Matematica applicata

Un goliardico riassunto

Ollari Dmitri

12 aprile 2023

Indice

Elenco delle figure

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Argomenti del corso

- Approssimazione di dati e funzioni:
  - interpolazione polinomiale
  - matrice di vandermonde
  - interpolazione di Lagrange
  - interpolazione di Hermite
  - definizione di differenza divisa
  - interpolazione (alla Newton) alle differenze divise
  - convergenza
  - controesempio di Runge su nodi equispaziati
  - rappresentazione dell'errore
  - funzioni a tratti splines
  - interpolazione con funzioni splines
  - metodo dei minimi quadrati
  - Cenno curve di Bézier
  - cenno interpolazione in più dimensioni
- Integrazione numerica
  - formula quadratica di interpolazione
  - formule di Newton-Cotes
  - studio dell'errore e delal convergenza
  - routines automatiche
  - uso di formule per integrali in più dimensioni
- Sistemi lineari
  - motodi diretti
  - sistemi a matrice triangolare
  - metodo di eliminazione di Gauss
  - pivoting
  - decomposizione di Gauss e fattorizzazione a LU
  - metrice inversa
  - raffinamento iterativo
  - sistemi complessi
  - Cenni a metodi iterativi di jacobi e di Gauss-Seidel
  - studio della convergenza dei metodi iterativi e criteri di arresto

- Equazioni non lineari
  - radici reali
  - metodo di Newton-Raphson
- Matlab
- Prerequisiti
  - operazioni tra matrici
  - matrici non singolari
  - determinante
  - cramer
  - regola di Laplace
  - matrice inversa
  - concetto ddi norma
  - norma di un vettore e di una matrice
  - lineare dioendenza e indipendenza

1.2 Modalità d'esame

Prova scritta su esercizi e prova orale di 1 ora :(

Capitolo 2

Interpolazione

Avendo alcuni punti, si considerano i seguenti problemi:

- Ricostruire una traiettoria passanti per i punti assegnati
- approssimare una funzione complessa nota in alcuni punti una più semplice come un polinomio
- calcolare il valore di un integrale definito di una funzione di cui non conosciamo facilmente ina primitiva ad esempio approssimandola con un polinomio

2.1 Teorema

Se (x_i, y_i) con $i = 0, \dots, n$, sono $n+1$ punti tali che $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, esiste ed è unico il polinomio $p_n(x)$ di grado al più n tale che:

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n \tag{2.1}$$

2.2 Dimostrazione

Consideriamo il generico polinomio di grado n:

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \tag{2.2}$$

ed imponiamo le $n+1$ condizioni (vincoli)

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \tag{2.3}$$

I parametri (coefficienti) incogniti $a_0, a_1, \dots, a_n$ sono soluzione del sistema lienare 2.3 di ordine $n+1$, in forma matriciale si può scrivere come:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ . & .. & \cdots & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ .. \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ .. \\ y_n \end{pmatrix}, \quad Va = y \tag{2.4}$$

La matrice V è detta **matrice di Vandermonde**, essa risulta **non singolare** se e soltanto se **il vettore nullo** 0 **è la sola soluzione** del sistema omogeneo.

$$Va = 0 \tag{2.5}$$

Quindi se il vettore $a = [a_0, a_!, \dots, a_n] \neq 0$ possiamo costruire il polinomio di grado n:

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \tag{2.6}$$

Questo polinomio soddisfa anche la condizione:

$$p_n(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n \tag{2.7}$$

Cioè il polinomio $p_n(x)$ di grado n avrebbe $n+1$ zeri (asurdo, vedi teorema fondamentae dell'algebra), di conseguenza **il vettore a deve essere il vettore nullo e quindi la matrice V è non singolare.**

In alternativa si può verificare che la matrice V è non singolare mediante il determinante, che se non nullo, il sistema ha una e una sola soluzione, quindi il polinomio $p_n(x)$ esiste ed è unico.

2.3 Costruzione polinomio interpoaltore

Per ottenere una base che riduca il numero di calcoli cerco una matrice $V \equiv I$.

Parto con il costruire i polinomi Lagranciani:

$$L_0(x_i) = \delta_{0,i} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = 0 \\ 0 & \text{se} \quad i \neq 0 \end{cases} \quad i = 0, 1, 2 \tag{2.8}$$

$$L_1(x_i) = \delta_{1,i} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = 1 \\ 0 & \text{se} \quad i \neq 1 \end{cases} \quad i = 0, 1, 2 \tag{2.9}$$

$$L_2(x_i) = \delta_{2,i} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = 2 \\ 0 & \text{se} \quad i \neq 2 \end{cases} \quad i = 0, 1, 2 \tag{2.10}$$

$L_0(x)$ si deve annullare in x_1 e x_2, quindi:

$$L_0(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \tag{2.11}$$

Con a_0 costante arbitraria non nulla e imponendo che $L_0(x_0) = 1$ ottengo:

$$L_0(x_0) = a_0(x - x_1)(x - x_2) = 1 \quad \rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} \tag{2.12}$$

Ripetende lo stesso procedimento per $L_1(x)$ e $L_2(x)$ ottengo:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, \quad L_0(x_0) = 1, L_0(x_1) = 0, L_0(x_2) = 0 \tag{2.13}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \quad L_1(x_0) = 0, L_1(x_1) = 1, L_1(x_2) = 0 \tag{2.14}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}, \quad L_2(x_0) = 0, L_2(x_1) = 0, L_2(x_2) = 1 \tag{2.15}$$

Ciascun polinomio è di secondo grado, inoltre i polinomi $L_0(x)$, $L_1(x)$ e $L_1(x)$ sono lineramente indipendenti.

Quindi posso esprimere un generico polinomio di secondo grado come combinazione dei tre nuovi polinomi costruiti:

$$p_2(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + a_2 L_2(x) \quad a_0, a_1, a_2 \in R \tag{2.16}$$

Assegnati tre valori di y possiamo costruire il polinomio interpolatore $p_2(x)$ usando la nuova base Langrangiana:

$$\begin{cases} a_0 L_0(x_0) + a_1 L_1(x_0) + a_2 L_2(x_0) = y_0 \\ a_0 L_0(x_1) + a_1 L_1(x_1) + a_2 L_2(x_1) = y_1 \\ a_0 L_0(x_2) + a_1 L_1(x_2) + a_2 L_2(x_2) = y_2 \end{cases} \tag{2.17}$$

Mediante il polinomio interpolatore posso scrivere i punti (x_0, y_0), (x_1, y_1) e (x_2, y_2) come:

$$p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) \tag{2.18}$$

Capitolo 3

Interpolazione - Laplace

Siano $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ **punti distinti** e siano $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$ polinomi di grado n tali che:

$$L_j(x_i) = \delta_{j,i} = \begin{cases} 1 & se \quad i = j \\ 0 & se \quad i \neq j \end{cases} \qquad i = 0, 1, \ldots, n \tag{3.1}$$

Dove:

$$L_n(x) = \prod_{k=n, k\neq n}^{n} \frac{x - x_k}{x_n - x_k} \tag{3.2}$$

Trovare la funzione interpolatrice dati i seguenti voncoli

$$\begin{array}{ccc} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ y'_0 & & \end{array}$$

Quinsi devo usare costruire il sistema:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 = y_0 \\ a_1 + 2a_2 x_0^1 + 3a_3 x_0^2 = y'_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 = y_2 \end{cases} \tag{3.3}$$

E poi da qui posso risolvere il sistema.

