Dualità

Dualità

Problema di PL in forma standard

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{cx} \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Chiamato problema *primale*.

A questo associato un altro problema di PL, detto problema *duale*:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{ub} \\ & \mathbf{uA} \geq \mathbf{c} \end{aligned}$$

In forma scalare

Primale:

$$
\begin{array}{lrl}
\max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & i = 1, \ldots, m \\
& x_j \geq 0 & j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

Duale

$$
\begin{array}{lrl}
\min & \sum_{i=1}^{m} u_i b_i & \\
& \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \geq c_j & j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

Variabili-vincoli

Esiste una stretta relazione tra

- variabili del primale e vincoli del duale;
- vincoli del primale e variabili del duale.

Continua

In particolare:

- nel primale ci sono n variabili esattamente come nel duale vi sono n vincoli;
- i coefficienti del j-esimo vincolo del duale coincidono con i coefficienti della variabile x_j nei vincoli del primale
- il termine noto del j-esimo vincolo del duale coincide con il coefficiente di x_j nell'obiettivo del primale.

Continua

- Nel primale vi sono m vincoli esattamente come nel duale vi sono m variabili;
- i coefficienti dell'i-esima variabile u_i del duale coincidono con i coefficienti dell'i-esimo vincolo del primale;
- il coefficiente di u_i nell'obiettivo del duale coincide con il termine noto dell'i-esimo vincolo del primale.

Esempio

Primale: $\max \quad x_1 + x_2$

$$
\begin{array}{rcl}
3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 & \leftrightarrow & u_1 \\
4x_1 + 5x_2 + x_4 = 4 & \leftrightarrow & u_2 \\
x_2 + x_5 = 2 & \leftrightarrow & u_3 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Duale: $\min \quad 5u_1 + 4u_2 + 2u_3$

$$
\begin{array}{rcl}
3u_1 + 4u_2 \geq 1 & \leftrightarrow & x_1 \\
2u_1 + 5u_2 + u_3 \geq 1 & \leftrightarrow & x_2 \\
u_1 \geq 0 & \leftrightarrow & x_3 \\
u_2 \geq 0 & \leftrightarrow & x_4 \\
u_3 \geq 0 & \leftrightarrow & x_5
\end{array}
$$

Relazioni primale-duale

Indichiamo con

$$D_a = \{\mathbf{u} \in R^m \ : \ \mathbf{uA} \geq \mathbf{c}\}$$

la regione ammissibile del problema duale e con

$$D_{ott} = \{\mathbf{u}^* \in D_a \ : \ \mathbf{u}^*\mathbf{b} \leq \mathbf{ub} \ \ \forall \ \mathbf{u} \in D_a\}$$

l'insieme delle sue soluzioni ottime.

Le soluzioni dei due problemi primale e duale sono fortemente legate tra loro

Continua

Osservazione*Per ogni* $\mathbf{x}_0 \in S_a$ *e per ogni* $\mathbf{u}_0 \in D_a$ *si ha che*

$$\mathbf{c}\mathbf{x}_0 \leq \mathbf{u}_0\mathbf{b}.$$

$$\mathbf{x}_0 \in S_a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{u}_0\mathbf{b} = \mathbf{u}_0\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = (\mathbf{u}_0\mathbf{A})\mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}_0 \in S_a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_0 \geq 0$$

$$\mathbf{u}_0 \in D_a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_0\mathbf{A} \geq \mathbf{c} \underbrace{\Rightarrow}_{\mathbf{x}_0 \geq 0} (\mathbf{u}_0\mathbf{A})\mathbf{x}_0 \geq \mathbf{c}\mathbf{x}_0$$

Continua

Osservazione *Se* $\mathbf{x}^* \in S_a$ *e* $\mathbf{u}^* \in D_a$ *ed inoltre*

$$\mathbf{cx}^* = \mathbf{u}^*\mathbf{b}$$

allora $\mathbf{x}^* \in S_{ott}$ *e* $\mathbf{u}^* \in D_{ott}$*.*

Dall'osservazione precedente si ha che

$$\forall\, \mathbf{x} \in S_a \qquad \mathbf{cx} \leq \mathbf{u}^*\mathbf{b}.$$

Ma essendo $\mathbf{cx}^* = \mathbf{u}^*\mathbf{b}$ si ha anche

$$\forall\, \mathbf{x} \in S_a \qquad \mathbf{cx} \leq \mathbf{cx}^*$$

e quindi $\mathbf{x}^* \in S_{ott}$.

