

Matematica Applicata

Ollari Dmitri

6 agosto 2023

Indice

1	Interpolazione	2
1.1	Teorema	2
1.2	Polinomio interpolatore di Lagrange	2
1.3	Polinomio di Newton	3
1.4	Convergenza dei polinomi di interpolazione	3
1.4.1	Bernstein	3
1.4.2	Hermite-Fejér	3
1.5	Splines	3
1.5.1	Decomposizione di un intervallo	3
1.5.2	Ricerca binaria	4
1.5.3	Errore della spline	4
1.6	Spline cubica	4
1.7	Momenti delle spline	4
1.7.1	Spline conoscento i momenti	5
1.7.2	Convertire momenti in coefficienti	5
1.7.3	Rappresentazione con i momenti	5
1.8	Spline cubica naturale	5
1.9	Spline cubica vincolata	6
1.10	Bézier	6
1.10.1	Curve di Bézier razionali	7
1.11	Interpolazione di funzioni in più variabili	7
2	Integrazione numerica	8
2.1	Quadratura dei trapezi	8
2.1.1	Errore di quadratura	8
2.2	Quadratura di Cavalieri-Simpson	8
2.2.1	Errore di quadratura	9
2.3	Grado di precisione	9
2.4	Coefficiente di Newton-Cotes	9
3	Non lineare	10
3.1	Bisezione	10
3.1.1	Teorema degli zeri per funzioni continue	10
3.1.2	Tolleranza	10
3.2	Secanti	11
3.3	Corde	11
3.4	Tangenti	11
3.5	Metodi iterativi	12
3.6	Ordine di convergenza	12

Capitolo 1

Interpolazione

1.1 Teorema

Se (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n$ sono $n + 1$ punti distinti, allora esiste un unico polinomio $p_n(x)$ di grado $\leq n$ tale che $p_n(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$.

1.2 Polinomio interpolatore di Lagrange

Il polinomio Lagrangiano si presenta nella forma:

$$L_i = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \quad (1.1)$$

Invece il polinomio interpolatore costruito grazie al polinomio Lagrangiano è:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x) \quad (1.2)$$

La caratteristica del polinomio di Lagrange è che:

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (1.3)$$

Il polinomio interpolatore di Lagrange si può riscrivere come:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x) \quad (1.4)$$

$$= \omega_n(x) \sum_{i=0}^n \frac{\beta_i}{x - x_i} \quad (1.5)$$

Dove $\omega_n(x)$ è:

$$\omega_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (1.6)$$

mentre β_i è:

$$\beta_i = \frac{y_i}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_j - x_i)} \quad (1.7)$$

Le operazioni necessarie per il calcolo del polinomio interpolatore di Lagrange sono:

- $n^2/2$ addizioni
- n^2 moltiplicazioni

Per il calcolo del resto si ricorre alla formula:

$$r(x) = f(x) - p_n(x) \quad (1.8)$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_n(x) \quad (1.9)$$

1.3 Polinomio di Newton

Il polinomio di newton(o delle defferenze) si costruisce nel seguente modo, per i $k - 1$ punti:

Se $k = 0$:

$$f[x_0] = f(x_0) \quad (1.10)$$

$$(1.11)$$

Se $k = 1$:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \quad (1.12)$$

$$(1.13)$$

Se $k > 1$:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \quad (1.14)$$

$$(1.15)$$

Il polinomio finale si costruisce nel seguente modo:

$$f(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \quad (1.16)$$

$$+ \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n] \quad (1.17)$$

1.4 Convergenza dei polinomi di interpolazione

1.4.1 Bernstein

Se $f(x) \in C^1([a, b])$, il $p_n(x)$ della funzione relativo agli zeri di chebichev di grado $(n+1)$ converge uniformemente a $f(x)$ in $[a, b]$ per $n \rightarrow \infty$.

