Sistemi non autonomi a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (*) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Per ora consideriamo il caso tempo variante. L'equazione $(*)$ può essere risolta in forma chiusa

Proprietà: La soluzione di $(*)$ è data da $(\forall t \in \mathbb{R})$ $x(t) = \underbrace{\Phi(t,t_0)x_0}_{1.} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau}_{2.}$

1. è detto evoluzione libera dello stato che infatti coincide con la soluzione dei sistemi autonomi quando u è assente
2. è detto evoluzione forzata dello stato e rappresenta il contributo di u sulla soluzione del sistema

$$y(t) = \underbrace{C(t)\Phi(t,t_0)x_0}_{3.} + \underbrace{C(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,dt + D(t)u(t)}_{4.}$$

3. è detta evoluzione libera dell'uscita
4. è detta evoluzione forzata dell'uscita.

Per dimostrare questa proprietà serve il seguente risultato:

Proprietà: Se $F: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times m}$, $\alpha, \beta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(t,\tau)$ è derivabile rispetto a t e ha derivata continua rispetto a t, $\alpha, \beta \in C^1$, allora $\frac{d}{dt}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} F(t,\tau)\,d\tau = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t}F(t,\tau)\,d\tau + \beta'(t)F(t,\beta(t)) - \alpha'(t)F(t,\alpha(t))$

teorema della derivata totale

Dim: $g(t,\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta F(t,\tau)\,d\tau$, $\frac{d}{dt}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} F(t,\tau)\,d\tau = \frac{d}{dt} g(t,\alpha(t),\beta(t)) = \frac{\partial}{\partial t} g(t,\alpha(t),\beta(t)) +$

teorema fond. del calcolo integrale

* per ipotesi possiamo scambiare $\frac{\partial}{\partial t}$ e $\int$

$+ \frac{\partial}{\partial \alpha} g(t,\alpha(t),\beta(t))\alpha'(t) + \frac{\partial}{\partial \beta} g(t,\alpha(t),\beta(t))\beta'(t) \overset{*}{=} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t}F(t,\tau)\,d\tau - F(t,\alpha(t))\alpha'(t) + F(t,\beta(t))\beta'(t)$ ☐

Dim (formula risolutiva): andiamo a sostituire questa $x(t)$ nel sistema e verifichiamo che ne è soluzione

* proprietà della Φ

$$\dot{x}(t) = A(t)\Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\tau)}_{A(t)\Phi(t,\tau)} B(\tau)u(\tau)\,d\tau + \Phi(t,t)B(t)u(t) = A(t)\left(\Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau\right)$$
$$+ I\cdot B(t)u(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t).$$
$$x(t_0) = \Phi(t_0,t_0)x_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau}_{=0} = Ix_0 = x_0.$$ ☐

Ci concentriamo ora sul caso tempo invariante $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ $(*_2)$, in questo caso $\Phi(t,t_0) = e^{A(t-t_0)}$

Quindi $x(t) = \overbrace{e^{A(t-t_0)}x_0}^{\text{evoluzione libera}} + \overbrace{\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau}^{\text{evoluzione forzata}}$, $y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau + Du(t)$

In quello che segue ci servirà la delta di Dirac, ricordiamone la proprietà campionatrice

Proprietà: Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua, allora $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau = f(t)$

Def: Per $i = 1,\dots,m$ (numero degli ingressi) definiamo h_i come soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B\overset{\text{i-esimo vettore della base canonica}}{e_i}\,\delta(t) \\ h_i(t) = Cx(t) + De_i\delta(t) \\ x(t_0)=0,\ t_0<0 \end{cases}$$

La funzione $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{p\times m}$ data da $h(t) = [h_1(t), h_2(t), \dots, h_m(t)]$ si chiama matrice delle risposte all'impulso

In particolare $h_{ij}(t)$ = componente i-esima dell'uscita ottenuta con un impulso sulla j-esima componente dell'ingresso.

Ricordiamo che $1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t\geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

__Proprietà__: $h(t) = Ce^{At}B1(t) + D\delta(t)$

Dim: $h_i(t) = \cancel{Ce^{A(t-t_0)}x_0} + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau + Du(t) = \underbrace{C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Be_i\delta(\tau)\,d\tau}_{(*)} + De_i\delta(t) =$

$(*) = \begin{cases} 0 & \text{se } t<0 \text{ perché in questo caso l'intervallo di integrazione non contiene } 0 \text{ che è il punto di applicazione della } \delta. \\ Ce^{At}Be_i, & \text{se } t\geq 0, \text{ per la proprietà interpolatrice della } \delta \text{ di Dirac} \end{cases}$

