Università degli Studi di Parma

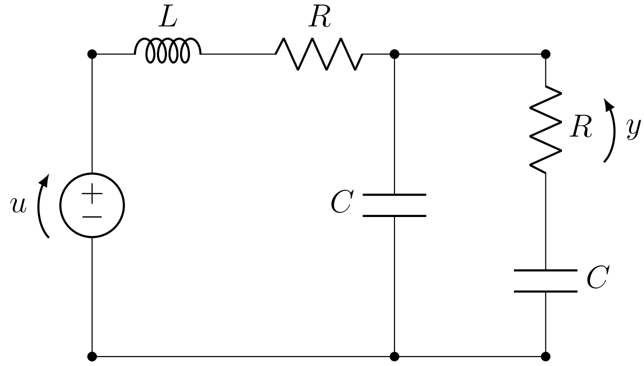
Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Prova parziale di Sistemi Multivariabili

23 novembre 2023

Esercizio 1

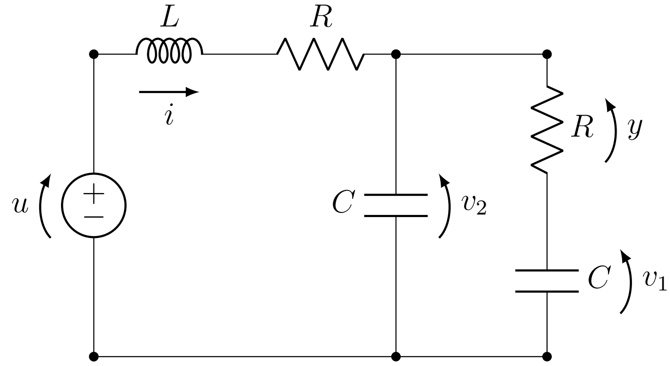
(6 punti) Trova una rappresentazione con un modello di stato per il seguente circuito elettrico, in cui il generatore di tensione u rappresenta l'ingresso e la tensione y l'uscita.



Indicando con A la matrice di stato del sistema e ipotizzando che $R = L = C = 1$, determina:

1. Il polinomio caratteristico $\chi_A(\lambda)$ di A.
2. Il polinomio minimo $\mu_A(\lambda)$ di A.

Soluzione



La tensione y ai capi della resistenza di destra è $v_2 - v_1$, di conseguenza la corrente entrante nella resistenza e nel condensatore di destra è $\dfrac{v_2 - v_1}{R}$. Dalla legge di Kirchhoff delle correnti si ottiene che la corrente entrante nel condensatore di sinistra è $i - \dfrac{v_2 - v_1}{R}$. Infine, la tensione ai capi dell'induttanza è data da $u - (Ri + v_2)$. Ne segue che il modello di stato per il precedente circuito elettrico è il seguente:

$$\begin{cases} L\dot{i}(t) = -Ri(t) - v_2(t) + u(t) \\ C\dot{v}_1(t) = \dfrac{-v_1 + v_2}{R} \\ C\dot{v}_2(t) = i + \dfrac{v_1 - v_2}{R} \\ y(t) = -v_1 + v_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{i}(t) = -\dfrac{R}{L}i(t) - \dfrac{1}{L}v_2(t) + \dfrac{1}{L}u(t) \\ \dot{v}_1(t) = \dfrac{-v_1 + v_2}{RC} \\ \dot{v}_2(t) = \dfrac{1}{C}i + \dfrac{v_1 - v_2}{RC} \\ y(t) = -v_1 + v_2 \end{cases}.$$

In forma matriciale, ponendo $x(t) := [i(t), v_1(t), v_2(t)]^T$, possiamo rappresentare il modello di stato del circuito elettrico nel modo seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -R/L & 0 & -1/L \\ 0 & -1/(RC) & +1/(RC) \\ +1/C & +1/(RC) & -1/(RC) \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) \end{cases}$$

Ponendo $R = L = C = 1$, si ottiene $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Calcoliamo il polinomio caratteristico di A sviluppando $\det(\lambda I - A)$ lungo la prima colonna:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{bmatrix} = (\lambda+1)((\lambda+1)^2 - 1) + (\lambda+1) = (\lambda+1)^3.$$

