

$$\mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N \leq 0.$$

La condizione non è necessaria!

Può succedere che la soluzione di base sia già una soluzione ottima ma la condizione di ottimalità non sia soddisfatta. Ciò però può accadere *solo nel caso di una soluzione di base degenere.*

Un esempio

Sia data la seguente riformulazione rispetto alla base $\{x_3, x_4\}$ di un problema di PL:

$$\begin{aligned} \max \qquad & x_1 \\ & x_3 = 1 - x_2 \\ & x_4 = -x_1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

La soluzione di base corrispondente è:

$$x_3 = 1 \quad x_4 = 0 \quad x_1 = x_2 = 0.$$

Si noti che è degenere. La condizione di ottimalità non è soddisfatta (il coefficiente di x_1 nell'obiettivo è pari a 1).

Continua

Passiamo ora, con l'operazione di cardine, alla base adiacente $\{x_1, x_3\}$. La riformulazione rispetto a questa base è la seguente:

$$\begin{array}{lr} \max & -x_4 \\ & x_3 = 1 - x_2 \\ & x_1 = -x_4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Ora la condizione di ottimalità è soddisfatta e quindi la soluzione di base associata è ottima. Ma se osserviamo la soluzione di base associata, questa coincide esattamente con la precedente.

Osservazione

Si può dimostrare che data una soluzione di base ottima *esiste sempre almeno una base corrispondente per la quale la condizione di ottimalità è soddisfatta*.

Nell'esempio abbiamo visto come la stessa soluzione di base sia rappresentata sia dalla base $\{x_3, x_4\}$ che dalla base $\{x_1, x_3\}$. La prima base non soddisfa la condizione, ma questa è soddisfatta dalla seconda base.

Verifica di illimitatezza

Supponiamo ora che la condizione di ottimalità non sia soddisfatta. Un'altra domanda che possiamo porci è la seguente: quando il problema ha valore dell'obiettivo illimitato?

Una condizione sufficiente perché questo si verifichi è la seguente:

$$\exists\ \gamma_h > 0\ :\quad \alpha_{rh} \geq 0 \quad r = 1, \ldots, m.$$

Infatti ...

... nella riformulazione rispetto alla base B poniamo a zero tutte le variabili fuori base tranne la variabile $x_{i_{m+h}}$ con $\gamma_h > 0$. Ciò che rimane è:

$$
\begin{array}{ll}
\max & \gamma_0 + \gamma_h x_{i_{m+h}} \\
& x_{i_1} = \beta_1 + \alpha_{1h} x_{i_{m+h}} \\
& \cdots \\
& x_{i_m} = \beta_m + \alpha_{mh} x_{i_{m+h}} \\
& x_1, \ldots, x_n \geq 0
\end{array}
$$

Cosa succede se faccio crescere il valore della variabile $x_{i_{m+h}}$?

Continua

Per ogni $r \in \{1, \ldots, m\}$:

$$x_{i_r} = \underbrace{\beta_r}_{\geq 0} + \underbrace{\alpha_{rh}}_{\geq 0} \underbrace{x_{i_{m+h}}}_{\geq 0} \geq 0,$$

quindi per ogni possibile valore non negativo di $x_{i_{m+h}}$ le variabili in base continuano ad avere valore non negativo e quindi rimaniamo all'interno di S_a.

Ma vediamo ora cosa succede all'obiettivo:

$$\gamma_0 + \underbrace{\gamma_h}_{>0} x_{i_{m+h}} \underbrace{\longrightarrow}_{x_{i_{m+h}} \to +\infty} +\infty,$$

da cui $S_{ott} = \emptyset$ in quanto il valore dell'obiettivo è illimitato in S_a.

Un esempio

Sia data la seguente riformulazione rispetto alla base $\{x_1, x_2\}$ di un problema di PL:

$$\begin{array}{lr} \max & 2 + x_3 - x_4 \\ & x_1 = 2 + x_3 + x_4 \\ & x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Il coefficiente di x_3 nell'obiettivo è positivo e non negativi sono anche i coefficienti di x_3 nelle equazioni dei vincoli.