$= Ce^{At}Be_i1(t) + De_i\delta(t)$. Poi sappiamo che $h(t) = [h_1(t),\dots,h_m(t)] = [Ce^{At}Be_11(t)+De_1\delta(t), \dots, Ce^{At}Be_m1(t)+De_m\delta(t)] = Ce^{At}B1(t)\underbrace{[e_1,e_2,\dots,e_m]}_{I} + D\delta(t)\underbrace{[e_1,\dots,e_m]}_{I} = Ce^{At}B1(t) + D\delta(t)$ □

Esempio: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Calcoliamo la matrice delle risposte all'impulso:

$$h(t) = Ce^{At}B1(t) + D\delta(t).$$

$\chi_A(\lambda) = \det\begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -4 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda-2)(\lambda+1)$ $\sigma(A) = \{0, 2, -1\}$ caso diagonalizzabile, troviamo una base di autovettori

$\lambda=0$ $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{Im}\overset{v_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}}$; $\lambda=2$ $\operatorname{Ker}(A-2I) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \operatorname{Im}\overset{v_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$

$\lambda=-1$, $\operatorname{Ker}(A+I) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Im}\overset{v_3}{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}}$, $e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & e^{-t} \\ -2 & e^{2t} & -2e^{-t} \\ 0 & 0 & -e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} =$

$= \begin{bmatrix} \;''\;''\; \\ \\ \\ \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1-e^{-t} \\ -2+2e^{2t} & e^{2t} & -2+2e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$

$h(t) = Ce^{At}B1(t) + \cancel{D\delta(t)} =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1-e^{-t} \\ -2+2e^{2t} & e^{2t} & -2+2e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot 1(t) =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\cdot\left[\begin{array}{c|c} 1 & 1-e^{-t} \\ -2+2e^{2t} & -2+2e^{-t}-e^{2t} \\ 0 & e^{-t} \end{array}\right]\cdot 1(t) = \left[\begin{array}{c|c} -1+2e^{2t} & -1+e^{-t}-e^{2t} \\ -2+2e^{2t} & -2+e^{-t}-e^{2t} \end{array}\right]\cdot 1(t)$ 2×2, 2 ingressi e 2 uscite.

__Def__: Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times m}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{m\times p}$, la convoluzione di f e g è la funzione $f*g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times p}$ tale che $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$.

Sappiamo che per i sistemi lineari a tempo invariante l'uscita è data dalla convoluzione della risposta all'impulso con l'ingresso, quindi ci aspettiamo che questo valga anche per la classe dei sistemi che stiamo vedendo.

<u>Proprietà</u>: La soluzione di $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$ per $t \geq 0$ è data da $y(t) = h(t) * (u(t)1(t))$

Dim: Sviluppiamo i calcoli della convoluzione e verifichiamo che questo corrisponde alla formula risolutiva del sistema: $h(t) * (u(t)1(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)u(\tau)1(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} (Ce^{A(t-\tau)}B1(t-\tau) + D\delta(t-\tau)) \cdot$

$$\cdot u(\tau)1(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\underbrace{1(t-\tau)1(\tau)}_{=1 \text{ se } \tau\in[0,t],\ 0 \text{ altrimenti}}d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{D\delta(t-\tau)u(\tau)1(\tau)d\tau}_{\text{proprietà campionatrice}} =$$

$$= \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)\underbrace{1(t)}_{=1 \text{ perché } t\geq 0} = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) = y(t) \qquad \square$$

<u>Def</u>: La matrice delle funzioni di trasferimento è la trasformata di Laplace della matrice delle risposte all'impulso: $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$.

<u>Proprietà</u>: $H(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$

Dim: $H(s) = \mathcal{L}\{Ce^{At}B1(t) + D\delta(t)\} \overset{\text{linearità}}{=} C\mathcal{L}\{e^{At}\cancel{1(t)}\}B + D\overbrace{\mathcal{L}\{\delta(t)\}}^{\text{è data da 1}} = C(sI-A)^{-1}B + D \qquad \square$

possiamo eliminare $1(t)$ perché $\mathcal{L}$ è monolatera, dipende solo da $t \geq 0$

