Matematica applicata

Un goliardico riassunto

Ollari Dmitri

21 marzo 2023

Indice

Elenco delle figure

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Argomenti del corso

- Approssimazione di dati e funzioni:
  - interpolazione polinomiale
  - matrice di vandermonde
  - interpolazione di Lagrange
  - interpolazione di Hermite
  - definizione di differenza divisa
  - interpolazione (alla Newton) alle differenze divise
  - convergenza
  - controesempio di Runge su nodi equispaziati
  - rappresentazione dell'errore
  - funzioni a tratti splines
  - interpolazione con funzioni splines
  - metodo dei minimi quadrati
  - Cenno curve di Bézier
  - cenno interpolazione in più dimensioni
- Integrazione numerica
  - formula quadratica di interpolazione
  - formule di Newton-Cotes
  - studio dell'errore e delal convergenza
  - routines automatiche
  - uso di formule per integrali in più dimensioni
- Sistemi lineari
  - motodi diretti
  - sistemi a matrice triangolare
  - metodo di eliminazione di Gauss
  - pivoting
  - decomposizione di Gauss e fattorizzazione a LU
  - metrice inversa
  - raffinamento iterativo
  - sistemi complessi
  - Cenni a metodi iterativi di jacobi e di Gauss-Seidel
  - studio della convergenza dei metodi iterativi e criteri di arresto

- Equazioni non lineari
  - radici reali
  - metodo di Newton-Raphson
- Matlab
- Prerequisiti
  - operazioni tra matrici
  - matrici non singolari
  - determinante
  - cramer
  - regola di Laplace
  - matrice inversa
  - concetto ddi norma
  - norma di un vettore e di una matrice
  - lineare dioendenza e indipendenza

1.2 Modalità d'esame

Prova scritta su esercizi e prova orale di 1 ora :(

Capitolo 2

Interpolazione

Avendo alcuni punti, si considerano i seguenti problemi:

- Ricostruire una traiettoria passanti per i punti assegnati
- approssimare una funzione complessa nota in alcuni punti una più semplice come un polinomio
- calcolare il valore di un integrale definito di una funzione di cui non conosciamo facilmente ina primitiva ad esempio approssimandola con un polinomio

2.1 Teorema

Se (x_i, y_i) con $i = 0, \dots, n$, sono $n+1$ punti tali che $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, esiste ed è unico il polinomio $p_n(x)$ di grado al più n tale che:

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n \tag{2.1}$$

2.2 Dimostrazione

Consideriamo il generico polinomio di grado n:

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \tag{2.2}$$

ed imponiamo le $n+1$ condizioni (vincoli)

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \tag{2.3}$$

I parametri (coefficienti) incogniti $a_0, a_1, \dots, a_n$ sono soluzione del sistema lienare 2.3 di ordine $n+1$, in forma matriciale si può scrivere come:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ . & .. & \cdots & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ .. \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ .. \\ y_n \end{pmatrix}, \quad Va = y \tag{2.4}$$

La matrice V è detta **matrice di Vandermonde**, essa risulta **non singolare** se e soltanto se **il vettore nullo** 0 **è la sola soluzione** del sistema omogeneo.

$$Va = 0 \tag{2.5}$$

Quindi se il vettore $a = [a_0, a_!, \dots, a_n] \neq 0$ possiamo costruire il polinomio di grado n:

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \tag{2.6}$$

Questo polinomio soddisfa anche la condizione:

$$p_n(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n \tag{2.7}$$

Cioè il polinomio $p_n(x)$ di grado n avrebbe $n+1$ zeri (asurdo, vedi teorema fondamentae dell'algebra), di conseguenza **il vettore a deve essere il vettore nullo e quindi la matrice V è non singolare.**

In alternativa si può verificare che la matrice V è non singolare mediante il determinante, che se non nullo, il sistema ha una e una sola soluzione, quindi il polinomio $p_n(x)$ esiste ed è unico.

2.3 Costruzione polinomio interpoaltore

Per ottenere una base che riduca il numero di calcoli cerco una matrice $V \equiv I$.

Parto con il costruire i polinomi Lagranciani:

$$L_0(x_i) = \delta_{0,i} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = 0 \\ 0 & \text{se} \quad i \neq 0 \end{cases} \quad i = 0, 1, 2 \tag{2.8}$$

$$L_1(x_i) = \delta_{1,i} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = 1 \\ 0 & \text{se} \quad i \neq 1 \end{cases} \quad i = 0, 1, 2 \tag{2.9}$$

$$L_2(x_i) = \delta_{2,i} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = 2 \\ 0 & \text{se} \quad i \neq 2 \end{cases} \quad i = 0, 1, 2 \tag{2.10}$$

$L_0(x)$ si deve annullare in x_1 e x_2, quindi:

$$L_0(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \tag{2.11}$$

Con a_0 costante arbitraria non nulla e imponendo che $L_0(x_0) = 1$ ottengo:

$$L_0(x_0) = a_0(x - x_1)(x - x_2) = 1 \quad \rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} \tag{2.12}$$

Ripetende lo stesso procedimento per $L_1(x)$ e $L_2(x)$ ottengo:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, \quad L_0(x_0) = 1, L_0(x_1) = 0, L_0(x_2) = 0 \tag{2.13}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \quad L_1(x_0) = 0, L_1(x_1) = 1, L_1(x_2) = 0 \tag{2.14}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}, \quad L_2(x_0) = 0, L_2(x_1) = 0, L_2(x_2) = 1 \tag{2.15}$$

Ciascun polinomio è di secondo grado, inoltre i polinomi $L_0(x)$, $L_1(x)$ e $L_1(x)$ sono lineramente indipendenti.

Quindi posso esprimere un generico polinomio di secondo grado come combinazione dei tre nuovi polinomi costruiti:

$$p_2(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + a_2 L_2(x) \quad a_0, a_1, a_2 \in R \tag{2.16}$$

Assegnati tre valori di y possiamo costruire il polinomio interpolatore $p_2(x)$ usando la nuova base Langrangiana:

$$\begin{cases} a_0 L_0(x_0) + a_1 L_1(x_0) + a_2 L_2(x_0) = y_0 \\ a_0 L_0(x_1) + a_1 L_1(x_1) + a_2 L_2(x_1) = y_1 \\ a_0 L_0(x_2) + a_1 L_1(x_2) + a_2 L_2(x_2) = y_2 \end{cases} \tag{2.17}$$

Mediante il polinomio interpolatore posso scrivere i punti (x_0, y_0), (x_1, y_1) e (x_2, y_2) come:

$$p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) \tag{2.18}$$

Capitolo 3

Interpolazione - Laplace

Siano $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ **punti distinti** e siano $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$ polinomi di grado n tali che:

$$L_j(x_i) = \delta_{j,i} = \begin{cases} 1 & se \quad i = j \\ 0 & se \quad i \neq j \end{cases} \qquad i = 0, 1, \ldots, n \tag{3.1}$$

Dove:

$$L_n(x) = \prod_{k=n, k\neq n}^{n} \frac{x - x_k}{x_n - x_k} \tag{3.2}$$