Continua

Osservazione *Se uno dei due problemi ha obiettivo illimitato, allora l'altro ha regione ammissibile vuota.*

obiettivo primale illimitato $\quad \Rightarrow \quad D_a = \emptyset$

Per assurdo sia $D_a \neq \emptyset$ e sia $u_0 \in D_a$. In base alla prima osservazione si ha:

$$\forall\, \mathbf{x} \in S_a \qquad \mathbf{cx} \leq \mathbf{u}_0\mathbf{b}$$

e quindi l'obiettivo del primale è limitato dal valore $\mathbf{u}_0\mathbf{b}$, il che contraddice l'illimitatezza di tale obiettivo.

Continua

Problema primale

$\downarrow$

Problema duale

$\downarrow$

Problema duale del duale $\equiv$ Problema primale

Osservazione: *Il duale del problema duale coincide con il problema primale.*

Dimostrazione

Trasformiamo il duale in forma standard:

$$\begin{array}{rc} -\max & -(\mathbf{u}' - \mathbf{u}'')\mathbf{b} \\ & -(\mathbf{u}' - \mathbf{u}'')\mathbf{A} + \mathbf{I}\mathbf{y} = -\mathbf{c} \\ & \mathbf{u}', \mathbf{u}'', \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

o anche

$$\begin{array}{rc} -\max & -\mathbf{u}'\mathbf{b} + \mathbf{u}''\mathbf{b} \\ & -\mathbf{A}^T\mathbf{u}' + \mathbf{A}^T\mathbf{u}'' + \mathbf{I}\mathbf{y} = -\mathbf{c} \\ & \mathbf{u}', \mathbf{u}'', \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Il duale di questo problema risulta essere:

$$\begin{array}{rccc} -\min & -\mathbf{c}\mathbf{z} & & \\ & -\mathbf{z}\mathbf{A}^T \geq -\mathbf{b} & \leftrightarrow & \mathbf{u}' \\ & \mathbf{z}\mathbf{A}^T \geq \mathbf{b} & \leftrightarrow & \mathbf{u}'' \\ & \mathbf{z} \geq \mathbf{0} & \leftrightarrow & \mathbf{y} \end{array}$$

Continua

Il duale del duale si può scrivere anche come

$$
\begin{aligned}
-\min \quad & -\mathbf{c}\mathbf{z} \\
& -(\mathbf{A}^T)^T\mathbf{z} \geq -\mathbf{b} \\
& (\mathbf{A}^T)^T\mathbf{z} \geq \mathbf{b} \\
& \mathbf{z} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

che risulta equivalente al problema primale:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \mathbf{c}\mathbf{z} \\
& \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{z} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Simmetria

Questa osservazione ci mostra la totale simmetria esistente tra problema primale e duale.

Si noti in particolare che se si è dimostrata un'implicazione del tipo:

Il primale ha proprietà $\mathcal{P} \Rightarrow$ *il duale ha proprietà* $\mathcal{P}'$

si è automaticamente dimostrato anche che

Il duale ha proprietà $\mathcal{P} \Rightarrow$ *il duale del duale ha proprietà* $\mathcal{P}'$

o, equivalentemente

Il duale ha proprietà $\mathcal{P} \Rightarrow$ *il primale ha proprietà* $\mathcal{P}'$

Esempio di simmetria

Abbiamo dimostrato che se il primale ha la proprietà $\mathcal{P} \equiv$ *obiettivo illimitato*, allora il duale ha la proprietà $\mathcal{P}' \equiv$ *regione ammissibile vuota*.

