

Analisi di sensitività

Analisi di sensitività

Ci porremo ora la seguente domanda:

dato un problema di PL di cui ho già determinato una soluzione ottima, che cosa succede se modifico il valore di un coefficiente di una variabile (nell'obiettivo o nei vincoli) o il valore di un termine noto?

ovvero: come cambiano il valore ottimo e la soluzione ottima del problema in corrispondenza di queste modifiche?

Problema degli aiuti umanitari

$$\begin{aligned} \max \quad & 14x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ & 10x_1 + 30x_2 + 20x_3 \leq 5100 \\ & 10x_1 + 20x_2 + 40x_3 \leq 8000 \\ & 30x_1 + 10x_2 + 5x_3 \leq 1805 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Perché questa domanda?

In alcuni casi nei problemi di PL compaiono dati stimati e non dati oggettivi. Per tali dati è importante stabilire quanto è sensibile il risultato ottenuto a perturbazioni di tali dati:

Nel problema degli aiuti umanitari i valori di utilità (coefficienti nell'obiettivo) sono valori stimati.

Inoltre, in alcuni casi dopo aver risolto il problema intervengono fattori esterni che modificano alcuni dati originari del problema.

Nel problema degli aiuti umanitari qualcuno può procurare, ad esempio, 1000 sacchi di farina in più.

Problema di PL

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}\mathbf{x} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Ipotesi : esiste base ottima del problema B^* .

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}_{B^*} \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \mathbf{b} + (\mathbf{c}_{N^*} - \mathbf{c}_{B^*} \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \mathbf{A}_{N^*}) \mathbf{x}_{N^*} \\ & \mathbf{x}_{B^*} = \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \mathbf{A}_{N^*} \mathbf{x}_{N^*} \\ & \mathbf{x}_{B^*}, \mathbf{x}_{N^*} \geq 0 \end{aligned}$$

Continua

Soluzione ottima del primale:

$$\mathbf{x}_{B^*} = \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \mathbf{b} \quad \mathbf{x}_{N^*} = 0,$$

Soluzione ottima del duale:

$$\mathbf{u}^{B^*} = \mathbf{c}_{B^*} \mathbf{A}_{B^*}^{-1}.$$

Valore ottimo per il primale e per il duale:

$$\mathbf{c}_{B^*} \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \mathbf{b}.$$

Problema degli aiuti umanitari

In forma standard:

$$\begin{aligned} \max \quad & 14x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ & 10x_1 + 30x_2 + 20x_3 + y_1 = 5100 \\ & 10x_1 + 20x_2 + 40x_3 + y_2 = 8000 \\ & 30x_1 + 10x_2 + 5x_3 + y_3 = 1805 \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Qual è il significato delle variabili y_1, y_2, y_3 ?

Continua

Base ottima $B^* = \{y_1, x_3, x_1\}$:

$$\begin{aligned} \max \quad & 1164 - \frac{1}{23}y_2 - \frac{52}{115}y_3 - \frac{9}{23}x_2 \\ & y_1 = 960 + \frac{4}{23}y_3 + \frac{11}{23}y_2 - \frac{430}{23}x_2 \\ & x_3 = 193 + \frac{1}{115}y_3 - \frac{3}{115}y_2 - \frac{10}{23}x_2 \\ & x_1 = 28 - \frac{4}{115}y_3 + \frac{1}{230}y_2 - \frac{6}{23}x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Continua

Soluzione ottima del primale:

$$y_1^* = 960 \quad x_3^* = 193 \quad x_1^* = 28 \quad x_2^* = y_2^* = y_3^* = 0.$$

Matrice $\mathbf{A}_{B^*}^{-1}$:

$$\mathbf{A}_{B^*}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{11}{23} & -\frac{4}{23} \\ 0 & \frac{3}{115} & -\frac{1}{115} \\ 0 & -\frac{1}{230} & \frac{4}{115} \end{bmatrix}$$

Continua

Soluzione ottima del duale \mathbf{u}^{B^*} :

$$\mathbf{u}^{B^*} = \mathbf{c}_{B^*} \mathbf{A}_{B^*}^{-1} = (0 \ 4 \ 14) \mathbf{A}_{B^*}^{-1} = \left(0 \quad \frac{1}{23} \quad \frac{52}{115} \right)$$