Esempio: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Vogliamo calcolare $H(s)$ abbiamo due possibilità, o facciamo la trasformata di Laplace della matrice delle risposte all'impulso che abbiamo ottenuto prima, oppure utilizziamo la formula che abbiamo appena visto: $H(s) = C(sI-A)^{-1}B + D =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} s & 0 & -1 \\ -4 & s-2 & 2 \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \cancel{D}$$

il calcolo più complesso è l'inverso della matrice che conviene fare col metodo dell'aggiunta visto che è un inverso dipendente da un parametro.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (s-2)(s+1) & 0 & s-2 \\ 4(s+1) & s(s+1) & -2s+4 \\ 0 & 0 & s(s-2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s(s-2)(s+1)} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (s-2)(s+1) & s-2 \\ 4(s+1) & -2(s-2)-s(s+1) \\ 0 & s(s-2) \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s(s-2)(s+1)} = \begin{bmatrix} (s-2)(s+1)+4(s+1) & -(s-2)-s(s+1) \\ 4(s+1) & (s-2)(2-s)-s(s+1) \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s(s-2)(s+1)}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s(s-2)} & \frac{-s^2-2s-2}{s(s-2)(s+1)} \\ \frac{4}{s(s-2)} & \frac{-2s^2-s+4}{s(s-2)(s+1)} \end{bmatrix}$$

Nel corso di FCA avete visto che la trasformata di Laplace dell'uscita è il prodotto della trasformata di Laplace dell'ingresso per la funzione di trasferimento del sistema. Questo è vero anche per i sistemi che stiamo descrivendo adesso a patto che partiamo con il dato iniziale nullo per $t=0$.

Proprietà: La soluzione del sistema $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$ soddisfa $\mathcal{L}\{y(t)\} = H(s)\,\mathcal{L}\{u(t)\}$.

Dim: è sufficiente risolvere l'equazione differenziale mediante la trasformata di Laplace.

$$X(s) := \mathcal{L}\{x(t)\},\ Y(s) := \mathcal{L}\{y(t)\},\ U(s) := \mathcal{L}\{u(t)\}.$$

$$\dot{X}(s) = sX(s) - \cancel{x(0)} = AX(s) + BU(s) \iff (sI-A)X(s) = BU(s) \iff X(s) = (sI-A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \iff Y(s) = C(sI-A)^{-1}BU(s) + DU(s) = \underline{(C(sI-A)^{-1}B+D)}U(s) = H(s)U(s)$$

Proprietà: I poli degli elementi di $H(s)$ appartengono a $\sigma(A)$.

Dim: $H(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = C\,\mathrm{Adj}(sI-A)B\cdot\underline{(\det(sI-A))}^{-1} + D = C\dfrac{\mathrm{Adj}(sI-A)}{\chi_A(s)}B + D$

Quindi tutte le caselle di $H(s)$ dividono il polinomio caratteristico di A.

$h_{ij}(s) = N(s)/\chi_A(s) = \underbrace{p(s)N'(s)/(p(s)\chi_A'(s))}_{\text{cancellazione poli-zeri}}^{\text{radici comuni}} = N'(s)/\chi_A'(s)$, le radici di $\chi_A'(s)$ sono un sottoinsieme delle radici di $\chi_A(s)$ e quindi in generale i poli di ogni elemento della matrice della funzione di trasferimento sono un sottoinsieme degli autovalori della matrice A. $\square$

Esempio: $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = [1, 0, 0]$, $D = [0, 0]$. Vogliamo calcolare $H(s)$ e vederne i poli. Calcoliamo intanto $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) =$

$$= \det\begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix} = ((\lambda+1)(\lambda-1)+1)(\lambda-2) = \lambda^2(\lambda-2),\quad \sigma(A) = \{0, 2\},$$

$$H(s) = C(sI-A)^{-1}B + \cancel{D} =$$

$$= [1\ 0\ 0]\cdot\begin{bmatrix} s+1 & -1 & -1 \\ 1 & s-1 & 1 \\ 0 & 0 & s-2 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [1\ 0\ 0]\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} (s-1)(s-2) & (s-2) & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}}_{\text{non importa calcolarli}}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s^2(s-2)} =$$

$$= \frac{[(s-1)(s-2), (s-2), *]}{s^2(s-2)}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\frac{s(s-2)}{s^2(s-2)}, \frac{(s-2)}{s^2(s-2)}\right] = \left[\frac{1}{s}, \frac{1}{s^2}\right]$$

abbiamo un unico polo in s, l'autovalore 2 non corrisponde a nessun polo, mentre l'autovalore in 0 corrisponde effettivamente ad un polo, quindi i poli sono un sottoinsieme degli autovalori della matrice A.

