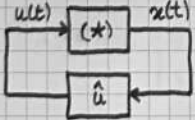
Stabilizzazione: alcuni problemi di controllo, matrice compagna

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (*)$$

<u>Problema</u>: (<u>Stabilizzazione dell'origine</u>) Trovare una legge di controllo $\hat{u}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tale che $(\forall x_0 \in \mathbb{R}^n)\ \lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$ dove x è la soluzione di $(*)$ con $u(t) = \hat{u}(x(t))$



Di fatto questa $u(t)$ è una legge di controllo in retroazione poiché definisce il controllo a partire dallo stato corrente.

<u>Def</u>: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è di Hurwitz se $(\forall \lambda \in \sigma(A))\ Re\{\lambda\} < 0$

Sia $\hat{u}(x) = Fx$, con $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ generica funzione lineare dello stato

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = Ax(t) + BFx(t) = (A+BF)x(t)$. Quindi il sistema retroazionato è descritto da $\begin{cases} \dot{x}(t) = (A+BF)x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ quindi $x(t) = e^{(A+BF)t} \cdot x_0$, poiché il sistema è autonomo.

Inoltre abbiamo che il sistema è asintoticamente stabile $\iff (\forall x_0 \in \mathbb{R}^n) \lim_{t\to+\infty} x(t) = 0 \iff$ $(A+BF)$ è di Hurwitz.

<u>Proprietà</u>: Il problema della stabilizzazione dell'origine è risolto con $\hat{u} = Fx \iff A+BF$ è di Hurwitz.

<u>Def</u>: $(\bar{x}, \bar{u})$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ è una <u>coppia di equilibrio</u> per $(*)$ se $x(t) = \bar{x}$, $t \in \mathbb{R}$ è soluzione di $(*)$ con $u(t) = \bar{u}$, $t \in \mathbb{R}$.

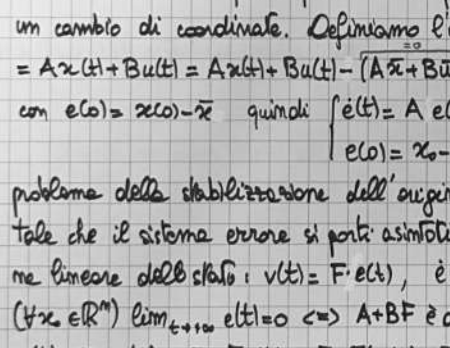
<u>Proprietà</u>: $(\bar{x}, \bar{u})$ è una coppia di equilibrio per il sistema $(*) \iff A\bar{x} + B\bar{u} = 0$.

<u>Dim</u>: $(\bar{x}, \bar{u})$ è coppia di equilibrio $\iff x(t) = \bar{x}$ è sol di $(*)$ con $u(t) = \bar{u} \iff 0 = \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}$. □

<u>Problema</u>: (<u>stabilizzazione di una coppia di equilibrio</u>): Sia $(\bar{x}, \bar{u})$ una coppia di equilibrio per il sistema $(*)$, vogliamo trovare una legge di controllo $\hat{u}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tale che $(\forall x_0 \in \mathbb{R}^n)$ $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \bar{x}$ e $\lim_{t\to+\infty} \hat{u}(x(t)) = \bar{u}$.

Possiamo ricondurre questo problema al problema della stabilizzazione dell'origine facendo un cambio di coordinate. Definiamo l'errore $e := x - \bar{x}$, $e(t) = x(t) - \bar{x}$, $\dot{e}(t) = \dot{x}(t) =$
$= Ax(t) + Bu(t) = Ax(t) + Bu(t) - \overbrace{(A\bar{x} + B\bar{u})}^{=0} = A(\underline{x(t) - \bar{x}}) + B(\underline{u(t) - \bar{u}}) = Ae(t) + Bv(t)$,
con $e(0) = x(0) - \bar{x}$ quindi $\begin{cases} \dot{e}(t) = Ae(t) + Bv(t) \\ e(0) = x_0 - \bar{x} \end{cases}$ asintoticamente vogliamo portare l'errore a zero, quindi ci siamo ricondotti al problema della stabilizzazione dell'origine perché vogliamo trovare il controllo $v(t)$ in modo tale che il sistema errore si porti asintoticamente a zero. Definiamo $v(t)$ come una retroazione lineare dello stato: $v(t) = F \cdot e(t)$, $\dot{e}(t) = Ae(t) + BFe(t) = (A+BF)e(t)$ e quindi $(\forall x_0 \in \mathbb{R}^n) \lim_{t\to+\infty} e(t) = 0 \iff A+BF$ è di Hurwitz. Vediamo com'è fatto il controllo $u(t)$:
$u(t) = \bar{u} + v(t) = \bar{u} + Fe(t) = \bar{u} + F(x(t) - \bar{x})$

<u>Proprietà</u>: $\hat{u}(x) = \bar{u} + F(x - \bar{x})$ risolve il problema della stabilizzazione della coppia di equilibrio $\iff A+BF$ è di Hurwitz.



$\bar{u}$ può essere chiamato <u>l'ingresso di azione diretta</u> o <u>ingresso di feedforward</u>.
$u(t)$ <u>ingresso di retroazione</u> o <u>ingresso di feedback</u>

Quindi abbiamo una legge di controllo mista feedback e feedforward poiché $\bar{u}$ è indipendente dallo stato quindi è un termine di feedforward mentre il secondo termine dipende dallo stato quindi è un termine di retroazione.

Possiamo generalizzare il problema arrivando al problema del tracking.

Def: (x_r, u_r), $x_r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, $u_r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$, è una <u>coppia di riferimento</u> per il sistema (*) se $x(t)=x_r(t)$, $t\in\mathbb{R}$ è soluzione di (*) con l'ingresso $u(t)=u_r(t)$, $t\in\mathbb{R}$.

<u>Proprietà</u>: (x_r, u_r) è una coppia di riferimento per (*) $\iff \dot{x}_r(t)=Ax_r(t)+Bu_r(t)$, $t\in\mathbb{R}$.

<u>Problema (Tracking asintotico dello stato)</u>: Sia (x_r,u_r) una coppia di riferimento per (*), vogliamo trovare $\hat{u}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ tale che per ogni stato iniziale $x_0\in\mathbb{R}^n$, se $u(t)=\hat{u}(t,x(t))$, allora $\lim_{t\to+\infty}(x(t)-x_r(t))=0$ e $\lim_{t\to+\infty}(\hat{u}(t,x(t))-u_r(t))=0$.

Possiamo ricondurre questo problema a quello della stabilizzazione di una coppia di equilibrio.