3.1 Polinomio di Newton

Si chiama differenza divisa di ordine k della funzione $f(x)$ relativa ai punti $x_0, \ldots, x_{k-1}$ la funzione $f[x_0, \ldots, x_{k-1}, x]$ defiinita per $x \neq x_i$ con $i = 0, \ldots, k-1$ ricorsivamente come:

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & f(x_0) & & & & \\
 & & f[x_0, x_1] & & & \\
x_1 & f(x_1) & & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
 & & f[x_1, x_2] & & f[x_0, x_1, x_2, x_3] & \\
x_2 & f(x_2) & & f[x_1, x_2, x_3] & & f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \\
 & & f[x_2, x_3] & & f[x_1, x_2, x_3, x_4] & \cdots \\
x_3 & f(x_3) & & f[x_2, x_3, x_4] & & \\
 & & f[x_3, x_4] & & \cdots & \\
x_4 & f(x_4) & & \cdots & & \\
\cdots & \cdots & & & &
\end{array}$$

Figura 3.1: Schema iterazione polinomio Newton

Per calcolare il polinomio finale di Newton si deve iterare come segue:
Se siamo nella prima colonna(dove ci sono gli x_n):

$$f[x] = f(x) \tag{3.4}$$

Se ci troviamo nella colonna 1(dove si trovano $f(x_n)$), prendo due x alla volta e eseguo:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0} \tag{3.5}$$

Se mi trovo nelle colonne dalla numero 2 in poi (andando verso destra):

$$f[x_0, \ldots, k_{k-2}, x_{k-1}, x] = \frac{f[x_1, \ldots, x_{k-1}, x] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k-1}]}{x - x_0} \tag{3.6}$$

Il polnomio ottenuto con Newton è al più di grado n, nel polinomio interpolatore di newton, i coefficienti $[x_0, \ldots, x_n]$ sono indipendenti da x.

3.1.1 Polinomio interpolatore lineare

$$p_1(x) = f[x_0] + (x - x_0)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{3.7}$$

3.1.2 Polinomio interpolatore quadratico

$$p_2(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \tag{3.8}$$

3.1.3 Algoritmo di Horner

Algoritmo ottimale per calcolare un polinomio in un punto:
Il polinomio:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \tag{3.9}$$

Si può riscrivere come:

$$p(x) = ((a_3 x + a_2)x + a_1)x + a_0 \tag{3.10}$$

3.1.4 Newton con derivate(Hermite)

Se i punti $f(x)$ appartengon all'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, non necessariamente distinti, esiste un punto ϵ compreso tra il minimo e il massimo tale che:

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f^{(k)}\epsilon}{k!} \tag{3.11}$$

Se si conoscono anche le derivate prime di $f(x)$ si può fare:

$$\begin{array}{lllll}
x_0 & f(x_0) & & & \\
x_0 & f(x_0) & f'(x_0) & & \\
x_1 & f(x_1) & f[x_0, x_1] & f[x_0, x_0, x_1] & \\
x_1 & f(x_1) & f'(x_1) & f[x_0, x_1, x_1] & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
x_n & f(x_n) & f[x_{n-1}, x_n] & & \\
x_n & f(x_n) & f'(x_n) & f[x_{n-1}, x_n, x_n] \cdots\cdots & f[x_0, x_0, x_1, x_1, \cdots, x_n, x_n]
\end{array}$$

Figura 3.2: Hermite

Esempio: Se nel punto x_0 ho tre vincoli:

- $f(x)$
- $f'(x)$
- $f''(x)$

Posso realizzare lo schema delle differenze divise come:
Il polinomio risulta cosi:

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_0](x - x_0)^2 \tag{3.12}$$

$$
\begin{array}{llll}
x_0 & y_0 & & \\
 & & f[x_0,x_0] = f'(x_0) & \\
x_0 & y_0 & & f[x_0,x_0,x_0] = \frac{f''(x_0)}{2!} \\
 & & f[x_0,x_0] = f'(x_0) & \\
x_0 & y_0 & &
\end{array}
$$

Figura 3.3: Esempio hermite

3.2 Interpolazione inversa

Se la funzione da interpolare $f(x)$ è:

- monotona in senso stretto in $[a, b]$

quindi è invertibile, la formula di interpolazione di Newton può essere usata per ottenere l'inversa.

Basta scambiare i punti x, y.

Esempio: Dati i seguenti punti:

x_i	0.2	0.4	0.6	0.8
$f(x_i)$	0.203	0.423	0.684	1.030

y_i	0.203	0.423	0.684	1.030
$x_i = f^{-1}(y_i)$	0.2	0.4	0.6	0.8

Capitolo 4

Interpolazione - Infiniti nodi interpolanti

Il teorema di Faber afferma che non tutti i nodi dell'intervallo converrgono uniformemente alla funzione che si cerca di approssiamare con infiniti nodi.