Sistemi non autonomi a tempo discreto

$$(*)\ \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \\ x(k_0) = x_0 \end{cases}$$

ci restringiamo al caso tempo invariante, possiamo risolvere il sistema per iterazione: $x(k_0+1) = Ax(k_0) + Bu(k_0) =$
$= Ax_0 + Bu(k_0)$; $x(k_0+2) = Ax(k_0+1) + Bu(k_0+1) =$
$= A^2x_0 + ABu(k_0) + Bu(k_0+1)$.

$$x(k_0+3) = Ax(k_0+2) + Bu(k_0+2) = A^3x_0 + A^2Bu(k_0) + ABu(k_0+1) + Bu(k_0+2) \ldots$$

$$x(k_0+i) = A^ix_0 + A^{i-1}Bu(k_0) + A^{i-2}Bu(k_0+1) + \ldots + Bu(k_0+i-1)$$

Proprietà: La soluzione di (*) per $k > k_0$ è data da $x(k) = \underbrace{A^{k-k_0} x_0}_{\text{evoluzione libera dello stato}} + \underbrace{\sum_{i=k_0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i)}_{\text{evoluzione forzata dello stato}}$ e analogamente

$$y(k) = \underbrace{CA^{k-k_0} x_0}_{\text{evoluzione libera dell'uscita}} + \underbrace{C\sum_{i=k_0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i) + Du(k)}_{\text{evoluzione forzata dell'uscita}}$$

Dim: $x(k+1) = A^{k+1-k_0} x_0 + \sum_{i=k_0}^{k} A^{k-i} B u(i) = A \cdot A^{k-k_0} x_0 + \sum_{i=k_0}^{k-1} A^{k-i} B u(i) + \overset{I}{A^0} B u(k) =$

$= A\left(A^{k-k_0} x_0 + \sum_{i=k_0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i)\right) + Bu(k) = Ax(k) + Bu(k)$.

$x(k_0+1) = A x_0 + Bu(k_0)$ ma vale anche che $x(k_0+1) = A^{k_0+1-k_0} x_0 + \underbrace{A^{k_0+1-1-k_0}}_{I} Bu(k_0) = Ax_0 + Bu(k_0)$

l'espressione che abbiamo scritto coincide con la soluzione del sistema $\square$

Ricordiamo che la delta di Dirac discreta è definita come $\delta : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $\delta(k) = \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0 \\ 0, & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$

Def: Per $i = 1, \dots, m$, sia $k_0 < 0$ e sia $h_i : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^p$ tale che $h_i(k) = 0$ se $k < k_0$ e per $k \geq k_0$ h_i soddisfa $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Be_i\delta(k) \\ h_i(k) = Cx(k) + De_i\delta(k) \\ x(k_0) = 0 \end{cases}$. La matrice delle risposte all'impulso è $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^{p \times m}$ tale che $h(k) = [h_1(k), \dots, h_m(k)]$

h_i è l'uscita che corrisponde ad un impulso dato sulla i-esima componente dell'ingresso partendo da un dato iniziale nullo

Proprietà: $h(k) = CA^{k-1} B \mathbb{1}(k-1) + D\delta(k)$ [a tempo continuo $h(t) = Ce^{At} B \mathbb{1}(t) + D\delta(t)$]

Dim: Calcoliamo $h_i(k) = \underbrace{CA^{k-k_0} \cancel{x_0}}_{=0} + \underbrace{C\sum_{\ell=k_0}^{k-1} A^{k-1-\ell} Be_i \delta(\ell)} + De_i\delta(k)$, ma se $k \leq 0$ la somma è nulla altrimenti l'unico caso in cui la somma è non nulla è con $k > 0$ e in quel caso la somma si riduce al termine $\ell = 0$ per cui $\delta(\ell) = 1$. Quindi $h_i(k) = CA^{k-1} Be_i \mathbb{1}(k-1) + De_i\delta(k)$ inoltre $h(k) = [h_1(k), \dots, h_m(k)] = [CA^{k-1}Be_1 \mathbb{1}(k-1), \dots, CA^{k-1}Be_m \mathbb{1}(k-1)] + [De_1\delta(k), \dots, De_m\delta(k)] =$
$= CA^{k-1} B \mathbb{1}(k-1) \underbrace{[e_1, \dots, e_m]}_{I} + D\delta(k) \underbrace{[e_1, \dots, e_m]}_{I} = CA^{k-1} B \mathbb{1}(k-1) + D\delta(k)$. $\square$

Esempio: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $C = [1, 0, 0]$ $D = [1, 0]$ Vogliamo calcolare $h(k) = CA^{k-1} B\mathbb{1}(k-1) + D\delta(k)$ il calcolo più complicato è la potenza di A.
$\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda+2)$ $\sigma(A) = \{0, 1, -2\}$

la matrice è diagonalizzabile, calcoliamo quindi una base di autovettori:

$\lambda = 0$ $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \operatorname{Im}\begin{array}{c} v_1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$, $\lambda = 1$ $\operatorname{Ker}(A - I) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \operatorname{Im}\begin{array}{c} v_2 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$