$e:=x-x_r$, $e(t)=x(t)-x_r(t)$, $\dot{e}(t)=\dot{x}(t)-\dot{x}_r(t)=Ax(t)+Bu(t)-(Ax_r(t)+Bu_r(t))=$

$=A\underline{(x(t)-x_r(t))}+B\underline{(u(t)-u_r(t))}=Ae(t)+Bv(t)$.

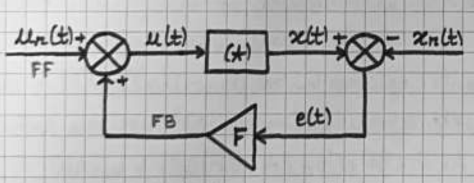
$\begin{cases}\dot{e}(t)=Ae(t)+Bv(t)\\ e(0)=x_0-x_r(0)\end{cases}$ Vogliamo che il sistema errore asintoticamente vada a zero quindi ci siamo ricondotti al problema della stabilizzazione dell'origine.

Come nei casi precedenti definiamo $v(t)=Fe(t)$, quindi $\dot{e}(t)=Ae(t)+BFe(t)=(A+BF)e(t)$

Quindi $(\forall x_0\in\mathbb{R}^m)\ \lim_{t\to+\infty}e(t)=0 \iff A+BF$ è di Hurwitz.

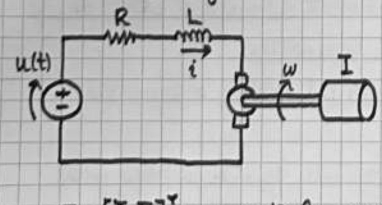
$u(t)=v(t)+u_r(t)=Fe(t)+u_r(t)=F(x(t)-x_r(t))+u_r(t)$.

<u>Proprietà</u>: $\hat{u}(t,x)=u_r(t)+F(x-x_r(t))$ risolve il problema del tracking asintotico dello stato $\iff$ $A+BF$ è di Hurwitz.



$\left.\begin{array}{l}\text{Stabilizzazione dell'origine}\\ \text{Stabilizzazione di una coppia di equilibrio}\\ \text{Tracking asintotico dello stato}\end{array}\right\}$ Trovare F tale che $A+BF$ sia di Hurwitz.

Vedremo sotto quali condizioni possiamo risolvere questo problema algebrico e nel caso sia risolubile, vedremo un algoritmo risolutivo che consente di calcolare F. Ma prima vediamo un esempio



Modello del motore elettrico: $x=[i,\omega]^T$

- Nel problema della stabilizzazione dell'origine vogliamo portare ω e i a zero, così come la tensione u.
- Nel problema della stabilizzazione della coppia di equilibrio $\bar{x}=[\bar{i},\bar{\omega}]^T$ rappresenta la corrente e la velocità di rotazione che asintoticamente vogliamo raggiungere, inoltre $\bar{u}$ è quella tensione che ci consente asintoticamente di raggiungere $\bar{x}$.

Nel problema del tracking $x_n = [i_n, \omega_e]$, u_n sono tempo varianti e quindi asintoticamente vogliamo portarci su un profilo non costante da noi desiderato.

Vogliamo trovare F tale che A+BF è di Hurwitz.

<u>Def</u>: La coppia (A,B) è <u>stabilizzabile</u> se $\exists F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che A+BF è di Hurwitz.

<u>Def</u>: La coppia (A,B) è <u>assegnabile</u> se per ogni polinomio $d(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + d_1\lambda + d_0$, esiste $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che $\chi_{A+BF}(\lambda) = d(\lambda)$.

<u>Proprietà</u>: Se (A,B) è assegnabile, allora (A,B) è stabilizzabile

Esempio: • $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $F \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, $F = [f_1, f_2]$, $A+BF = A + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [f_1, f_2] =$

$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+f_1 & f_2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $d(\lambda) = \lambda^2 + d_1\lambda + d_0$. $\chi_{A+BF}(\lambda) = \lambda^2 - (3+f_1)\lambda + 2 + f_1 - 2f_2$

$d = \chi_{A+BF} \iff d_1 = -(3+f_1)$ e $d_0 = 2 + f_1 - 2f_2 \iff$

$\begin{cases} f_1 = -3 - d_1 \\ f_2 = 1 + \frac{f_1 - d_0}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} f_1 = -3 - d_1 \\ f_2 = -\frac{1}{2} - \frac{d_1}{2} - \frac{d_0}{2} \end{cases}$ quindi (A,B) è assegnabile, e di conseguenza è anche stabilizzabile, basta scegliere

$d(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ con $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.

• $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $F = [f_1, f_2]$, $A+BF = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2+f_1 & 1+f_2 \end{bmatrix}$, $\sigma(A+BF) = \{2, 1+f_2\}$ quindi la coppia non è assegnabile poiché 2 sarà autovalore indipendentemente dalla scelta di F quindi non siamo liberi di variare gli autovalori della matrice A+BF, e questa coppia non è nemmeno stabilizzabile poiché $Re\{2\} > 0$.

La differenza sostanziale tra i due esempi è che il primo esempio è un sistema raggiungibile mentre il secondo no.

Infatti nel secondo esempio: $R = [B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $X_R = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Invece nel primo esempio: $R = [B, AB] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $X_R = \mathbb{R}^2$

Quand'è che una coppia (A,B) è assegnabile? Quando stabilizzabile?

Caso con ingresso scalare: $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $B = b$ è costituita da una sola colonna

<u>Def</u>: Dato $p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$, la matrice compagna di p è $C(p) = \begin{bmatrix} 0 & \overbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}}^{I_{n-1} \text{ identità di ordine } n-1} \\ \vdots & \\ 0 & \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \quad \ldots \quad -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$

<u>Proprietà</u>: $\chi_{C(p)} = p$

<u>Dim</u>: Per induzione sul grado di p: 1. vale se gr p = 2. 2. Se la proprietà vale per gr p = n-1 allora vale anche per gr p = n

1. $p(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ $\quad C(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix}$, $\chi_{C(p)}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(-\alpha_1) + \alpha_0 = \lambda^2 + \lambda\alpha_1 + \alpha_0 = p(\lambda)$

2. $$\chi_{C(p)}(\lambda) = \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & -1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{m-3} & \alpha_{m-2} & \alpha_{m-1}+\lambda \end{bmatrix} = \lambda\cdot\det\left[\lambda I - \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{m-2} & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix}\right] +$$

$$+\alpha_0(-1)^{m+1}\cdot(-1)^{m-1} = \lambda\cdot\det[\lambda I - C(\alpha_1 + \alpha_2\lambda + \ldots + \alpha_{m-1}\lambda^{m-2} + \lambda^{m-1})] + \alpha_0(-1)^{2m} =$$
$$= \lambda\cdot\chi_{C(\alpha_1+\alpha_2\lambda+\ldots+\lambda^{m-1})} + \alpha_0 = \lambda^m + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = p(\lambda)$$ $\square$