4.1 Nodi *quasi* Chebichev

$$x_k^n = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right) \quad k = 0, \ldots, n \tag{4.1}$$

Esempio 5 nodi

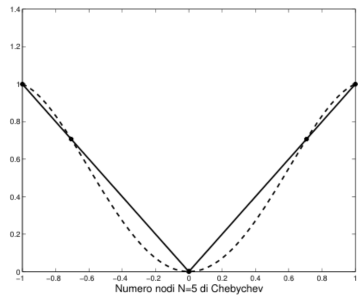

Figura 4.1: Chebichev con 5 nodi

Esempio 9 nodi

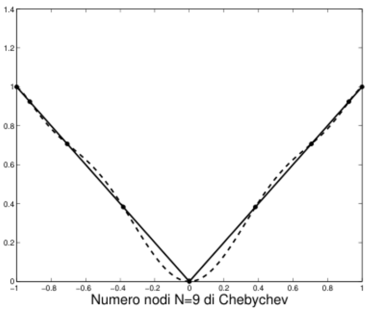

Figura 4.2: Chebichev con 9 nodi

Esempio 17 nodi

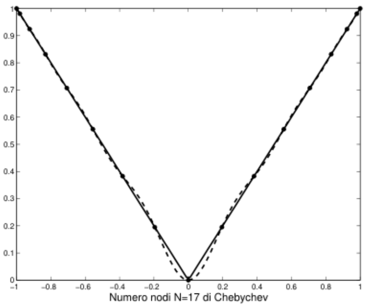

Figura 4.3: Chebichev con 17 nodi

4.2 Convergenza del polinomio di interpolazione

Il teorema di Bernstein dice che:

> Se $f(x) \in C^1([a,b])$, il polinomio $p_n(x)$ di interpolazione della funzione f relativo agli zeri del polinomio di Chebichev di grado $n+1$ converge uniformemente a $f(x)$ su $[a,b]$ per $n \to +\infty$.

Se la funzione $f \in c^2([a,b])$ si ha che la stima dell'errore è:

$$||f(x) - p_n(x)||_\infty = O(\frac{1}{\sqrt{n}}) \tag{4.2}$$

Se l'intervallo usato per il polinomio interpoaltore è $[0,1]$ e i nodi sono n:

$$B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad k = 0,\ldots,n \tag{4.3}$$

Dove:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{4.4}$$

Il teorema di Hermite-Fejer dice che:

Sia $f(x) \in C^0([a,b])$, con $[a,b]$ limitato e chiuso e sia $p_{2n+1}(x)$ il polinomio di grado $2n+1$ tale che:

- $p_{2n+1}(x_i) = f(x_i)$
- $p'_{2n+1}(x_i) = 0$

Si ha che gli zeri del polinomio di Chebichev sull'intervallo tendono a zero per infiniti nodi.

Capitolo 5

Interpolazione - Splines

5.1 Decomposizione

Sia $[a, b]$ un'intervallo chiuso e limitato, Δ è una sua decomposizione:

$$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = b\} \tag{5.1}$$

e siano dati i valori osservaati $y_0, \ldots, y_n$, vogliamo costruire una decomposizione su ciascun tratto $[x_{i-1}, x_1]$ della decomposizione Δ un polinomio lineare che interpoli i dati y_{i-1}, y_i.

$$S_1(x) = \begin{cases} S_1^{(1)}(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) & x_0 \leq x \leq x_1 \\ S_1^{(2)}(x) = y_1 + f[x_1, x_2](x - x_1) & x_1 \leq x \leq x_2 \\ S_1^{(3)}(x) = y_2 + f[x_2, x_3](x - x_2) & x_2 \leq x \leq x_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ S_1^{(n)}(x) = y_{n-1} + f[x_{n-1}, x_n](x - x_{n-1}) & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \tag{5.2}$$

Osservo che la continuità $S_1^{(i)} \in C^\infty([x_i, x_{i+1}])$ mache la continuità in $S_1(x) \in C^0[a, b]$.
Quindi si hanno tanti polinomi di primo grado definiti a tratti.

5.2 Ricerca binaria

Per calcolare $S_1(x)$ in un generico punto bisogna prima determinare in che sottointervallo cade il punto, il modo più comodo è fare una ricerca binaria.

```
x = [1:0.1:10]
xd = 3.17
n = length(x);
sinistra = 1;
destra = n;

while destra > sinistra + 1
  meta = floor((sinistra + destra) / 2);
  if xd < x(meta);
    destra = meta;
  else
    sinistra = meta;
  end
end
```

5.3 Splines

Siano $\varphi(x), i = 0, 1, \ldots, n$ le funzioni così definite:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & x \in [x_0, x_1] \\ 0 & x \notin [x_0, x_1] \end{cases} \tag{5.3}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases} \tag{5.4}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} & x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0 & x \notin [x_{n-1}, x_n] \end{cases} \tag{5.5}$$

Le funzioni $\varphi_i(x)$ prendono il nome di funzioni **spline** di grado 1, e verificano le seguenti condizioni:

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases} \tag{5.6}$$

Sono linearmente indipendenti sull'intervallo $[a, b]$(facendo la combinazione lineare e uguagliaandola a zero, i coefficenti sono tutti zero), sono base canonica.

Gli errori sui dati si riducono quando ci si allontana dal punto usato come intervallo locale della spline

5.4 Stima dell'errore

Siano $y_i = f(x_i), i = 0, 1, \ldots, n$ dove $f(x)$ è definita nell'intervallo $[a, b]$. $S_1(x)$ è la spline lineare che interpola la funzione, l'errore è dato da:

$$r(x) = f(x) - S_1(x) \quad \forall x \neq x_i \tag{5.7}$$

Indico con h_i l'ampiezza dell'intervallo dove voglio calcolare il punto.

Se $f(x) \in C^2[a, b]$ allora posso scrivere:

$$|f(x) - S_1(x)| = \frac{|f''(\epsilon_x)|}{2}|(x - x_{i-1})(x - x_i)| \tag{5.8}$$

Quindi per una funzione $f(x) \in C^2[a, b]$ dopo vari pasasggi tediosi posso scrivere:

$$|f(x) - S_1(x)| \leq \max_{x \in [x_0, x_n]} \frac{|f''(\epsilon_x)|}{8}|h_2 \tag{5.9}$$

Dove $h = max_{1 \leq i \leq n} h_i$ è la norma della decomposizione.

Con h che tende a zero, l'errore tente a zero e aumentano i polinomi per descrivere l'intervallo.

5.5 Polinomio di Hermite generalizzato

Vogliamo costruire un polinomio definito a tratti che in ogni intervallo coincide con la restrizione di un polinomio di grado minore o uguale a 3, soddisfacendo le seguenti condizioni:

$$p(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \ldots, n \tag{5.10}$$

$$p'(x_i) = y'_i \quad i = 0, 1, \ldots, n \tag{5.11}$$

Considerando la seguente forma del polinomio:

$$p_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^2(x - x_i) \tag{5.12}$$

Dove la sua derivata è definita:

$$p'_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2 \tag{5.13}$$

Per determinare i coefficienti imponiamo le 4 condizioni dettate da $h_i = x_i - x_{i-1}$:

1. $p_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$ da cui ottengo $a_i = y_{i-1}$
2. $p'_i(x_{i-1}) = y'_{i-1}$ da cui ottengo $b_i = y'_{i-1}$
3. $p_i(x_i) = y_i = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2$ da cui ottengo $c_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i^2} - \frac{y'_{i-1}}{h_i}$

4. $p_i'(x_i) = y_i'$ da cui ottengo $d_i = \frac{y_i' - y_{i-1}' - 2c_i h_i}{h_i^2}$

   Sostituendo $c_i$si ottiene l'espressione di d_i:

$$d_i = \frac{y_i' + y_{i-1}'}{h_i^2} - 2\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i^3} \tag{5.14}$$

   Il polinomio 5.12 prende il nome di polinomio di **Hermite generalizzato**.

