

# Matematica applicata

Un goliardico riassunto

Ollari Dmitri

8 aprile 2023

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
1.1	Argomenti del corso . . . . .	4
1.2	Modalità d'esame . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Interpolazione</b>	<b>6</b>
2.1	Teorema . . . . .	6
2.2	Dimostrazione . . . . .	6
2.3	Costruzione polinomio interpolatore . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Interpolazione - Laplace</b>	<b>8</b>
3.1	Polinomio di Newton . . . . .	8
3.1.1	Polinomio interpolatore lineare . . . . .	9
3.1.2	Polinomio interpolatore quadratico . . . . .	9
3.1.3	Algoritmo di Horner . . . . .	9
3.1.4	Newton con derivate(Hermite) . . . . .	9
3.2	Interpolazione inversa . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Interpolazione - Infiniti nodi interpolanti</b>	<b>11</b>
4.1	Nodi <i>quasi</i> Chebichev . . . . .	11
4.2	Convergenza del polinomio di interpolazione . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Interpolazione - Splines</b>	<b>13</b>
5.1	Decomposizione . . . . .	13
5.2	Ricerca binaria . . . . .	13
5.3	Splines . . . . .	13
5.4	Stima dell'errore . . . . .	14
5.5	Polinomio di Hermite generalizzato . . . . .	14
5.6	Spline Interpolante . . . . .	15
5.6.1	Definizione di spline interpolante . . . . .	15
5.6.2	Spline cubiche . . . . .	15
5.6.3	Momenti della spline . . . . .	15
5.7	Spline cubica naturale . . . . .	17
5.8	Spline cubica vincolata . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Interpolazione</b>	<b>18</b>
6.1	Curve di Bézier . . . . .	18
6.1.1	Curve di Bazier razionali . . . . .	18
6.2	Interpolazione di funzioni in più variabili . . . . .	18
<b>7</b>	<b>Integrazione</b>	<b>20</b>
7.1	Esempi di problemi . . . . .	20
7.1.1	Spazio percorso in moto rettilineo . . . . .	20
7.1.2	Lavoro compiuto da una forza . . . . .	20
7.1.3	Valore medio di una funzione . . . . .	20
7.2	Quadratura interpolatoria dei trapezi . . . . .	21
7.2.1	Teoremi integrazione . . . . .	21
7.2.2	Resto . . . . .	21
7.3	Alcuni richiami . . . . .	21
7.3.1	Teorema 1 . . . . .	21
7.3.2	Teorema 2 . . . . .	22

7.3.3	Corollario . . . . .	22
<b>8</b>	<b>Integrazione</b>	<b>23</b>
8.1	Quadratura di Cavalieri-Simpson . . . . .	23
8.1.1	Approssimazione integrale con formula di Cavalieri-Simpson . . . . .	24
8.1.2	Resto di Cavalieri-Simpson . . . . .	24
8.2	Formula di Cavalieri-Simpson composta . . . . .	24
8.3	Considerazioni sull'integrazione . . . . .	24

# Elenco delle figure

3.1	Schema iterazione polinomio Newton . . . . .	8
3.2	Hermite . . . . .	9
3.3	Esempio hermite . . . . .	10
4.1	Chebichev con 5 nodi . . . . .	11
4.2	Chebichev con 9 nodi . . . . .	11
4.3	Chebichev con 17 nodi . . . . .	12

# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Argomenti del corso

- Approssimazione di dati e funzioni:
  - interpolazione polinomiale
  - matrice di vandermonde
  - interpolazione di Lagrange
  - interpolazione di Hermite
  - definizione di differenza divisa
  - interpolazione (alla Newton) alle differenze divise
  - convergenza
  - controesempio di Runge su nodi equispaziati
  - rappresentazione dell'errore
  - funzioni a tratti splines
  - interpolazione con funzioni splines
  - metodo dei minimi quadrati
  - Cenno curve di Bézier
  - cenno interpolazione in più dimensioni
- Integrazione numerica
  - formula quadratica di interpolazione
  - formule di Newton-Cotes
  - studio dell'errore e della convergenza
  - routines automatiche
  - uso di formule per integrali in più dimensioni
- Sistemi lineari
  - metodi diretti
  - sistemi a matrice triangolare
  - metodo di eliminazione di Gauss
  - pivoting
  - decomposizione di Gauss e fattorizzazione a LU
  - matrice inversa
  - raffinamento iterativo
  - sistemi complessi
  - Cenni a metodi iterativi di Jacobi e di Gauss-Seidel
  - studio della convergenza dei metodi iterativi e criteri di arresto

- Equazioni non lineari
  - radici reali
  - metodo di Newton-Raphson
- Matlab
- Prerequisiti
  - operazioni tra matrici
  - matrici non singolari
  - determinante
  - cramer
  - regola di Laplace
  - matrice inversa
  - concetto di norma
  - norma di un vettore e di una matrice
  - lineare dipendenza e indipendenza

## 1.2 Modalità d'esame

Prova scritta su esercizi e prova orale di 1 ora :(

# Capitolo 2

# Interpolazione

Avendo alcuni punti, si considerano i seguenti problemi:

- Ricostruire una traiettoria passanti per i punti assegnati
- approssimare una funzione complessa nota in alcuni punti una più semplice come un polinomio
- calcolare il valore di un integrale definito di una funzione di cui non conosciamo facilmente una primitiva ad esempio approssimandola con un polinomio

## 2.1 Teorema

Se  $(x_i, y_i)$  con  $i = 0, \dots, n$ , sono  $n + 1$  punti tali che  $x_i \neq x_j$  se  $i \neq j$ , esiste ed è unico il polinomio  $p_n(x)$  di grado al più  $n$  tale che:

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n \quad (2.1)$$

## 2.2 Dimostrazione

Consideriamo il generico polinomio di grado  $n$ :

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad (2.2)$$

ed imponiamo le  $n + 1$  condizioni (vincoli)

[illegible]

I parametri (coefficienti) incogniti  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sono soluzione del sistema lineare 2.3 di ordine  $n+1$ , in forma matriciale si può scrivere come:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad Va = y \quad (2.4)$$

La matrice  $V$  è detta **matrice di Vandermonde**, essa risulta **non singolare** se e soltanto se **il vettore nullo  $0$  è la sola soluzione** del sistema omogeneo.

$$V_a = 0 \tag{2.5}$$

Quindi se il vettore  $a = [a_0, a_1, \dots, a_n] \neq 0$  possiamo costruire il polinomio di grado  $n$ :

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad (2.6)$$

Questo polinomio soddisfa anche la condizione:

$$p_n(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2.7)$$

Ciò che il polinomio  $p_n(x)$  di grado  $n$  avrebbe  $n + 1$  zeri (assurdo, vedi teorema fondamentale dell'algebra), di conseguenza **il vettore  $a$  deve essere il vettore nullo e quindi la matrice  $V$  è non singolare.**

In alternativa si può verificare che la matrice  $V$  è non singolare mediante il determinante, che se non nullo, il sistema ha una e una sola soluzione, quindi il polinomio  $p_n(x)$  esiste ed è unico.

## 2.3 Costruzione polinomio interpolatore

Per ottenere una base che riduca il numero di calcoli cerco una matrice  $V \equiv I$ .

Parto con il costruire i polinomi Lagrangiani:

$$L_0(x_i) = \delta_{0,i} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{se } i \neq 0 \end{cases} \quad i = 0, 1, 2 \quad (2.8)$$

$$L_1(x_i) = \delta_{1,i} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{se } i \neq 1 \end{cases} \quad i = 0, 1, 2 \quad (2.9)$$

$$L_2(x_i) = \delta_{2,i} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 2 \\ 0 & \text{se } i \neq 2 \end{cases} \quad i = 0, 1, 2 \quad (2.10)$$

$L_0(x)$  si deve annullare in  $x_1$  e  $x_2$ , quindi:

$$L_0(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \quad (2.11)$$

Con  $a_0$  costante arbitraria non nulla e imponendo che  $L_0(x_0) = 1$  ottengo:

$$L_0(x_0) = a_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) = 1 \quad \rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \quad (2.12)$$

Ripetendo lo stesso procedimento per  $L_1(x)$  e  $L_2(x)$  ottengo:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, \quad L_0(x_0) = 1, L_0(x_1) = 0, L_0(x_2) = 0 \quad (2.13)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \quad L_1(x_0) = 0, L_1(x_1) = 1, L_1(x_2) = 0 \quad (2.14)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}, \quad L_2(x_0) = 0, L_2(x_1) = 0, L_2(x_2) = 1 \quad (2.15)$$

Ciascun polinomio è di secondo grado, inoltre i polinomi  $L_0(x)$ ,  $L_1(x)$  e  $L_2(x)$  sono linearmente indipendenti.

Quindi posso esprimere un generico polinomio di secondo grado come combinazione dei tre nuovi polinomi costruiti:

$$p_2(x) = a_0L_0(x) + a_1L_1(x) + a_2L_2(x) \quad a_0, a_1, a_2 \in R \quad (2.16)$$

Assegnati tre valori di  $y$  possiamo costruire il polinomio interpolatore  $p_2(x)$  usando la nuova base Lagrangiana:

$$\begin{cases} a_0L_0(x_0) + a_1L_1(x_0) + a_2L_2(x_0) = y_0 \\ a_0L_0(x_1) + a_1L_1(x_1) + a_2L_2(x_1) = y_1 \\ a_0L_0(x_2) + a_1L_1(x_2) + a_2L_2(x_2) = y_2 \end{cases} \quad (2.17)$$

Mediante il polinomio interpolatore posso scrivere i punti  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  come:

$$p_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) \quad (2.18)$$



## Capitolo 3

# Interpolazione - Laplace

Siano  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,  $n + 1$  **punti distinti** e siano  $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$  polinomi di grado  $n$  tali che:

$$L_j(x_i) = \delta_{j,i} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3.1)$$

Dove:

$$L_n(x) = \prod_{k=0, k \neq n}^n \frac{x - x_k}{x_n - x_k} \quad (3.2)$$

Trovare la funzione interpolatrice dati i seguenti valori

$$\begin{array}{ccc} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ y'_0 & & \end{array}$$

Quindi devo usare costruire il sistema:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 = y_0 \\ a_1 + 2a_2 x_0^1 + 3a_3 x_0^2 = y'_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 = y_2 \end{cases} \quad (3.3)$$

E poi da qui posso risolvere il sistema.

