Corso di Sistemi Multivariabili

Esercizi: serie 3

1) Calcola la potenza di matrice A^k nei casi seguenti

$$a) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$b) A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$c) A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2) Trova la matrice delle funzioni di trasferimento e la matrice delle risposte all'impulso per il sistema seguente

$$\begin{aligned} &x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ &y(k) = Cx(k) \end{aligned}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

3) Trova l'uscita $y(k)$ corrispondente al segnale di ingresso $u(k) = 1$, a partire da condizioni iniziali nulle ($x(0) = 0$), per il sistema

$$\begin{aligned} &x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ &y(k) = Cx(k) \end{aligned}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soluzioni

1) a) $\chi_A(\lambda) = -(\lambda-3)(\lambda-2)^2$, inoltre $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \ker(A-3I)$, $\dim\ker(A-2I) = 1$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \ker(A-2I)$. Inoltre $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \ker(A-2I)^2$. Troviamo le soluzioni fonda-

mentali $A^k v_1 = 3^\lambda v_1$, $A^k v_2 = 2^k v_2$, $A^k v_3 = 2^k v_3 + k2^{k-1}(A-2I)v_3 = \begin{bmatrix} k2^{k-1} \\ 2^k + k2^{k-1} \\ k2^{k-1} \end{bmatrix}$. Quindi

$$A^k = [A^k v_1, A^k v_2, A^k v_3][v_1, v_2, v_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 2^{k+1} - k2^{k-1}k - 3^k & k2^{k-1} & 3^k - 2^k \\ -k2^{k-1} - 3^k + 2^k & 2^k + k2^{k-1}k & 3^k - 2^k \\ -k2^{k-1} - 2\,3^k + 2^{k+1} & k2^{k-1}k & -2^k + 2\,3^k \end{bmatrix}.$$

b) $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 4)^3$, il polinomio minimo è $m_a(\lambda) = (\lambda - 4)^2$, quindi $A - 4I$ è nilpotente di ordine 2, sfruttando questo fatto possiamo usare lo sviluppo del binomio

$$A^k = (4I+(A-4I))^k = \sum_{l=0}^{1} \left(\begin{array}{c} \lambda \\ l \end{array} \right) 4^{k-1}(A-4I)^l = 4^k I + k4^{k-1}(A-4I) = \begin{bmatrix} 4^k & k4^{k-1} & 2\,k4^{k-1} \\ 0 & 4^k - 2\,k4^{k-1} & -4\,k4^{k-1} \\ 0 & k4^{k-1} & 4^k + 2\,k4^{k-1} \end{bmatrix}.$$

c) $\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-3)$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ è un autovettore dell'autovalore 1, $v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ è un autovettore dell'autovalore 2 e $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ è un autovettore generalizzato di ordine 2 per lo stesso autovalore. Infine $v_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ è un autovettore per l'autovalore 3. Si ha $A^k v_1 = v_1$, $A^k v_2 = 2^k v_2$, $A^k v_3 = 2^k v_3 + k2^{k-1}(A-2I)v_3$, $A^k v_4 = 3^k v_4$. Infine $A^k =$

$$[A^k v_1, A^k v_2, A^k v_3, A^k v_4][v_1, v_2, v_3, v_4]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3\,2^k - 3 & 3\,2^{-1+k}k - 3\,2^k + 3 & 3\,2^k - 3/2 - 1/2\,3^{1+k} \\ 0 & 2^k & 2^{-1+k}k & 2^k - 3^k \\ 0 & 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^k \end{bmatrix}.$$

2) Usiamo la formula

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D = \frac{C\text{Adj }(zI - A)B}{\det(zI - a)}$$

risulta

$$\text{Adj }(zI - A) = \begin{bmatrix} z\,(z+2) & z & 0 \\ 0 & z\,(z+2) & 0 \\ 0 & 2\,z + 4 & (z+2)^2 \end{bmatrix}$$

e

$$\det(zI - A) = z(z+2)^2$$

da cui

$$H(z) = \begin{bmatrix} \frac{(z+3)}{(z+2)^2} & \frac{(2\,z^2+7\,z+4)}{z\cdot(z+2)^2} \end{bmatrix}.$$

La matrice delle risposte all'impulso è data da

$$h(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = [((-2)^{k-1}+(k-1)(-2)^{k-2})1(k-1), -(-2)^{k-2}-2(k-2)(-2)^{k-3}1(k-2)+2\delta(k-1)]\,.$$

3) Procedendo come nell'esercizio precedente si trova che

$$H(z) = \frac{z}{z^2+1} \ ,$$

la trasformata del gradino in ingresso è

$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$

da cui

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z^2+1)}$$

antitrasformando $Y(z)$ si trova l'uscita. Poniamo $G(z) = Y(z)z^{k-1}$, quindi

$$y(k) = \text{Res}\ \{G(z), 1\} + 2\text{Re}\{\text{Res}\ \{G(z), j\}\} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(k\pi/2 - 3/4\,\pi)\ .$$