Quindi $\sigma(A) = \{-1\}$. Per calcolare il polinomio minimo $\mu_A(\lambda)$, calcoliamo:

$$\ker(A - \lambda I) = \ker(A + I) = \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \dim\ker(A + I) = 1,$$

$$\ker(A - \lambda I)^2 = \ker(A + I)^2 = \ker \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \dim\ker(A + I)^2 = 2.$$

Pertanto avremo che $\dim\ker(A + I)^3 = 3$ e quindi $\mu_A(\lambda) = \chi_A(\lambda) = (\lambda+1)^3$.

Esercizio 2

(6 punti) Considera il seguente sistema autonomo a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \in V, \end{cases} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad V = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e sia $\mathcal{A} : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ la trasformazione lineare associata ad A tale che $(\forall x \in \mathbb{C}^4)$ $\mathcal{A}(x) := Ax$.

1. Verifica che V è un sottospazio invariante rispetto ad A.
2. Calcola l'esponenziale di matrice $e^{A_1 t}$, dove $A_1 := [\mathcal{A}_{|V}]_{B,B}$ e B è una base di V.
3. Determina la soluzione $[x(t)]_B$ del sistema ridotto.

Soluzione

Per verificare che V è un sottospazio invariante rispetto ad A dobbiamo verificare che $A(V) \subseteq V$. Sapendo che $A\ \mathrm{Im}M = \mathrm{Im}(AM)$ e considerando M tale che $V = \mathrm{Im}M$, abbiamo che

$$A(V) = A\ \mathrm{Im}M = \mathrm{Im}(AM) = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 5 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Chiamate b_1 e b_2 le due colonne della matrice M, osserviamo che la prima colonna di $A(V)$ è data da $3b_1 + 2b_2$ mentre la seconda colonna di $A(V)$ è data da $1b_1 + 4b_2$. Se però questo fatto non ci risulta evidente, possiamo applicare la riduzione di Gauss alla matrice $[M, AM]$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui otteniamo che le colonne della matrice AM sono linearmente dipendenti dalle colonne della matrice M. Pertanto V è un sottospazio invariante rispetto ad A. Considerando $B = \{b_1, b_2\}$ come base di V, dobbiamo calcolare $A_1 := [\mathcal{A}_{|V}]_{B,B} = [[\mathcal{A}(b_1)]_B, [\mathcal{A}(b_2)]_B] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.
Per calcolare $e^{A_1 t}$, cominciamo col calcolare il polinomio caratteristico di A_1:

$$\chi_{A_1}(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -2 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 2)(\lambda - 5).$$

Quindi $\sigma(A_1) = \{2, 5\}$. Calcoliamo ora una base di autovettori di $\mathbb{C}^2$:

- $\lambda = 2$: $\ker(A - \lambda I) = \ker(A - 2I) = \ker \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, poniamo $v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
- $\lambda = 5$: $\ker(A - \lambda I) = \ker(A - 5I) = \ker \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, poniamo $v_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Considerando la base di autovettori $B_2 := \{v_1, v_2\}$, possiamo quindi calcolare $e^{A_1 t}$ nel seguente modo: $e^{A_1 t} = e^{A_1 t} B_2 \cdot B_2^{-1} = [e^{A_1 t} v_1, e^{A_1 t} v_2] \cdot [v_1, v_2]^{-1} = [e^{2t} v_1, e^{5t} v_2] \cdot [v_1, v_2]^{-1} = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{5t} \\ -e^{2t} & 2e^{5t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{5t} \\ -e^{2t} & 2e^{5t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2e^{2t} + e^{5t} & -e^{2t} + e^{5t} \\ -2e^{2t} + 2e^{5t} & e^{2t} + 2e^{5t} \end{bmatrix}$.
Come verifica, osserviamo che $e^{A_1 t}|_{t=0} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2e^{2t} + e^{5t} & -e^{2t} + e^{5t} \\ -2e^{2t} + 2e^{5t} & e^{2t} + 2e^{5t} \end{bmatrix} \Bigg|_{t=0} =$
$= \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2e^0 + e^0 & -e^0 + e^0 \\ -2e^0 + 2e^0 & e^0 + 2e^0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2+1 & -1+1 \\ -2+2 & 1+2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$
La soluzione $[x(t)]_B$ del sistema ridotto è quindi data da