Se $f(x) \in C^2([a, b])$, l'errore è limitato da:

$$E = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (1.18)$$

Il polinomio di Bernstein è:

$$B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (1.19)$$

Dove la binomiale è:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (1.20)$$

1.4.2 Hermite-Fejér

Sia $f(x) \in C^0([a, b])$, con $[a, b]$ chiuso e limitato e sia:

- $p_{2n+1}(x_i) = f(x_i)$
- $p'_{2n+1}(x) = 0$

Se x_i sono gli zeri di chebichev, allora:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} err = 0 \quad (1.21)$$

1.5 Splines

1.5.1 Decomposizione di un intervallo

Sia $[a, b]$ un'intervallo chiuso e limitato, chiamo decomposizione di $[a, b]$ un insieme finito di punti:

$$\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad (1.22)$$

1.5.2 Ricerca binaria

Dato che le spline interpolano gli intervalli, è necessario trovare l'intervallo in cui si trova il punto da interpolare. Per fare ciò si utilizza la ricerca binaria, che permette di trovare l'intervallo in cui si trova il punto da interpolare in $O(\log n)$.

1. **Inizializzazione:** Assicurarsi che l'insieme sia ordinato in modo ascendente.
2. **Definire l'intervallo:** Impostare un intervallo di ricerca iniziale che copra l'intero insieme. Solitamente, l'intervallo è definito da due indici: *inizio* e *fine*. All'inizio, *inizio* sarà 0 (indice del primo elemento) e *fine* sarà la lunghezza dell'insieme meno uno (indice dell'ultimo elemento).
3. **Calcolare il punto medio:** Calcolare l'indice del punto medio dell'intervallo come $medio = (inizio + fine) / 2$.
4. **Confronto:** Confrontare l'elemento nel punto medio con l'elemento cercato.
5. **Trova l'elemento:** Se l'elemento nel punto medio è uguale all'elemento cercato, la ricerca è terminata, e l'elemento è stato trovato.
6. **Riduzione dell'intervallo:** Se l'elemento nel punto medio è maggiore dell'elemento cercato, impostare $fine = medio - 1$ per restringere l'intervallo alla metà inferiore. Altrimenti, se l'elemento nel punto medio è minore dell'elemento cercato, impostare $inizio = medio + 1$ per restringere l'intervallo alla metà superiore.
7. **Ripeti:** Ripetere i passaggi dal 3 al 6 fino a quando l'elemento viene trovato o finché *inizio* diventa maggiore di *fine*, nel qual caso l'elemento non è presente nell'insieme.

1.5.3 Errore della spline

L'errore della spline è definito come:

$$r(x) = f(x) - S(x), \quad x \neq x_i \quad (1.23)$$

$$= |f(x) - S(x)| = \frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi)| \omega(x) \quad (1.24)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi)| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (1.25)$$

1.6 Spline cubica

Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato, sia f una funzione definita su $[a, b]$ e sia $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una decomposizione di $[a, b]$. Una spline cubica è una funzione S definita su $[a, b]$ tale che:

[illegible]

Le incognite sono $a_0^i, a_1^i, a_2^i, a_3^i$ per $i = 1, \dots, n$. I vincoli sono:

- $3(n-1)$ per imporre $C^2([a, b])$
- $n+1$ per imporre le interpolazioni ai nodi

Ne deriva che vincoli e incognite sono $4n - 2$.

1.7 Momenti delle spline

I momenti delle spline sono definiti come:

$$M_i = [S_{3,\Delta}^i(x_i)]''_{x=x_i} \quad (1.27)$$

1.7.1 Spline conosciuto i momenti

Se conosco i momenti della spline, posso rappresentare le spline nel seguente modo:

$$S_{3,\Delta}^i(x) = \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i}M_i + \frac{(x_i - x)^3}{6h_i}M_{i-1} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i \quad (1.28)$$

Dove:

$$B_i = y_{i-1} - \frac{h_i^2}{6} M_{i-1} \quad (1.29)$$

$$A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_- - M_{i-1}) \quad (1.30)$$

Derivando varie volte si ottiene:

$$[S_{3,\Delta}^i(x)]' = \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} M_i - \frac{(x_i - x)^2}{2h_i} M_{i-1} + A_i \quad (1.31)$$

$$[S_{3,\Delta}^i(x)]'' = \frac{(x - x_{i-1})}{h_i} M_i + \frac{(x_i - x)}{h_i} M_{i-1} \quad (1.32)$$

$$[S_{3,\Delta}^i(x)]''' = \frac{1}{h_i} M_i - \frac{1}{h_i} M_{i-1} \quad (1.33)$$

In tutto questo $h_i = x_i - x_{i-1}$.

