Matematica Applicata

Ollari Dmitri

3 agosto 2023

Indice

Capitolo 1

Polinomi interpolatori

1.1 Teorema

Se (x_i, y_i), $i = 0, \dots, n$ sono $n + 1$ punti distinti, allora esiste un unico polinomio $p_n(x)$ di grado $\leq n$ tale che $p_n(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$.

Capitolo 2

Polinomio interpolatore di Lagrange

Il polinomio Lagrangiano si presenta nella forma:

$$L_i = \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \tag{2.1}$$

Invece il polinomio interpolatore costruito grazie al polinomio Lagrangiano è:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x) \tag{2.2}$$

La caratteristica del polinomio di Lagrange è che:

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \tag{2.3}$$

Il polinomio interpolatore di Lagrange si può riscrivere come:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x) \tag{2.4}$$

$$= \omega_n(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{\beta_i}{x - x_i} \tag{2.5}$$

Dove $\omega_n(x)$ è:

$$\omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{2.6}$$

mentre β_i è:

$$\beta_i = \frac{y_i}{\prod_{i=0, i\neq j}^{n} (x_j - x_i)} \tag{2.7}$$

Le operazioni necesarie per il calcolo del polinomio interpolatore di Lagrange sono:

- $n^2/2$ addizioni
- n^2 moltiplicazioni

Per il calcolo del resto si ricorre alal formula:

$$r(x) = f(x) - p_n(x) \tag{2.8}$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_n(x) \tag{2.9}$$

Capitolo 3

Polinomio di Newton

Il polinomio di newton(o delle defferenze) si costruisce nel seguente modo, per i $k-1$ punti:
Se $k = 0$:

$$f[x_0] = f(x_0) \tag{3.1}$$
$$\tag{3.2}$$

Se $k = 1$:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \tag{3.3}$$
$$\tag{3.4}$$

Se $k > 1$:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \tag{3.5}$$
$$\tag{3.6}$$

Il polinomio finale si costrusce nel seguente modo:

$$\begin{aligned} f(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \quad (3.7) \\ + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \quad (3.8) \end{aligned}$$

Capitolo 4

Convergenza dei polinomi di interpolazione

4.1 Bernstein

Se $f(x) \in C^1([a,b])$, il $p_n(x)$ della funzione relativo agli zeri di chebichev di grado $(n+1)$ converge uniformemente a $f(x)$ in $[a,b]$ per $n \to \infty$.

Se $f(x) \in C^2([a,b])$, l'errore è limitato da:

$$E = O(\frac{1}{\sqrt{n}}) \tag{4.1}$$

Il polinomio di Bernstein è:

$$B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tag{4.2}$$

Dove la binomiale è:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{4.3}$$

4.2 Hermite-Fejér

Sia $f(x) \in C^0([a,b])$, con $[a,b]$ chiuso e limitato e sia:

- $p_{2n+1}(x_i) = f(x_i)$
- $p'_{2n+1}(x) = 0$

Se x_i sono gli zeri di chebichev, allora:

$$\lim_{n\to\infty} err = 0 \tag{4.4}$$

Capitolo 5

Splines

5.1 Decomposizione di un intervallo

Sia $[a, b]$ un'intervallo chiuso e limitato, chiamo decomposizione di $[a, b]$ un insieme finito di punti:

$$\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \tag{5.1}$$

5.2 Ricerca binaria

Dato che le spline interpolano gli intervalli, è necessario trovare l'intervallo in cui si trova il punto da interpolare. Per fare ciò si utilizza la ricerca binaria, che permette di trovare l'intervallo in cui si trova il punto da interpolare in $O(\log n)$.

5.2.1 Passi dell'Algoritmo

1. **Inizializzazione**: Assicurarsi che l'insieme sia ordinato in modo ascendente.
2. **Definire l'intervallo**: Impostare un intervallo di ricerca iniziale che copra l'intero insieme. Solitamente, l'intervallo è definito da due indici: *inizio* e *fine*. All'inizio, *inizio* sarà 0 (indice del primo elemento) e *fine* sarà la lunghezza dell'insieme meno uno (indice dell'ultimo elemento).
3. **Calcolare il punto medio**: Calcolare l'indice del punto medio dell'intervallo come *medio = (inizio + fine) / 2*.
4. **Confronto**: Confrontare l'elemento nel punto medio con l'elemento cercato.
5. **Trova l'elemento**: Se l'elemento nel punto medio è uguale all'elemento cercato, la ricerca è terminata, e l'elemento è stato trovato.
6. **Riduzione dell'intervallo**: Se l'elemento nel punto medio è maggiore dell'elemento cercato, impostare *fine = medio - 1* per restringere l'intervallo alla metà inferiore. Altrimenti, se l'elemento nel punto medio è minore dell'elemento cercato, impostare *inizio = medio + 1* per restringere l'intervallo alla metà superiore.
7. **Ripeti**: Ripetere i passaggi dal 3 al 6 fino a quando l'elemento viene trovato o finché *inizio* diventa maggiore di *fine*, nel qual caso l'elemento non è presente nell'insieme.