Esempio: $p(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^2 - 2\lambda + 5$ $\quad C(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

Stabilizzazione: forma canonica di controllo, formula di Ackermann

$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$, $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ sistema con un solo ingresso
$z(t) = qx(t)$, $q \in \mathbb{R}^{1\times m}$, $z(t) \in \mathbb{R}$ vogliamo che l'ingresso non compaia nelle derivate di z fino a $\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}z(t)$:

$\dot{z}(t) = q\dot{x}(t) = q(Ax + bu) = qAx + qbu$, da cui $qb = 0$
$\ddot{z} = qA\dot{x} = qA(Ax+bu) = qA^2x + qAbu$, da cui $qAb = 0$
$\vdots$
$\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}z(t) = qA^{m-2}\dot{x} = qA^{m-1}x + qA^{m-2}bu$, da cui $qA^{m-2}b = 0$
$\frac{d^m}{dt^m}z(t) = qA^{m-1}\dot{x} = qA^{m-1}(Ax+bu) = qA^mx + qA^{m-1}bu$, e qui imponiamo $qA^{m-1}b = 1$. Quindi

$$\begin{cases} qb = 0 \\ qAb = 0 \\ \vdots \\ qA^{m-2}b = 0 \\ qA^{m-1}b = 0 \end{cases}$$
$\iff [qb, qAb, \ldots, qA^{m-2}b, qA^{m-1}b] = [0, 0, \ldots, 0, 1] \iff$
$\iff q\underbrace{[b, Ab, \ldots, A^{m-2}b, A^{m-1}b]}_{R} = \underbrace{[0, 0, \ldots, 0, 1]}_{e_m^T} \iff$
$\iff qR = e_m^T$

In questo caso $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$, quindi (A,b) raggiungibile $\iff$ R è invertibile e quindi $\boxed{q = e_m^T R^{-1}}$, questa scelta di q è alla base della forma canonica di controllo.

<u>Proprietà</u>: Sia dato il sistema $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$, $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ con (A,b) raggiungibile, sia $R = [b, Ab, \ldots, A^{m-1}b]$, $q = e_m^T R^{-1}$, $P = [q, qA, \ldots, qA^{m-1}]^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$, allora:

1. P è invertibile
2. ponendo $z = Px$, il sistema diventa $\dot{z}(t) = A_c z(t) + b_c u(t)$ dove $A_c = C(\chi_A) =$
$$= \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_{m-1} \\ \hline -\alpha_0, & -\alpha_1, \ldots -\alpha_{m-1} \end{array}\right]$$ e $b_c = e_m$, con $\chi_A(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \ldots + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1} + \lambda^m$.

Dim: 1. $q = e_m^T R^{-1} \iff qR = e_m^T \iff q[b, Ab, \dots, A^{m-1}b] = [0,0,\dots,0,1]$.

$$PR = \begin{bmatrix} q \\ qA \\ \vdots \\ qA^{m-1} \end{bmatrix} [b, Ab, \dots, A^{m-1}b] = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} qb & qAb & \cdots & qA^{m-2}b & qA^{m-1}b \\ qAb & qA^2b & \cdots & qA^{m-1}b & qA^{m}b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ qA^{m-1}b & qA^{m}b & \cdots & qA^{2m-3}b & qA^{2m-2}b \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & & & & 1 & * \\ \vdots & & & & & \\ \hline 1 & * & * & * \cdots * & * & * \end{array}\right]$$

Questa matrice ha rango massimo e quindi $\det PR \neq 0$, per il Teorema di Binet $\det P \cdot \det R \neq 0$, quindi $\det P \neq 0$ e quindi P è invertibile.

2. $z = Px$, $x = P^{-1}z$; $\dot{x} = Ax + bu \iff P^{-1}\dot{z} = AP^{-1}z + bu \iff \dot{z} = \overline{PAP^{-1}}z + \overline{P^{-1}b}u = A_c z + b_c u$

Tesi: $PAP^{-1} = C(\chi_A) \iff PA = C(\chi_A)P$. $PA = [q, qA, \dots, qA^{m-1}]^T A = [qA, \dots, qA^m]^T$.

$$C(\chi_A)P = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_{m-1} \\ \hline -\alpha_0 & -\alpha_1 \ \cdots \ -\alpha_{m-1} \end{array}\right] \begin{bmatrix} q \\ \vdots \\ qA^{m-1} \end{bmatrix} = [qA, qA^2, \dots, qA^{m-1}, -\alpha_0 q - \alpha_1 qA - \dots - \alpha_{m-1} qA^{m-1}]^T$$

Ma per il teorema di Hamilton-Cayley $\chi_A(A) = 0$, quindi $\alpha_0 + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{m-1}A^{m-1} + A^m = 0$ quindi $-q(\alpha_0 + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{m-1}A^{m-1}) = qA^m$, quindi abbiamo verificato che $PA = C(\chi_A)P$.

Calcoliamo ora $Pb = [q, qA, \dots, qA^{m-1}]^T b = [qb, qAb, \dots, qA^{m-1}b]^T$ ma rivedendo le condizioni del punto 1. $Pb = [0, \dots, 0, 1]^T = e_m$ □

Esempio:
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

il sistema è completamente raggiungibile poichè $\det R \neq 0$. $q = [0,0,0,1]R^{-1}$, di R^{-1} ci serve solo la quarta riga che coincide con la seconda riga di R, quindi $q = [0,1,0,0]$.

$$P = \begin{bmatrix} q \\ qA \\ qA^2 \\ qA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Verifichiamo ora che $A_c = PAP^{-1} = C(\chi_A)$

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$\chi_A(\lambda) = -1 - 2\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda^4$

Verifichiamo che $b_c = Pb = P \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

<u>Proprietà</u>: Se $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ e (A,b) è raggiungibile, allora (A,b) è assegnabile.

Dim: Vogliamo dimostrare che per $d(\lambda)=\lambda^n+d_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+d_1\lambda+d_0$ $\exists f: \chi_{A+bf}=d$.