### 3.1 Polinomio di Newton

Si chiama differenza divisa di ordine  $k$  della funzione  $f(x)$  relativa ai punti  $x_0, \dots, x_{k-1}$  la funzione  $f[x_0, \dots, x_{k-1}, x]$  definita per  $x \neq x_i$  con  $i = 0, \dots, k - 1$  ricorsivamente come:

$$\begin{array}{ccccccc} x_0 & f(x_0) & & & & & \\ & f[x_0, x_1] & & & & & \\ x_1 & f(x_1) & & f[x_0, x_1, x_2] & & & \\ & f[x_1, x_2] & & f[x_0, x_1, x_2, x_3] & & & \\ x_2 & f(x_2) & & f[x_1, x_2, x_3] & & f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] & \\ & f[x_2, x_3] & & f[x_1, x_2, x_3, x_4] & & \dots & \\ x_3 & f(x_3) & & f[x_2, x_3, x_4] & & \dots & \\ & f[x_3, x_4] & & \dots & & \dots & \\ x_4 & f(x_4) & & \dots & & \dots & \\ \dots & \dots & & \dots & & \dots & \end{array}$$

Figura 3.1: Schema iterazione polinomio Newton

Per calcolare il polinomio finale di Newton si deve iterare come segue:

Se siamo nella prima colonna(dove ci sono gli  $x_n$ ):

$$f[x] = f(x) \quad (3.4)$$

Se ci troviamo nella colonna 1(dove si trovano  $f(x_n)$ ), prendo due x alla volta e eseguo:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \quad (3.5)$$

Se mi trovo nelle colonne dalla numero 2 in poi (andando verso destra):

$$f[x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}, x] = \frac{f[x_1, \dots, x_{k-1}, x] - f[x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k-1}]}{x - x_0} \quad (3.6)$$

Il polinomio ottenuto con Newton è al più di grado  $n$ , nel polinomio interpolatore di newton, i coefficienti  $[x_0, \dots, x_n]$  sono indipendenti da  $x$ .

### 3.1.1 Polinomio interpolatore lineare

$$p_1(x) = f[x_0] + (x - x_0) \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (3.7)$$

### 3.1.2 Polinomio interpolatore quadratico

$$p_2(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \quad (3.8)$$

### 3.1.3 Algoritmo di Horner

Algoritmo ottimale per calcolare un polinomio in un punto:

Il polinomio:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (3.9)$$

Si può riscrivere come:

$$p(x) = ((a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0 \quad (3.10)$$

### 3.1.4 Newton con derivate(Hermite)

Se i punti  $f(x)$  appartengono all'intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$ , non necessariamente distinti, esiste un punto  $\epsilon$  compreso tra il minimo e il massimo tale che:

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\epsilon)}{k!} \quad (3.11)$$

Se si conoscono anche le derivate prime di  $f(x)$  si può fare:

$x_0$	$f(x_0)$	$f'(x_0)$		
$x_1$	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_0, x_1]$	
$x_1$	$f(x_1)$	$f'(x_1)$	$f[x_0, x_1, x_1]$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$x_n$	$f(x_n)$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-1}, x_n, x_n]$	$\dots \dots f[x_0, x_0, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n]$

Figura 3.2: Hermite

Esempio: Se nel punto  $x_0$  ho tre vincoli:

- $f(x)$
- $f'(x)$
- $f''(x)$

Posso realizzare lo schema delle differenze divise come:

Il polinomio risulta così:

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_0](x - x_0)^2 \quad (3.12)$$

$$\begin{array}{rcl}
x_0 & y_0 & \\
& f[x_0, x_0] = f'(x_0) & \\
x_0 & y_0 & f[x_0, x_0, x_0] = \frac{f''(x_0)}{2!} \\
& f[x_0, x_0] = f'(x_0) & \\
x_0 & y_0 &
\end{array}$$

Figura 3.3: Esempio hermite

## 3.2 Interpolazione inversa

Se la funzione da interpolare  $f(x)$  è:

- monotona in senso stretto in  $[a, b]$

quindi è invertibile, la formula di interpolazione di Newton può essere usata per ottenere l'inversa.

Basta scambiare i punti  $x, y$ .

Esempio: Dati i seguenti punti:

$$\begin{array}{r|cccc}
x_i & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 \\
f(x_i) & 0.203 & 0.423 & 0.684 & 1.030 \\
\\ 
y_i & 0.203 & 0.423 & 0.684 & 1.030 \\
x_i = f^{-1}(y_i) & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8
\end{array}$$

## Capitolo 4

# Interpolazione - Infiniti nodi interpolanti

Il teorema di Faber afferma che non tutti i nodi dell'intervallo convergono uniformemente alla funzione che si cerca di approssimare con infiniti nodi.