Continua

Se poniamo $x_4 = 0$ e $x_3 = t \geq 0$ il problema diventa:

$$\begin{array}{ll} \max & 2 + t \\ & x_1 = 2 + t \\ & x_2 = 1 + 2t \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

da cui si nota che i punti

$$x_1 = 2 + t \quad x_2 = 1 + 2t \quad x_3 = t \quad x_4 = 0$$

sono tutti in S_a per ogni $t \geq 0$, mentre il valore dell'obiettivo cresce a $+\infty$ al crescere di t a $+\infty$.

Cambio di base

Cosa succede se nessuna delle due condizioni di arresto (ottimalità e illimitatezza) è soddisfatta?

Effettuo un cambio di base passando da quella attuale ad una adiacente.

Ma come scelgo la base adiacente verso cui spostarmi?

Voglio cercare di spostarmi in una base adiacente tale che:

- sia ancora ammissibile;
- la soluzione di base corrispondente abbia valore della funzione obiettivo non peggiore rispetto a quella attuale.

Variabile da far entrare in base

Scelgo la variabile fuori base da far entrare in base cercando di *garantire un miglioramento del valore dell'obiettivo*

Quali variabili fuori base (e quindi a valore nullo nella soluzione di base) possono consentirmi di migliorare il valore dell'obiettivo?

Dovremo far crescere quelle con coefficiente di costo ridotto γ_j positivo (facendo crescere le altre il valore dell'obiettivo diminuisce oppure non cambia). Quindi dobbiamo restringere l'attenzione alle sole variabili $x_{i_{m+j}}$ tali che $\gamma_j > 0$.

E...

... se c'è più di una variabile con coefficiente di costo ridotto positivo?

Qui adotteremo la regola di scelta tra queste variabili che consiste nel scegliere quella che fa crescere più rapidamente il valore dell'obiettivo e cioè la variabile $x_{i_{m+h}}$ tale che:

$$\gamma_h = \max_{j=1,\ldots,n-m} \gamma_j,$$

tenendo comunque presente che questa non è l'unica regola possibile.

Nel caso il massimo sia raggiunto da più variabili adottiamo (come pura convenzione) la regola di selezionare la variabile con indice più piccolo.

Nell'esempio

Data la seguente riformulazione rispetto alla base $\{x_1, x_2\}$ di un problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \max & 2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \\ & x_1 = 1 - x_3 + x_4 + x_5 \\ & x_2 = 2 - x_3 - x_4 - x_5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

In questo caso tutte le variabili fuori base hanno coefficiente di costo ridotto positivo. Tra queste considero quelle il cui coefficiente di costo ridotto è massimo (la x_3 e la x_4). Tra le due scelgo quella con indice minore e quindi la x_3. Quindi scegliamo la variabile fuori base x_3 come nuova variabile da far entrare in base.

Variabile uscente dalla base

Una volta scelta la variabile $x_{i_{m+h}}$ che dovrà entrare in base, quale variabile in base dovrà farle posto, ovvero quale sarà la variabile in base x_{i_k} che dovrà uscire dalla base?

Se la scelta della variabile che entra in base è guidata dal desiderio di far crescere il valore dell'obiettivo, la scelta della variabile uscente dalla base sarà motivata dal desiderio di non uscire dalla regione ammissibile.

Continua

Nella riformulazione rispetto alla base corrente fissiamo a 0 tutte le variabili fuori base tranne la $x_{i_{m+h}}$. Si avrà dunque:

$$\begin{array}{ll} \max & \gamma_0 + \gamma_h x_{i_{m+h}} \\ & x_{i_1} = \beta_1 + \alpha_{1h} x_{i_{m+h}} \\ & \cdots \\ & x_{i_m} = \beta_m + \alpha_{mh} x_{i_{m+h}} \\ & x_1, \ldots, x_n \geq 0 \end{array}$$

Fino a quando possiamo far crescere il valore di $x_{i_{m+h}}$ senza uscire dalla regione ammissibile?

Continua

Abbiamo due casi:

- **Caso 1** Per tutti gli $r \in \{1, \ldots, m\}$ tali che $\alpha_{rh} \geq 0$ vediamo che:

$$x_{i_r} = \beta_r + \underbrace{\alpha_{rh}}_{\geq 0} \underbrace{x_{i_{m+h}}}_{\geq 0} \geq \beta_r \geq 0.$$

Quindi in questo caso non abbiamo alcuna restrizione sulla crescita di $x_{i_{m+h}}$.