Scegliamo P come visto nella costruzione precedente tale che $A_c=PAP^{-1}$, $b_c=Pb$ siano nella forma canonica di controllo. Quindi $A=P^{-1}A_cP$, $b=P^{-1}b_c$, da cui $A+bf=$ $=P^{-1}A_cP+P^{-1}b_cf$. Conviene definire $f=f_cP$ con $f_c=P^{-1}f$ da cui $A+bf=P^{-1}A_cP+P^{-1}b_cf_cP=$ $=P^{-1}(A_c+b_cf_c)P$, quindi $A+bf$ e $A_c+b_cf_c$ sono simili e pertanto $\chi_{A+bf}=\chi_{A_c+b_cf_c}$ e conviene scrivere in modo esplicito $A_c+b_cf_c=A_c+[0,\dots,0,1]^T[f_0,f_1,\dots,f_{n-1}]=$

$$=A_c+\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_0 & f_1 & \dots & f_{n-1}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c}0 & I_{n-1}\\ \hline f_0-\alpha_0 & f_1-\alpha_1,\dots,f_{n-1}-\alpha_{n-1}\end{array}\right],\quad \chi_{A_c+b_cf_c}(\lambda)=(\alpha_0-f_0)+\lambda(\alpha_1-f_1)+\dots+\lambda^{n-1}(\alpha_{n-1}-f_{n-1})+\lambda^n.$$

Vogliamo che $\chi_{A_c+b_cf_c}(\lambda)=d(\lambda)=d_0+d_1\lambda+\dots+d_{n-1}\lambda^{n-1}+\lambda^n$. Quindi imponiamo che:
$d_0=\alpha_0-f_0\ \wedge\ d_1=\alpha_1-f_1\ \wedge\dots\wedge\ d_{n-1}=\alpha_{n-1}-f_{n-1} \Rightarrow f_0=\alpha_0-d_0\ \wedge\ f_1=\alpha_1-d_1\ \wedge\dots\wedge\ f_{n-1}=\alpha_{n-1}-d_{n-1}$
Con questa scelta di f_c effettivamente $\chi_{A_c+b_cf_c}=d$. Definiamo quindi $f:=f_cP$.
$\chi_{A+bf}=\chi_{A_c+b_cf_c}=d$ □

Esempio: riprendiamo l'esempio precedente: $z=Px$, $P=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\2&-2&2&1\end{bmatrix}$, $A_c=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&2&1\end{bmatrix}$

$b_c=[0,0,0,1]$, vogliamo sfruttare questa struttura per assegnare gli autovalori del sistema retroazionato. Consideriamo come polinomio desiderato $d(\lambda)=(\lambda+1)^4$, in genere non è una buona strategia assegnare tutti gli autovalori nello stesso valore ma lo facciamo per semplificare i calcoli poiché essendo $d(\lambda)$ un binomio i coefficienti li calcoliamo con il triangolo di Tartaglia: $d(\lambda)=1+4\lambda+6\lambda^2+4\lambda^3+\lambda^4$ cerchiamo di imporre questo polinomio, se riusciamo, stabilizziamo il sistema perché tutti gli autovalori hanno $Re<0$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$f_c=[f_0,f_1,f_2,f_3]$

$$A_c+b_cf_c=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1+f_0&f_1&2+f_2&1+f_3\end{bmatrix}\qquad \begin{cases}1+f_0=-1\\ f_1=-4\\ 2+f_2=-6\\ 1+f_3=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}f_0=-2\\ f_1=-4\\ f_2=-8\\ f_3=-5\end{cases}$$

Quindi $f_c=[-2,-4,-8,-5]$
$f=f_cP=[-18,+8,-14,-13]$
La legge di retroazione è data da $u=fx$

$\sigma(A+bf)=\{-1\}$.

<u>Formula di Ackermann</u>: Se (A,b) è raggiungibile, con $b\in\mathbb{R}^{n\times 1}$, $R=[b,Ab,\dots,A^{n-1}b]$ e d è un polinomio arbitrario di grado n, allora $\chi_{A+bf}=d \Leftrightarrow f=-e_n^TR^{-1}d(A)$.

Dim: ($\Leftarrow$) $f=f_cP$, $f_c=[\alpha_0-d_0,\alpha_1-d_1,\dots,\alpha_{n-1}-d_{n-1}]$, $f=[\alpha_0-d_0,\dots,\alpha_{n-1}-d_{n-1}][q,qA,\dots,qA^{n-1}]^T=$
$=(\alpha_0-d_0)q+(\alpha_1-d_1)qA+\dots+(\alpha_{n-1}-d_{n-1})qA^{n-1}=q\underbrace{(\alpha_0I+\alpha_1A+\dots+\alpha_{n-1}A^{n-1})}_{=-A^n \text{ T. di Hamilton Cayley}}+$
$-q(d_0I+d_1A+\dots+d_{n-1}A^{n-1})$, quindi $f=-q(d_0I+d_1A+\dots+d_{n-1}A^{n-1}+A^n)=-e_n^TR^{-1}\cdot d(A)$
($\Rightarrow$) Vogliamo mostrare l'unicità di f, questo è una conseguenza della proprietà precedente $f=f_cP$, $f_c=[f_0,f_1,\dots,f_{n-1}]$ ed f_c deve soddisfare $\alpha_0-f_0=d_0\wedge\dots\wedge\alpha_{n-1}-f_{n-1}=d_{n-1}$

che ha un'unica soluzione nelle f_i e quindi è unico il vettore riga f che consente di imporre d. □

Esempio: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ Vogliamo trovare il vettore di retroazione f tale che $\chi_{A+bf}(\lambda) = (\lambda+1)^4 = 1 + 4\lambda + 6\lambda^2 + 4\lambda^3 + \lambda^4$.
Questa volta usiamo la formula di Ackermann

$f = -\underbrace{[0,0,0,1]R^{-1}}\, d(A)$ → q è l'ultima riga di R^{-1}: $q = [0,1,0,0]$, quindi

$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$f = -q(A+I)^4 = -q(I + 4A + 6A^2 + 4A^3 + A^4) =$
$= -(q + 4qA + 6qA^2 + 4qA^3 + qA^4)$
$qA = [0,0,1,0]$, $qA^2 = [1,0,0,1]$, $qA^3 = [2,-2,2,1]$, $qA^4 = [4,-1,2,3]$
quindi $f = -([0,1,0,0] + [0,0,4,0] + [6,0,0,6] + [8,-8,8,4] + [4,-1,2,3] =$
$= -[18,-8,14,13] = [-18,8,-14,-13]$ che è la stessa soluzione ottenuta con la forma canonica di controllo nell'esercizio precedente.

Stabilizzazione: assegnazione autovalori nel caso generale
$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ingressi multipli.

<u>Problema</u>: Fissato un polinomio desiderato d, trovare $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tale che $\chi_{A+BF} = d$.