Valore ottimo del primale e del duale: 1164

Modifica di un termine noto

$$\mathbf{b} \rightarrow \bar{\mathbf{b}}$$

con

$$\bar{b}_i = b_i \quad \forall i \neq r \quad \bar{b}_r = b_r + \Delta b_r$$

Riformulazione rispetto a B^* *dopo la modifica*:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}_{B^*} \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \bar{\mathbf{b}} + (\mathbf{c}_{N^*} - \mathbf{c}_{B^*} \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \mathbf{A}_{N^*}) \mathbf{x}_{N^*} \\ & \mathbf{x}_{B^*} = \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \mathbf{A}_{N^*} \mathbf{x}_{N^*} \\ & \mathbf{x}_{B^*}, \mathbf{x}_{N^*} \geq 0 \end{aligned}$$

Continua

Quando la base B^* resta ottima?

B^* continua ad essere ammissibile per il duale (non cambiano i coefficienti di costo ridotto) e quindi rimane ottima se continua ad essere anche ammissibile per il primale, ovvero se

$$\mathbf{A}_{B^*}^{-1} \bar{\mathbf{b}} \geq 0$$

Variazione del valore ottimo:

$$\mathbf{c}_{B^*} \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{c}_{B^*} \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{u}^{B^*} (\bar{\mathbf{b}} - \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^m u_i^{B^*} (\bar{b}_i - b_i) = u_r^{B^*} \Delta b_r.$$

Quindi il valore di una variabile duale nella soluzione ottima del duale misura la rapidità con cui cambia il valore ottimo del problema al variare del termine noto del vincolo corrispondente nel primale.

Continua

Nuova soluzione ottima del primale

$$\mathbf{x}_{B^*} = \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \bar{\mathbf{b}} \quad \mathbf{x}_{N^*} = 0,$$

Nuovo valore ottimo per il primale e per il duale:

$$\mathbf{c}_{B^*} \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \bar{\mathbf{b}}.$$

La soluzione ottima del duale:

$$\mathbf{u}^{B^*} = \mathbf{c}_{B^*} \mathbf{A}_{B^*}^{-1}.$$

non cambia (non dipende dai termini noti del problema primale).

Calcolo di $A_{B^*}^{-1} \bar{\mathbf{b}}$

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta b_r \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{b} + \Delta b_r \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi ...

$$\mathbf{A}_{B^*}^{-1} \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \mathbf{b} + \Delta b_r \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}_{B^*}^{-1} \mathbf{b}$ già noto (termini noti nella riformulazione rispetto a B^*)

Continua

$$\Delta b_r \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

è pari a Δb_r moltiplicato per la colonna r -esima di $\mathbf{A}_{B^*}^{-1}$.

E se B^* non è più ottima?

Se con la modifica B^* non è più base ottima, ovvero:

$$A_{B^*}^{-1} \bar{b} \not\geq 0$$

B^* continua a rimanere ammissibile per il duale e quindi posso utilizzare B^* come base iniziale per il simplesso duale senza dover risolvere di nuovo tutto il problema da capo.

Nell'esempio

Modifica Δb_2 del secondo termine noto. Nuovo vettore di termini noti:

$$\bar{\mathbf{b}} = (5100 \quad (8000 + \Delta b_2) \quad 1805).$$

Modifica nella riformulazione dell'obiettivo:

$$1164 + u_2^* \Delta b_2 - \frac{1}{23} y_2 - \frac{52}{115} y_3 - \frac{9}{23} x_2$$

Modifica termini noti dei vincoli:

$$(960 \quad 193 \quad 28) + \Delta b_2 \left(-\frac{11}{23} \quad \frac{3}{115} \quad -\frac{1}{230} \right)$$