1.7.2 Convertire momenti in coefficienti

$$a_0^i = y_{i-1} \quad (1.34)$$

$$a_1^i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(2M_{i-1} + M_i) \quad (1.35)$$

$$a_2^i = \frac{M_{i-1}}{2} \quad (1.36)$$

$$a_3^i = \frac{M_i - M_{i-1}}{6h_i} \quad (1.37)$$

1.7.3 Rappresentazione con i momenti

$$\alpha_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} \quad (1.38)$$

$$\beta_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \quad (1.39)$$

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right) \quad (1.40)$$

E la rappresentazione diventa:

$$\alpha_i M_{i-1} + 2M_i + \beta_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (1.41)$$

1.8 Spline cubica naturale

Una spline per essere naturale deve avere i momenti $M_0 = M_n = 0$. Quindi i vincoli diventano:

[illegible]

La matrice associata è:

- triangolare
- $\alpha_i + \beta_i = 1$

1.9 Spline cubica vincolata

Le condizioni per avere una spline cubica vincolata sono:

$$[S_{3,\Delta}^i(x)]'_{x=x_0} = y'_0 \quad (1.43)$$

$$[S_{3,\Delta}^i(x)]'_{x=x_n} = y'_n \quad (1.44)$$

La matrice associata è:

- tridiagonale
- triangolar dominante
- irreducibile

1.10 Bézier

Siano $P_i(x_i, y_i), i = 0, 1, n$, punti di controllo, la curva parametrica si forma:

$$Q_n(t) = \sum_{i=0}^n P_i f_i(t), \quad t \in [0, 1] \quad (1.45)$$

$f_i(t)$ sono opportune funzioni polinomiali scelte in modo tale che la curva abbia le seguenti proprietà:

- $Q_n(0) = P_0$
- $Q_n(1) = P_n$
- La tangente in P_0 è parallela a $P_1 - P_0$
- La tangente in P_n è parallela a $P_n - P_{n-1}$

Queste condizioni sono soddisfatte assumendo come funzioni $f_i(t)$ i polinomi di Bernstein:

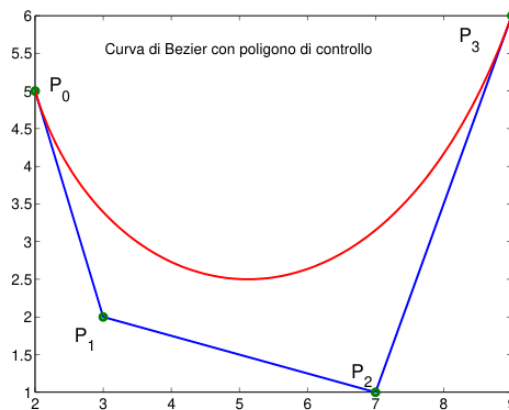
$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, 1, n \quad (1.46)$$

Dove la binomiale si calcola come:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (1.47)$$

Quindi la curva di Bézier è data da:

$$Q_n(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t), \quad t \in [0, 1] \quad (1.48)$$



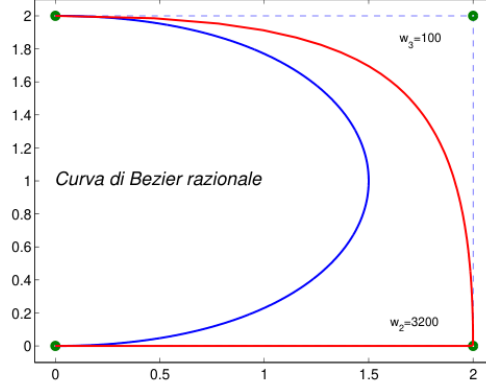
Spesso è necessario utilizzare più curve e per fare ciò si utilizzano i gradi di continuità.