Possiamo definire $u(t) = \bar{F}x(t) + \bar{u}v(t)$, dove $\bar{F} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ è la matrice di retroazione, $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$, $v(t) \in \mathbb{R}$
$v(t)$ rappresenta un nuovo ingresso scalare, quindi abbiamo trasformato un sistema ad ingressi multipli in uno ad ingresso singolo. Se facciamo questa sostituzione otteniamo: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) =$
$= Ax(t) + B(\bar{F}x(t) + \bar{u}v(t)) = \underline{(A+B\bar{F})}x(t) + \underline{B\bar{u}}v(t) = \bar{A}x(t) + \bar{b}v(t)$, quindi siamo passati da un sistema descritto dalla coppia (A,B) alla nuova coppia $(\bar{A},\bar{b}) = (A+B\bar{F}, B\bar{u})$.
Se $(\bar{A},\bar{b})$ è raggiungibile, $\bar{R} = [\bar{b}, \bar{A}\bar{b}, \dots, \bar{A}^{n-1}\bar{b}]$, sfruttando la formula di Ackermann possiamo definire $f := -e_n^T \bar{R}^{-1} d(\bar{A})$ tale che $\chi_{\bar{A}+\bar{b}f} = d$, dove d è il polinomio che vogliamo imporre. Ma $\bar{A} + \bar{b}f = A + B\bar{F} + B\bar{u}f = A + B\underline{(\bar{F} + \bar{u}f)} = A + BF$. Quindi $\chi_{\bar{A}+\bar{b}f} = \chi_{A+BF} = d$
e la matrice di retroazione è $\boxed{F = \bar{F} + \bar{u}f}$ Vediamo se è possibile trovare $\bar{F}, \bar{u}$ tali che $(\bar{A},\bar{b})$ è raggiungibile.

<u>Problema</u>: Data (A,B) trovare $\bar{F} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ tali che $(\bar{A},\bar{b}) = (A+B\bar{F}, B\bar{u})$ è raggiungibile

<u>Proprietà</u>: Dato il sistema $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ x(0) = 0 \end{cases}$, sia $X_R = \operatorname{Im}[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$

e sia $x(1), x(2), \dots, x(\ell)$ la soluzione corrispondente agli ingressi $u(0), u(1), \dots, u(\ell-1)$, con $\dim \operatorname{Im}[x(1), x(2), \dots, x(\ell)] < \dim X_R$, allora esiste $u(\ell)$ tale che $x(\ell+1) \notin \operatorname{Im}[x(1), x(2), \dots, x(\ell)]$

Dim: $V := \operatorname{Im}[x(1), x(2), \dots, x(\ell)]$, $x(\ell+1) = Ax(\ell) + Bu(\ell)$. Per assurdo sia $x(\ell+1) \in V$ per ogni $u(\ell) \in \mathbb{R}^m$ cioè $Ax(\ell) + Bu(\ell) \in V$. Dimostriamo che $A(V) \subseteq V$ e che $V \supseteq \operatorname{Im} B$.

$(\forall u \in \mathbb{R}^m)\ Ax(\ell) + Bu \in V$, in particolare, $u=0 \Rightarrow A\cdot x(\ell) \in V \Rightarrow (\forall u \in \mathbb{R}^m)\ Bu \in V \Rightarrow \operatorname{Im} B \subseteq V$.
Poi sappiamo che $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$, $k=0,\dots,\ell-1$, e $Bu(k) \in V$ e $x(k+1) \in V$, quindi
$A\,x(k) = x(k+1) - Bu(k) \in V$, $k=0,\dots,\ell-1$. Quindi $A(V) = A(\operatorname{Im}[x(1), x(2),\dots, x(\ell)]) =$
$= \operatorname{Im}[Ax(1),\dots, Ax(\ell)] \subseteq V$. Quindi $A(V) \subseteq V$ e $V \supseteq \operatorname{Im} B \Rightarrow X_R \subseteq V \Rightarrow \dim V \geq \dim X_R$ ↯ □

<u>Proprietà</u>: Se (A,B) è raggiungibile, allora esistono ingressi $u(0), u(1),\dots, u(n-1)$ tali che la soluzione del sistema a tempo discreto soddisfa $\operatorname{Im}[x(1), x(2),\dots, x(n)] = \mathbb{R}^n$

Dim: (A,B) raggiungibile $\Rightarrow B \neq 0 \Rightarrow \exists u(0) : x(1) = Ax_0 + Bu(0) = A\cdot 0 + Bu(0) \neq 0$. Applicando la proprietà precedente $\exists u(1) : x(2) \notin \operatorname{Im}[x_0]$, $\exists u(2) : x(3) \notin \operatorname{Im}[x(0), x(1)]$, ...,
$\exists u(n-1) : x(n) \notin \operatorname{Im}[x(0), x(1),\dots, x(n-1)]$, quindi $\dim \operatorname{Im}[x(0),\dots, x(n)] = n$.

Definendo l'ingresso $u(t) = \bar{F}x(t) + \bar{u} f x(t)$ passiamo dalla coppia (A,B) a $(\bar{A},\bar{b}) = (A+B\bar{F}, B\bar{u})$

<u>Proposizione</u>: Sia $x(1),\dots, x(n)$ la soluzione del sistema $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ x(0) = 0 \end{cases}$ con l'ingresso definito da $u(0), u(1),\dots, u(n-1)$ e sia tale che
$X = [x(1),\dots, x(n)] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è invertibile. Definiamo $\bar{F} = [u(1),\dots, u(n-1), 0]\cdot X^{-1}$ e $\bar{u} = u(0)$
1. Posto $\bar{A} = A + B\bar{F}$, $\bar{b} = B\bar{u}$; $\bar{A}^i \bar{b} = x(i+1)$, $i = 0,\dots, n-1$
2. $(\bar{A},\bar{b})$ è raggiungibile

Dim: 1. Per induzione: a. $\bar{A}^0\bar{b} = x(1)$. b. Se $0 \leq i < n-1$, $\bar{A}^i\bar{b} = x(i+1)$, allora $\bar{A}^{i+1}\bar{b} = x(i+2)$
a. $\bar{A}^0\bar{b} = \bar{b} = B\bar{u} = Bu(0) = x(1)$, infatti $x(1) = \cancel{Ax_0} + Bu(0) = Bu(0)$
b. $\bar{A}^{i+1}\bar{b} = \bar{A}\cdot\bar{A}^i\bar{b} = \bar{A}x(i+1) = (A+B\bar{F})x(i+1) = Ax(i+1) + B\bar{F}x(i+1) =$
$= Ax(i+1) + B[u(1),\dots, u(n-1), 0]X^{-1}\cdot x(i+1) = Ax(i+1) + B[u(1),\dots, u(n-1), 0]\underbrace{X^{-1}\cdot\overbrace{[x(1),\dots, x(n)]}^{X}}_{I}\begin{bmatrix}0\\ \vdots \\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots \\ 0\end{bmatrix} i+1$
$= Ax(i+1) + B[u(1),\dots, u(n-1), 0]\cdot[0,\dots 0, \overset{i+1}{1}, 0\dots, 0]^T = Ax(i+1) + Bu(i+1) =$
$= x(i+2)$
2. $\bar{R} = [\bar{b}, \bar{A}\bar{b},\dots, \bar{A}^{n-1}\bar{b}] = [x(1), x(2),\dots, x(n)] = X$ è invertibile per ipotesi $\Rightarrow (\bar{A},\bar{b})$ è raggiungibile
□