Continua

- **Caso 2** Per gli r tali che $\alpha_{rh} < 0$, allora vediamo che il valore di $x_{i_{m+h}}$ può crescere al massimo fino a:

$$-\frac{\beta_r}{\alpha_{rh}}$$

e oltre questo valore la variabile x_{i_r} assume valori negativi (si esce quindi dalla regione ammissibile S_a).

Quindi ...

... se vogliamo rimanere in S_a, ci dobbiamo arrestare non appena una variabile x_{i_r} con $\alpha_{rh} < 0$ si annulla al crescere di $x_{i_{m+h}}$. Questa sarà la variabile x_{i_k} tale che

$$\alpha_{kh} < 0 \quad \text{e} \quad -\frac{\beta_k}{\alpha_{kh}} = \min_{r\,:\,\alpha_{rh}<0} \left\{ -\frac{\beta_r}{\alpha_{rh}} \right\}.$$

(*Criterio dei minimi rapporti*).
Nel caso il minimo sia raggiunto da più variabili la scelta ricade, per convenzione, su quella con indice più piccolo.
La variabile x_{i_k} sarà quella che uscirà dalla base.

Nell'esempio

Abbiamo precedentemente scelto x_3 come variabile entrante in base. Quale variabile dovrà uscire dalla base? Sia la x_1 che la x_2 sono candidate (per entrambe il coefficiente di x_3 nelle rispettive equazioni è negativo). Qual è la prima che si annulla al crescere di x_3?

Continua

Fissando a 0 tutte le variabili fuori base tranne la x_3 si ottiene:

$$
\begin{array}{ll}
\max & 2 + 2x_3 \\
& x_1 = 1 - x_3 \\
& x_2 = 2 - x_3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

e si può vedere che per mantenersi in S_a (cioè per mantenere non negative le variabili in base x_1 e x_2) possiamo far crescere x_3 al massimo fino al valore 1. In corrispondenza di tale valore si annulla la variabile x_1 e tale variabile sarà quella che dovrà uscire di base.

Continua

Equivalentemente, utilizzando il criterio dei minimi rapporti:

$$x_1 \rightarrow \ -\frac{1}{-1} = 1 \quad x_2 \rightarrow \ -\frac{2}{-1} = 2.$$

Il minimo dei rapporti (pari a 1) è raggiunto in corrispondenza della variabile x_1 e quindi questa sarà la variabile che dovrà uscire dalla base.

E infine ...

... una volta selezionata la variabile entrante in base (la $x_{i_{m+h}}$) e quella uscente di base (la x_{i_k}) con le regole viste, non resta che compiere l'operazione di cardine nel modo già descritto in precedenza ottenendo la riformulazione rispetto alla nuova base B'.

Nell'esempio

Entra x_3 ed esce x_1.

L'operazione di cardine porta alla seguente riformulazione rispetto alla nuova base $B' = \{x_2, x_3\}$:

$$\begin{array}{ll} \max & 4 - 2x_1 + 4x_4 + 3x_5 \\ & x_3 = 1 - x_1 + x_4 + x_5 \\ & x_2 = 3 + x_1 - 2x_4 - 2x_5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Ed ora...

... non facciamo altro che iterare sulla nuova base B' quanto fatto sulla base precedente B.

L'algoritmo del simplesso

- **Inizializzazione** Sia B_0 una base ammissibile e $k = 0$.
- **Passo 1- verifica ottimalità** Se soddisfatta la condizione di ottimalità: STOP . La soluzione di base associata a B_k è una soluzione ottima del problema. Altrimenti si vada al Passo 2.
- **Passo 2 - verifica di illimitatezza** Se è soddisfatta la condizione di illimitatezza, allora: STOP, si ha $S_{ott} = \emptyset$ in quanto l'obiettivo del problema è illimitato. Altrimenti si vada al Passo 3.
- **Passo 3 - scelta variabile entrante in base** Si selezioni la variabile $x_{i_{m+h}}$ che dovrà entrare in base attraverso la regola vista.

