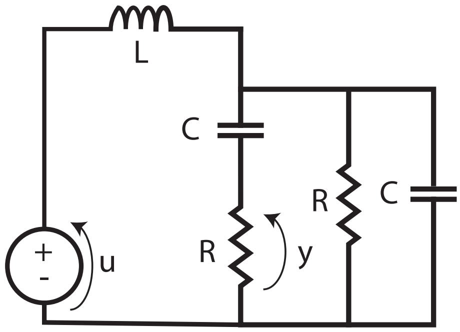
Università di Parma - Facoltà di Ingegneria

Prova intermedia di sistemi multivariabili del 24 Novembre 2022

Es. 1) (7 punti) Trova una rappresentazione con un modello di stato per il seguente circuito elettrico, in cui il generatore di tensione u rappresenta l'ingresso e la tensione y l'uscita. I parametri R, L, C sono strettamente positivi.



Es. 2) (5 punti) Considera il sistema a tempo discreto

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) \\ x(0) = x_0\,, \end{cases}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Calcola il polinomio caratteristico e il polinomio minimo di A.
b) Calcola la potenza di matrice A^k.

Es. 3) (6 punti) Considera il sistema a tempo discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Trova gli insiemi di raggiungibilità $X_R(k)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

b) Trova un controllo che consenta di raggiungere lo stato $x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ partire dallo stato iniziale $x_0 = x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Continua dietro.

Es. 4) (7 punti) Considera il sistema a tempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Metti il sistema nella forma standard di raggiungibilità, evidenziando le sottomatrici di questa forma.
b) Trova gli autovalori raggiungibili e non raggiungibili.
c) Calcola la funzione di trasferimento.

Es. 5) (5 punti) Considera il sistema a tempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & a & 0 & 0 \\ 2-2\,a & a & a-1 & 2-2\,a \\ 2\,a-4 & a & 1-a & 2\,a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Trova il sottospazio degli stati raggiungibili X_R in funzione del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Es. 6) (3 punti bonus) Considera il sistema a tempo discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k). \tag{1}$$

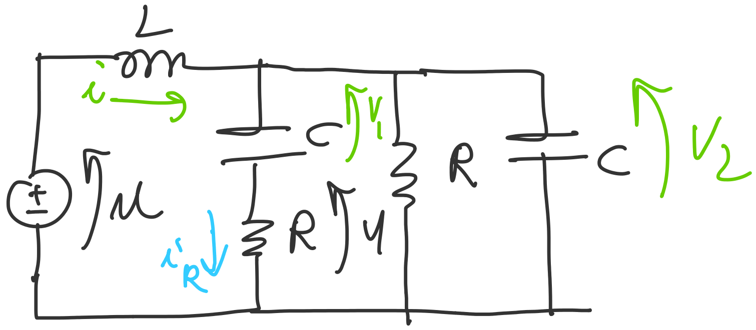
Il gramiano di raggiungibilità al passo k è dato da

$$W_R(k) = \sum_{i=0}^{k-1} A^i BB^T (A^T)^i.$$

Mostra che se $x_1 \in W_k(k)$, allora $x_1 \in X_R(k)$, cioè x_1 è raggiungibile al passo k.

giovedì 24 novembre 2022 10:17

1)



$$L\dot{i} = u - V_2$$

$$C\dot{V}_1 = i_R = \frac{V_2 - V_1}{R}$$

$$C\dot{V}_2 = i - i_R - \frac{V_2}{R} = i - \frac{V_2 - V_1}{R} - \frac{V_2}{R}$$

$$= i - \frac{2V_2}{R} + \frac{V_1}{R}$$

$$y = R\, i_R = V_2 - V_1$$

$$x = \begin{bmatrix} i \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & -\frac{1}{RC} & \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{RC} & -\frac{2}{RC} \end{bmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B}$$

$$y = \underbrace{[0, -1, 1]}_{C} x + \underbrace{0}_{D} u$$

2) $\chi_A(\lambda) = (\lambda^2 - 4\lambda + 4)\lambda$

$$= (\lambda - 2)^2 \lambda$$

$$\sigma(A) = \{0, 2\}$$

$$\lambda = 2, \ \mathrm{Ker}(A - 2I) = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

