

RICERCA OPERATIVA - PARTE II

ESERCIZIO 1. (7 punti) Sia dato il seguente problema di PLI

$$\begin{aligned} \max \quad & x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + 3x_2 \leq 11 \\ & 16x_1 + 6x_2 \leq 67 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Si visualizzi graficamente la chiusura convessa della regione ammissibile Z_a e se ne dia una descrizione tramite disequazioni lineari. Si risolva il problema con l'algoritmo branch-and-bound *risolvendo i rilassamenti lineari per via grafica*.

ESERCIZIO 2. (8 punti) Sia dato il seguente problema

$$\begin{aligned} \min \quad & x - 2y^2 \\ \text{s.t.} \quad & -x + 1 \geq 0 \\ & x - y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

- È un problema di programmazione convessa?
- ci sono punti che non soddisfano la constraint qualification relativa all'indipendenza lineare dei gradienti dei vincoli attivi?
- si impostino le condizioni KKT;
- trovare tutti i punti che soddisfano le condizioni KKT;
- dire se esistono minimi globali e, nel caso, indicare quali sono.

ESERCIZIO 3. (6 punti) Sia dato un problema di PLI. Si consideri l'applicazione di un algoritmo branch-and-bound. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, **motivando la risposta**:

- l'upper bound di un nodo figlio è sempre strettamente minore dell'upper bound del nodo padre;
- se a una certa iterazione l'upper bound di un nodo è maggiore dell'attuale lower bound, allora in un'iterazione successiva verrà eseguita l'operazione di branching su quel nodo;
- se un nodo viene cancellato, allora questo sicuramente non contiene soluzioni ottime del problema.

ESERCIZIO 4. (8 punti) Si indichi la risposta corretta per ciascuna delle seguenti domande **motivando la risposta**.

- (1) Sia dato un problema di programmazione non lineare con due vincoli $c_1(x) \geq 0$ e $c_2(x) \geq 0$. Sia x^* un punto KKT corrispondente a un ottimo globale con moltiplicatori di Lagrange $\mu_2^* > \mu_1^* > 0$. Dire quale delle seguenti affermazioni è falsa:
 - A:** il valore ottimo del problema cambia più rapidamente se si perturba il secondo vincolo;
 - B:** i due vincoli sono attivi in x^* ;
 - C:** oltre a x^* ci possono essere altri punti KKT;
 - D:** una delle altre affermazioni è falsa.
- (2) Sia dato un problema di programmazione non lineare senza vincoli con funzione obiettivo f avente matrice Hessiana definita positiva su tutto lo spazio. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:
 - A:** il problema può avere zero, uno oppure infiniti punti stazionari;
 - B:** se si aggiungono dei vincoli lineari in modo tale che la regione ammissibile sia un politopo, allora il problema ammette una sola soluzione ottima;

C: ci sono punti stazionari che soddisfano la condizione necessaria del secondo ordine ma non quella sufficiente;

D: nessuna delle altre affermazioni è vera.

- (3) Sia dato un problema di PLI e il suo rilassamento lineare. Dire quale delle seguenti affermazioni è falsa:

A: se si trova una soluzione ottima del rilassamento lineare a coordinate non intere, allora il valore ottimo del rilassamento lineare è strettamente maggiore del valore ottimo del problema di PLI;

B: il problema di PLI può avere regione ammissibile vuota anche quando il rilassamento lineare ha obiettivo illimitato;

C: il valore ottimo del rilassamento lineare è sempre maggiore o uguale del valore ottimo del problema P_{conv} , ovvero il problema con la stessa funzione obiettivo del problema di PLI e regione ammissibile $conv(Z_a)$;

D: una delle altre affermazioni è falsa.

- (4) Sia dato un problema di PLI e si consideri l'algoritmo di taglio basato sui tagli di Gomory. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

A: il taglio di Gomory non cambia se si cambia l'equazione generatrice del taglio;

B: in un taglio di Gomory, ottenuto dopo avere risolto un rilassamento lineare, compaiono variabili che fanno parte della base ottima del rilassamento lineare;

C: la base iniziale usata per risolvere il nuovo rilassamento lineare, ottenuto dopo l'aggiunta del taglio di Gomory, differisce da quella ottima del rilassamento lineare precedente per una sola variabile;

D: nessuna delle altre affermazioni è vera.