5.6 Spline Interpolante

5.6.1 Definizione di spline interpolante

Sia $\Delta = \{a = x_0 < \cdots < x_i = b\}$ una decomposizione dell'intervallo $[a, b]$. Una funzione spliune di grado m con nodi x_i e' una funzione $S_m(x)$ in $[a, b]$ tale che su ogni sottointervallo $[x_{i-1}, x_i]$, $S_m(x)$ e' un polinomio di grado m ed e' derivabile $m - 1$ volte:

$$S_m(x) \in C^{m-1}([a, b]) \tag{5.15}$$

5.6.2 Spline cubiche

Avendo un'intervallo $[a, b]$ con decomposizione Δ, assegnanti arbitrariamente i valori delle y, si dice spline cubica interpolante relativa alla decomposizione Δ la funzione $S_{3,\Delta}(x)$ tale che:

1. La spline cubica $S_{3,\Delta}(x)$ e' una funzione polinomiale definita a tratti e su ciascun tratto della decomposizione vale come un polinomio di terzo grado

2. $S_{3,\Delta}(x) \in C^2([a, b])$

3. $S_{3,\Delta}(x_i) = y_i$

   La spline cubica si scrive:

$$S_{3,\Delta}(x) = \begin{cases} S^1_{3,\Delta}(x) = a^1_0 + a^1_1(x - x_0) + a^1_2(x - x_0)^2 + a^1_3(x - x_0)^3 & x_0 \le x \le x_1 \\ S^2_{3,\Delta}(x) = a^2_0 + a^2_1(x - x_1) + a^2_2(x - x_1)^2 + a^2_3(x - x_1)^3 & x_1 \le x \le x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ S^n_{3,\Delta}(x) = a^n_0 + a^n_1(x - x_{n-1}) + a^n_2(x - x_{n-1})^2 + a^n_3(x - x_{n-1})^3 & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases} \tag{5.16}$$

   I gradi di liberta' delle incognite sono $4n$(coefficienti della spline). I vincoli sono $3(n - 1)$ per la regolarita' $C^2([x_0, x_n])$ e $n + 1$ vincoli per l'interpolazione fra gli $n + 1$ nodi.
   I vincoli si sommano in $4n - 2$ che ci permette di cotruire ∞^2 spline cubiche interpolanti.

5.6.3 Momenti della spline

Per ridurre la complessita' del calcolo della spline, si usano i **Momenti** della spline:

$$M_i := [S''_{3,\Delta}x]_{x=x_i} \tag{5.17}$$

   Se fossero noti momenti M_{i-1} e M_i potrei scrivere:

$$[S^i_{3,\Delta}x]'' = \frac{(x - x_{i-1}M_i + (x_i - x)M_{i-1})}{h_i} \tag{5.18}$$

   Integrando due volte la funzione si ottiene:

$$S^i_{3,\Delta}(x) = \frac{M_i}{6h_i}(x - x_{i-1})^3 + \frac{M_{i-1}}{6h_i}(x_i - x)^3 + A_i(x - x_{i-1}) + B_i \tag{5.19}$$

   Dove A_i e B_i sono costanti da determinare introdotte dalla doppia integrazione nell'intervallo $[x_{i-1}.x_i]$:

1. in x_{i-1} si ottiene $y_{i-1} = S^i_{3,\Delta}(x_{i-1}) \Rightarrow B_i = y_{i-1} - \frac{h_i^2 M_{i-1}}{6}$

2. in x_i si ottiene $y_i = S^i_{3,\Delta}(x_i) \Rightarrow A_i = \frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i M_i}{6} - \frac{B_i}{h_i}$

Sostituendo A_i e B_i si ottiene la spline cubica nell'intervallo $[x_{i-1,x_i}]$ in funzione dei momenti M_{i-1} e $M-i$:

$$S^i_{3,\Delta}(x) = \frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}M_i + \frac{(x_i-x)^3}{6h_i}M_{i-1} + (x-x_{i-1})[\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i} + \frac{h_i}{6}(M_{i-1}-M_i)] + y_{i-1} - h_i^2\frac{M_{i-1}}{6} \quad (5.20)$$

La derivata prima della spline e':

$$[S^i_{3,\Delta}(x)]' = \frac{(x-x_{i-1})^2}{2h_i}M_i - \frac{(x_i-x)^2}{2h_i}M_{i-1} + \frac{y_i-y_{i-1}}{h_i} + \frac{h_i}{6}(M_{i-1}-M_i) \quad (5.21)$$

La derivata seconda e':

$$[S^i_{3,\Delta}(x)]'' = \frac{(x-x_{i-1})}{h_i}M_i + \frac{(x_i-x)}{h_i}M_{i-1} \quad (5.22)$$

La derivata terza e':

$$[S^i_{3,\Delta}(x)]''' = \frac{1}{h_i}(M_i + M_{i-1}) \quad (5.23)$$

Clacolare i coefficienti della spline partendo da i momenti

- $a_0^i = y_{i-1}$
- $a_1^i = \frac{y_i-y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(2M_{i-1}+M_i)$
- $a_2^i = \frac{M_{i-1}}{2}$
- $a_3^i = \frac{M_i-M_{i-1}}{6h_i}$

Clacolo dei momenti

Prendo due intervalli contigui e impongo la derivabilita' prima nel nodeo in comune:

$$[S^i_{3,\Delta}(x)]'_{x=x_i} = [S^{i+1}_{3,\Delta}(x)]'_{x=x_i}, \quad i=1,\ldots,n-1 \quad (5.24)$$

Facendo riferimento alla derivata prima della spline (5.21), pongo le seguenti variabili per comodita' a:

$$\alpha_i = \frac{h_i}{h_i+h_{i+1}} \quad (5.25)$$

$$\beta_i = \frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}} \quad (5.26)$$

$$d_i = \frac{6}{h_i+h_{i+1}}(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}) \quad (5.27)$$