Continua

$$\Delta b_2 = 1150:$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 1214 - \frac{1}{23}y_2 - \frac{52}{115}y_3 - \frac{9}{23}x_2 \\ & y_1 = 410 + \frac{4}{23}y_3 + \frac{11}{23}y_2 - \frac{430}{23}x_2 \\ & x_3 = 223 + \frac{1}{115}y_3 - \frac{3}{115}y_2 - \frac{10}{23}x_2 \\ & x_1 = 23 - \frac{4}{115}y_3 + \frac{1}{230}y_2 - \frac{6}{23}x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Nuova soluzione ottima:

$$y_1 = 410 \quad x_3 = 223 \quad x_1 = 23 \quad y_2 = y_3 = x_2 = 0$$

Nuovo valore ottimo: 1214

Continua

$$\Delta b_2 = 2300$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 1264 - \frac{1}{23}y_2 - \frac{52}{115}y_3 - \frac{9}{23}x_2 \\ y_1 = & -140 + \frac{4}{23}y_3 + \frac{11}{23}y_2 - \frac{430}{23}x_2 \\ x_3 = & 253 + \frac{1}{115}y_3 - \frac{3}{115}y_2 - \frac{10}{23}x_2 \\ x_1 = & 18 - \frac{4}{115}y_3 + \frac{1}{230}y_2 - \frac{6}{23}x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

B^* non è più base ottima. Si parte da B^* con il simplesso duale.

Continua

Intervallo in cui posso variare Δb_2 mantenendo B^* base ottima:

$$(960 \quad 193 \quad 28) + \Delta b_2 \left(-\frac{11}{23} \quad \frac{3}{115} \quad -\frac{1}{230} \right) =$$

$$\left(960 - \frac{11\Delta b_2}{23} \quad 193 + \frac{3\Delta b_2}{115} \quad 28 - \frac{\Delta b_2}{230} \right) \geq 0$$

$$\begin{cases} 960 - \frac{11\Delta b_2}{23} \geq 0 \\ 193 + \frac{3\Delta b_2}{115} \geq 0 \\ 28 - \frac{\Delta b_2}{230} \geq 0 \end{cases}$$

Ancora nell'esempio

Modifica Δb_1 del primo termine noto. Nuovo vettore di termini noti:

$$\bar{\mathbf{b}} = ((5100 + \Delta b_1) \ 8000 \ 1805).$$

Modifica nella riformulazione dell'obiettivo:

$$1164 + u_1^* \Delta b_1 - \frac{1}{23} y_2 - \frac{52}{115} y_3 - \frac{9}{23} x_2$$

Modifica termini noti dei vincoli:

$$(960 \ 193 \ 28) + \Delta b_1 (1 \ 0 \ 0)$$

Continua

$$\Delta b_1 = 100:$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 1164 - \frac{1}{23}y_2 - \frac{52}{115}y_3 - \frac{9}{23}x_2 \\ & y_1 = 1060 + \frac{4}{23}y_3 + \frac{11}{23}y_2 - \frac{430}{23}x_2 \\ & x_3 = 193 + \frac{1}{115}y_3 - \frac{3}{115}y_2 - \frac{10}{23}x_2 \\ & x_1 = 28 - \frac{4}{115}y_3 + \frac{1}{230}y_2 - \frac{6}{23}x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Nuova soluzione ottima:

$$y_1 = 1060 \quad x_3 = 193 \quad x_1 = 28 \quad y_2 = y_3 = x_2 = 0$$

Valore ottimo invariato! È sorprendente?

Modifica nell'obiettivo

$$\mathbf{c}_{N^*} \rightarrow \bar{\mathbf{c}}_{N^*}$$

Riformulazione rispetto a B^* :

$$\max \quad \mathbf{c}_{B^*} \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \mathbf{b} + (\bar{\mathbf{c}}_{N^*} - \mathbf{c}_{B^*} \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \mathbf{A}_{N^*}) \mathbf{x}_{N^*}$$

$$\mathbf{x}_{B^*} = \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \mathbf{A}_{N^*} \mathbf{x}_{N^*}$$

$$\mathbf{x}_{B^*}, \mathbf{x}_{N^*} \geq 0$$

Quando B^* rimane base ottima?