Con questo abbiamo anche automaticamente dimostrato che se il duale ha la proprietà $\mathcal{P} \equiv$ *obiettivo illimitato*, allora il primale ha la proprietà $\mathcal{P}' \equiv$ *regione ammissibile vuota*.

Soluzioni di base per il duale

Base $B \rightarrow$ soluzione di base del primale:

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} \quad \mathbf{x}_N = 0.$$

Base $B \rightarrow$ soluzione di base del duale:

$$\mathbf{u}^B = \mathbf{c}_B \mathbf{A}_B^{-1}.$$

Appartenenza a D_a

Quando questa soluzione di base del duale è ammissibile per il duale? Deve soddisfare i vincoli:

$$\mathbf{u}^B \mathbf{A} \geq \mathbf{c}$$

o, equivalentemente:

$$\mathbf{u}^B \mathbf{A}_B \geq \mathbf{c}_B$$
$$\mathbf{u}^B \mathbf{A}_N \geq \mathbf{c}_N$$

Continua

$$\mathbf{u}^B \mathbf{A}_B = \mathbf{c}_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_B = \mathbf{c}_B,$$

$$\mathbf{u}^B \mathbf{A}_N = \mathbf{c}_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N,$$

Vincoli soddisfatti se:

$$\mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \leq 0$$

ovvero: *ammissibile se tutti i coefficienti di costo ridotto sono non positivi*.

Valore obiettivo

In particolare se

$$\mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N < 0$$

soluzione di base del duale $\mathbf{u}^B$ ammissibile detta *non degenere*, altrimenti verrà detta *degenere*.

$$\mathbf{c}_B \mathbf{x}_B = \mathbf{c}_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{u}^B \mathbf{b},$$

ovvero: *le due soluzioni di base rispettivamente del primale e del duale associate alla base B hanno lo stesso valore dell'obiettivo*

Quindi ...

... in base a un’osservazione precedente, se entrambe sono ammissibili per i rispettivi problemi, sono anche soluzioni ottime degli stessi problemi.

I teorema della dualità

Teorema *Uno dei due problemi ha soluzioni ottime se e solo se anche l'altro ha soluzioni ottime. Formalmente,* $S_{ott} \neq \emptyset$ *se e solo se* $D_{ott} \neq \emptyset$. *Inoltre, i valori ottimi dei due problemi coincidono.*

$$S_{ott} \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad D_{ott} \neq \emptyset$$

Sia $S_{ott} \neq \emptyset$ e sia B^* una base ottima per il problema primale. Quindi:

$$\mathbf{x}_{B^*} = \mathbf{A}_{B^*}^{-1}\mathbf{b} \quad \mathbf{x}_{N^*} = 0,$$

è ammissibile per il primale ed inoltre soddisfa la condizione di ottimalità:

$$\mathbf{c}_{N^*} - \mathbf{c}_{B^*}\mathbf{A}_{B^*}^{-1}\mathbf{A}_{N^*} \leq 0.$$

Continua

Ma allora $\mathbf{u}^{B^*} = \mathbf{c}_{B^*}\mathbf{A}_{B^*}^{-1}$ è ammissibile per il duale.

Le due soluzioni di base del primale e del duale associate a B^* hanno lo stesso valore dell'obiettivo ed essendo ammissibili rispettivamente per il primale e per il duale sono soluzioni ottime dei rispettivi problemi.

$$D_{ott} \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad S_{ott} \neq \emptyset$$

conseguenza immediata della proprietà di simmetria tra primale e duale.

Relazioni primale-duale

- $$S_{ott} \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad D_{ott} \neq \emptyset$$
  e i valori ottimi coincidono.
- Se $S_{ott} = \emptyset$ in quanto l'obiettivo primale è illimitato, allora $D_a = \emptyset$. Per la simmetria tra primale e duale, se $D_{ott} = \emptyset$ in quanto l'obiettivo duale è illimitato, allora $S_a = \emptyset$.
- Se $S_a = \emptyset$, allora $D_a = \emptyset$ oppure l'obiettivo duale è illimitato. Per la simmetria tra primale e duale, se $D_a = \emptyset$, allora $S_a = \emptyset$ oppure l'obiettivo primale è illimitato.