V_1

$$= \operatorname{Im}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mu_A(\lambda) = \chi_A(\lambda) = (\lambda-2)^2\lambda$$

$$\ker(A-2I)^2 = \ker\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{Im}\begin{array}{c} \begin{matrix} & V_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\lambda = 0, \ \ker A = \operatorname{Im}\begin{array}{c} V_3 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A^K = \left[A^K V_1, A^K V_2, A^K V_3\right]\left[V_1, V_2, V_3\right]^{-1}$$

$$A^K V_2 = 2^K V_2 + K 2^{K-1}(A-2I)V_2$$

$$= 2^K\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + K2^{K-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K2^{K-1} \\ 2^K(1-K) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^K = \begin{bmatrix} 2^K & K2^{K-1} & \delta(K) \\ -2\cdot 2^K & 2^K(1-K) & -2\delta(K) \\ 0 & 0 & -\delta(K) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}}_{= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}$$

$$A^K = \begin{bmatrix} 2^K + 2K2^{K-1} & K2^{K-1} & 2^K - \delta(K) \\ -2K\cdot 2^K & (1-K)\cdot 2^K & -2\cdot 2^K + 2\delta(K) \\ 0 & 0 & \delta(K) \end{bmatrix}$$

3) $X_R(0) = \{0\}$

$$X_R(1) = \operatorname{Im} B = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$0 \quad 0$$

$$X_R(2) = \mathrm{Im}\,[B, AB] = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M$$

$$X_R(3) = X_R(2) + \mathrm{Im}\, AM = X_R(2) + \mathrm{Im}\overbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}^{\in X_R(2)}$$

$$= X_R(2) = X_R$$

$$X_R = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k = 1, \quad x_1 - A x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \notin X_R(1)$$

$$k = 2, \quad x_1 - A^2 x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in X_R(2)$$

NUMERO MINIMO DI PASSI $= 2$

$$x_1 - A^2 x_0 = [B, AB]\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2(1) \\ u_1(1) \\ u_2(0) \\ u_1(0) \end{bmatrix}$$

INFINITE SOLUZIONI, AD ESEMPIO UNA SOLUZIONE È

$$u_2(1) = -1, \quad u_1(1) = 1$$

$$u_2(0) = 0, \quad u_1(0) = 0$$

CIOÈ $u(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; u(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

4) $X_R(1) = \operatorname{Im} B = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$X_R(2) = \operatorname{Im}[B, AB] = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_R(3) = \operatorname{Im}[B, AB, A^2B] = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= X_R(2)$$

$$X_R = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = T^{-1} A T = T^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} A_R \\ \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right. \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \underbrace{\quad}_{0} \quad \underbrace{\quad}_{A_{NR}} \end{array}$$

$$\hat{B} = T^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} B_R \\ \\ 0 \end{matrix} \qquad \hat{C} = CT = [\underbrace{1 \quad 0}_{C_R} \; \underbrace{0 \quad 0}_{C_{NR}}]$$

$$\sigma(A_R) = \{-1, 1\}, \quad \sigma(A_{NR}) = \{0, 2\}$$

$$H(s) = C_R (sI - A_R)^{-1} B_R + D$$

$$= [1, 0] \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s-1)} [1, 0] \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s-1)}$$

5) $X_R(0) = \{0\}$

$$X_R(1) = \operatorname{Im} B = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_R(2) = \operatorname{Im} [B, AB] = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e-1 \\ 1 & 1-e \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{cases} X_R(1), & e = 1 \\ \operatorname{Im} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M}, & e \neq 1 \end{cases}$$

$$X_R(3) = X_R(2) + \operatorname{Im} AM =$$

$$= X_R(2) + \operatorname{Im}\begin{bmatrix} e \\ e \\ e \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{cases} X_R(2), & e = 0 \\ \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{0}_{M} \end{bmatrix}, & e \neq 0 \end{cases}$$

$$X_R(4) = X_R(3) + \operatorname{Im} AM$$

$$= X_R(3) + \operatorname{Im}\underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2-2e \\ 2e-4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\in X_R(3)}$$

$$X_R = \begin{cases} \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & e = 1 \\ \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & e = 0 \\ \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & e \notin \{0,1\} \end{cases}$$

6) SIA $x_1 \in \operatorname{Im} W_R(k)$

$\Rightarrow \exists \eta : x_1 = W_R(k)\eta$

PRENDIAMO $u(i) = B^T (A^T)^{k-i-1} \eta$

$$x(k) = \sum^{k-1} A^{k-i-1} \, e \, B B^T (A^T)^{k-i-1} \eta$$

$$i = 0$$

$l = k - i - 1$

$$\downarrow \atop = \sum_{l=0}^{k-1} A^l B B^T (A^T)^l \eta$$

$$= W_R(k)\eta = x_1$$