### 4.1 Nodi *quasi* Chebichev

$$x_k^n = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right) \quad k = 0, \dots, n \quad (4.1)$$

#### Esempio 5 nodi

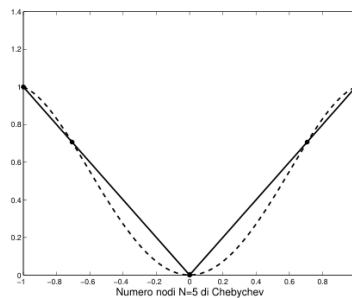


Figura 4.1: Chebichev con 5 nodi

#### Esempio 9 nodi

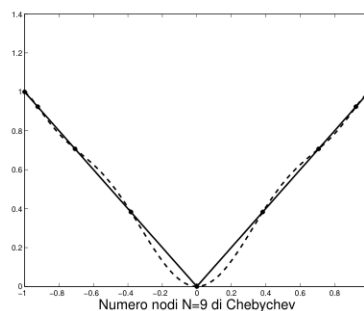


Figura 4.2: Chebichev con 9 nodi

## Esempio 17 nodi

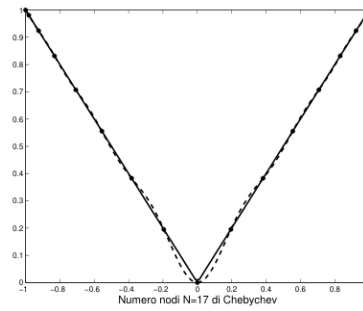


Figura 4.3: Chebichev con 17 nodi

## 4.2 Convergenza del polinomio di interpolazione

Il teorema di Bernstein dice che:

Se  $f(x) \in C^1([a, b])$ , il polinomio  $p_n(x)$  di interpolazione della funzione  $f$  relativo agli zeri del polinomio di Chebichev di grado  $n + 1$  converge uniformemente a  $f(x)$  su  $[a, b]$  per  $n \rightarrow +\infty$ .

Se la funzione  $f \in C^2([a, b])$  si ha che la stima dell'errore è:

$$\|f(x) - p_n(x)\|_{\infty} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (4.2)$$

Se l'intervallo usato per il polinomio interpolatore è  $[0, 1]$  e i nodi sono  $n$ :

$$B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad k = 0, \dots, n \quad (4.3)$$

Dove:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (4.4)$$

Il teorema di Hermite-Fejer dice che:

Sia  $f(x) \in C^0([a, b])$ , con  $[a, b]$  limitato e chiuso e sia  $p_{2n+1}(x)$  il polinomio di grado  $2n + 1$  tale che:

- $p_{2n+1}(x_i) = f(x_i)$
- $p'_{2n+1}(x_i) = 0$

Si ha che gli zeri del polinomio di Chebichev sull'intervallo tendono a zero per infiniti nodi.

# Interpolazione - Splines

## 13

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} & x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0 & x \notin [x_{n-1}, x_n] \end{cases} \quad (5.5)$$

Le funzioni  $\varphi_i(x)$  prendono il nome di funzioni **spline** di grado 1, e verificano le seguenti condizioni:

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases} \quad (5.6)$$

Sono linearmente indipendenti sull'intervallo  $[a, b]$  (facendo la combinazione lineare e uguagliandola a zero, i coefficienti sono tutti zero), sono base canonica.

Gli errori sui dati si riducono quando ci si allontana dal punto usato come intervallo locale della spline

## 5.4 Stima dell'errore

Siano  $y_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$  dove  $f(x)$  è definita nell'intervallo  $[a, b]$ .  $S_1(x)$  è la spline lineare che interpola la funzione, l'errore è dato da:

$$r(x) = f(x) - S_1(x) \quad \forall x \neq x_i \quad (5.7)$$

Indico con  $h_i$  l'ampiezza dell'intervallo dove voglio calcolare il punto.

Se  $f(x) \in C^2[a, b]$  allora posso scrivere:

$$|f(x) - S_1(x)| = \frac{|f''(\epsilon_x)|}{2} |(x - x_{i-1})(x - x_i)| \quad (5.8)$$

Quindi per una funzione  $f(x) \in C^2[a, b]$  dopo vari passaggi tediosi posso scrivere:

$$|f(x) - S_1(x)| \leq \max_{x \in [x_0, x_n]} \frac{|f''(\epsilon_x)|}{8} |h_2| \quad (5.9)$$

Dove  $h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$  è la norma della decomposizione.

Con  $h$  che tende a zero, l'errore tende a zero e aumentano i polinomi per descrivere l'intervallo.