$\lambda = -2$ $\operatorname{Ker}(A + 2I) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Im}\begin{array}{c} v_3 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{array}$, $A^k = [A^k v_1, A^k v_2, A^k v_3][v_1, v_2, v_3]^{-1} =$

$$= \begin{bmatrix} \delta(k) & 0 & (-2)^k \\ -\delta(k) & 1 & -(-2)^k \\ 0 & 0 & -(-2)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ & \\ & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} \delta(k) & 0 & \delta(k)-(-2)^k \\ 1-\delta(k) & 1 & -\delta(k)+(-2)^k \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{array}\right] = A^k \quad \text{Quindi } h(k) = CA^{k-1}B\,1(k-1) + D\delta(k) =$$

$$= [1 \; \underbrace{0 \;\; 0}_{\text{posizioni ignorate}}] \left[\begin{array}{c|c|c} \delta(k-1) & 0 & \delta(k-1)-(-2)^{k-1} \\ \hline * & * & * \\ * & * & * \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 1(k-1) + [1,0]\,\delta(k) =$$

$$= [\delta(k-1),\ 0,\ \delta(k-1)-(-2)^{k-1}] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 1(k-1) + [\delta(k),\ 0] = [0, -(-2)^{k-1}]\,1(k-1) + [\delta(k), 0] =$$

$= [\delta(k),\ -(-2)^{k-1} 1(k-1)] = h(k)$ matrice delle risposte all'impulso 1×2 perché abbiamo una uscita e due ingressi

Come succede a tempo continuo anche a tempo discreto la componente forzata dell'uscita può essere scritta come la convoluzione della matrice delle risposte all'impulso per l'ingresso.

<u>Def</u>: Se $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^{m\times n}$, $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^{n\times p}$, la convoluzione tra f e g è $f*g: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^{m\times p}$ tale che

$$(f*g)(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(k-i)g(i) = f(k)g(0) + f(k-1)g(1) + f(k-2)g(2) + \ldots + f(k+1)g(-1) + f(k+2)g(-2) + \ldots$$

quindi la convoluzione discreta è una somma di versioni traslate e moltiplicate del segnale f.

<u>Proprietà</u>: La soluzione dell'equazione $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \\ x(0) = 0 \end{cases}$ è data da $y(k) = h(k) * (u(k)1(k))$ per $k>0$

Dim: $h(k) * (u(k)1(k)) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(k-i)u(i)1(i) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (CA^{k-i-1}B\,1(k-i-1) + D\delta(k-i))u(i)1(i) =$

$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} CA^{k-i-1}Bu(i)\underbrace{1(k-i-1)1(i)}_{=0 \text{ se } i>k-1 \,\vee\, i<0} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} Du(i)\underbrace{\delta(k-i)}_{=1 \text{ per } i=k}1(i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1}Bu(i) + Du(k) = y(k).$$

□

<u>Def</u>: La matrice delle funzioni di trasferimento è data da $H(z) = \mathcal{Z}\{h(k)\}$

<u>Proprietà</u>: $H(z) = C(zI-A)^{-1}B + D$ [a tempo continuo avevamo $H(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$]

Dim: $H(z) = \mathcal{Z}\{h(k)\} = \mathcal{Z}\{CA^{k-1}B\,1(k-1) + D\delta(k)\} = C\,\mathcal{Z}\{A^{k-1}1(k-1)\}B + D\,\mathcal{Z}\{\delta(k)\} =$

ricordiamo che $\mathcal{Z}\{x(k-1)\} = z^{-1}\mathcal{Z}\{x(k)\} + x(-1)$, questo perché z^{-1} è l'operatore di ritardo della trasformata zeta come z è l'operatore di anticipo, in più essendo la trasformata zeta monolatera, quando ritardiamo il segnale di un campione, il campione che prima era in -1 passa in 0 quindi entra nell'intervallo in cui agisce la trasformata quindi il suo contributo va aggiunto alla trasformata stessa. Inoltre sappiamo che $\mathcal{Z}\{\delta(k)\} = 1$

⊛ agisce solo sulla parte positiva del segnale

$\mathcal{Z}\{A^{k-1}1(k-1)\} = z^{-1}\mathcal{Z}\{A^k 1(k)\} - 0 \overset{⊛}{=} z^{-1}\mathcal{Z}\{A^k\} = z^{-1}z(zI-A)^{-1}$