<u>Teorema di assegnazione degli autovalori</u>: (A,B) è assegnabile $\Longleftrightarrow$ (A,B) è raggiungibile

Dim: $(\Leftarrow)$: Dato un polinomio d di grado n, trovare $F : \chi_{A+BF} = d$.
$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ x(0) = 0 \end{cases}$ troviamo $u(0), u(1),\dots, u(n-1)$ tale che $X = [x(1), x(2),\dots, x(n)]$ è invertibile.
Definiamo $\bar{F} := [u(1), u(2),\dots, u(n-1), 0]X^{-1}$, $\bar{u} := u(0)$. $\bar{A} := A + B\bar{F}$, $\bar{b} := B\bar{u}$.
Sappiamo che $(\bar{A},\bar{b})$ è raggiungibile, da cui, sfruttando la formula di Ackermann
$\exists f : \chi_{\bar{A}+\bar{b}f} = d$, $\bar{A} + \bar{b}f = A + B\bar{F} + B\bar{u}f = A + B\underline{(\bar{F} + \bar{u}f)} =: A + BF$
$\chi_{A+BF} = \chi_{\bar{A}+\bar{b}f} = d$
$(\Rightarrow)$: Per assurdo (A,B) non sia raggiungibile. Mettiamo il sistema nella forma

standard di raggiungibilità: $x = Tz$, $T = [T_1, T_2]$, $\mathrm{Im}\,T_1 = X_R$, $\hat{A} = T^{-1}AT$, $\hat{B} = T^{-1}B$

quindi $A = T\hat{A}T^{-1}$, $B = T\hat{B}$; $F := \hat{F}T^{-1}$. $A+BF = T\hat{A}T^{-1} + T\hat{B}\hat{F}T^{-1} = T(\hat{A}+\hat{B}\hat{F})T^{-1}$

$A+BF \sim \hat{A}+\hat{B}\hat{F}$ (le due matrici sono simili), quindi $\chi_{A+BF} = \chi_{\hat{A}+\hat{B}\hat{F}}$.

$$\hat{A}+\hat{B}\hat{F} = \left[\begin{array}{c|c} A_R & A_{12} \\ \hline 0 & A_{NR}\end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} B_R \\ \hline 0 \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c} F_R & F_{NR}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_R & A_{12} \\ \hline 0 & A_{NR}\end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} B_R F_R & B_R\cdot F_{NR} \\ \hline 0 & 0\end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} A_R + B_R F_R & A_{12} + B_R F_{NR} \\ \hline 0 & A_{NR}\end{array}\right], \quad \chi_{\hat{A}+\hat{B}\hat{F}} = \det\left[\begin{array}{c|c} \lambda I - A_R - B_R F_R & -A_{12} - B_R F_{NR} \\ \hline 0 & \lambda I - A_{NR}\end{array}\right] =$$

$= \chi_{A_R+B_RF_R}\cdot\chi_{A_{NR}}$ quindi $\chi_{A+BF} = \chi_{A_R+B_RF_R}\cdot\chi_{A_{NR}}$ notiamo che il primo polinomio può essere modificato agendo su F_R ma il secondo no, quindi $(\forall F \in \mathbb{R}^{m\times n})$ $\sigma(A_{NR}) \subseteq \sigma(A+BF)$, questo vuol dire che (A, B) non è assegnabile ↯ $\square$

Esempio: $A = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1\end{array}\right]$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 0\end{bmatrix}$, $\sigma(A) = \{2, 1\}$ il sistema non è asintoticamente stabile; vogliamo trovare F tale che $\sigma(A+BF) = \{-1, -2\}$

In particolare vogliamo imporre $d(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda+2)$, in questo modo il sistema diventa asintoticamente stabile. Quindi consideriamo il sistema a tempo discreto:

$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ x(0) = 0\end{cases}$ $X = [x(1), x(2), x(3)]$, $\bar{F} = [u(1), u(2), 0]\cdot X^{-1}$ cerchiamo quindi di prendere una X simile all'identità.

$x(1) = Ax(0) + Bu(0) = Bu(0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 0\end{bmatrix}\cdot u(0)$ ci basta scegliere $u(0)$ in modo tale che $x(1) \neq 0$; scegliamo $u(0) = [0, 1]^T$.

$x(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}$, $x(2) = Ax(1) + Bu(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix} + \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (-1) & (0) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 0\end{bmatrix}\end{array} u(1)$, $u(1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0\end{bmatrix}$, $x(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2\end{bmatrix}$

$x(3) = Ax(2) + Bu(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 0\end{bmatrix} u(2)$, $u(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3\end{bmatrix}$, $x(3) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\end{bmatrix}$

$X = [x(1), x(2), x(3)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$, $\bar{F} = [u(1), u(2), 0]\,X^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0\end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix} =$

$F = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix}$, $\bar{b} = B\bar{u} = Bu(0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}$

$\bar{A} = A + B\bar{F} = A + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$

Come verifica noi sappiamo che deve valere che $\bar{R}=[\bar{b},\bar{A}\bar{b},\bar{A}^2\bar{b}]=X$, quindi $\bar{R}=$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&2&1\end{bmatrix}=X.$$ Calcoliamo ora $f=-\underbrace{[0,0,1]\cdot R^{-1}}_{q}d(\bar{A})$, $q=[0,2,1]$

$$d(\lambda)=(\lambda+1)^2(\lambda+2)=(\lambda^2+2\lambda+1)(\lambda+2)=\lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+2$$

$f=-q\,d(\bar{A})=-q(\bar{A}^3+4\bar{A}^2+5\bar{A}+2I)=-(q\bar{A}^3+4q\bar{A}^2+5q\bar{A}+2q)$

$q\bar{A}=[0,1,1]$, $q\bar{A}^2=[1,1,1]$, $q\bar{A}^3=[1,3,2]$

Quindi $f=-([1,3,2]+[4,4,4]+[0,5,5]+[0,4,2])=-[5,16,13]=[-5,-16,-13]$.

$$F=\bar{F}+\bar{u}f=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\0&3&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\cdot[-5,-16,-13]=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\0&3&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\-5&-16&-13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\-5&-13&-13\end{bmatrix}$$

Nel caso multi ingressi a seconda delle scelte che facciamo otteniamo una F diversa per verificare che i conti che abbiamo fatto sono corretti possiamo verificare che $\chi_{A+BF}=d$.