## 5.5 Polinomio di Hermite generalizzato

Vogliamo costruire un polinomio definito a tratti che in ogni intervallo coincide con la restrizione di un polinomio di grado minore o uguale a 3, soddisfacendo le seguenti condizioni:

$$p(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (5.10)$$

$$p'(x_i) = y'_i \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (5.11)$$

Considerando la seguente forma del polinomio:

$$p_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^2(x - x_i) \quad (5.12)$$

Dove la sua derivata è definita:

$$p'_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2 \quad (5.13)$$

Per determinare i coefficienti imponiamo le 4 condizioni dettate da  $h_i = x_i - x_{i-1}$ :

1.  $p_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$  da cui ottengo  $a_i = y_{i-1}$
2.  $p'_i(x_{i-1}) = y'_{i-1}$  da cui ottengo  $b_i = y'_{i-1}$
3.  $p_i(x_i) = y_i = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2$  da cui ottengo  $c_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i^2} - \frac{y'_{i-1}}{h_i}$

4.  $p'_i(x_i) = y'_i$  da cui ottengo  $d_i = \frac{y'_i - y'_{i-1} - 2c_i h_i}{h_i^2}$

Sostituendo  $c_i$  si ottiene l'espressione di  $d_i$ :

$$d_i = \frac{y'_i + y'_{i-1}}{h_i^2} - 2 \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i^3} \quad (5.14)$$

Il polinomio 5.12 prende il nome di polinomio di **Hermite generalizzato**.

## 5.6 Spline Interpolante

### 5.6.1 Definizione di spline interpolante

Sia  $\Delta = \{a = x_0 < \dots < x_i = b\}$  una decomposizione dell'intervallo  $[a, b]$ . Una funzione spline di grado  $m$  con nodi  $x_i$  e' una funzione  $S_m(x)$  in  $[a, b]$  tale che su ogni sottointervallo  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $S_m(x)$  e' un polinomio di grado  $m$  ed e' derivabile  $m - 1$  volte:

$$S_m(x) \in C^{m-1}([a, b]) \quad (5.15)$$

### 5.6.2 Spline cubiche

Avendo un intervallo  $[a, b]$  con decomposizione  $\Delta$ , assegnanti arbitrariamente i valori delle  $y$ , si dice spline cubica interpolante relativa alla decomposizione  $\Delta$  la funzione  $S_{3,\Delta}(x)$  tale che:

1. La spline cubica  $S_{3,\Delta}(x)$  e' una funzione polinomiale definita a tratti e su ciascun tratto della decomposizione vale come un polinomio di terzo grado
2.  $S_{3,\Delta}(x) \in C^2([a, b])$
3.  $S_{3,\Delta}(x_i) = y_i$

La spline cubica si scrive:

[illegible]

I gradi di libert  delle incognite sono  $4n$  (coefficienti della spline). I vincoli sono  $3(n-1)$  per la regolarit   $C^2([x_0, x_n])$  e  $n+1$  vincoli per l'interpolazione fra gli  $n+1$  nodi.

I vincoli si sommano in  $4n - 2$  che ci permette di costruire  $\infty^2$  spline cubiche interpolanti.

### 5.6.3 Momenti della spline

Per ridurre la complessita' del calcolo della spline, si usano i **Momenti** della spline:

$$M_i := [S''_{3,\Delta} x]_{x=x_i} \quad (5.17)$$

Se fossero noti momenti  $M_{i-1}$  e  $M_i$  potrei scrivere:

$$[S_{3,\Delta}^i]'' = \frac{(x - x_{i-1}M_i + (x_i - x)M_{i-1})}{h_i} \quad (5.18)$$

Integrando due volte la funzione si ottiene:

$$S_{3,\Delta}^i(x) = \frac{M_i}{6h_i}(x - x_{i-1})^3 + \frac{M_{i-1}}{6h_i}(x_i - x)^3 + A_i(x - x_{i-1}) + B_i \quad (5.19)$$

Dove  $A_i$  e  $B_i$  sono costanti da determinare introdotte dalla doppia integrazione nell'intervallo  $[x_{i-1}, x_i]$ :

1. in  $x_{i-1}$  si ottiene  $y_{i-1} = S_{3,\Delta}^i(x_{i-1}) \Rightarrow B_i = y_{i-1} - \frac{h_i^2 M_{i-1}}{6}$
2. in  $x_i$  si ottiene  $y_i = S_{3,\Delta}^i(x_i) \Rightarrow A_i = \frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i M_i}{6} - \frac{B_i}{h_i}$



Sostituendo  $A_i$  e  $B_i$  si ottiene la spline cubica nell'intervallo  $[x_{i-1}, x_i]$  in funzione dei momenti  $M_{i-1}$  e  $M_i$ :

$$S_{3,\Delta}^i(x) = \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i}M_i + \frac{(x_i - x)^3}{6h_i}M_{i-1} + (x - x_{i-1})\left[\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \frac{h_i}{6}(M_{i-1} - M_i)\right] + y_{i-1} - h_i^2\frac{M_{i-1}}{6} \quad (5.20)$$

La derivata prima della spline e':

$$[S_{3,\Delta}^i(x)]' = \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i}M_i - \frac{(x_i - x)^2}{2h_i}M_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \frac{h_i}{6}(M_{i-1} - M_i) \quad (5.21)$$

La derivata seconda e':

$$[S_{3,\Delta}^i(x)]'' = \frac{(x - x_{i-1})}{h_i}M_i + \frac{(x_i - x)}{h_i}M_{i-1} \quad (5.22)$$

La derivata terza e':

$$[S_{3,\Delta}^i(x)]''' = \frac{1}{h_i}(M_i + M_{i-1}) \quad (5.23)$$

### Calcolare i coefficienti della spline partendo da i momenti

- $a_0^i = y_{i-1}$
- $a_1^i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(2M_{i-1} + M_i)$
- $a_2^i = \frac{M_{i-1}}{2}$
- $a_3^i = \frac{M_i - M_{i-1}}{6h_i}$