Posso riscrivere la spline come:

$$\alpha_i M_{i-1} + 2M_i + \beta_i M_{i+1} = d_i, \quad i=1,\ldots,n-1 \quad (5.28)$$

Scrivo due righe di esempi perche' il valore della i ed il suo indice rendono tutto sbatti:

$$i=1 \quad \alpha_1 M_0 + 2M_1 + \beta_1 M_2 = d_1$$

$$i=2 \quad \alpha_2 M_1 + 2M_2 + \beta_2 M_3 = d_2$$

Possiamo cosi' costruire la matrice:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 2 & \beta_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 2 & \beta_2 & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{n-1} & 2 & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \cdots \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdots \\ d_{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

5.7 Spline cubica naturale

Una spline cubica e' naturale se:

- $M_0 = 0$
- $M_n = 0$

Che ci porta ad avere:

$$\begin{bmatrix} 2 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & 2 & \beta_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ \cdots \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdots \\ d_{n-1} \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

Ottengo cosi' una matrice triangolare con le seguenti proprieta':

- $\alpha_i + \beta_i = 1$
- $i = 2, \ldots, n-2$
- $0 < \beta_1 \leq 1$
- $0 < \alpha_{n-1} \leq 1$

Quindi stiamo parlando di una matrice diagonal dominante che ci permette di identificare la matrice come **non singolare**.

Quindi possiamo risolvere il sistema, determinando i momenti e successivamente i coefficienti della spline:

- $a_0^i = y_{i-1}$
- $a_1^i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(2M_{i-1} + M_i)$
- $a_2^i = \frac{M_{i-1}}{2}$
- $a_3^i = \frac{M_i - M_{i-1}}{6h_i}$

5.8 Spline cubica vincolata

Le condizioni per questa famiglia di spline sono:

- $[S_{s,\Delta}(x)]'_{x=x_0} = y'_0$
- $[S_{s,\Delta}(x)]'_{x=x_n} = y'_n$

Quindi si parte dalla formula della derivata prima della spline(5.21) e la si equaglia a y'_0.

L'equazione ottenuta e':

$$2M_0 + M_1 = d_0 \tag{5.31}$$

Dove d_0:

$$d_0 = \frac{6}{h_1}(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y'_0) \tag{5.32}$$

E con il secondo vincolo si ottiene:

$$M_{n-1} + 2M_n = d_n \tag{5.33}$$

Dove d_n:

$$d_n = \frac{6}{h_n}(y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}) \tag{5.34}$$

Se volessimo calcolare la matrice in questo caso otterremmo una matrice triangolare, diagoal dominante e irriducibile.

Capitolo 6

Interpolazione

6.1 Curve di Bézier

Siano i punti $P_i(x_i, y_i)$ con $i = 0, \dots, n$, $n+1$ punti di un sistema di coordinate cartesiane per R^2 chiamati punti di controllo.

Genero una curva parametrica polinomiale che rappresenti ogni punto con:

$$Q_n(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i f_i(t) \quad t \in [0, 1] \tag{6.1}$$

Dove f sono funzioni polinomiali scelte in modo che la curva:

- $Q_n(0) = P_0$
- $Q_n(1) = P_1$
- La tangente in P_0 sia parallela a $P_1 - P_0$(parallela al segmento che unisce p1 e p0)
- Le funzioni $f_i(t)$ siano simmetriche rispetto a t e $1 - t$

Queste funzioni sono prese per vere se usaimo il polinomio di Bernstein:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n \tag{6.2}$$

Dove:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \tag{6.3}$$

6.1.1 Curve di Bazier razionali

Dati $n+1$ punti di controllo P_i, la curva di Bazier razionale è data da:

$$C_n(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i w_i}{\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) w_i} = \frac{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i w_i}{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} w_i} \tag{6.4}$$

Dove w_i sono sono dei pesi(costanti positive), il numeratore è una curva di bazier pesata in forma di Bernstein, mentre il denominatore è una somma pesata di polinomi di Bernstein.

6.2 Interpolazione di funzioni in più variabili

Per fare l'interpolazione in più variabili si procede come se si dovesse fare l'interpolazione in mono variabile, avendo una funzione $f(x, y)$ definita in un rettangolo:

$$R := \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \tag{6.5}$$

Creo le due decomposizioni Δ_x e Δ_y dove:

$$\Delta_x = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

$$\Delta_y = \{c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d\}$$

Posso costruire i due polinomi lagrangiani per x e y e poi "assemblarli" in:

$$p_{n,m}(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) = L_{i,j}(x, y) = L_i(x)L_j(y) \tag{6.6}$$

Sapendo che i polinomi lagrangiani sono uguali a 0 quando:

$$L_{i,j}(x_k, y_l) = 0 \quad \text{per} \quad k \neq i \quad \text{o} \quad l \neq j$$

Il polinomio interpolatore diventa:

$$p_{n,m}(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f(x_i, y_j) L_i(x) L_j(y) \tag{6.7}$$

Questo metodo di scomporre le interpolazioni multiple in singole e riassemblarle alal fine si può applicare sia al polinomio di Newton che alle splines.

Capitolo 7

Integrazione

7.1 Esempi di problemi

Il significato degli integrali definit dipende dal contesto applicativo di cui fanno parte.

7.1.1 Spazio percorso in moto rettilineo

Lo spazio percorso con velocità costante v in un tempo $t = b - a$ è dato da:

$$s = v(b - a)$$

Nel caso la velocità non fosse costante ma variasse nel tempo con una funzione:

$$v = f(t)$$

Bisognerebbe:

1. dividere l'intervallo in n parti uguali
2. l'ampiezza dell'intervallo sarebbe $h = (b - a)/n$
3. il tempo di ogni intervallo sarebbe $t_i = a + ih$ dove $i = 0, 1, \ldots, n$
4. si approssima la velocità dell'intervallo alla velocità iniziale dello stesso
5. Lo spazio finale percorso dal mobile risulta $\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)h$

Si ottiene così:

$$s = \int_a^b f(t)dt$$

Questa è una lunghezza.

7.1.2 Lavoro compiuto da una forza

Avendo una forza con intensità variabile applicata ad un punto che si sposta posso ricavare come prima:

$$L = \int_a^b f(x)dx$$

Questo è un lavoro.

7.1.3 Valore medio di una funzione

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

7.2 Quadratura interpolatoria dei trapezi

$$T_N(f) = \frac{b-a}{2N}[f(a) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(b)] \tag{7.1}$$

Si può fare quando una funzione reale è definita su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$.
Quando si approssima l'integrale $I(f)$ con i trapezi $T_N(f)$ l'errore è dato da:

$$r(T_n) = I(f) - T_N(f) = \sum_{i=0}^{N-1} r_i \tag{7.2}$$

Dove r_i è il resto per l'iesimo intervallo.