Esempio

Primale ($S_a = \emptyset$)

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - x_2 \\ & x_1 - x_2 = 1 \\ & -x_1 + x_2 = -2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Duale ($D_a = \emptyset$):

$$\begin{aligned} \min \quad & u_1 - 2u_2 \\ & u_1 - u_2 \geq 2 \\ & -u_1 + u_2 \geq -1 \end{aligned}$$

II teorema della dualità

Teorema *Si ha che* $\mathbf{x}^* \in S_{ott}$ *e* $\mathbf{u}^* \in D_{ott}$ se e solo se $\mathbf{x}^*$ *e* $\mathbf{u}^*$ *appartengono rispettivamente a* S_a *e* D_a *e soddisfano le* condizioni di complementarità*, cioè*

$$(\mathbf{u}^*\mathbf{A} - \mathbf{c})\mathbf{x}^* = 0.$$

o, in forma scalare:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} u_i^* a_{ij} - c_j \right) x_j^* = 0.$$

Dimostrazione

$$(\mathbf{u}^*\mathbf{A}-\mathbf{c})\mathbf{x}^* = 0 \quad \mathbf{u}^* \in D_a,\ \mathbf{x}^* \in S_a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^* \in S_{ott},\ \mathbf{u}^* \in D_{ott}$$

$$(\mathbf{u}^*\mathbf{A} - \mathbf{c})\mathbf{x}^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}^*\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{c}\mathbf{x}^*.$$

$$\mathbf{x}^* \in S_a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$$

Quindi:

$$\mathbf{u}^*\mathbf{b} = \mathbf{u}^*\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{c}\mathbf{x}^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^* \in S_{ott},\ \mathbf{u}^* \in D_{ott}$$

Continua

$$\mathbf{x}^* \in S_{ott},\ \mathbf{u}^* \in D_{ott} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{u}^*\mathbf{A} - \mathbf{c})\mathbf{x}^* = 0$$

Per il I teorema della dualità:

$$\mathbf{u}^*\mathbf{b} = \mathbf{c}\mathbf{x}^*.$$

$$\mathbf{x}^* \in S_{ott} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^* \in S_a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$$

Quindi:

$$\mathbf{u}^*\mathbf{b} = \mathbf{u}^*\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{c}\mathbf{x}^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}^*\mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{c}\mathbf{x}^* = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{u}^*\mathbf{A} - \mathbf{c})\mathbf{x}^* = 0$$

Continua

$$(\mathbf{u}^*\mathbf{A} - \mathbf{c})\mathbf{x}^* = 0$$

In forma scalare:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} u_i^* a_{ij} - c_j \right) x_j^* = 0.$$

$u^* \in D_a$ e $x^* \in S_a$ implicano:

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^* a_{ij} - c_j \geq 0, \quad x_j^* \geq 0 \quad \forall\, j = 1, \ldots, n.$$

e quindi:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} u_i^* a_{ij} - c_j \right) x_j^* \geq 0.$$

Continua

Quindi:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} u_i^* a_{ij} - c_j\right) x_j^* = 0.$$

se e solo se:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} u_i^* a_{ij} - c_j\right) x_j^* = 0 \quad \forall\, j = 1, \ldots, n.$$

Di conseguenza ...

$$x_j^* > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} u_i^* a_{ij} - c_j = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^* a_{ij} - c_j > 0 \quad \Rightarrow \quad x_j^* = 0,$$

Esempio

$$
\begin{array}{ll}
\max & x_1 - x_2 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\
& 2x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.
\end{array}
$$

Il simplesso duale

Nel *simplesso primale* si genera una successione di basi ammissibili per il primale ma non per il duale fino a raggiungere una base che sia anche ammissibile per il duale (a patto che una tale base esista , a patto cioè che il primale ammetta soluzioni ottime e non abbia obiettivo illimitato).