### Calcolo dei momenti

Prendo due intervalli contigui e impongo la derivabilita' prima nel nodo in comune:

$$[S_{3,\Delta}^i(x)]'_{x=x_i} = [S_{3,\Delta}^{i+1}(x)]'_{x=x_i}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (5.24)$$

Facendo riferimento alla derivata prima della spline (5.21), pongo le seguenti variabili per comodita' a:

$$\alpha_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} \quad (5.25)$$

$$\beta_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \quad (5.26)$$

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right) \quad (5.27)$$

Posso riscrivere la spline come:

$$\alpha_i M_{i-1} + 2M_i + \beta_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (5.28)$$

Scrivo due righe di esempi perche' il valore della  $i$  ed il suo indice rendono tutto sbatti:

$$i = 1 \quad \alpha_1 M_0 + 2M_1 + \beta_1 M_2 = d_1$$

$$i = 2 \quad \alpha_2 M_1 + 2M_2 + \beta_2 M_3 = d_2$$

Possiamo cosi' costruire la matrice:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 2 & \beta_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 2 & \beta_2 & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{n-1} & 2 & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \cdots \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdots \\ d_{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

## 5.7 Spline cubica naturale

Una spline cubica e' naturale se:

- $M_0 = 0$
- $M_n = 0$

Che ci porta ad avere:

$$\begin{bmatrix} 2 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & 2 & \beta_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Otengo cosi' una matrice triangolare con le seguenti proprieta':

- $\alpha_i + \beta_i = 1$
- $i = 2, \dots, n-2$
- $0 < \beta_1 \leq 1$
- $0 < \alpha_{n-1} \leq 1$

Quindi stiamo parlando di una matrice diagonal dominante che ci permette di identificare la matrice come **non singolare**.

Quindi possiamo risolvere il sistema, determinando i momenti e successivamente i coefficienti della spline:

- $a_0^i = y_{i-1}$
- $a_1^i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6} (2M_{i-1} + M_i)$
- $a_2^i = \frac{M_{i-1}}{2}$
- $a_3^i = \frac{M_i - M_{i-1}}{6h_i}$

## 5.8 Spline cubica vincolata

Le condizioni per questa famiglia di spline sono:

- $[S_{s,\Delta}(x)]'_{x=x_0} = y'_0$
- $[S_{s,\Delta}(x)]'_{x=x_n} = y'_n$

Quindi si parte dalla formula della derivata prima della spline(5.21) e la si equaglia a  $y'_0$ .

L'equazione ottenuta e':

$$2M_0 + M_1 = d_0 \quad (5.31)$$

Dove  $d_0$ :

$$d_0 = \frac{6}{h_1} \left( \frac{y_1 - y_0}{h_1} - y'_0 \right) \quad (5.32)$$

E con il secondo vincolo si ottiene:

$$M_{n-1} + 2M_n = d_n \quad (5.33)$$

Dove  $d_n$ :

$$d_n = \frac{6}{h_n} \left( y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \right) \quad (5.34)$$

Se volessimo calcolare la matrice in questo caso otterremmo una matrice triangolare, diagoal dominante e irriducibile.

# Capitolo 6

## Interpolazione

### 6.1 Curve di Bézier

Siano i punti  $P_i(x_i, y_i)$  con  $i = 0, \dots, n$ ,  $n+1$  punti di un sistema di coordinate cartesiane per  $R^2$  chiamati punti di controllo.

Genero una curva parametrica polinomiale che rappresenti ogni punto con:

$$Q_n(t) = \sum_{i=0}^n P_i f_i(t) \quad t \in [0, 1] \quad (6.1)$$

Dove  $f$  sono funzioni polinomiali scelte in modo che la curva:

- $Q_n(0) = P_0$
- $Q_n(1) = P_1$
- La tangente in  $P_0$  sia parallela a  $P_1 - P_0$  (parallela al segmento che unisce  $p_1$  e  $p_0$ )
- Le funzioni  $f_i(t)$  siano simmetriche rispetto a  $t$  e  $1 - t$

Queste funzioni sono prese per vere se usiamo il polinomio di Bernstein:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n \quad (6.2)$$

Dove:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (6.3)$$

#### 6.1.1 Curve di Bazier razionali

Dati  $n+1$  punti di controllo  $P_i$ , la curva di Bazier razionale è data da:

$$C_n(t) = \frac{\sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i w_i}{\sum_{i=0}^n B_i^n(t) w_i} = \frac{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i w_i}{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} w_i} \quad (6.4)$$

Dove  $w_i$  sono dei pesi (costanti positive), il numeratore è una curva di bazier pesata in forma di Bernstein, mentre il denominatore è una somma pesata di polinomi di Bernstein.