Il metodo del simplesso

- **Passo 4 - scelta variabile uscente dalla base** Si selezioni la variabile x_{i_k} che dovrà uscire dalla base attraverso la regola vista.
- **Passo 5 - operazione di cardine** Si generi la nuova base B_{k+1} sostituendo in B_k la variabile x_{i_k} con la variabile $x_{i_{m+h}}$ e si esegua la corrispondente operazione di cardine. Quindi, si ponga $k = k + 1$ e si ritorni al Passo 1.

Nell'esempio

Condizione di ottimalità? NO
Condizione di illimitatezza? NO
Variabile entrante in base: x_4
Variabile uscente dalla base: x_2
Operazione di cardine:

$$\begin{array}{ll} \max & 10 - 2x_2 - x_5 \\ & x_3 = 5/2 - 1/2x_1 - 1/2x_2 \\ & x_4 = 3/2 + 1/2x_1 - 1/2x_2 - x_5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Continua

Condizione di ottimalità? SI!
Soluzione ottima: soluzione di base associata alla base $\{x_3, x_4\}$:

$$x_1 = x_2 = x_5 = 0 \quad x_3 = 5/2 \quad x_4 = 3/2$$

Valore ottimo: $\gamma_0 = 10$

Puntualizzazione

L'algoritmo del simplesso e i suoi derivati (di cui vedremo un esempio più avanti) *non* sono gli unici algoritmi di risoluzione per problemi di PL.

Altri metodi di risoluzione per i problemi di PL sono i cosidetti *algoritmi del punto interno*.

E non dimentichiamo ...

... che abbiamo ipotizzato di avere già a disposizione una base ammissibile B_0 ma non abbiamo ancora visto come si può stabilire se esiste e, nel caso esista, come trovarla.

Miglioramento valore obiettivo

Il valore dell'obiettivo nella nuova soluzione di base ottenuta sostituendo x_{i_k} nella base con $x_{i_{m+h}}$ è

$$\gamma_0 - \gamma_h \frac{\beta_k}{\alpha_{kh}}.$$

con:

- $\beta_k \geq 0$ per l'ammissibilità della soluzione di base associata a B.
- $\gamma_h > 0$ per la regola di scelta della variabile entrante in base.
- $\alpha_{kh} < 0$ per la regola di scelta della variabile uscente dalla base.

Quindi ...

$$\gamma_0 - \underbrace{\gamma_h}_{>0} \frac{\overbrace{\beta_k}^{\geq 0}}{\underbrace{\alpha_{kh}}_{<0}} \geq \gamma_0.$$

ovvero: *il valore dell'obiettivo nella nuova soluzione di base associata a* B' *è non peggiore rispetto al valore* γ_0 *nella soluzione di base associata a* B.

Inoltre ...

...se $\beta_k > 0$, il che *si verifica sempre nel caso di soluzioni di base non degeneri*, il nuovo valore dell'obiettivo è strettamente migliore rispetto al precedente.

Nel caso degenere *può* succedere che i due valori siano uguali. In questo caso si può dimostrare che le due basi B e B' rappresentano la stessa soluzione di base.

Finitezza del simplesso

Se tutte le soluzioni di base ammissibili in un problema di PL sono non degeneri, allora il metodo del simplesso termina in un numero finito di iterazioni.

Infatti ...

... ad ogni iterazione la nuova soluzione di base ammissibile (o vertice) ha un valore strettamente migliore rispetto alla precedente e quindi è diversa da tutte quelle che la hanno preceduta.

Essendo il numero di soluzioni di base ammissibili finito (i vertici sono in numero finito), il metodo dovrà arrestarsi dopo un numero finito di iterazioni o restituendo una soluzione ottima oppure stabilendo che il problema ha obiettivo illimitato.

E nel caso degenere?

Si *può* verificare la situazione di *ciclaggio*.

Trovandosi in un vertice degenere, l'algoritmo del simplesso può generare la seguente sequenza di basi che rappresentano tutte questo stesso vertice degenere:

$$B_t \rightarrow B_{t+1} \rightarrow \cdots \rightarrow B_{t+r-1} \rightarrow B_{t+r} = B_t.$$

Una volta tornato nella base B_t si ripete tutto il ciclo: siamo entrati in un loop!

Ma ...