Nel *simplesso duale* si genera una successione di basi ammissibili per il duale ma non per il primale fino a raggiungere una base che sia anche ammissibile per il primale (a patto che una tale base esista , a patto cioè che il duale ammetta soluzioni ottime e non abbia obiettivo illimitato).

Continua

Riformulazione del **problema primale** rispetto alla base $B = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, \ldots, x_{i_m}\}$ **ammissibile per il duale**:

$$
\begin{array}{rl}
\max & \gamma_0 + \sum_{j=1}^{n-m} \gamma_j x_{i_{m+j}} \\
& x_{i_1} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{n-m} \alpha_{1j} x_{i_{m+j}} \\
& \cdots \\
& x_{i_k} = \beta_k + \sum_{j=1}^{n-m} \alpha_{kj} x_{i_{m+j}} \\
& \cdots \\
& x_{i_m} = \beta_m + \sum_{j=1}^{n-m} \alpha_{mj} x_{i_{m+j}} \\
& x_1, \ldots, x_n \geq 0
\end{array}
\qquad (1)
$$

Ammissibilità per la soluzione di base del duale:

$$\gamma_j \leq 0 \quad j = 1, \ldots, n-m.$$

Verifica di ottimalità

Se

$$\mathbf{A}_B^{-1} b \geq 0,$$

o, equivalentemente:

$$\beta_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m$$

allora la base B è ottima, la soluzione di base del primale

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \quad \mathbf{x}_N = 0$$

è ottima per il primale, mentre la soluzione di base

$$\mathbf{u}^B = \mathbf{c}_B \mathbf{A}_B^{-1}$$

è ottima per il duale.

Verifica di illimitatezza del duale

Se esiste un $r \in \{1, \ldots, m\}$ tale che

$$\beta_r < 0 \quad \alpha_{rj} \leq 0 \quad j = 1, \ldots, n - m,$$

allora si ha $S_a = \emptyset$. Infatti, dall'equazione:

$$x_{i_r} = \underbrace{\beta_r}_{<0} + \sum_{j=1}^{n-m} \underbrace{\alpha_{rj}}_{\leq 0} \underbrace{x_{i_{m+j}}}_{\geq 0} < 0,$$

ovvero:

$$x_{i_{m+j}} \geq 0, \;\; j = 1, \ldots, n - m \;\; \Rightarrow \;\; x_{i_r} < 0 \quad \Rightarrow \quad S_a = \emptyset$$

Quindi ...

... il duale ha obiettivo illimitato ($D_a = \emptyset$ non si può verificare qui in quanto la soluzione di base del duale associata a B è per ipotesi ammissibile e quindi D_a non può essere vuoto).

Cambio di base

Se le condizioni di ottimalità e illimitatezza non sono soddisfatte, si effettua un cambio di base tenendo conto che si vuole:

- mantenere l'ammissibilità duale;
- migliorare (ridurre) o quantomeno non peggiorare il valore dell'obiettivo duale.

Scelta della variabile uscente dalla base

Seleziona la variabile x_{i_k} tale che

$$\beta_k = \min\{\beta_i\} < 0$$

(per convenzione quella con indice più piccolo se il minimo è raggiunto da più variabili).

Scelta della variabile entrante in base

Scelta *solo* tra quelle con $\alpha_{kj} > 0$.

In particolare: si sceglie la variabile $x_{i_{m+h}}$ tale che

$$-\frac{\gamma_h}{\alpha_{kh}} = \min\left\{-\frac{\gamma_j}{\alpha_{kj}} \ : \ \alpha_{kj} > 0\right\}.$$

(nel caso il minimo sia raggiunto da più variabili si sceglie, per convenzione, quella con indice più piccolo).