### 6.2 Interpolazione di funzioni in più variabili

Per fare l'interpolazione in più variabili si procede come se si dovesse fare l'interpolazione in mono variabile, avendo una funzione  $f(x, y)$  definita in un rettangolo:

$$R := \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \quad (6.5)$$

Creo le due decomposizioni  $\Delta_x$  e  $\Delta_y$  dove:

$$\Delta_x = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

$$\Delta_y = \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d\}$$

Posso costruire i due polinomi lagrangiani per  $x$  e  $y$  e poi "assemblarli" in:

$$p_{n,m}(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) = L_{i,j}(x, y) = L_i(x)L_j(y) \quad (6.6)$$

Sapendo che i polinomi lagrangiani sono uguali a 0 quando:

$$L_{i,j}(x_k, y_l) = 0 \quad \text{per} \quad k \neq i \quad \text{o} \quad l \neq j$$

Il polinomio interpolatore diventa:

$$p_{n,m}(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f(x_i, y_j) L_i(x) L_j(y) \quad (6.7)$$

Questo metodo di scomporre le interpolazioni multiple in singole e riassemblarle alla fine si può applicare sia al polinomio di Newton che alle splines.

# Capitolo 7

## Integrazione

### 7.1 Esempi di problemi

Il significato degli integrali definiti dipende dal contesto applicativo di cui fanno parte.

#### 7.1.1 Spazio percorso in moto rettilineo

Lo spazio percorso con velocità costante  $v$  in un tempo  $t = b - a$  è dato da:

$$s = v(b - a)$$

Nel caso la velocità non fosse costante ma variasse nel tempo con una funzione:

$$v = f(t)$$

Bisognerebbe:

1. dividere l'intervallo in  $n$  parti uguali
2. l'ampiezza dell'intervallo sarebbe  $h = (b - a)/n$
3. il tempo di ogni intervallo sarebbe  $t_i = a + ih$  dove  $i = 0, 1, \dots, n$
4. si approssima la velocità dell'intervallo alla velocità iniziale dello stesso
5. Lo spazio finale percorso dal mobile risulta  $\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)h$

Si ottiene così:

$$s = \int_a^b f(t)dt$$

Questa è una lunghezza.

#### 7.1.2 Lavoro compiuto da una forza

Avendo una forza con intensità variabile applicata ad un punto che si sposta posso ricavare come prima:

$$L = \int_a^b f(x)dx$$

Questo è un lavoro.

#### 7.1.3 Valore medio di una funzione

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

## 7.2 Quadratura interpolatoria dei trapezi

$$T_N(f) = \frac{b-a}{2N} [f(a) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(b)] \quad (7.1)$$

Si può fare quando una funzione reale è definita su un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$ .  
Quando si approssima l'integrale  $I(f)$  con i trapezi  $T_N(f)$  l'errore è dato da:

$$r(T_n) = I(f) - T_N(f) = \sum_{i=0}^{N-1} r_i \quad (7.2)$$

Dove  $r_i$  è il resto per l'iesimo intervallo.

### 7.2.1 Teoremi integrazione

#### Teorema 1

se  $f : [a, b] \Rightarrow \mathbb{R}$  è continua (integrabile) allora esiste un punto  $c \in [a, b]$  tale che:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c)$$

#### Teorema 2

Se nell'integrale  $\int_a^b f(x)g(x)dx$  una delle due funzioni, suppongo  $g(x)$ , è di segno costante su tutto l'intervallo allora esiste un punto  $c \in [a, b]$  tale che:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$$

### 7.2.2 Resto

Posso usare la teoria degli integrali di prima per poter riscrivere il resto come:

$$r_i = -\frac{h^3}{12} f''(c_i) \quad (7.3)$$

Dove  $c$  è un punto opportuno nell'intervallo  $x_i, x_{i+1}$ , posso applicare questa relazione su tutti gli intervalli e ottengo il resto totale della quadratura come:

$$r(T_N) = \sum_{i=0}^{N-1} r_i = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=0}^{N-1} f''(c_i) = -\frac{h^3}{12} N f''_M \quad (7.4)$$

Dove  $f''_M$  è la media degli  $N$  valori  $f''(c_i)$ .

Esiste un punto  $\varepsilon \in (a, b)$  tale che  $f''(\varepsilon) = f''_M$ .

Si ottiene l'espressione del resto della formula dei trapezi:

$$r(T_N) = -\frac{1}{12} \left(\frac{b-a}{N}\right)^3 N f''(\varepsilon) = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\varepsilon) \quad (7.5)$$

Oppure posso scrivere:

$$r(T_N) = -\frac{1}{12} \frac{(b-a)^3}{N^2} f''(\varepsilon) = -\frac{h^2}{12} (b-a) f''(\varepsilon), \quad h = \frac{b-a}{N} \quad (7.6)$$

## 7.3 Alcuni richiami

### 7.3.1 Teorema 1

Se ho due funzioni continue nell'intervallo  $[a, b]$  allora:

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx$$

### 7.3.2 Teorema 2

Se una funzione  $e'$  continua in  $[a, b]$  allora:

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

### 7.3.3 Corollario

Se una funzione  $e'$  continua in  $[a, b]$ , si ha:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Dove  $m$   $e'$  il valore piu' piccolo presente nell'intervallo  $[a, b]$ , mentre  $M$   $e'$  il massimo valore dell'intervallo. Inoltre esiste  $c \in [a, b]$  tale che:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Usando il teorema 1, si puo' scrivere  $m \leq \mu \leq M$  dove :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \mu$$

Che significa che avendo la funzione  $f$  continua nell'intervallo, assume tutti i valori compresi tra minimoi e massimo.