- C^0 , le due curve hanno un punto in comune (primo nodo della seconda curva coincide con l'ultimo della prima)
- C^1 , le due curve hanno un punto in comune e la derivata prima è uguale in direzione e modulo

1.10.1 Curve di Bézier razionali

In questo caso si introduce un valore di peso per ogni punto di controllo, quindi la curva è data da:

$$Q_n(t) = \frac{\sum_{i=0}^n P_i w_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}, \quad t \in [0, 1] \quad (1.49)$$



1.11 Interpolazione di funzioni in più variabili

Sapendo che il polinomio Lagrangiano è:

$$L_{ij}(x, y) = L_i(x)L_j(y) \quad (1.50)$$

Il polinomio interpolante è:

$$p_{n,m}(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f(x_i, y_j) L_{ij}(x, y) \quad (1.51)$$

$$= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f(x_i, y_j) L_i(x) L_j(y) \quad (1.52)$$

Capitolo 2

Integrazione numerica

2.1 Quadratura dei trapezi

La quadratura dei trapezi è un metodo di integrazione numerica che permette di approssimare il valore di un integrale definito. Il metodo consiste nell'approssimare l'area sottesa alla curva della funzione integranda con quella di un trapezio avente come basi i valori della funzione nei due estremi dell'intervallo di integrazione e come altezza la lunghezza dell'intervallo stesso diviso il numero di sottointervalli in cui si vuole suddividere l'intervallo di integrazione.

$$T_N(f) = \frac{b-a}{2N} [f(a) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(b)] \quad (2.1)$$

Nel caso semplice dove $N = 1$ si ha:

$$T(f) = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \quad (2.2)$$

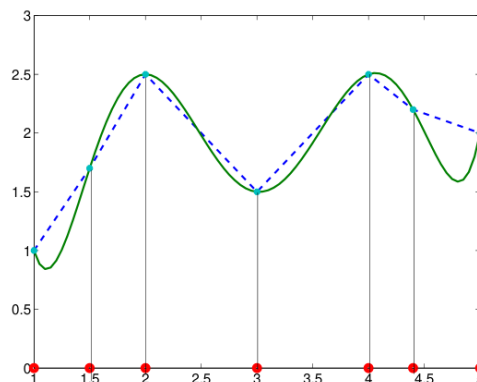
N rappresenta il numero di sottointervalli in cui si suddivide l'intervallo di integrazione. Quindi, per $N = 1$ si ha un solo sottointervallo, mentre per $N = 2$ si hanno due sottointervalli e così via.

2.1.1 Errore di quadratura

Il resto di quadratura per i trapezi è:

$$r(T_N) = I(f) - T_N(f) \quad (2.3)$$

$$= -\frac{1}{12} \frac{(b-a)^3}{N^2} f''(\xi) \quad (2.4)$$



2.2 Quadratura di Cavalieri-Simpson

A differenza della quadratura dei trapezi dove si utilizzavano delle dei segmenti per interpolare i vari punti dell'intervallo, con cavalieri-simpson si utilizzano delle parabole. In questo modo si riesce ad ottenere una maggiore precisione.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6N} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + 4 \sum_{i=1}^{N-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(b) \right] \quad (2.5)$$

2.2.1 Errore di quadratura

Il resto di quadratura per la quadratura di Cavalieri-Simpson è:

$$rCS_N = I(f) - CS_N(f) \quad (2.6)$$

$$= -\frac{(b-a)^5}{2880N} f^{(4)}(\xi) \quad (2.7)$$

2.3 Grado di precisione

Una formula di quadratura ha grado di precisione d se è esatta quando $f(x)$ è polinomio qualsiasi di grado $\leq d$ ed esiste almeno un polinomio di grado $d+1$ dove $err \neq 0$.

Trapezi	$d \leq 1$
Cavalieri-Simpson	$d \leq 3$

2.4 Coefficiente di Newton-Cotes

n	α_0	α_1	α_2	α_3	resto
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{12}h^3 f^{(2)}(\xi)$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$			$-\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi)$
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$			$-\frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi)$
4	$\frac{14}{45}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{24}{45}$		$-\frac{8}{945}h^7 f^{(6)}(\xi)$
5	$\frac{95}{288}$	$\frac{375}{288}$	$\frac{250}{288}$		$-\frac{275}{12096}h^7 f^{(6)}(\xi)$
6	$\frac{41}{140}$	$\frac{216}{140}$	$\frac{27}{140}$	$\frac{272}{140}$	$-\frac{9}{1400}h^9 f^{(8)}(\xi)$
7	$\frac{5257}{17280}$	$\frac{25039}{17280}$	$\frac{9261}{17280}$	$\frac{20926}{17280}$	$-\frac{8183}{518400}h^9 f^{(8)}(\xi)$

Capitolo 3

Non lineare

Uno dei problemi più comuni in matematica è quello di trovare le radici di un'equazione.