Questo accade se i coefficienti di costo ridotto restano tutti ≤ 0 , ovvero

$$\bar{c}_{N^*} - c_{B^*} A_{B^*}^{-1} A_{N^*} \leq 0$$

In tal caso soluzione ottima del primale e del duale e valore ottimo del problema restano invariati.

E se B^* non è più ottima?

Ovvero: se

$$\bar{c}_{N^*} - c_{B^*} A_{B^*}^{-1} A_{N^*} \not\leq 0$$

In tal caso B^* non è più ammissibile per il duale ma lo è per il primale e quindi si può ripartire da essa con il simplesso primale.

Nell'esempio

Modifica del coefficiente di x_2 :
da 5 a $5 + \Delta c_{x_2}$

Modifica nella riformulazione dell'obiettivo:

$$1164 - \frac{1}{23}y_2 - \frac{52}{115}y_3 - \frac{9}{23}x_2 + \Delta c_{x_2}x_2$$

Continua

$$\Delta c_{x_2} = -1$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 1164 - \frac{1}{23}y_2 - \frac{52}{115}y_3 - \frac{32}{23}x_2 \\ & y_1 = 960 + \frac{4}{23}y_3 + \frac{11}{23}y_2 - \frac{430}{23}x_2 \\ & x_3 = 193 + \frac{1}{115}y_3 - \frac{3}{115}y_2 - \frac{10}{23}x_2 \\ & x_1 = 28 - \frac{4}{115}y_3 + \frac{1}{230}y_2 - \frac{6}{23}x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Continua

$$\Delta c_{x_2} = 1$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 1164 - \frac{1}{23}y_2 - \frac{52}{115}y_3 + \frac{14}{23}x_2 \\ & y_1 = 960 + \frac{4}{23}y_3 + \frac{11}{23}y_2 - \frac{430}{23}x_2 \\ & x_3 = 193 + \frac{1}{115}y_3 - \frac{3}{115}y_2 - \frac{10}{23}x_2 \\ & x_1 = 28 - \frac{4}{115}y_3 + \frac{1}{230}y_2 - \frac{6}{23}x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Continua

Intervallo in cui può variare Δc_{x_2} senza cambiare la base ottima

$$-\frac{9}{23} + \Delta c_{x_2} \leq 0$$

Modifica nell'obiettivo

$$\mathbf{c}_{B^*} \rightarrow \bar{\mathbf{c}}_{B^*}$$

Riformulazione rispetto a B^* :

$$\max \quad \bar{\mathbf{c}}_{B^*} \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \mathbf{b} + (\mathbf{c}_{N^*} - \bar{\mathbf{c}}_{B^*} \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \mathbf{A}_{N^*}) \mathbf{x}_{N^*}$$

$$\mathbf{x}_{B^*} = \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \mathbf{A}_{N^*} \mathbf{x}_{N^*}$$

$$\mathbf{x}_{B^*}, \mathbf{x}_{N^*} \geq 0$$

Quando B^* rimane base ottima?

Questo accade se i coefficienti di costo ridotto restano tutti ≤ 0 , ovvero

$$\mathbf{c}_{N^*} - \bar{\mathbf{c}}_{B^*} \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \mathbf{A}_{N^*} \leq 0$$

In tal caso soluzione ottima del primale non cambia, quella del duale diventa $\bar{\mathbf{c}}_{B^*} \mathbf{A}_{B^*}^{-1}$ mentre il valore ottimo cambia di una quantità pari alla variazione del coefficiente moltiplicata per il valore della variabile di cui si è modificato il coefficiente nella soluzione ottima del primale (vedi esempi).

E se B^* non è più ottima?

Ovvero: se

$$\mathbf{c}_{N^*} - \bar{\mathbf{c}}_{B^*} \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \mathbf{A}_{N^*} \not\leq 0$$

In tal caso B^* non è più ammissibile per il duale ma lo è per il primale e quindi si può ripartire da essa con il simplesso primale.