... la situazione di ciclaggio si verifica molto raramente nella pratica ed esistono anche regole particolari per la scelta delle variabili da far entrare e uscire di base, dette *regole anticiclaggio* (che non vedremo), che consentono all'algoritmo di terminare in un numero finito di iterazioni.

Soluzioni ottime uniche e multiple

Una volta trovata una soluzione ottima del problema (un punto in S_{ott}) ci possiamo chiedere se ce ne sono altre.

Se

$$\gamma_j < 0 \quad j = 1, \ldots, m,$$

allora: *soluzione ottima unica*

Infatti ...

... in S_a si avrà:

$$\gamma_0 + \sum_{j=1}^{n-m} \underbrace{\gamma_j}_{<0} \underbrace{x_{i_{m+j}}}_{\geq 0} \leq \gamma_0,$$

Inoltre:

$$x_{i_{m+j}} > 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_0 + \sum_{j=1}^{n-m} \gamma_j x_{i_{m+j}} < \gamma_0$$

Quindi il valore ottimo γ_0 si ottiene solo con $x_{i_{m+j}} = 0 \; \forall \; j$, ovvero nella soluzione di base attuale.

Esempio

$$
\begin{aligned}
\max \qquad & 4 - x_1 - x_2 \\
& x_3 = 2 + x_1 - x_2 \\
& x_4 = 1 - 2x_2 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

E se esiste un qualche $\gamma_h = 0$?

Esistono in tal caso più soluzioni ottime?

Non è detto. Sono possibili diversi casi.

Riformulazione ristretta

Riscriviamo la riformulazione rispetto alla base B tenendo a 0 tutte le variabili fuori base tranne la $x_{i_{m+h}}$ con $\gamma_h = 0$. Avremo:

$$
\begin{array}{ll}
\max & \gamma_0 \\
 & x_{i_1} = \beta_1 + \alpha_{1h} x_{i_{m+h}} \\
 & \cdots \\
 & x_{i_m} = \beta_m + \alpha_{mh} x_{i_{m+h}} \\
 & x_1, \ldots, x_n \geq 0
\end{array}
$$

Caso 1

Esiste h tale che $\gamma_h = 0$ e

$$\alpha_{rh} \geq 0 \quad r = 1, \ldots, m,$$

Esiste certamente un insieme illimitato di soluzioni ottime.

Esempio

$$\begin{aligned} \max \quad & 4 - x_2 \\ & x_3 = 2 + x_1 - x_2 \\ & x_4 = 1 - 2x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Per tutti i $t \geq 0$, i punti

$$x_1 = t \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 2 + t \quad x_4 = 1$$

sono soluzioni ottime.

Caso 2

Esiste h tale che $\gamma_h = 0$ e

$$\forall \;\; r : \;\; \alpha_{rh} < 0 \quad \text{si ha che} \quad \beta_r > 0,$$

Esiste certamente un insieme limitato di soluzioni ottime: il segmento che congiunge la soluzione di base attuale con quella (*distinta*) ottenuta attraverso un'operazione di cardine che fa entrare in base $x_{i_{m+h}}$ e sceglie secondo la regola già vista la variabile da far uscire di base.

Esempio

$$\begin{aligned} \max \qquad & 4 - x_2 \\ & x_3 = 2 + x_1 - x_2 \\ & x_4 = 1 - x_1 + 2x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Per tutti i $t \in [0, 1]$, i punti

$$x_1 = t \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 2 + t \quad x_4 = 1 - t$$

sono soluzioni ottime.

Caso 3

Per ogni h tale che $\gamma_h = 0$ si ha che:

$$\exists \ r: \ \alpha_{rh} < 0 \quad \text{e} \quad \beta_r = 0,$$

In tal caso non possiamo dire se esiste un'unica soluzione ottima o se vi sono soluzioni ottime multiple.

Esempio 1

$$
\begin{aligned}
\max \qquad & 4 - x_2 \\
& x_3 = 2 + x_1 - x_2 \\
& x_4 = -x_1 - x_2 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Esiste una sola soluzione ottima.

