Corso di Sistemi Multivariabili

Esercizi: serie 6

1) Considera il sistema a tempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ x(0) &= x_0\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

con il dato iniziale $x(0) = x_0$ e $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [1,\, 0]$.

a) Determina una legge di retroazione $u(t) = Fx(t)$ che minimizzi la funzione costo

$$J(F) = \int_0^{+\infty} x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)dt\,,$$

dove $Q = I$ e $R = 1$.

b) Determina il valore minimo della funzione costo quando $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2) Considera lo stesso sistema del punto 1) in presenza di termini di rumore gaussiano bianco $z(t)$ e $w(t)$

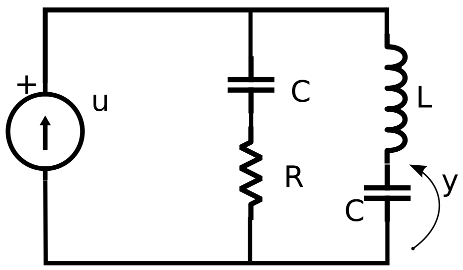
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + w(t)\\ x(0) &= x_0\\ y(t) &= Cx(t) + z(t)\end{aligned}$$

dove $E[w(\tau)w(t)] = I\delta(t-\tau)$, $E[z(\tau)z(t)] = \delta(t-\tau)$

a) Determina l'osservatore ottimo dello stato che minimizza la varianza a regime dell'errore di osservazione.

b) Determina la varianza a regime dell'errore di osservazione.

3) Considera il seguente circuito elettrico, in cui la tensione ai capi del generatore $u(t)$ rappresenta l'ingresso e la tensione ai capi del condensatore di destra $y(t)$ rappresenta l'uscita.



a) Descrivi il sistema per mezzo di un modello di stato.

b) Trova gli stati di equilibrio del sistema quando il segnale di ingresso u è costante.

c) Metti il sistema nella forma standard per i sistemi non completamente osservabili.

d) Trova la funzione di trasferimento del sistema.

e) Trova l'insieme delle retroazioni uscita-ingresso del tipo $u(t) = fy(t)$, con $f \in \mathbb{R}$, per cui il sistema è asintoticamente stabile.

4) Considera il sistema lineare a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k)\,, \end{aligned}$$

con $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [1,\, 1,\, 0]$.

a) Sapendo che $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y(2) = 1$, $u(0) = 0$, $u(1) = 1$, è possibile trovare lo stato iniziale $x(0)$ del sistema? In caso affermativo trovane il valore.

b) Ripetere lo stesso esercizio usando la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, le stesse matrici B e C del punto a) e usando le condizioni $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y(2) = 7$, $u(0) = -1$, $u(1) = 1$.

Soluzioni

1)

a) Il controllo ottimo è dato da $u^*(t) = -R^{-1}B^TPx$, dove $R = 1$ e P è la soluzione dell'equazione di Riccati

$$A^TP + PA + Q - PBR^{-1}B^TP = 0$$

dove $Q = I$. Scriviamo $P = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, l' equazione di Riccati è equivalente al seguente sistema

$$\begin{aligned} &b^2 - 2b - 1 = 0 \\ &a + c - bc = 0 \\ &c^2 - 2b - 1 = 0\,, \end{aligned}$$

dalla prima equazione si ottiene $b \in \{b_1, b_2\}$, dove

$$b_1 = 1 + \sqrt{2},\ b_2 = 1 - \sqrt{2}\,,$$

dalla terza equazione si ottiene $c^2 = 1 + 2b = 3 \pm \sqrt{2}$, visto che deve essere $c \geq 0$ (altimenti non potrebbe essere $P \geq 0$), otteniamo le due soluzioni positive $c_1 = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$, $c_2 = \sqrt{3 - \sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}$, che corrispondono a b_1 e b_2. Infine dalla seconda equazione abbiamo $a = c(b-1)$ da cui $a_1 = c_1(b_1 - 1) = (1 + \sqrt{2})\sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$, $a_2 = (1 - \sqrt{2})\sqrt{2}$, quindi a_2 è da scartare in quanto negativa. Quindi otteniamo $P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}+2 & \sqrt{2}+1 \\ \sqrt{2}+1 & \sqrt{2}+1 \end{bmatrix}$, e la matrice di guadagno ottimo è data da $F = -R^{-1}B^TP = -\begin{bmatrix} \sqrt{2}+1 & \sqrt{2}+1 \end{bmatrix}$.

b) Il costo ottimo è dato da $J = x_0^TPx_0 = \sqrt{2} + 2$.