7.2.1 Teoremi integrazione

Teorema 1

se $f : [a, b] \Rightarrow R$ è continua(integrabile) allora esiste un punto $c \in [a, b]$ tale che:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

Teorema 2

Se nell'integrale $\int_a^b f(x)g(x)dx$ una delle due funzioni, suppongo $g(x)$, è di segno costante su tutto l'intervallo allora esiste un punto $c \in [a, b]$ tale che:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

7.2.2 Resto

Posso usare la teoria degli integrali di prima per poter riscrivere il resto come:

$$r_i = -\frac{h^3}{12}f''(c_i) \tag{7.3}$$

Dove c è un punto opportuno nell'intervallo $x_i, x_i + 1$, posso applicare questa relazione su tutti gli intervalli e ottengo il resto totale della quadratura come:

$$r(T_N) = \sum_{i=0}^{N-1} r_i = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{N-1} f''(c_i) = -\frac{h^3}{12}Nf''_M \tag{7.4}$$

Dove f''_M è la media degli N valori $f''(c_i)$.
Esiste un punto $\varepsilon \in (a, b)$ tale che $f''(\varepsilon) = f''_M$.
Si ottiene l'espressione del resto della formula dei trapezi:

$$r(T_N) = -\frac{1}{12}(\frac{b-a}{N})^3 Nf''(\varepsilon) = -\frac{(b-a)^3}{12N^2}f''(\varepsilon) \tag{7.5}$$

Oppure posso scrivere:

$$r(T_N) = -\frac{1}{12}\frac{(b-a)3}{N^2}f''(\varepsilon) = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\varepsilon), \quad h = \frac{b-a}{N} \tag{7.6}$$

7.3 Alcuni richiami

7.3.1 Teorema 1

Se ho due funzioni continue nell'intervallo $[a, b]$ allora:

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]dx = c_1\int_a^b f_1(x)dx + c_2\int_a^b f_2(x)dx$$

7.3.2 Teorema 2

Se una funzione e' continua in $[a, b]$ allora:

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

7.3.3 Corollario

Se una funzione e' continua in $[a, b]$, si ha:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Dove m e' il valore piu' piccolo presente nell'intervallo $[a, b]$, mentre M e' il massimo valore dell'intervallo. Inoltre esiste $c \in [a, b]$ tale che:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Usando il teorema 1, si puo' scrivere $m \leq \mu \leq M$ dove :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \mu$$

Che significa che avendo la funzione f continua nell'intervallo, assume tutti i valori compresi tra minimoi e massimo.

Per il secondo teorema della media integrale si sfrutta il teorema di Weierstrass, Sia $[a, b] \subset R$ un intervallo chiuso e limitato non vuoto e sia f uan funzione continua che va da $[a, b] \Rightarrow R$.

Allora $f(x)$ ammette almeno un punto di massimo assoluto e un punto di minimo assoluto nell'intervallo $[a, b]$.

Capitolo 8

Integrazione

8.1 Quadratura di Cavalieri-Simpson

Voglio approssiamre l'integrale f continuo nell'intervallo $[a, b]$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

1. Decompongo l'intervallo in $n = 2$ sotto intervalli di ampiezza $h = \frac{b-a}{2}$
2. Approssimo la funzione integranda $f(x)$ con un polinomio $p_2(x)$ costruito interpolando $f(x)$ negli estremi dell'intervallo

Le x e le $f(x)$ degli intervalli risultano:

- $(a, f(a))$
- $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$
- $(b, f(b))$

Dai quali posso costruire il polinomio:

$$p_2(x) = f(a)L_0(x) + f(\frac{a+b}{2})L_1(x) + f(b)L_2(x)$$

Dove:

$$L_0(x) = \frac{(x - \frac{a+b}{2})(x - b)}{(a - \frac{a+b}{2})(a - b)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - a)(x - b)}{(\frac{a+b}{2} - a)(\frac{a+b}{2} - b)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - a)(x - \frac{a+b}{2})}{(b - a)(b - \frac{a+b}{2})}$$

Per comodita' cambio a, $\frac{a+b}{2}$ e b con x_0, x_1, x_2.
Riprendo l'integrale iniziale e scambio la funzione con quello ottenuto:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{2} f(x_i)L_i(x)dx = \sum_{i=0}^{2} w_i^{(2)} f(x_i) \tag{8.1}$$

Dove:

$$w_i^{(2)} = \int_{x_0}^{x_2} L_i(x)dx \tag{8.2}$$

I punti x_i e le costanti $w_i^{(2)}$ sono i **nodi e pesi** della formula di quadratura interpolatoria.
I pesi sono:

- $w_0^{(2)} = \frac{h}{3}$
- $w_1^{(2)} = \frac{4h}{3}$

- $w_2^{(2)} = \frac{h}{3}$

Le costanti applicate alle h sono:

- $\alpha_0 = 1/3$
- $\alpha_1 = 4/3$
- $\alpha_2 = 1/3$

Queste costanti vengono chiamate costanti di Newton-Cotes, non dipendono dalla funzione integranda e dall'intervallo di integrazione.

Da notare che sommando le $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 2 = n$. Si nota inoltre che $\alpha_0 = \alpha_2$ e che possiamo calcolare $\alpha_1 = 2 - (\alpha_0 + \alpha_2)$ e che quindi basta sapere solo una α.

8.1.1 Approssimazione integrale con formula di Cavalieri-Simpson

La formula finale e':

$$\int_a^b f(x)dx \approx w_0^{(2)} f(a) + w_1^{(2)} f(\frac{a+b}{2}) + w_2^{(2)} f(b) = \frac{h}{3} f(a) + \frac{4h}{3}(\frac{a+b}{2}) + \frac{h}{3} f(b) \tag{8.3}$$

Andando avanti si ottiene:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)] \tag{8.4}$$

Essendo un'approssimazione e' chiaro che devo avere un resto da qualche parte...

8.1.2 Resto di Cavalieri-Simpson

Il resto e' dato da:

$$\int_a^b [f(x) - p_2(x)]dx = \int_a^b [(x-a)(x-\frac{a+b}{2})(x-b)] \frac{f^{(3)}(\varepsilon_x)}{3!} dx \tag{8.5}$$

Si puo' dimostrare che se la funzione da integrare $\in C_4([a,b])$ il resto della formula di Cavalieri-Simpson e':

$$r(CS_N) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\varepsilon) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\varepsilon) \tag{8.6}$$

Dove la h e':

$$h = \frac{b-a}{2} \tag{8.7}$$

8.2 Formula di Cavalieri-Simpson composita

Usando N sotto intervalli di suddivisione di $[a,b]$ con N pari ($N = 2, 2^2, \dots$) l'errore decresce come N^{-4}.