Esempio 2

$$\begin{aligned} \max \quad & 2 - x_3 \\ & x_4 = x_1 - x_2 - x_3 \\ & x_5 = -x_1 + x_2 + x_3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Tutte le soluzioni:

$$x_3 = x_4 = x_5 = 0 \quad x_1 = x_2 = \alpha \;\; \forall\, \alpha \geq 0,$$

sono ammissibili e ottime (il caso $\alpha = 0$ coincide con la soluzione di base associata alla base $\{x_4, x_5\}$).

Come calcolare $\mathbf{A}_B^{-1}$

Come vedremo è importante conoscere, data una base B e la relativa matrice $\mathbf{A}_B$, l'inversa $\mathbf{A}_B^{-1}$ di tale matrice. Non è però sempre necessario calcolare da zero tale inversa. In alcuni casi la riformulazione rispetto alla base B ci fornisce già la matrice $\mathbf{A}_B^{-1}$. Quali sono questi casi?

Quelli in cui alcune colonne della matrice $\mathbf{A}$ formano la matrice identica $\mathbf{I}$, ovvero esistono m variabili $[x_{t_1}, \ldots, x_{t_m}]$ le cui corrispondenti colonne nella matrice $\mathbf{A}$ formano la matrice identica di ordine $m \times m$.

Esempio

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ & x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_5 = 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Prendiamo le $m = 3$ variabili $[x_4, x_3, x_5]$

$$x_4 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_3 \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_5 \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Riformulazione modificata

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \mathbf{c}_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + (\mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N) \mathbf{x}_N \\
& \mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N \\
& \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq 0
\end{aligned}
$$

Riscriviamo questa portando tutte le variabili fuori base nella parte sinistra delle equazioni dei vincoli, ovvero:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \mathbf{c}_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + (\mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N) \mathbf{x}_N \\
& \mathbf{x}_B + \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \\
& \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq 0
\end{aligned}
$$

Lettura dell'inversa

La prima colonna di $\mathbf{A}_B^{-1}$ è la colonna relativa a x_{t_1} nella riformulazione modificata , la seconda colonna di $\mathbf{A}_B^{-1}$ è la colonna relativa a x_{t_2} nella riformulazione modificata, eccetera fino alla m-esima colonna di $\mathbf{A}_B^{-1}$ che è la colonna relativa a x_{t_m} nella riformulazione modificata.

NB: l'ordine delle variabili x_{t_r}, $r = 1, \ldots, m$, è essenziale.

Sull'esempio

Base $B_0 = \{x_4, x_3, x_5\}$. La riformulazione rispetto a questa base è la seguente:

$$
\begin{array}{ll}
\max & -44 + 6x_1 + 3x_2 \\
& x_4 = 8 - x_1 - x_2 \\
& x_3 = 4 - x_1 + x_2 \\
& x_5 = 12 - x_1 - 2x_2 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

Con una prima operazione di cardine scambiamo x_1 e x_3 nella base.

Continua

Base $B_1 = \{x_4, x_1, x_5\}$

$$
\begin{aligned}
\max \qquad & -24 - 6x_3 + 9x_2 \\
& x_4 = 4 + x_3 - 2x_2 \\
& x_1 = 4 - x_3 + x_2 \\
& x_5 = 8 + x_3 - 3x_2 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Poi, con una seconda operazione di cardine scambiamo x_2 e x_4 nella base.

Continua

Base $B_2 = \{x_2, x_1, x_5\}$

$$
\begin{aligned}
\max \qquad & -6 - 3/2x_3 - 9/2x_4 \\
& x_2 = 2 + 1/2x_3 - 1/2x_4 \\
& x_1 = 6 - 1/2x_3 - 1/2x_4 \\
& x_5 = 2 - 1/2x_3 + 3/2x_4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Continua

A questo punto ci chiediamo: data la base $B_2 = \{x_2, x_1, x_5\}$ con la relativa matrice di base:

$$\mathbf{A}_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

qual è l’inversa di tale matrice?