Stabilizzazione: condizioni per la stabilizzabilità, esempi

Ricordiamo che (A,B) si dice stabilizzabile se $\exists F: A+BF$ è di Hurwitz.

Proprietà: (A,B) è stabilizzabile $\iff$ gli autovalori non raggiungibili di A hanno parte reale <0.

Dim: Mettiamo il sistema nella forma standard per i sistemi non completamente raggiungibili

$x=Tz$, $T=[T_1,T_2]$, $\operatorname{Im}T_1=X_R$, $\hat{A}=T^{-1}AT$, $\hat{B}=T^{-1}B$, $\hat{C}=CT$, $\hat{D}=D$. Possiamo invertirle

$A=T\hat{A}T^{-1}$, $B=T\hat{B}$, $C=\hat{C}T^{-1}$, $\hat{D}=D$ e conviene definire $F=\hat{F}T^{-1}$

$A+BF=T\hat{A}T^{-1}+T\hat{B}\hat{F}T^{-1}=T(\hat{A}+\hat{B}\hat{F})T^{-1}$, quindi $A+BF\sim\hat{A}+\hat{B}\hat{F}$, ossia

$$\chi_{A+BF}=\chi_{\hat{A}+\hat{B}\hat{F}},\quad \hat{A}+\hat{B}\hat{F}=\begin{bmatrix}A_R&A_{12}\\0&A_{NR}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_R\\0\end{bmatrix}[F_R,F_{NR}]=\begin{bmatrix}A_R&A_{12}\\0&A_{NR}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_RF_R&B_RF_{NR}\\0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A_R+B_RF_R&A_{12}+B_RF_{NR}\\0&A_{NR}\end{bmatrix},\quad \chi_{A+BF}=\chi_{\hat{A}+\hat{B}\hat{F}}=\chi_{A_R+B_RF_R}\cdot\chi_{A_{NR}}$$

Quindi $\sigma(A+BF)=\sigma(A_R+B_RF_R)\cup\sigma(A_{NR})$

$\Leftarrow$: (A_R,B_R) è completamente raggiungibile, per il teorema di assegnazione degli autovalori $\Rightarrow\exists F_R: A_R+B_RF_R$ è di Hurwitz. Poiché $\sigma(A+BF)=\sigma(A_R+B_RF_R)\cup\sigma(A_{NR})$ ed entrambi questi insiemi hanno elementi a parte reale $<0\Rightarrow A+BF$ è di Hurwitz

La matrice di retroazione è data da $\hat{F}=[F_R,F_{NR}]$, $F=\hat{F}T^{-1}=[F_R,F_{NR}]T^{-1}$

F_{NR} non ha influenza sulla posizione degli autovalori del sistema retroazionato quindi può essere scelto liberamente, ad esempio possiamo assegnarlo a zero

$\Rightarrow$: Per assurdo $\exists\lambda\in\sigma(A_{NR}):\operatorname{Re}\{\lambda\}\geq0$. $\sigma(A+BF)=\sigma(A_R+B_RF)\cup\sigma(A_{NR})$

$(\forall F)\ \lambda\in\sigma(A+BF)\Rightarrow(\forall F)\ A+BF$ non è di Hurwitz $\lightning$ $\square$

Proprietà: (A,B) è stabilizzabile $\iff(\forall\lambda\in\sigma(A))\operatorname{Re}\{\lambda\}\geq0\Rightarrow\operatorname{rank}[A-\lambda I,B]=n$ (*)

Dim: $(*) \Leftrightarrow (\forall \lambda \in \sigma(A))\ \mathrm{Re}\{\lambda\} \geq 0 \Rightarrow \lambda \notin \sigma(A_{NR})$ per il test PBH $\Leftrightarrow (A,B)$ è stabilizzabile $\square$

Esempio: $A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & -1 \end{array}\right]$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Vediamo se (A,B) è stabilizzabile

$\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1) \quad \sigma(A) = \{0, 1, -1\}$

questo sistema non è asintoticamente stabile

Test PBH: $\lambda = 0$, $\mathrm{rank}[A - 0I, B] = \mathrm{rank}\left[\begin{array}{c|cc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] = 3$, $0 \notin \sigma(A_{NR})$

$\lambda = 1$, $\mathrm{rank}[A - I, B] = \mathrm{rank}\left[\begin{array}{c|cc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] = 3$, $1 \notin \sigma(A_{NR})$ quindi (A,B) è stabilizzabile perché tutti gli autovalori di A a parte reale ≥ 0 non sono autovalori non raggiungibili. Possiamo quindi trovare esplicitamente F: $A+BF$ è di Hurwitz.

Iniziamo col mettere il sistema in forma standard

$X_R(1) = \mathrm{Im}\, B = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $X_R(2) = X_R(1) + \mathrm{Im}\, AB = X_R(1) + \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$X_R(3) = X_R(2) + \mathrm{Im}\, AM = X_R(2) + \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = X_R(2) = X_R$, $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\hat{A} = T^{-1}AT = T^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$ (A_R nel blocco in alto a sinistra, A_{NR} = -1) $\quad r = 2 \quad \hat{B} = T^{-1}B = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$ (B_R nel blocco superiore)

Per vedere che $\hat{A}$ è stabilizzabile osserviamo che tutti gli autovalori di A_{NR} ($\sigma(A_{NR}) = \{-1\}$) hanno parte reale < 0. Stabilizziamo ora la parte raggiungibile, cerchiamo quindi F_R: $A_R + B_R F_R$ è di Hurwitz. $d(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2)$, usiamo la formula di Ackermann

$f_R = -[0, 1][B_R, A_R B_R]^{-1} d(A_R) = -[0, 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot d(A_R) = -[0, 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot d(A_R)$

Quindi $q = [1, 0]$. $d(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$.

$f_R = -(qA_R^2 + 3qA_R + 2q)$. $\quad qA_R = [1, 1]$, $\quad qA_R^2 = [1, 1]$

$f_R = -([1, 1] + [3, 3] + [2, 0]) = -[6, 4] = [-6, -4]$

$\hat{F} = \hat{f} = [f_R, f_{NR}] = [-6, -4, 0]$, quindi $F = \hat{F} \cdot T^{-1} = [-6, -4, 0]$.

Per verificare la correttezza del risultato calcoliamo $A + BF = A + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [-6, -4, 0] =$

$= A + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ \hline 2 & 1 & -1 \end{array}\right]$ $\quad \chi_{A+BF}(\lambda) = (\lambda^2 + 3\lambda + 2)(\lambda+1) =$

$= (\lambda+1)^2(\lambda+2)$, $\sigma(A+BF) = \{-1, -2\}$.