3.1 Bisezione

3.1.1 Teorema degli zeri per funzioni continue

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = 0$.

Iterando il controllo $f(a)f(b) < 0$ e dividendo l'intervallo a metà, si può trovare una radice di f .

$c = \frac{a+b}{2}$ è il punto medio dell'intervallo $[a, b]$.

Se $f(a)f(c) < 0$ allora la radice è nell'intervallo $[a, c]$ ed itero la procedura su questo intervallo.

3.1.2 Tolleranza

Fissando una tolleranza ϵ , la procedura si interrompe quando:

$$|\alpha - x_k| \leq \epsilon \quad (3.1)$$

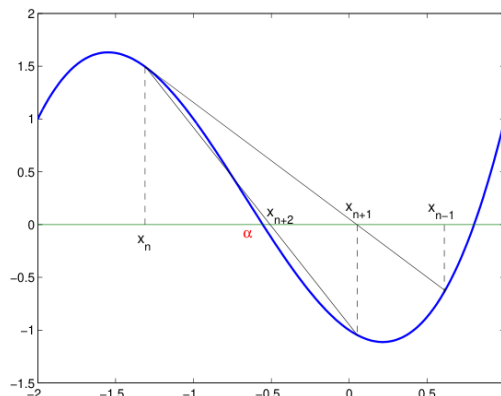
$$k \geq \frac{\log_{10} \frac{b-a}{\epsilon}}{\log_{10} 2} \approx 3.32 \log_{10} \frac{b-a}{\epsilon} \quad (3.2)$$

Si capisce che in media sono necessarie 3.3 bisezioni per migliorare di una cifra significativa la precisione della radice.

3.2 Secanti

Costruisco una successione $\{x_k\}$ tale che $\forall k \geq 1$, il punto x_{k+1} è lo **zero** della retta **secante** che passa per i punti:

x	$f(x)$
x_{k-1}	$f(x_{k-1})$
x_k	$f(x_k)$



Se la funzione è **convessa** o **concava** $\in [a, b]$, la successione converge a α in modo monotono (crescente o decrescente).

3.3 Corde

Il metodo delle corde è il caso generale alla base del metodo delle secanti, la x successiva si calcola:

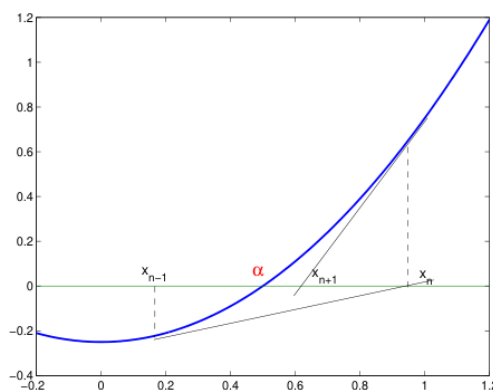
$$x_{k+1} = x_k - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x_k), \quad k \geq 0 \quad (3.3)$$

3.4 Tangenti

Si può applicare il metodo delle tangenti solo se la funzione è **derivabile** in $[a, b]$. Questo metodo è molto veloce a convergere, ma è molto sensibile alla scelta del punto di partenza x_0 .

x_0 dato:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k \geq 0 \quad (3.4)$$



3.5 Metodi iterativi

Sostanzialmente i metodi iterativi rispecchiano la forma generale:

$$x_{i+1} = g(x) \quad (3.5)$$

La funzione g è detta **funzione di iterazione**, le caratteristiche che ci interessano sono:

- $g \in C^1([a, b])$

3.6 Ordine di convergenza

Per confrontare metodi iterativi si utilizza l'ordine di convergenza.

Se $\{x_i\}$ è una successione che converge a α e $x_i \neq \alpha$, se esiste un numero reale $p \geq 1$ tale che:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|x_{i+1} - \alpha|}{|x_i - \alpha|^p} = \gamma \quad \begin{cases} 0 < \gamma < 1 & \text{se } p = 1 \\ \gamma > 0 & \text{se } p > 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

Se la successione ha ordine di convergenza p , la γ è detta **costante asintotica di convergenza**.

Se $p = 1$, la convergenza è **lineare**. Se $p > 2$, la convergenza è **superlineare**.

Se $p = 1$ e $\gamma = 1$ allora la convergenza è **sublineare**.