Continua

Riformulazione modificata

$$\begin{aligned} \max \quad & -6 - 3/2x_3 - 9/2x_4 \\ & x_2 - 1/2x_3 + 1/2x_4 = 2 \\ & x_1 + 1/2x_3 + 1/2x_4 = 6 \\ & x_5 + 1/2x_3 - 3/2x_4 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Continua

Prima colonna di $\mathbf{A}_{B_2}^{-1}$ è la colonna della variabile x_4 nella riformulazione modificata

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

Seconda colonna: i coefficienti di x_3:

$$\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Continua

Terza colonna: i coefficienti di x_5:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$\mathbf{A}_{B_2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -3/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Il metodo due fasi

Descriveremo ora un metodo, detto *metodo due fasi*, che, dato un problema di PL:

- ci consente di stabilire se $S_a = \emptyset$;
- oppure, in caso contrario, ci restituisce una base ammissibile del problema.

Le due fasi

Problema di PL in forma standard:

$$
\begin{array}{lll}
\max & \mathbf{cx} & \\
& \mathbf{a}_i\mathbf{x} = b_i & i = 1, \ldots, m \\
& x_j \geq 0 & j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

Chiameremo questo problema *problema di II fase*.

Ad esso associamo il seguente problema, detto *problema di I fase*:

$$
\begin{array}{lll}
\xi^* = \max & -\sum_{i=1}^m s_i & \\
& \mathbf{a}_i\mathbf{x} + s_i = b_i & i \in \{1, \ldots, m\} : \ b_i \geq 0 \\
& \mathbf{a}_i\mathbf{x} - s_i = b_i & i \in \{1, \ldots, m\} : \ b_i < 0 \\
& x_j \geq 0 & j = 1, \ldots, n \\
& s_i \geq 0 & i = 1, \ldots, m
\end{array}
$$

Limitatezza obiettivo I fase

Per prima cosa notiamo che $s_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, implica che

$$-\sum_{i=1}^{m} s_i \leq 0$$

e quindi l'obiettivo del problema di I fase non può essere illimitato.

Ammissibilità problema I fase

Riformulazione del problema di I fase rispetto alla base $\{s_1, \ldots, s_m\}$:

$$
\begin{array}{rll}
\xi^* = \max & -\sum_{i:\ b_i \geq 0}(b_i - \mathbf{a}_i\mathbf{x}) - \sum_{i:\ b_i < 0}(-b_i + \mathbf{a}_i\mathbf{x}) & \\
& s_i = b_i - \mathbf{a}_i\mathbf{x} & i \in \{1, \ldots, m\} :\ b_i \geq 0 \\
& s_i = -b_i + \mathbf{a}_i\mathbf{x} & i \in \{1, \ldots, m\} :\ b_i < 0 \\
& x_j \geq 0 & j = 1, \ldots, n \\
& s_i \geq 0 & i = 1, \ldots, m
\end{array}
$$

La soluzione di base:

$$
s_i = b_i \ \ i :\ b_i \geq 0, \ \ s_i = -b_i \ \ i :\ b_i < 0, \ \ x_j = 0 \ \ j = 1, \ldots, n,
$$

è ammissibile.

Quindi ...

... il problema di I fase ha regione ammissibile non vuota e obiettivo non illimitato. Ne consegue che esso ammette soluzione ottima.

Osservazione *Il problema di I fase ha valore ottimo ξ^* pari a 0 se e solo se il problema di II fase ha regione ammissibile S_a non vuota.*

Dimostrazione

Supponiamo dapprima che $\xi^* = 0$ e dimostriamo che $S_a \neq \emptyset$.

$\xi^* = 0$ vuol dire che esiste una soluzione del problema di I fase che indichiamo con $(\overline{\mathbf{s}}, \overline{\mathbf{x}})$ con tutte le variabili $\overline{s}_i = 0$, cioè $\overline{s} = 0$.

Continua

Se sostituiamo questa soluzione nei vincoli del problema di I fase otteniamo:

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{a}_i\overline{\mathbf{x}} + \overline{s}_i = b_i & i \in \{1, \ldots, m\} : \ b_i \geq 0 \\
\mathbf{a}_i\overline{\mathbf{x}} - \overline{s}_i = b_i & i \in \{1, \ldots, m\} : \ b_i < 0 \\
\overline{x}_j \geq 0 & j = 1, \ldots, n \\
\overline{s}_i = 0 & i = 1, \ldots, m
\end{array}
$$

Equivalentemente:

$$
\mathbf{a}_i\overline{\mathbf{x}} = b_i \quad i = 1, \ldots, m \quad \overline{\mathbf{x}} \geq 0,
$$

da cui si ricava che $\overline{\mathbf{x}} \in S_a$.