Per esempio:

$$\frac{|R_N|}{|R_{2N}|} \approx \frac{1:(N)^4}{1:(2N)^4} = 16 \tag{8.8}$$

Quindi raddoppiando gli intervalli il rapporto fra gli errori massimio e' 16.

8.3 Considerazioni sull'integrazione

- La formula dei trapezi ha grado di precisione 1(integra esattamente tutti i polinomi di grado minore o uguale a 1)
- la formula di cavalieri-Simpson ha grado di precisione 3(integra esattamente tutti i polinomi di grado minore o uguale a 3)

Capitolo 9

Equazioni non lineari

9.1 Metodo di bisezione

Deriva dal teorema degli zeri per funzioni continue:

Se $f(x)$ è continua su $[a,b]$ e $f(a)f(b) < 0$ allora esiste almeno un $x \in [a,b]$ tale che $f(x) = 0$.

Posso creare un semplice algoritmo che prende il punto media dell'intervallo di modo da ottenere il punto $c = \frac{a+b}{2}$.

Se $c = 0$ allora ho trovato una radice, se non e' uguale a zero bisogna guardare l'intervallo dove la $f(x)$ cambia di segno.

Si continua con queste iterazioni fino ad ottenere una radice.

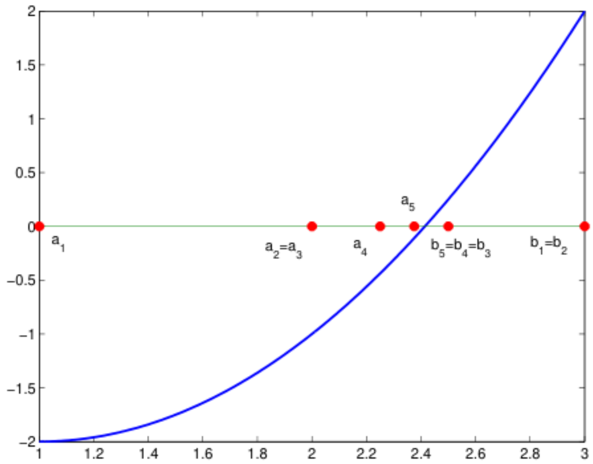

Figura 9.1: Esempio di metodo di bisezione

Il metodo di bisezione ha un ordine di convergenza lineare.

Se vogliamo fissare una tolleranza ε e otteniamo:

$$k \geq \frac{\log_{10}(\frac{b-a}{\varepsilon})}{\log_{10} 2} \approx 3.32192 \log_{10} \frac{b-a}{\varepsilon} \tag{9.1}$$

In media e' necessario 3.3 bisezioni per migliorare di una cifra significativa l'accuratezza della radice.

Bisogna quindi sfruttare altri metodi per velocizzare la discesa verso la radice come derivate.

9.2 Metodo delle secanti

Con il metodo delle secanti si costruisce una successione di punti x_k tali che:

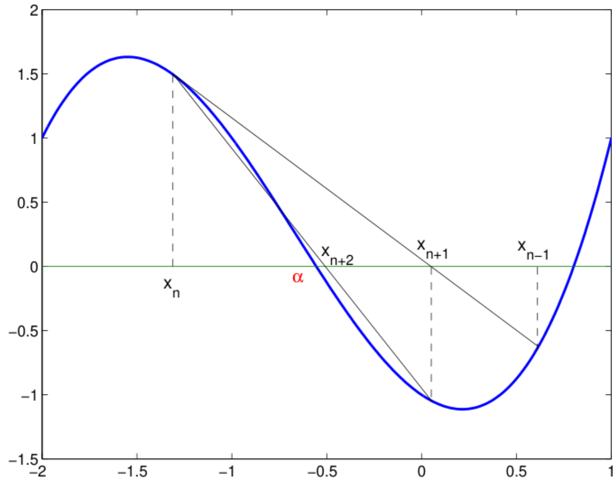

Figura 9.2: Esempio di metodo delle secanti

Per ogni $k \geq 1$ il putno x_{k+1} e' lo zero della retta secante che passa per i punti

$$(x_{k-1}, f(x_{k-1})), \quad (x_k, f(x_k)) \tag{9.2}$$

Quindi otteniamo un sistema:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} x + \frac{f(x_{k-1})x_k - f(x_k)x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \end{cases} \tag{9.3}$$

Dal sistema otteniamo la forma del metodo delle secanti, che pero' richiede due punti iniziali x_0 e x_1:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad k \geq 1 \tag{9.4}$$

Se la funzione $f(x)$ e' convessa o concava nell'intervallo $[a, b]$, la succession x_k converge ad α in modo monotono, crescente oppure decrescente.
Percio' posso controllare l'approssimazione del risultato mediante la distanza tra x_{n+1} e x_n con il criterio di arresto:

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \tag{9.5}$$

Dove $\varepsilon > 0$ e' la tolleranza prefissata.

9.3 Metodo delle tangenti

Sotto certe ipotesi performa meglio dei due mtodi di prima, ma si applica solo se la funzione e' derivabile ndell'intervallo.
Si procede con:

- Si sceglie un punto x_0 dell'intervallo $[a, b]$ **opportuno**
- si considera la retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$ di equazione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
- Il punto x_1 interseca l'asse delle x $(y = 0)$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{9.6}$$

Se il punto x_0 e' stato scelto correttamente, il punto x_1 cade nell'intervallo $[a, b]$ e risulta compreso tra α e x_0.