2)

a) L'osservatore è del tipo

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(C\hat{x}(t) - y(t))\,,$$

la matrice di guadagno ottimo K è data da $K = -PC^TZ^{-1}$, dove P è la soluzione dell'equazione di Riccati

$$AP + PA^T + Z - PC^TZ^{-1}CP = 0\,,$$

in questo caso $W = I$ e $Z = 1$. L'equazione di Riccati ha una discussione simile a quella del punto 1) e si trova

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}+1 & \sqrt{2}+1 \\ \sqrt{2}+1 & \sqrt{2}+2 \end{bmatrix}\,,$$

$$K = -\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}\,.$$

b) $\lim_{t\to\infty} E[e(t)e^T(t)] = P$.

3) Prendiamo come stato $x = [v_1, v_2, i]$, dove v_1 e v_2 sono le tensioni ai capi del condensatore di sinistra e, rispettivamente, di destra ed i è la corrente che passa nell'induttanza, positiva dall'altro verso il basso. Le equazioni del sistema sono

$$\begin{aligned} &C\dot{v}_1(t) = \tfrac{u(t)-v_1(t)}{R} \\ &C\dot{v}_2(t) = i(t) \\ &L\dot{i}(t) = u(t) - v_2(t)\,. \end{aligned}$$

Il sistema ha dunque la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\,. \end{aligned}$$

Con $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C\,R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}$,, $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{C\,R} \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$, $C = [0, 1, 0]$.

b) Poniamo $Ax + Bu = 0$, troviamo $x = -A^{-1}Bu = \begin{bmatrix} u \\ u \\ 0 \end{bmatrix}$.

c) Abbiamo $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} \\ 0 & -\frac{1}{C\,L} & 0 \end{bmatrix}$, da cui $X_{NO} = \ker Q = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Il sistema è quindi già nella forma standard per i sistemi non completamente osservabili.

d) $H(s) = \frac{1}{LCs^2+1}$.

e) Con la retroazione indicata, essendo f scalare, abbiamo

$$\dot{x}(t) = (A + fBC)x(t)\,,$$

la nuova matrice di sistema è

$$\hat{A} = (A + fBC) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C\,R} & \frac{f}{C\,R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} \\ 0 & \frac{f}{L} - \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}\,,$$

il polinomio caratteristico è

$$\chi_{\hat{A}} = \frac{(C\,R\,\lambda + 1) \cdot \left(C\,L\,\lambda^2 - f + 1\right)}{C^2 \cdot L \cdot R}\,,$$

gli autovalori sono $-\frac{1}{RC}$ e le radici di $C\,L\,\lambda^2 - f + 1$. Il secondo polinomio non ha le radici a parte reale negativa per nessun valore di f in quanto il coefficiente di grado 1 è nullo. Il sistema non è quindi asintoticamente stabile per alcun valore di f.

4)

a) E' possibile risolvere il problema in quanto il sistema ècompletamente osservabile. Dalla formula dell'uscita abbiamo che

$$\begin{aligned} y(0) &= Cx(0) \\ y(1) &= CAx(0) + CBu(0) \\ y(2) &= CA^2x(0) + CABu(0) + CBu(1)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

sostituendo i valori numerici, $x(0)$ è la soluzione del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix} x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) In questo caso il sistema non è completamente osservabile e quindi non è possibile risolvere il problema. Dall'equazione (1) questa volta otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix} x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

da cui possiamo dire $x_0 \in \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.