$$[x(t)]_B = e^{A_1 t} \cdot [x_0]_B = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2e^{2t} + e^{5t} & -e^{2t} + e^{5t} \\ -2e^{2t} + 2e^{5t} & e^{2t} + 2e^{5t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 7e^{2t} - e^{5t} \\ -7e^{2t} - 2e^{5t} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3

(9 punti) Considera il seguente sistema non autonomo a tempo discreto

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \\ x(0) &= x_0, \end{cases}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determina:

1. Il polinomio caratteristico $\chi_A(\lambda)$ di A.
2. Il polinomio minimo $\mu_A(\lambda)$ di A.
3. La potenza di matrice A^k.
4. La matrice delle funzioni di trasferimento $H(z)$.

Soluzione

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A sviluppando $\det(\lambda I - A)$ lungo la seconda colonna: $\chi_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 & -1 \\ 6 & \lambda - 3 & -3 \\ -2 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 3)((\lambda - 2)(\lambda - 1) - 2) = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 3\lambda) = \lambda(\lambda - 3)^2$. Quindi $\sigma(A) = \{0, 3\}$. Per calcolare il polinomio minimo $\mu_A(\lambda)$ ed una base di autovettori (eventualmente generalizzati) di $\mathbb{C}^3$, calcoliamo:

- $\lambda = 0$: $\ker(A - \lambda I) = \ker A = \ker \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, poniamo $v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$.
- $\lambda = 3$: $\ker(A - \lambda I) = \ker(A - 3I) = \ker \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim \ker(A + I) = 1$.

  Pertanto $\mu_A(\lambda) = \chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 3)^2$. Poniamo $v_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

  $\ker(A - \lambda I)^2 = \ker(A - 3I)^2 = \ker \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 12 & 0 & -12 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, poniamo $v_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Considerando la base di autovettori generalizzati $B := \{v_1, v_2, v_3\}$, possiamo quindi calcolare A^k nel seguente modo: $A^k = A^k B \cdot B^{-1} =$
$= [A^k v_1, A^k v_2, A^k v_3] \cdot [v_1, v_2, v_3]^{-1} = [\delta(k) v_1, 3^k v_2, 3^k v_3 + k3^{k-1}(A - 3I)v_3] \cdot [v_1, v_2, v_3]^{-1} =$

$$= \begin{bmatrix} \delta(k) & 0 & 3^k \\ 4\delta(k) & 3^k & -k3^{k-1}3 \\ -2\delta(k) & 0 & 3^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \delta(k) & 0 & 3^k \\ 4\delta(k) & 3^k & -k3^k \\ -2\delta(k) & 0 & 3^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/3 \\ -4/3 & 1 & 4/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \delta(k) & 0 & 3^k \\ 4\delta(k) & 3^k & -k3^k \\ -2\delta(k) & 0 & 3^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \delta(k)+2\cdot 3^k & 0 & -\delta(k)+3^k \\ 4\delta(k)-4\cdot 3^k-2k3^k & 3^{k+1} & -4\delta(k)+4\cdot 3^k-k3^k \\ -2\delta(k)+2\cdot 3^k & 0 & 2\delta(k)+3^k \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \delta(k)+2\cdot 3^k & 0 & -\delta(k)+3^k \\ 4\delta(k)-2(k+2)\cdot 3^k & 3^{k+1} & -4\delta(k)-(k-4)\cdot 3^k \\ -2\delta(k)+2\cdot 3^k & 0 & 2\delta(k)+3^k \end{bmatrix}.$$