Per il secondo teorema della media integrale si sfrutta il teorema di Weierstrass, Sia  $[a, b] \subset R$  un intervallo chiuso e limitato non vuoto e sia  $f$  uan funzione continua che va da  $[a, b] \Rightarrow R$ .

Allora  $f(x)$  ammette almeno un punto di massimo assoluto e un punto di minimo assoluto nell'intervallo  $[a, b]$ .

# Capitolo 8

## Integrazione

### 8.1 Quadratura di Cavalieri-Simpson

Voglio approssimare l'integrale  $f$  continuo nell'intervallo  $[a, b]$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

1. Decompongo l'intervallo in  $n = 2$  sotto intervalli di ampiezza  $h = \frac{b-a}{2}$
2. Approssimo la funzione integranda  $f(x)$  con un polinomio  $p_2(x)$  costruito interpolando  $f(x)$  negli estremi dell'intervallo

Le  $x$  e le  $f(x)$  degli intervalli risultano:

- $(a, f(a))$
- $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$
- $(b, f(b))$

Dai quali posso costruire il polinomio:

$$p_2(x) = f(a)L_0(x) + f(\frac{a+b}{2})L_1(x) + f(b)L_2(x)$$

Dove:

$$L_0(x) = \frac{(x - \frac{a+b}{2})(x - b)}{(a - \frac{a+b}{2})(a - b)}$$
$$L_1(x) = \frac{(x - a)(x - b)}{(\frac{a+b}{2} - a)(\frac{a+b}{2} - b)}$$
$$L_2(x) = \frac{(x - a)(x - \frac{a+b}{2})}{(b - a)(b - \frac{a+b}{2})}$$

Per comodità cambio  $a, \frac{a+b}{2}$  e  $b$  con  $x_0, x_1, x_2$ .

Riprendo l'integrale iniziale e scambio la funzione con quello ottenuto:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^2 f(x_i)L_i(x)dx = \sum_{i=0}^2 w_i^{(2)}f(x_i) \quad (8.1)$$

Dove:

$$w_i^{(2)} = \int_{x_0}^{x_2} L_i(x)dx \quad (8.2)$$

I punti  $x_i$  e le costanti  $w_i^{(2)}$  sono i **nod**i e **pesi** della formula di quadratura interpolatoria.

I pesi sono:

- $w_0^{(2)} = \frac{h}{3}$
- $w_1^{(2)} = \frac{4h}{3}$



- $w_2^{(2)} = \frac{h}{3}$

Le costanti applicate alle  $h$  sono:

- $\alpha_0 = 1/3$
- $\alpha_1 = 4/3$
- $\alpha_2 = 1/3$

Queste costanti vengono chiamate costanti di Newton-Cotes, non dipendono dalla funzione integranda e dall'intervallo di integrazione.

Da notare che sommando le  $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 2 = n$ . Si nota inoltre che  $\alpha_0 = \alpha_2$  e che possiamo calcolare  $\alpha_1 = 2 - (\alpha_0 + \alpha_2)$  e che quindi basta sapere solo una  $\alpha$ .

### 8.1.1 Approssimazione integrale con formula di Cavalieri-Simpson

La formula finale e':

$$\int_a^b f(x)dx \approx w_0^{(2)} f(a) + w_1^{(2)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + w_2^{(2)} f(b) = \frac{h}{3} f(a) + \frac{4h}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{h}{3} f(b) \quad (8.3)$$

Andando avanti si ottiene:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)] \quad (8.4)$$

Essendo un'approssimazione e' chiaro che devo avere un resto da qualche parte...

### 8.1.2 Resto di Cavalieri-Simpson

Il resto e' dato da:

$$\int_a^b [f(x) - p_2(x)]dx = \int_a^b [(x-a)(x-\frac{a+b}{2})(x-b)] \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!} dx \quad (8.5)$$

Si puo' dimostrare che se la funzione da integrare  $\in C_4([a, b])$  il resto della formula di Cavalieri-Simpson e':

$$r(CS_N) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \quad (8.6)$$

Dove la  $h$  e':

$$h = \frac{b-a}{2} \quad (8.7)$$

## 8.2 Formula di Cavalieri-Simpson composita

Usando  $N$  sotto intervalli di suddivisione di  $[a, b]$  con  $N$  pari ( $N = 2, 2^2, \dots$ ) l'errore decresce come  $N^{-4}$ .

Per esempio:

$$\frac{|R_N|}{|R_{2N}|} \approx \frac{1 : (N)^4}{1 : (2N)^4} = 16 \quad (8.8)$$

Quindi raddoppiando gli intervalli il rapporto fra gli errori massimo e' 16.

## 8.3 Considerazioni sull'integrazione

- La formula dei trapezi ha grado di precisione 1 (integra esattamente tutti i polinomi di grado minore o uguale a 1)
- la formula di cavalieri-Simpson ha grado di precisione 3 (integra esattamente tutti i polinomi di grado minore o uguale a 3)