Caso a tempo discreto: $x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$ e consideriamo la retroazione $u(k)=Fx(k)$, sostituendo otteniamo $x(k+1)=Ax(k)+BFx(k)=(A+BF)x(k)$

Def: (A,B) è stabilizzabile se $(\exists F\in\mathbb{R}^{m\times n})(\forall \lambda\in\sigma(A+BF))\ |\lambda|<1$.

Proprietà: (A,B) è stabilizzabile $\iff (\forall\lambda\in\sigma(A_{NR}))\ |\lambda|<1$

Esempio: $A=\begin{bmatrix}4&1&3\\0&-1&-3\\-4&-1&-3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ $x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$, vogliamo capire se la coppia (A,B) è stabilizzabile

$$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\det\begin{bmatrix}\lambda-4&-1&-3\\0&\lambda+1&3\\4&1&\lambda+3\end{bmatrix}=$$
$$=(\lambda-4)((\lambda+1)(\lambda+3)-3)+4(-3+3(\lambda+1))=$$
$$=(\lambda-4)(\lambda^2+4\lambda+\cancel{3}-\cancel{3})+4(3\lambda-\cancel{3}+\cancel{3})=$$
$$=\lambda(\lambda+4)(\lambda-4)+12\lambda=\lambda(\lambda^2-16+12)=\lambda(\lambda^2-4)=\lambda(\lambda-2)(\lambda+2),\quad \sigma(A)=\{0,2,-2\}$$

il sistema non è asintoticamente stabile, usiamo il test PBH per capire se è stabilizzabile:

- $\lambda=2$: $\operatorname{rank}[A-2I,B]=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}2&1&3&0\\0&-3&-3&1\\-4&-1&-5&0\end{bmatrix}=3$, quindi $\lambda=2\notin\sigma(A_{NR})$
- $\lambda=-2$: $\operatorname{rank}[A+2I,B]=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}6&1&3&0\\0&1&-3&1\\-4&-1&-1&0\end{bmatrix}=3$, quindi $-2\notin\sigma(A_{NR})$

Questo significa che (A,B) è stabilizzabile, cerchiamo quindi F tale che $A+BF$ è asintoticamente stabile. Scriviamo il sistema nella forma standard

$$X_R(1)=\operatorname{Im}B=\operatorname{Im}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad X_R(2)=X_R(1)+\operatorname{Im}AB=X_R(1)+\operatorname{Im}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}=\operatorname{Im}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

$$X_R(3)=X_R(2)+\operatorname{Im}AM=X_R(2)+\operatorname{Im}\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}=\operatorname{Im}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&3\\0&-1&-1\end{bmatrix}=\operatorname{Im}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&-1\end{bmatrix}=X_R(2)=X_R$$

$$T_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-1&0\end{bmatrix},\quad T_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix},\quad T^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\quad \hat{A}=T^{-1}AT=T^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1&1&3\\3&-1&-3\\-1&-1&-3\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|c}1&1&3\\3&-1&-3\\\hline 0&0&0\end{array}\right]\quad r=2$$

(A_R blocco in alto a sinistra, A_{NR} blocco in basso a destra)

$$\hat{B}=T^{-1}B=\left[\begin{array}{c}0\\1\\\hline 0\end{array}\right]$$ (B_R)

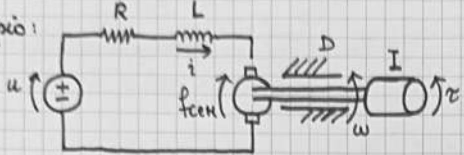
Calcoliamo F_R tale che $A_R+B_RF_R$ ha autovalori in modulo <1. vogliamo $d(\lambda)=\lambda^2$. Usiamo la formula di Ackermann

$$F_R=-[0,1]\cdot\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\end{bmatrix}^{-1}A_R^2\qquad q=[1,0],\ qA_R=[1,1],\ qA_R^2=[4,0]$$

B_R $\quad A_RB_R$

Quindi $F_R = -q A_R^L = [-4, 0]$, calcoliamo $\hat{F} = [F_R, F_{NL}] = [-4, 0, 0]$ e quindi $F = \hat{F}\cdot T^{-1} = [-4, 0, 0]$.

Esempio:



$\overset{\text{costante di coppia}}{\tau = k_T i}$ nel caso di un motore ideale la potenza meccanica è uguale alla potenza elettrica spesa.

f_{cem}: forza controelettromotrice

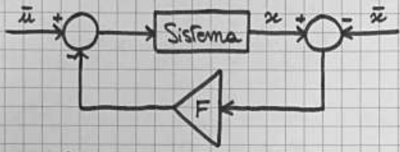
$f_{cem}\cdot i = \tau\cdot\omega = k_T\cdot i\cdot\omega$ da cui si ottiene $f_{cem} = k_T\omega$. Ricordiamo il modello di stato di questo sistema:

$$\begin{cases} L\dot{i} = u - Ri - k_T\omega \\ I\dot{\omega} = k_T i - D\omega \end{cases} \quad x = \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -R/L & -k_T/L \\ k_T/I & -D/I \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u; \quad y = \underbrace{[0, 1]}_{C} x + \underbrace{[0]}_{D} u$$

Vogliamo risolvere il problema della stabilizzazione di una coppia di equilibrio, vogliamo portare il motore ad una velocità a regime di $\bar{\omega}$.

$k_T\cdot\bar{i} - D\bar{\omega} = 0 \Rightarrow \bar{i} = \frac{D\bar{\omega}}{k_T}$ è la corrente che ci permette di vincere gli attriti e mantenere la velocità costante. Calcoliamo anche la tensione corrispondente: $\bar{u} - R\bar{i} - k_T\bar{\omega} = 0 \Rightarrow$ $\bar{u} = R\bar{i} + k_T\bar{\omega}$, la coppia di equilibrio è $(\bar{x}, \bar{u})$ con $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{i} \\ \bar{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D/k_T \\ 1 \end{bmatrix}\bar{\omega}$

e $\bar{u} = \left[\frac{RD}{k_T} - k_T\right]\bar{\omega}$



$e := x - \bar{x}$

$\dot{e}(t) = (A+BF)\,e(t)$

$e(t) = e^{(A+BF)t}\cdot e(0)$ Verifichiamo che (A,B) è assegnabile $\Leftrightarrow$ (A,B) è raggiungibile

$X_R(1) = \operatorname{Im} B \underset{\text{se } L\neq 0}{=} \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $X_R(2) = X_R(1) + \operatorname{Im} AB = X_R(1) + \operatorname{Im}\begin{bmatrix} -R/L \\ k_T/I \end{bmatrix} \underset{\text{se tutte le costanti sono} > 0}{=} \mathbb{R}^2$

(A,B) è completamente raggiungibile e quindi è assegnabile Possiamo imporre il polinomio caratteristico che desideriamo.