Università di Parma - Facoltà di Ingegneria

Prova intermedia di sistemi multivariabili del 19 Dicembre 2022

Es. 1) (7 punti) Considera il sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trova una matrice di retroazione dello stato che assegni tutti gli autovalori di $A + BF$ in -1.

Es. 2) (7 punti) Metti la seguente coppia nella forma canonica di controllo, indicando la trasformazione di coordinate che consente di ottenere questa forma e la forma esplicita finale delle due matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Es. 3) (7 punti) Considera il seguente sistema a tempo continuo, dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & a & 0 & a \\ 1-a & 0 & 3\,a-3 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -a & 4-2\,a & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trova l'insieme degli stati non osservabili X_{NO} in funzione di $a \in \mathbb{R}$.

Es. 4) (9 punti)

a) Trova la scomposizione di Kalman per il seguente sistema a tempo continuo, mettendo in evidenza gli zeri strutturali e le sottomatrici di questa forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\,, \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Calcola la funzione di trasferimento del sistema.

c) Calcola la risposta all'impulso del sistema.

d) La coppia (A, B) è stabilizzabile? La coppia (C, A) è rilevabile?

Continua dietro.

Es. 5) (3 punti bonus) Considera il sistema descritto da queste equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -nx_1(t) + \sum_{i=1}^n x_i(t) \\ \dot{x}_2(t) = -nx_2(t) + \sum_{i=1}^n x_i(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = -nx_{n-1}(t) + \sum_{i=1}^n x_i(t) \\ \dot{x}_n(t) = -nx_n(t) + \sum_{i=1}^n x_i(t). \end{cases}$$

1) Trova gli autovalori del sistema. Il sistema è asintoticamente stabile? E' semplicemente stabile?
2) Dimostra che per qualsiasi stato iniziale $\hat{x} = [\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n]^T$,

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{x}_i}{n}, i = 1, \ldots, n.$$

Suggerimento: partire con $n = 2$ e $n = 3$, poi generalizzare.

1) $u(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; x(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$x(2) = A x(1) + B \underbrace{u(1)}_{= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x(3) = A x(2) + B \underbrace{u(2)}_{= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; X^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} X^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = A + B\bar{F} = A + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \bar{b} = B u(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = X$$

$$\bar{f} = -[0, 0, 1] \bar{R}^{-1} (\bar{A} + I)^3$$

$$= -\underbrace{[-1, 0, 0]}_{q} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3$$

$$q(\bar{A} + I) = [-2, -1, 0]$$

$$q(\bar{A} + I)^2 = [-3, -3, 1]$$

$$q(\bar{A} + I)^3 = [-4, -6, 4]$$

$-$

$$f = [4, 6, -4]$$

$$F = \bar{F} + u(0)\bar{f} = \bar{F} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

2) $R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $q = [0, 0, 0, 1] R^{-1}$
$= [1, 1, 0, 0]$

$$P = \begin{bmatrix} q \\ qA \\ qA^2 \\ qA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_c = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_c = Pb = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3) $X_{NO}(0) = \ker C$

$$X_{NO}(1) = \ker \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ e & e & 0 & e \\ e-1 & 0 & 2-2e & e-1 \end{bmatrix}$$

$$= \ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ e & e & 0 & e \\ \cancel{(e-1)} & \cancel{0} & \cancel{-2(e-1)} & \cancel{e-1} \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ e & e & 0 & e \end{bmatrix}$$

se $e = 0$, $X_{NO}(1) = X_{NO}(0) = \ker C$

$$= \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

se $e \neq 0$, $X_{NO}(1) = \ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \ker \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M}$$

$$X_{NO}(2) = X_{NO}(1) \cap \ker MA$$

$$= X_{NO}(1) \cap \underbrace{\ker \left[-e, -e, 1+e, -e\right]}_{\supset X_{NO}(1)}$$

$$= \ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{-1-e}{e} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-1-e}{e} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{cases} X_{NO}(1) = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, & \text{se } e = -1 \\ \{0\}, & \text{se } e \neq -1 \end{cases}$$

$$X_{NO} = \begin{cases} \{0\}, & \text{se } e \in \{0, -1\} \\ \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, & \text{se } e = 0 \\ \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, & \text{se } e = -1 \end{cases}$$

4(e) $X_R(1) = \operatorname{Im} B$

$$X_R(2) = \operatorname{Im}\left[B, AB\right] = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ -2 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 & \underbrace{0}_{} \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 0 & \underbrace{0}_{M} \end{bmatrix}$$

$$X_R(3) = X_R(2) + \operatorname{Im} AM =$$

$$X_R(2) + \operatorname{Im} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\subset X_R(2)} = X_R(2)$$

$$X_R = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_{NO}(0) = \ker C$$

$$X_{NO}(1) = \ker \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_{NO}(2) = \ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= X_{NO}(1) = X_{NO}$$

$$X_{NO} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X_{NO} + X_R = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dim X_{NO} \cap X_R = 1, \quad X_{NO} \cap X_R = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = T^{-1} A T = T^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A_{RO} $A_{\bar{R}NO}$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\to A_{NR,NO}$

0 $\quad A_{NR,O}$ $\quad 0$

$$\hat{B} = T^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\to B_{R,O}$

$\to B_{R,NO}$

$\to 0$

$$\hat{C} = CT = [1, 0, -1, 0]$$

$C_{NR,O}$

$C_{R,O}$ $\quad 0$

b) $H(s) = C_{R,O}(sI - A_{R,O})^{-1} B_{R,O}$

$= 1 \cdot (s+1)^{-1} \cdot 1 = \dfrac{1}{s+1}$

c) $h(t) = e^{-t} 1(t)$

d) $\{1\} \in \sigma(A_{NR}) \Rightarrow (A,B)$ non è STAB.

$\{1\} \in \sigma(A_{NO}) \Rightarrow (C,A)$ NON è RILEV.

5) CAMBIO DI COORDINATE

$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i / n$$

$$y_i = x_i - z, \quad i = 1, \dots, n-1$$

NUOVE COORDINATE $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ z \end{bmatrix}$

$$\dot{z}(t) = -n \sum_{i=1}^{n} x_i(t) + n \sum_{i} x_i(t) = 0$$

$\Rightarrow z$ è COSTANTE

$$\dot{y}_i(t) = \dot{x}_i(t) \underbrace{- \dot{z}(t)}_{=0} = -n\left(x_i(t)+z(t)\right)$$

$$= -n\, y_i(t), \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} \\ \dot{z} \end{bmatrix}(t) = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} -n & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & -n & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & & -n & 0 \\ \hline 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{array}\right]}_{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ z \end{bmatrix}(t)$$

$\sigma(A) = \{-n, 0\}$

IL SIST. NON è ASINT. STAB,
è SEMPLIC. STAB.

$$\dot{y}_i(t) = -n\, y_i(t), \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to +\infty} y_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to +\infty} x_i(t) = z(0) = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i \Big/ n$$