Matematica Applicata

Ollari Dmitri

2 agosto 2023

Indice

Capitolo 1

Polinomi interpolatori

1.1 Teorema

Se (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$ sono $n + 1$ punti distinti, allora esiste un unico polinomio $p_n(x)$ di grado $\leq n$ tale che $p_n(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$.

Capitolo 2

Polinomio interpolatore di Lagrange

Il polinomio interpolatore di Lagrange si presenta nella forma:

$$L_i = \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \tag{2.1}$$

Invece il polinomio interpolatore costruito grazie ai polnomi di Lagrange è:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x) \tag{2.2}$$

La caratteristica del polinomio di Lagrange è che:

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \tag{2.3}$$

Il polinomio interpolatore di Lagrange si può riscrivere come:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x) && (2.4) \\ &= \omega_n(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{\beta_i}{x - x_i} && (2.5) \end{aligned}$$

Dove $\omega_n(x)$ è:

$$\omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{2.6}$$

mentre β_i è:

$$\beta_i = \frac{y_i}{\prod_{i=0, i\neq j}^{n} (x_j - x_i)} \tag{2.7}$$

Le operazioni necesarie per il calcolo del polinomio interpolatore di Lagrange sono:

- $n^2/2$ addizioni
- n^2 moltiplicazioni

Per il calcolo del resto si ricorre alal formula:

$$\begin{aligned} r(x) &= f(x) - p_n(x) && (2.8) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_n(x) && (2.9) \end{aligned}$$