$H(z) = C(zI-A)^{-1}B + D$

□

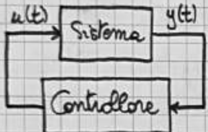
Esempio: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = [1, 0, 0]$, $D = [1, 0]$ $\quad H(z) = C(zI-A)^{-1}B + D =$

$$= [1,0,0] \begin{bmatrix} z & 0 & -2 \\ -1 & z-1 & 2 \\ 0 & 0 & z+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + [1,0] = [1,0,0] \begin{bmatrix} A & B & C \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{z(z-1)(z+2)} + [1,0]$$

$$A = (z-1)(z+2),\ B = 0,\ C = 2(z-1),\ H(z) = \frac{[(z-1)(z+2),\ 0,\ 2(z-1)]}{z(z-1)(z+2)} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + [1,0] =$$

$$= \left[0, -\frac{1}{z+2}\right] + [1, 0] = \left[1, -\frac{1}{z+2}\right]$$

Sistemi non autonomi: discretizzazione, sistemi equivalenti



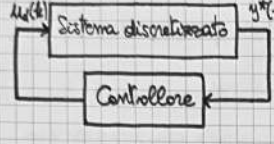
Possiamo rappresentare schematicamente un sistema di controllo in questo modo. Il sistema potrebbe essere un motore elettrico, un veicolo, un sistema termico. Il sistema avrà un'uscita $y(t)$, che rappresenta l'insieme dei segnali che siamo in grado di misurare, e un ingresso $u(t)$ che contiene tutte le variabili che noi possiamo manipolare. L'uscita sarà l'ingresso del controllore che avrà invece come uscita l'ingresso $u(t)$. Questo è lo schema di base di un sistema di controllo in retroazione in cui il controllore è un secondo sistema che prende come ingresso l'uscita del sistema e ha come uscita ciò che diventa l'ingresso del sistema.

Nella pratica il sistema sarà descritto da un modello a tempo continuo, poiché i segnali della fisica si evolvono a tempo continuo e sono descritti da equazioni differenziali, mentre il controllore il più delle volte è un sistema a tempo discreto perché è realizzato tramite un microcontrollore PLC o un elaboratore che aggiorna il proprio stato secondo un tempo di clock. Quindi un modello più realistico e completo del sistema di controllo, dobbiamo tenere conto del fatto che il controllore

lavora a tempo discreto. Per trasformare l'uscita da un segnale a tempo continuo ad uno a tempo discreto, all'uscita applichiamo un campionatore che campiona il segnale $y(t)$ con un periodo T e restituisce in uscita un segnale campionato $y^*(k)$. Questo segnale passerà al controllore a tempo discreto che darà in uscita un segnale di controllo campionato $u_d(k)$. Per poter trasformare questo segnale a tempo discreto ad uno a tempo continuo serve un filtro ricostruttore, ad esempio il filtro di Hold che mantiene il segnale costante tra un passo di campionamento e il successivo. Il filtro di Hold fornirà un segnale a tempo continuo $u(t)$ che sarà l'ingresso del sistema.

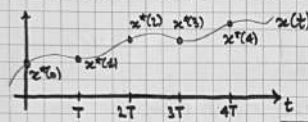
Un problema di questo modello è che coesistono un sistema a tempo continuo ed uno a tempo discreto.

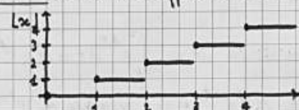
Per poter dare una rappresentazione omogenea a questo sistema di controllo vedremo che è possibile trovare un equivalente a tempo discreto della parte di sistema a tempo continuo. Se consideriamo la



serie del filtro di Hold, del sistema a tempo continuo e del campionatore possiamo trovare un sistema a tempo discreto che è equivalente alla serie di queste tre componenti. Il sistema discretizzato avrà poi come uscita direttamente $y^*(k)$ e come ingresso l'uscita del controllore $u_d(k)$. Vediamo ora come è possibile trasformare la serie di queste tre componenti in un sistema a tempo discreto che ci consente di trasformare il modello in un modello omogeneo in cui compaiono solo sistemi a tempo discreto.

<u>Def</u>: Sia $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e sia $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$, detto tempo di campionamento. Il segnale x campionato è dato da $x^*: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^n$, tale $x^*(k) = x(kT)$ e lo rappresentiamo come $x(t) \xrightarrow{\;T\;} x^*(k)$.

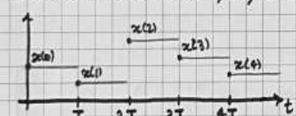




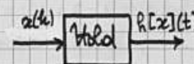
<u>Def</u>: Se $x \in \mathbb{R}$, la parte intera inferiore di x è $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$

<u>Def</u>: Se $x: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^n$ e sia $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$, definiamo $h[x]: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tale che $h[x](t) = x\left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor\right)$.