- si sostituisce il punto x_0 con il nuovo punto x_1
- si calcola il prossimo punto x_2

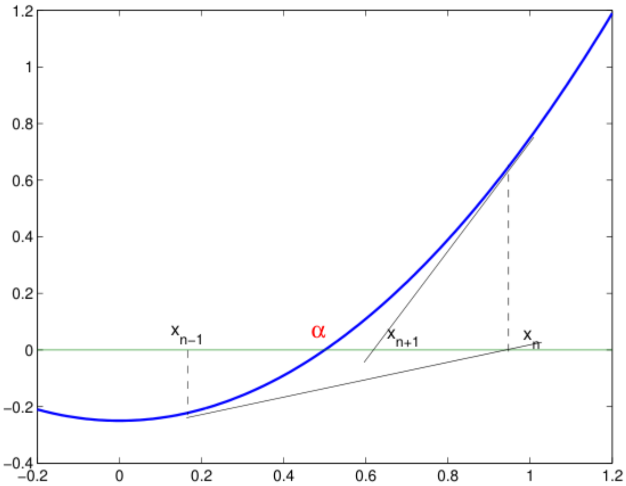

Figura 9.3: Esempio di metodo delle tangenti

Dato un punto x_0 si itera la formula per ottenere tutti gli altri punti:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad i = 0, 1, \dots \tag{9.7}$$

Ogni iterazione di qursto metodo richiede la valutazione della funzione e della sua derivata. Nel caso la funzione sia derivabile 2 volte, si puo' usare il seguente teorema:

> Sia $f(x) \in C^2([a,b])$ e $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$, escluso al piu' il punto α. Se (esiste) un punto $x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0)f''(x_0) > 0$ allora la successione generata dal metodo delle tangenti e' monotona convergente alal radice α.

9.4 Metodi iterativi

Il metodo delle tangenti e' un caso particolare del metodo iterativo nella forma:

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad i = 0, 1, \dots$$

Con cui e' possibile ottenere tutti i punti approssiamti partendo da un punto x_0.
Approssimo la soluzionie del'equazione:

$$x = g(x)$$

Questa funzione viene chiamata funzione di iterazione e le soluziuone sono dette punti fissi.
Per semplicita' considero $g(x)$ con continuita' di ordine 1, quindi $g \in C^1([a,b])$.

9.4.1 Convergenza di un metodo iterativo

Se la successione converge ad un valore α:

$$\alpha = \lim_{i \to \infty} x_i$$

Ne risulta che:

$$\alpha = g(\alpha)$$

Quindi α e' la soluzione dell'equazione $x = g(x)$.
Per ottere una successione convergente dobbiamo scegliere:

- il punto dal quale far partire l'iterazione
- l'algoritmo di iterazione

Se si sceglie un'algoritmo giusto ma si parte dal punto sbagliato, c'e' possibilita' di non arrivare alla convergenza.

Teorema del punto fisso

Siano α un punto fisso di $g(x)$ e S un intorno circolare chiuso di α, tali che

$$|g'(x)| < 1, \quad \forall x \in S$$

Se prendo un punto $x_0 \in S$, ogni x_i definito dalla:

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots$$

Appartiene ad S e converge ad α.

Capitolo 10

Eqauzioni non lineari

10.1 Criteri di arresto

Non sempre il criterio di arresto:

$$|x_{k+1} - x_k| < \epsilon$$

La formula precedente si puo' trasformare come:

$$|x_{k+1} - x_k| < \frac{\epsilon}{|g'(\epsilon_i) - 1|}$$

Quindi anche in caso di una $g'(x)$ vicina a 1, l'errore cresce un botto.
Per evitare questo tipo di errore si utilizzano delle condizioni di arresto del tipo:

$$|x_{i+1} - x_i| < \epsilon \min(|x_i|, |x_{i+1}|), \quad |x_i|, |x_{i+1}| \neq 0 \tag{10.1}$$

con cui si controlla l'errore relativo, o la condizione:

$$|f(x_i)| < \epsilon \tag{10.2}$$

Che si converte in:

$$f(x_i) = f(x_i) - f(\alpha) = f'(\eta)(x_i - \alpha) \tag{10.3}$$

da cui si ricava:

$$|x_i - \alpha| < \frac{\epsilon}{|f'(\eta)|} \tag{10.4}$$

Quindi a parità di valore di ϵ l'errore assoluto risulta grande se $f'(\eta)$ è vicina a 0.
È inoltre necessario stabili un numero massimo di iterazioni da effettuare di modo da non tenere rsorse occupate nel caso di convergenza lenta.

10.2 Ordine di convergenza

Per valutare la bontà di convergenza di un algoritmo, si osserva con che velocità convergono ad una stessa soluzione e si valuta la velocità di convergenza.
Sia x_i una successione convergente ad α e sia $x_i \neq \alpha \forall i$, se essite un numero reale $p \geq 1$ tale che :

$$\lim_{i \to \infty} \frac{|x_{i+1} - \alpha|}{|x_i - \alpha|^p} = \gamma \tag{10.5}$$

Dove la quantità γ:

$$\begin{cases} 0 < \gamma < 1 & \text{se} \quad p = 1 \\ 0 < \gamma & \text{se} \quad p > 1 \end{cases} \tag{10.6}$$

La successione ha **ordine di convergenza** p. La costante γ è detta **fattore di convergenza**.
Se $p = 1$ la convergenza è lineare, se $p > 0$ la convergenza è superlineare.
Se nel limite la $\gamma = 1$ quando $p = 1$ si dice che la convergenza è sublineare.
Un metodo iteratico convergente ad α si dice di ordine p se tutte le successioni ottenute al variare del punto iniziale in un intorno di α convergono con ordine p.

10.3 Teorema

Se in un intorno S di α è $g(x) \in C^P(S)$ con $p \geq 2$ intero e le derivate di $g(x)$ sono tutte uguale a 0 tranne l'ultima che è diversa da 0, questo metodo ha convergenza p.

10.4 Ordine del metodo delle tangenti

Se la tangente ha:

- $f \in C^2([(a, b)])$
- $f'(\alpha) \neq 0$
- $f''(\alpha) \neq 0$

l'ordine dipende da:

$$\lim_{i \to \infty} \frac{x_{i+1} - \alpha}{(x_i - \alpha)^2} = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \tag{10.7}$$

E questo limite è finito e diverso da zero, quindi il metodo delle tangenti ha ordine di convergenza 2.
Se le ipotesi di prima non sono verificate, la convergenza è più complicata da analizare, esistono due casi, α è soluzione multipla oppure semplice.
Se per un intero $r > 0$ è $f(x) \in C^r([a, b])$, una soluzione α si dice di molteplicità r se essite i limite finito e non nullo di:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{(x - \alpha)^r} \tag{10.8}$$

In questo caso:

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{r-1}(\alpha) = 0, f^r(\alpha) \neq 0 \tag{10.9}$$

si ha il sequnte teorema: Sia $\alpha \in [a, b]$ soluzione di $f(x) = 0$, sia $f'(x) \neq 0$ per $x \in [a, b] - a$

- Se α è di molteplicità 1 e $f(x) \in C^2([a, b])$ allora il metodo delle tangenti converge con ordine almeno 2, è 2 se $f''(\alpha) \neq 0$
- Se α ha molteplicità finita $r \geq 2$ e se $f(x) \in C^r([a, b])$ allora il metodo delle tangenti converge linearmente.