Matematica applicata

Un goliardico riassunto

Ollari Dmitri

29 dicembre 2022

Indice

Elenco delle figure

Capitolo 1

Interpolazione

1.1 Lezione 1

L'interpolazione permette di semplificare funzioni complesse in polinomi che si lasciano studiare.

Vale il seguente teorema:

Teorema: Se (x_i, y_i) con $i = 0, \ldots, n$, sono $n+1$ punti tale che $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, allora esiste ed è unico il polinomio $p_n(x)$ di grado al più n tale che:

$$p_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in 0, \ldots, n \tag{1.1}$$

Dimostrazione: Considero il generico polinomio di grado n:

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_n x^n \tag{1.2}$$

ed impongo le $n+1$ condizioni(o vincoli)

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_n x_1^n = y_1 \\ \ldots \\ a_0 + a_n x_0 + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \tag{1.3}$$

I parametri(o coefficienti) incogniti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sono soluzioni del sistema lineare (1.3) di ordine $n+1$.

Ora trasporto tutto nella forma matriciale e ottengo:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

che si può anche scrivere così:

$$V \cdot a = y \tag{1.5}$$

dove V è la matrice di **Vandermonde**, questa matrice risulta non singolare se e solo se il vettore nullo è la sola soluzione del sistema omogeneo:

$$V \cdot a = 0 \tag{1.6}$$

Così se il vettore delle a è diverso da 0 possiamo costruire il polinomio di grado n.

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \tag{1.7}$$

Il vettore a deve essere nullo di modo da avere la matrice V non singolare.

In alternativa si può trovare il determinante della matrice e vedere che non sia nullo:

$$det(V) = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \tag{1.8}$$

Se il determinante è diverso da zero, il sistema ammette una ed una sola soluzione, quindi il polinomio $p_n(x)$ esiste ed è unico.

Provo ora ad usare una base diversa da quella canonica per rappresentare il polinomio, prendo per esempio tre punti distinti x_0, x_1, x_2.

Mi trovo ora i nuovi polinomi L:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \tag{1.9}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \tag{1.10}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \tag{1.11}$$

Costrundo così le L, si ottiene una caratteristica carina:

$$L_0(x_0) = 1, \quad L_0(x_1) = 0, \quad L_0(x_2) = 0 \tag{1.12}$$

$$L_1(x_0) = 0, \quad L_1(x_1) = 1, \quad L_1(x_2) = 0 \tag{1.13}$$

$$L_2(x_0) = 0, \quad L_2(x_1) = 0, \quad L_2(x_2) = 1 \tag{1.14}$$

Posso quindi esprimere un **generico polinomio di secondo grado** come combiazione dei tre nuovi polinomi costruiti:

$$p_2(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + a_2 L_2(x) \tag{1.15}$$

Assegnando tre valori arbitrari di y si ottiene una **nuova base lagrangiana**, ottenendo il sistema:

$$\begin{cases} c_0 L_0(x_0) + c_1 L_1(x_0) + c_2 L_2(x_0) = y_0 \\ c_0 L_0(x_1) + c_1 L_1(x_1) + c_2 L_2(x_1) = y_1 \\ c_0 L_0(x_2) + c_1 L_1(x_2) + c_2 L_2(x_2) = y_2 \end{cases} \tag{1.16}$$

Il polinomio interpolatore viene scritto come:

$$p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) \tag{1.17}$$

1.2 Lezione 2

Per generalizzare la lezione precedente dal grado 2 al grado n, questa è la skills:

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x), \quad \text{dove} \quad L_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \tag{1.18}$$

Posso riscrivere il polinomio come:

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x) = \omega_n(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{\beta_j}{(x - x_j)} \tag{1.19}$$

Dove:

$$\omega_n(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j), \quad \beta_j = \frac{y_j}{\prod_{i=0, i \neq j}^{n} (x_j - x_i)} \tag{1.20}$$

Le operazioni richieste per calcolare un punto diverso da x sono:

1. n sottrazioni
2. $\frac{n^2}{2}$ sottrazioni
3. n^2 moltiplicazioni
4. n addizioni
5. $2n$ moltiplicazioni

Arrivato a pagina 4