Come verifica, osserviamo che $A^k|_{k=0} = \frac{1}{3}\left.\begin{bmatrix} \delta(k)+2\cdot 3^k & 0 & -\delta(k)+3^k \\ 4\delta(k)-2(k+2)\cdot 3^k & 3^{k+1} & -4\delta(k)-(k-4)\cdot 3^k \\ -2\delta(k)+2\cdot 3^k & 0 & 2\delta(k)+3^k \end{bmatrix}\right|_{k=0} =$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \delta(0)+2\cdot 3^0 & 0 & -\delta(0)+3^0 \\ 4\delta(0)-4\cdot 3^0 & 3^1 & -4\delta(0)+4\cdot 3^0 \\ -2\delta(0)+2\cdot 3^0 & 0 & 2\delta(0)+3^0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1+2 & 0 & -1+1 \\ 4-4 & 3 & -4+4 \\ -2+2 & 0 & 2+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} =$$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$, e che $A^k|_{k=1} = \frac{1}{3}\left.\begin{bmatrix} \delta(k)+2\cdot 3^k & 0 & -\delta(k)+3^k \\ 4\delta(k)-2(k+2)\cdot 3^k & 3^{k+1} & -4\delta(k)-(k-4)\cdot 3^k \\ -2\delta(k)+2\cdot 3^k & 0 & 2\delta(k)+3^k \end{bmatrix}\right|_{k=1} =$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \delta(1)+2\cdot 3^1 & 0 & -\delta(1)+3^1 \\ 4\delta(1)-2\cdot 3^2 & 3^2 & -4\delta(1)+3^2 \\ -2\delta(1)+2\cdot 3^1 & 0 & 2\delta(1)+3^1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -18 & 9 & 9 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A.$$

Calcoliamo ora la matrice delle funzioni di trasferimento $H(z) = C(zI-A)^{-1}B + D =$
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z-2 & 0 & -1 \\ 6 & z-3 & -3 \\ -2 & 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} =$

$$= \frac{1}{z(z-3)^2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (z-1)(z-3) & 0 & z-3 \\ -6(z-2) & z(z-3) & 3(z-4) \\ * & * & * \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{z(z-3)^2}\begin{bmatrix} (z-1)(z-3)-6(z-2), & z(z-3), & z-3+3(z-4) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{z(z-3)^2}\begin{bmatrix} z^2-10z+15, & z(z-3), & 4z-15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{z(z-3)^2}\begin{bmatrix} z^2-6z, & -z^2+7z-15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z-6}{(z-3)^2}, & \frac{-z^2+7z-15}{z(z-3)^2}+2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4

(9 punti) Considera il seguente sistema non autonomo a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ x(0) &= x_0, \end{cases}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determina:

1. Il polinomio caratteristico $\chi_A(\lambda)$ di A.
2. I modi del sistema.
3. L'esponenziale di matrice e^{At}.
4. La matrice delle risposte all'impulso $h(t)$.

Soluzione

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A sviluppando $\det(\lambda I - A)$ lungo la terza riga: $\chi_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda+1 & 1 & 2 \\ -5 & \lambda-3 & 10 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{bmatrix} = (\lambda+2)((\lambda+1)(\lambda-3)+5) = (\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda+2) = (\lambda+2)(\lambda-1-i)(\lambda-1+i)$. Quindi $\sigma(A) = \{-2, 1+i, 1-i\}$. Per calcolare una base di autovettori di $\mathbb{C}^3$, calcoliamo:

- $\lambda = 1+i$: $\ker(A-\lambda I) = \ker(A-(1+i)I) = \ker \begin{bmatrix} -2-i & -1 & -2 \\ 5 & 2-i & -10 \\ 0 & 0 & -3-i \end{bmatrix}$, applichiamo il metodo di riduzione di Gauss e iniziamo col moltiplicare la prima riga per $-2+i$: $\ker(A-(1+i)I) = \ker \begin{bmatrix} 5 & 2-i & 4-i \\ 5 & 2-i & -10 \\ 0 & 0 & -3-i \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} 5 & 2-i & 4-i \\ 0 & 0 & -14+i \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} -2+i \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$, poniamo $v := \begin{bmatrix} -2+i \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- $\lambda = -2$: $\ker(A-\lambda I) = \ker(A+2I) = \ker \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 5 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, poniamo $v_3 := \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Esprimiamo ora $e^{(1+i)t}$ tramite la formula di Eulero come $e^{(1+i)t} = e^t(\cos(t) + i\sin(t))$ e calcoliamo $e^{(1+i)t}v = e^t(\cos(t)+i\sin(t)) \cdot \begin{bmatrix} -2+i \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t(-2\cos(t)-\sin(t)) \\ 5e^t\cos(t) \\ 0 \end{bmatrix} + i \cdot \begin{bmatrix} e^t(\cos(t)-2\sin(t)) \\ 5e^t\sin(t) \\ 0 \end{bmatrix}$.

Considerando la base di autovettori $B := \{\Re\{v\}, \Im\{v\}, v_3\}$, possiamo quindi calcolare e^{At} nel seguente modo: $e^{At} = e^{At}B \cdot B^{-1} = [\Re\{e^{(1+i)t}v\}, \Im\{e^{(1+i)t}v\}, e^{-2t}v_3] \cdot [\Re\{v\}, \Im\{v\}, v_3]^{-1} =$

$$= \begin{bmatrix} e^t(-2\cos(t)-\sin(t)) & e^t(\cos(t)-2\sin(t)) & 2e^{-2t} \\ 5e^t\cos(t) & 5e^t\sin(t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} e^t(-2\cos(t)-\sin(t)) & e^t(\cos(t)-2\sin(t)) & 2e^{-2t} \\ 5e^t\cos(t) & 5e^t\sin(t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 5e^t(\cos(t)-2\sin(t)) & -5e^t\sin(t) & 10(e^t(-\cos(t)+2\sin(t))+e^{-2t}) \\ 25e^t\sin(t) & 5e^t(\cos(t)+2\sin(t)) & -50e^t\sin(t) \\ 0 & 0 & 5e^{-2t} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^t(\cos(t)-2\sin(t)) & -e^t\sin(t) & 2(e^t(-\cos(t)+2\sin(t))+e^{-2t}) \\ 5e^t\sin(t) & e^t(\cos(t)+2\sin(t)) & -10e^t\sin(t) \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Come verifica, osserviamo che

$$e^{At}|_{t=0} = \left.\begin{bmatrix} e^t(\cos(t)-2\sin(t)) & -e^t\sin(t) & 2(e^t(-\cos(t)+2\sin(t))+e^{-2t}) \\ 5e^t\sin(t) & e^t(\cos(t)+2\sin(t)) & -10e^t\sin(t) \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\right|_{t=0} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^0(\cos(0)-2\sin(0)) & -e^0\sin(0) & 2(e^0(-\cos(0)+2\sin(0))+e^0) \\ 5e^0\sin(0) & e^0(\cos(0)+2\sin(0)) & -10e^0\sin(0) \\ 0 & 0 & e^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Calcoliamo ora la matrice delle risposte all'impulso $h(t) = Ce^{At}B1(t) + D\delta(t) =$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} * & -e^t\sin(t) & 2(e^t(-\cos(t)+2\sin(t))+e^{-2t}) \\ * & e^t(\cos(t)+2\sin(t)) & -10e^t\sin(t) \\ * & * & * \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} 1(t) + \begin{bmatrix} \delta(t) & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} *, & e^t(\cos(t)+3\sin(t)), & 2(e^t(\cos(t)-7\sin(t))-e^{-2t}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} 1(t) + \begin{bmatrix} \delta(t) & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^t(-\cos(t)+17\sin(t))+2e^{-2t}, & e^t(3\cos(t)-31\sin(t))-4e^{-2t} \end{bmatrix} 1(t) + \begin{bmatrix} \delta(t) & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (e^t(-\cos(t)+17\sin(t))+2e^{-2t})1(t)+\delta(t), & (e^t(3\cos(t)-31\sin(t))-4e^{-2t})1(t) \end{bmatrix}.$$