Nell'esempio

Modifica del coefficiente di x_1 : da 14 a $14 + \Delta c_{x_1}$

Modifica nella riformulazione dell'obiettivo:

$$1164 - \frac{1}{23}y_2 - \frac{52}{115}y_3 - \frac{9}{23}x_2 + \Delta c_{x_1}x_1 =$$

$$1164 - \frac{1}{23}y_2 - \frac{52}{115}y_3 - \frac{9}{23}x_2 +$$

$$+ \Delta c_{x_1} \left(28 - \frac{4}{115}y_3 + \frac{1}{230}y_2 - \frac{6}{23}x_2 \right) =$$

$$1164 + 28\Delta c_{x_1} + y_2 \left(-\frac{1}{23} + \frac{\Delta c_{x_1}}{230} \right) +$$

$$+ y_3 \left(-\frac{52}{115} - \frac{4\Delta c_{x_1}}{115} \right) + x_2 \left(-\frac{9}{23} - \frac{6\Delta c_{x_1}}{23} \right)$$

Continua

$$\Delta c_{x_1} = 1$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 1192 - \frac{9}{230}y_2 - \frac{56}{115}y_3 - \frac{15}{23}x_2 \\ & y_1 = 960 + \frac{4}{23}y_3 + \frac{11}{23}y_2 - \frac{430}{23}x_2 \\ & x_3 = 193 + \frac{1}{115}y_3 - \frac{3}{115}y_2 - \frac{10}{23}x_2 \\ & x_1 = 28 - \frac{4}{115}y_3 + \frac{1}{230}y_2 - \frac{6}{23}x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

B^* rimane base ottima ed il valore ottimo varia della quantità

$$\Delta c_{x_1} x_1^* = 1 * 28 = 28$$

Continua

$$\Delta c_{x_1} = -2$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 1108 - \frac{12}{230}y_2 - \frac{44}{115}y_3 + \frac{3}{23}x_2 \\ & y_1 = 960 + \frac{4}{23}y_3 + \frac{11}{23}y_2 - \frac{430}{23}x_2 \\ & x_3 = 193 + \frac{1}{115}y_3 - \frac{3}{115}y_2 - \frac{10}{23}x_2 \\ & x_1 = 28 - \frac{4}{115}y_3 + \frac{1}{230}y_2 - \frac{6}{23}x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

La base B^* non è più ottima ma è ancora ammissibile per il primale. Posso ripartire da essa con il simplesso primale.

Continua

Intervallo in cui può variare Δc_{x_1} senza cambiare la base ottima

$$\begin{cases} -\frac{1}{23} + \frac{\Delta c_{x_1}}{230} \leq 0 \\ -\frac{52}{115} - \frac{4\Delta c_{x_1}}{115} \leq 0 \\ -\frac{9}{23} - \frac{6\Delta c_{x_1}}{23} \leq 0 \end{cases}$$

In tale intervallo il valore ottimo varia della quantità

$$\Delta c_{x_1} x_1^* = 28\Delta c_{x_1}$$

Modifica nei vincoli

$$\mathbf{A}_{N^*} \rightarrow \overline{\mathbf{A}}_{N^*}$$

Riformulazione rispetto a B^* :

$$\max \quad \mathbf{c}_{B^*} \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \mathbf{b} + (\mathbf{c}_{N^*} - \mathbf{c}_{B^*} \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \overline{\mathbf{A}}_{N^*}) \mathbf{x}_{N^*}$$

$$\mathbf{x}_{B^*} = \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \overline{\mathbf{A}}_{N^*} \mathbf{x}_{N^*}$$

$$\mathbf{x}_{B^*}, \mathbf{x}_{N^*} \geq 0$$

Quando B^* rimane base ottima?

Questo accade se i coefficienti di costo ridotto restano tutti ≤ 0 , ovvero

$$\mathbf{c}_{N^*} - \mathbf{c}_{B^*} \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \overline{\mathbf{A}}_{N^*} \leq 0$$

In tal caso soluzione ottima del primale e del duale e valore ottimo del problema restano invariati.

E se B^* non è più ottima?

Ovvero: se

$$\mathbf{c}_{N^*} - \mathbf{c}_{B^*} \mathbf{A}_{B^*}^{-1} \overline{\mathbf{A}}_{N^*} \not\leq 0$$

In tal caso B^* non è più ammissibile per il duale ma lo è per il primale e quindi si può ripartire da essa con il simplesso primale.