Osservazione: se $t \in [0, T)$, $\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor = 0$, $h[x](t) = x(0)$; se $t \in [T, 2T)$, $\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor = 1$, $h[x](t) = x(1)$; ...



Rappresentiamo il filtro di Hold con questo blocco:



<u>Proprietà</u>: Siano dati i due sistemi $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x_D(k+1) = A_D x_D(k) + B_D u_D(k) \\ y_D(k) = C_D x_D(k) + D_D u_D(k) \\ x_D(0) = x_{0,D} \end{cases}$

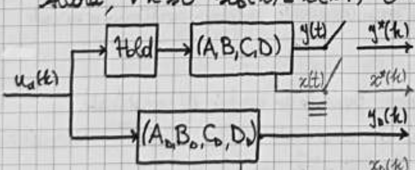
e sia $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$.

Se: 1. $x_0 = x_{0,D}$

2. $u = h[u_D]$

3. $A_D = e^{AT}$, $B_D = \int_0^T e^{A\tau} B \, d\tau$, $C_D = C$, $D_D = D$

Allora, $\forall k \geq 0$ $x_D(k) = x(kT)$ e $y_D(k) = y(kT)$.



Facciamo vedere che il segnale ottenuto campionando la soluzione $x(t)$ del sistema a tempo continuo soddisfa la stessa equazione alle differenze del sistema a tempo discreto

Dim: $u = h[u_D]$, $x((k+1)T) = e^{A((k+1)T-kT)}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A\underbrace{((k+1)T-\tau)}_{\ell}} B\underline{u(\tau)}\,d\tau$

se $\tau \in [kT, (k+1)T)$, $u(\tau) = u_D(k)$. $\ell := (k+1)T - \tau$, $\frac{d\ell}{d\tau} = -1$, quindi $d\ell = -d\tau$

$$x((k+1)T) = \boxed{e^{AT}}x(kT) + \int_T^0 e^{A\ell}B(-d\ell)\,u_D(k) = A_D x(kT) + \boxed{\int_0^T e^{A\ell}B\,d\ell}\,u_D(k) = A_D x(kT) + B_D u_D(k).$$

$y(kT) = Cx(kT) + D\underline{u(kT)}$. $x^*(k) := x(kT)$, $y^*(k) := y(kT)$. Quindi

$$\begin{cases} x^*(k+1) = A_D x^*(k) + B_D u_D(k) \\ y^*(k) = C_D x^*(k) + D_D u_D(k) \\ x^*(0) = x_0 = x_{0,D} \end{cases}$$

è la soluzione della stessa equazione alle differenze e con lo stesso dato iniziale $\Rightarrow x^*(k) = x_D(k)$, $y^*(k) = y_D(k)$ $\forall k \geq 0$ $\square$

Abbiamo visto che $B_D = \int_0^T e^{A\tau}B\,d\tau = \int_0^T e^{A\tau}d\tau \cdot B$, può non essere necessario calcolare esplicitamente questo integrale perché se la matrice A è invertibile, abbiamo un'espressione in forma chiusa per l'integrale.

<u>Proprietà</u>: Se A è invertibile, allora $\int_0^T e^{A\tau}d\tau = A^{-1}(e^{AT} - I)$ $\boxed{\int_0^T e^{a\tau}d\tau = \frac{1}{a}(e^{aT}-1)}$

Dim: mostriamo che $A^{-1}\cdot e^{At}$ è una primitiva di e^{At}: $\frac{d}{dt}A^{-1}e^{At} = A^{-1}\cdot A\cdot e^{At} = e^{At}$.

$$\int_0^T e^{A\tau}d\tau = A^{-1}e^{At}\Big|_0^T = A^{-1}e^{AT} - A^{-1}e^{A0} = A^{-1}(e^{AT} - I).$$ $\square$

Esempio: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [1,\ 1]$, $D = 0$. $A_D = e^{AT}$, $B_D = \int_0^T e^{A\tau}B\,d\tau =$
$= A^{-1}(e^{AT} - I)B$, $C_D = C$, $D_D = D$. Il calcolo più oneroso è quello di e^{AT}.

$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2)$, $\sigma(A) = \{1, 2\}$.

