RICERCA OPERATIVA - PARTE II

ESERCIZIO 1. (10 punti) Sia dato il seguente problema di PLI

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 - x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq \frac{11}{2} \\ & x_1 + \frac{1}{3}x_2 \leq \frac{7}{3} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in Z \end{array}$$

Si visualizzi graficamente la chiusura convessa di Z_a e la si descriva tramite opportune disequazioni lineari. Si risolva il problema utilizzando l'algoritmo di taglio basato sui tagli di Gomory.

ESERCIZIO 2. (9 punti)

Sia dato il seguente problema

$$\begin{array}{ll} \min & xy \\ & -x^2 - y^2 + 1 \geq 0 \\ & -x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

- È un problema di programmazione convessa?
- ci sono punti che non soddisfano la constraint qualification riguardante i gradienti dei vincoli attivi?
- si impostino le condizioni KKT ;
- trovare tutti i punti che soddisfano le condizioni KKT;
- ragionando su regione ammissibile e funzione obiettivo, possiamo affermare che il problema ha un ottimo globale? In caso affermativo, qual è l'ottimo globale di questo problema?

ESERCIZIO 3. (5 punti) Si dia la definizione di rilassamento lagrangiano di un problema di Programmazione Lineare Intera e si dimostri, partendo dalla definizione di rilassamento, che è effettivamente un rilassamento. Si dia anche la definizione di duale lagrangiano.

ESERCIZIO 4. (5 punti) Si consideri un problema di ottimizzazione non lineare senza vincoli con funzione obiettivo f convessa. Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa **motivando la risposta**:

- se $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ con $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, sono minimi globali, allora tutti i punti $\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$ con $\lambda \in [0,1]$, ovvero tutti i punti sul segmento che congiunge $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ sono anch'essi minimi globali;
- dati due punti $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ tali che $\nabla f(\mathbf{x}_1) = \nabla f(\mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$, allora
$$\nabla f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) = \mathbf{0} \quad \text{per tutti i } \lambda \in [0,1];$$
- se f è strettamente convessa, allora il sistema di equazioni
$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$
o non ha soluzioni o ha un'unica soluzione.