Viceversa ...

... supponiamo ora che $S_a \neq \emptyset$ e dimostriamo che questo implica che $\xi^* = 0$.

Dato $\overline{\mathbf{x}} \in S_a$, ovvero

$$\mathbf{a}_i\overline{\mathbf{x}} = b_i \quad i = 1, \ldots, m \quad \overline{\mathbf{x}} \geq 0,$$

si verifica facilmente che la soluzione $(\overline{\mathbf{s}}, \overline{\mathbf{x}})$ con

$$\overline{s}_i = 0 \quad i = 1, \ldots, m,$$

è ammissibile per il problema di I fase in quanto

$$\begin{array}{ll} \mathbf{a}_i\overline{\mathbf{x}} + \overline{s}_i = b_i & i \in \{1, \ldots, m\} : \ b_i \geq 0 \\ \mathbf{a}_i\overline{\mathbf{x}} - \overline{s}_i = b_i & i \in \{1, \ldots, m\} : \ b_i < 0 \\ \overline{x}_j \geq 0 & j = 1, \ldots, n \\ \overline{s}_i = 0 & i = 1, \ldots, m \end{array}$$

Continua

Tale soluzione ha come valore dell'obiettivo:

$$-\sum_{i=1}^{m} \overline{s}_i = 0.$$

Poiché, come già osservato, il valore dell'obiettivo del problema di I fase non può essere superiore a 0, questa soluzione ammissibile è anche ottima per il problema di I fase e il valore ottimo ξ^* è pari a 0.

Quindi ...

... se risolviamo ora il problema di I fase utilizzando il metodo del simplesso *a partire dalla base ammissibile* $\{s_1, \ldots, s_m\}$ arriveremo ad un valore ottimo ξ^* del problema di I fase e:

$\xi^* < 0 \ \Rightarrow S_a = \emptyset$

$\xi^* = 0 \ \Rightarrow S_a \neq \emptyset$

Ma ...

... se sono nel secondo caso come faccio a trovare una base ammissibile per il problema di II fase con la relativa riformulazione?

Abbiamo due casi possibili:

Caso 1 tutte le variabili s_i sono al di fuori della base ottima del problema di I fase.

In tal caso la base ottima del problema di I fase è già una base ammissibile del problema di II fase. La riformulazione del problema di II fase rispetto a questa base si può ottenere semplicemente dalla riformulazione del problema di I fase rispetto a questa base

Continua

Caso 2 Alcune variabili s_i sono nella base ottima del problema di I fase.

In tal caso si operano, fino a quando è possibile, delle operazioni di cardine per far uscire di base le variabili s_i attualmente in base facendo entrare al loro posto solo variabili x_j.

Se si riesce a far uscire dalla base tutte le variabili s_i ci si ritrova infine nella stessa situazione del Caso 1 e si procede nello stesso modo.

Se non ci si riesce vuol dire che ci sono vincoli ridondanti da eliminare nel problema.

Una semplificazione

Se una variabile x_i del problema di II fase compare in uno solo dei vincoli di uguaglianza e in tale vincolo ha coefficiente dello stesso segno del corrispondente termine noto, allora possiamo evitare di introdurre una variabile s in quel vincolo nel problema di I fase. In tal caso una base ammissibile iniziale per il problema di I fase comprenderà la variabile x_i.

Esempio

$$\begin{array}{lr} \max & x_1 + 2x_2 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Esempio

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 2x_1 + x_2 + 1/2x_3 \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\
& x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\
& x_1 + x_3 = 2 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Esempio

$$\begin{aligned} \max \qquad & x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 = 3 \\ & x_1 + x_3 = 1 \\ & x_2 + x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Esempio

$$\begin{aligned} \max \quad & -2s_1 - 3s_2 - x_5 \\ & x_1 = 3 - s_1 - 2x_4 - x_5 \\ & x_2 = 4 - 2s_1 - 3s_2 + x_3 - x_4 - x_5 \\ & s_3 = s_1 + 2s_2 + x_5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Faccio entrare in base x_5 e faccio uscire dalla base s_3