- $\lambda = 1$, $\mathrm{Ker}(A - I) = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\lambda = 2$, $\mathrm{Ker}(A - 2I) = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$e^{At} = [e^{At}v_1, e^{At}v_2][v_1, v_2]^{-1} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ e^t & e^{2t} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ e^t - e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$A_D = e^{AT} = \begin{bmatrix} e^T & 0 \\ e^T - e^{2T} & e^{2T} \end{bmatrix}. \quad B_D = A^{-1}(e^{AT} - I)B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} e^T - 1 & 0 \\ e^T - e^{2T} & e^{2T} - 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e^T - 1 \\ e^T - e^{2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^T - 1 \\ e^T - \frac{1}{2}e^{2T} - \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

<u>Osservazione</u>: Rappresentiamo un sistema lineare a tempo invariante a tempo continuo o discreto con la quadrupla $\Sigma = (A, B, C, D)$

Vediamo ora come cambiano le matrici di un sistema facendo un cambio di coordinate.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

e consideriamo un cambio di coordinate $z = Tx$, $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, T invertibile, sostituendo otteniamo che: $x = T^{-1}z$, $\dot{x} = T^{-1}\dot{z}$

$$\begin{cases} T^{-1}\dot{z}(t) = AT^{-1}z(t) + Bu(t) \\ y(t) = CT^{-1}z(t) + Du(t) \\ T^{-1}z(t_0) = x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{z}(t) = \overset{\hat{A}}{\boxed{TAT^{-1}}}z(t) + \overset{\hat{B}}{\boxed{TB}}u(t) \\ y(t) = \underset{\hat{C}}{\boxed{CT^{-1}}}z(t) + \underset{\hat{D}}{\boxed{D}}u(t) \\ z(t_0) = Tx_0 \end{cases}$$

$$(A,B,C,D)$$
$$\downarrow$$
$$(TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D)$$

Il modello è lo stesso ma è rappresentato attraverso due sistemi di coordinate

Per il caso discreto i calcoli sono del tutto analoghi.
Questi due sistemi si dicono internamente equivalenti:

Def: Due sistemi lineari a tempo invarianti (a tempo continuo o discreto) $\Sigma = (A,B,C,D)$, $\hat{\Sigma} = (\hat{A},\hat{B},\hat{C},\hat{D})$ si dicono <u>internamente equivalenti</u> se $\exists T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che: T invertibile e $\hat{A} = TAT^{-1}$, $\hat{B} = TB$, $\hat{C} = CT^{-1}$, $\hat{D} = D$.

<u>Def</u>: I due sistemi $\Sigma = (A,B,C,D)$ e $\hat{\Sigma} = (\hat{A},\hat{B},\hat{C},\hat{D})$ sono <u>esternamente equivalenti</u> se $\underbrace{C(sI-A)^{-1}B+D}_{H(s)} = \underbrace{\hat{C}(sI-\hat{A})^{-1}\hat{B}+\hat{D}}_{\hat{H}(s)}$, cioè se la matrice delle funzioni di trasferimento di Σ coincide con quella di $\hat{\Sigma}$.

<u>Osservazione</u>: Nel caso a tempo discreto vale una condizione analoga che coinvolge le funzioni di trasferimento $H(z)$ e $\hat{H}(z)$.

Equivalenza interna $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ Equivalenza esterna

<u>Proprietà</u>: Se due sistemi Σ e $\hat{\Sigma}$ sono internamente equivalenti, allora sono anche esternamente equivalenti (sia a tempo continuo che a tempo discreto).

Dim: $\Sigma = (A,B,C,D)$, $\hat{\Sigma} = (TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D)$, $\hat{H}(s) = CT^{-1}(sI - TAT^{-1})^{-1}TB + D =$ $\overset{*}{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$
$= CT^{-1}(sTT^{-1} - TAT^{-1})^{-1}TB + D = CT^{-1}(T(sI-A)T^{-1})^{-1}TB + D \overset{*}{=} C\cancel{T^{-1}}\cancel{T}(sI-A)^{-1}\cancel{T^{-1}}\cancel{T}B + D =$
$= C(sI-A)^{-1}B + D = H(s)$ □

Controesempio: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [1, 0]$, $D = 0$; $\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\hat{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\hat{C} = [1, 0]$, $\hat{D} = 0$

I due sistemi non possono essere internamente equivalenti poiché A e $\hat{A}$ non sono simili, infatti $\sigma(A) = \{-1, 1\}$, $\sigma(\hat{A}) = \{1, 2\}$. Calcoliamo ora $H(s) = [1\ 0] \cdot \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$
$= [1, 0] \begin{bmatrix} (s-1)^{-1} & 0 \\ 0 & (s+1)^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s-1}$.

$\hat{H}(s) = [1, 0] \cdot \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1, 0] \begin{bmatrix} (s-1)^{-1} & 0 \\ 0 & (s-2)^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s-1}$. $\quad H(s) = \hat{H}(s)$

Quindi i due sistemi sono esternamente equivalenti ma non internamente equivalenti.