Nell'esempio

Modifica Δa_{22} del coefficiente di x_2 nel secondo vincolo:
da 20 a $20 + \Delta a_{22}$

Modifica nella riformulazione dell'obiettivo:

$$1164 - \frac{1}{23}y_2 - \frac{52}{115}y_3 - \frac{9}{23}x_2 - u_2^* \Delta a_{22} x_2$$

Continua

Modifica coefficienti di x_2 nei vincoli:

$$\begin{pmatrix} -\frac{430}{23} & -\frac{10}{23} & -\frac{6}{23} \end{pmatrix} - \Delta a_{22} \begin{pmatrix} -\frac{11}{23} & \frac{3}{115} & -\frac{1}{230} \end{pmatrix}$$

ovvero: il vettore dei coefficienti originari di x_2 nei vincoli della riformulazione a cui sottraggo la modifica Δa_{22} moltiplicata per la colonna di $A_{B^*}^{-1}$ corrispondente al vincolo in cui ho introdotto la modifica (in tal caso la seconda).

Continua

$$\Delta a_{22} = 10:$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 1164 - \frac{1}{23}y_2 - \frac{52}{115}y_3 - \frac{19}{23}x_2 \\ & y_1 = 960 + \frac{4}{23}y_3 + \frac{11}{23}y_2 - \frac{320}{23}x_2 \\ & x_3 = 193 + \frac{1}{115}y_3 - \frac{3}{115}y_2 - \frac{16}{23}x_2 \\ & x_1 = 28 - \frac{4}{115}y_3 + \frac{1}{230}y_2 - \frac{5}{23}x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

B^* rimane ottima, le soluzioni ottime del primale e del duale e il valore ottimo non cambiano.

Continua

$$\Delta a_{22} = -10$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 1164 - \frac{1}{23}y_2 - \frac{52}{115}y_3 + \frac{1}{23}x_2 \\ & y_1 = 960 + \frac{4}{23}y_3 + \frac{11}{23}y_2 - \frac{540}{23}x_2 \\ & x_3 = 193 + \frac{1}{115}y_3 - \frac{3}{115}y_2 - \frac{4}{23}x_2 \\ & x_1 = 28 - \frac{4}{115}y_3 + \frac{1}{230}y_2 - \frac{7}{23}x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

B^* non è più ottima ma continua ad essere ammissibile per il primale. Posso ripartire da B^* con il simplesso primale.

Continua

Intervallo in cui può variare Δa_{22} senza cambiare la base ottima:

$$-\frac{9}{23} - u_2^* \Delta a_{22} = -\frac{9}{23} - \frac{\Delta a_{22}}{23} \leq 0$$

Domanda

Secondo voi il problema è molto sensibile a modifiche Δa_{12} del coefficiente di x_2 nel primo vincolo del problema?

Continua

$$\mathbf{A}_{B^*} \rightarrow \overline{\mathbf{A}}_{B^*}$$

Nel caso peggiore si ha che B^* non è più neppure una base!

$$\mathbf{A}_{B^*} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{A}}_{B^*} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Inoltre ...

... anche se B^* rimane una base abbiamo la seguente riformulazione rispetto a B^* :

$$\begin{aligned}\max \quad & \mathbf{c}_{B^*} \overline{\mathbf{A}}_{B^*}^{-1} \mathbf{b} + (\mathbf{c}_{N^*} - \mathbf{c}_{B^*} \overline{\mathbf{A}}_{B^*}^{-1} \mathbf{A}_{N^*}) \mathbf{x}_{N^*} \\ & \mathbf{x}_{B^*} = \overline{\mathbf{A}}_{B^*}^{-1} \mathbf{b} - \overline{\mathbf{A}}_{B^*}^{-1} \mathbf{A}_{N^*} \mathbf{x}_{N^*} \\ & \mathbf{x}_{B^*}, \mathbf{x}_{N^*} \geq 0\end{aligned}$$

Da qui si nota che si può perdere sia l'ammissibilità del primale che quella del duale per B^* e quindi non si può utilizzare B^* nè come base di partenza del simplesso primale nè del simplesso duale.