L'algoritmo del simplesso duale

- **Inizializzazione** Sia B_0 una base ammissibile per il duale e $k = 0$.
- **Passo 1- verifica ottimalità** Se soddisfatta la condizione di ottimalità: STOP . La soluzione di base associata a B_k è una soluzione ottima del problema. Altrimenti si vada al Passo 2.
- **Passo 2 - verifica di illimitatezza** Se è soddisfatta la condizione di illimitatezza, allora: STOP, si ha $S_a = \emptyset$ e $D_{ott} = \emptyset$ in quanto il duale ha obiettivo illimitato. Altrimenti si vada al Passo 3.
- **Passo 3 - scelta variabile uscente dalla base** Si selezioni la variabile x_{i_k} che dovrà uscire dalla base attraverso la regola vista.

Simplesso duale

- **Passo 4 - scelta variabile entrante in base** Si selezioni la variabile $x_{i_{m+h}}$ che dovrà entrare in base attraverso la regola vista.
- **Passo 5 - operazione di cardine** Si generi la nuova base B_{k+1} sostituendo in B_k la variabile x_{i_k} con la variabile $x_{i_{m+h}}$ e si esegua la corrispondente operazione di cardine. Quindi, si ponga $k = k + 1$ e si ritorni al Passo 1.

Miglioramento dell'obiettivo

Il nuovo valore dell'obiettivo, esso è pari a:

$$\gamma_0 - \underbrace{\gamma_h}_{\leq 0} \frac{\overbrace{\beta_k}^{<0}}{\underbrace{\alpha_{kh}}_{>0}} \leq \gamma_0,$$

e quindi il valore dell'obiettivo per la nuova soluzione di base è migliore o quantomeno non peggiore rispetto alla precedente.

Se $\gamma_h < 0$ (cosa certamente vera nel caso non degenere) possiamo anche garantire che il nuovo valore dell'obiettivo sia strettamente minore rispetto al precedente.

Duale di un problema di PL generico

Come per i problemi in forma standard, vi sarà una stretta relazione tra le variabili di un problema ed i vincoli dell'altro. Più precisamente avremo, come per la forma standard, che:

- nel primale ci sono n variabili esattamente come nel duale vi sono n vincoli;
- i coefficienti del j-esimo vincolo del duale coincidono con i coefficienti della variabile x_j nei vincoli del primale;
- il termine noto del j-esimo vincolo del duale coincide con il coefficiente di x_j nell'obiettivo del primale.

Continua

- nel primale vi sono m vincoli esattamente come nel duale vi sono m variabili;
- i coefficienti dell'i-esima variabile u_i del duale coincidono con i coefficienti dell'i-esimo vincolo del primale;
- il coefficiente di u_i nell'obiettivo del duale coincide con il termine noto dell'i-esimo vincolo del primale.

La tabella

Rispetto alla forma standard quello che può cambiare sono i versi delle disequazioni ed i segni delle variabili. Per stabilire questi ci si può rifare allo specchietto nella seguente tabella.

$\min$	$\max$
variabile ≥ 0	vincolo $\leq$
variabile ≤ 0	vincolo $\geq$
variabile libera	vincolo $=$
vincolo $\geq$	variabile ≥ 0
vincolo $\leq$	variabile ≤ 0
vincolo $=$	variabile libera

Esempio

$$
\begin{array}{llcl}
\min & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & & \\
 & x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 & \leftrightarrow & u_1 \\
 & x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 2 & \leftrightarrow & u_2 \\
 & x_1 - x_2 - x_3 = 4 & \leftrightarrow & u_3 \\
 & x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \text{ libera} & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llcl}
\max & u_1 + 2u_2 + 4u_3 & & \\
 & u_1 + u_2 + u_3 \leq 1 & \leftrightarrow & x_1 \\
 & u_1 - 2u_2 - u_3 \geq 2 & \leftrightarrow & x_2 \\
 & -u_1 + u_2 - u_3 = 3 & \leftrightarrow & x_3 \\
 & u_1 \leq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \text{ libera} & &
\end{array}
$$

Continua

Le relazioni tra primale e duale (osservazioni varie, I e II teorema della dualità, simmetria tra i due problemi) possono essere estese anche a problemi di PL in forma più generale e ai loro duali.