5.3 Errore della spline

L'errore della spline è definito come:

$$\begin{aligned} r(x) &= f(x) - S(x), \quad x \neq x_i & (5.2)\\ &= |f(x) - S(x)| = \frac{1}{(n+1)!}|f^{(n+1)}(\xi)|\omega(x) & (5.3)\\ &= \frac{1}{(n+1)!}|f^{(n+1)}(\xi)|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) & (5.4) \end{aligned}$$

5.4 Spline cubica

Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato, sia f una funzione definita su $[a,b]$ e sia $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una decomposizione di $[a,b]$. Una spline cubica è una funzione S definita su $[a,b]$ tale che:

$$S_{3,\Delta}(x) = \begin{cases} S^1_{3,\Delta}(x) = a^1_0 + a^1_1(x-x_0) + a^1_2(x-x_0)^2 + a^1_3(x-x_0)^3 & x \in [x_0, x_1] \\ S^2_{3,\Delta}(x) = a^2_0 + a^2_1(x-x_1) + a^2_2(x-x_1)^2 + a^2_3(x-x_1)^3 & x \in [x_1, x_2] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S^n_{3,\Delta}(x) = a^n_0 + a^n_1(x-x_{n-1}) + a^n_2(x-x_{n-1})^2 + a^n_3(x-x_{n-1})^3 & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases} \tag{5.5}$$

Le incognite sono $a^i_0, a^i_1, a^i_2, a^i_3$ per $i = 1, \dots, n$. I vincoli sono:

- $3(n-1)$ per imporre $C^2([a,b])$
- $n+1$ per imporre le interpolazioni ai nodi

Ne deriva che vincoli e incognite sono $4n-2$.

5.5 Momenti delle spline

I momenti delle spline sono definiti come:

$$M_i = [S^i_{3,\Delta}(x_i)]''_{x=x_i} \tag{5.6}$$

5.5.1 Spline conoscento i momenti

Se conosco i momenti della spline, posso rappresentare le spline nel seguente modo:

$$S^i_{3,\Delta}(x) = \frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}M_i + \frac{(x_i-x)^3}{6h_i}M_{i-1} + A_i(x-x_{i-1}) + B_i \tag{5.7}$$

Dove:

$$B_i = y_{i-1} - \frac{h_i^2}{6}M_{i-1} \tag{5.8}$$

$$A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{-} - M_{i-1}) \tag{5.9}$$

Derivando varie volte si ottiene:

$$[S^i_{3,\Delta}(x)]' = \frac{(x-x_{i-1})^2}{2h_i}M_i - \frac{(x_i-x)^2}{2h_i}M_{i-1} + A_i \tag{5.10}$$

$$[S^i_{3,\Delta}(x)]'' = \frac{(x-x_{i-1})}{h_i}M_i + \frac{(x_i-x)}{h_i}M_{i-1} \tag{5.11}$$

$$[S^i_{3,\Delta}(x)]''' = \frac{1}{h_i}M_i - \frac{1}{h_i}M_{i-1} \tag{5.12}$$

In tutto questo $h_i = x_i - x_{i-1}$.

5.5.2 Convertire momenti in coefficienti

$$a^i_0 = y_{i-1} \tag{5.13}$$

$$a^i_1 = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(2M_{i-1} + M_i) \tag{5.14}$$

$$a^i_2 = \frac{M_{i-1}}{2} \tag{5.15}$$

$$a^i_3 = \frac{M_i - M_{i-1}}{6h_i} \tag{5.16}$$

5.5.3 Rappresentazione con i momenti

$$\alpha_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} \tag{5.17}$$

$$\beta_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \tag{5.18}$$

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right) \tag{5.19}$$

E la rappresentazione diventa:

$$\alpha_i M_{i-1} + 2M_i + \beta_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 1, \ldots, n-1 \tag{5.20}$$

5.6 Spline cubica naturale

Una spline per essere naturale deve avere i momenti $M_0 = M_n = 0$. Quindi i vincoli diventano:

$$\begin{cases} 2M_1 + \beta_1 M_2 = d_1 \\ \alpha_2 M_1 + 2M_2 + \beta_2 M_3 = d_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n-1} M_{n-2} + 2M_{n-1} = d_{n-1} \end{cases} \tag{5.21}$$

La matrice associata è:

- triangolare
- $\alpha_i + \beta_i = 1$

5.7 Spline cubica vincolata

Le condizioni per avere una spline cubica vincolata sono:

$$[S^i_{3,\Delta}(x)]'_{x=x_0} = y'_0 \tag{5.22}$$

$$[S^i_{3,\Delta}(x)]'_{x=x_n} = y'_n \tag{5.23}$$

La matrice associata è:

- tridiagonale
- triangolar dominante
- irreducibile

Capitolo 6

Interpolazione

6.1 Bézier

Siano $P_i(x_i, y_i), i = 0, 1, n$, punti di controllo, la curva parametrica si forma:

$$Q_n(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i f_i(t), \quad t \in [0, 1] \tag{6.1}$$

$f_i(t)$ sono opportune funzioni polinomiali scelte in modo tale che la curva abbia le seguenti proprietà:

- $Q_n(0) = P_0$
- $Q_n(1) = P_n$
- La tangente in P_0 è parallela a $P_1 - P_0$
- La tangente in P_n è parallela a $P_n - P_{n-1}$

Queste condizioni sono soddisfate assumendo come funzioni $f_i(t)$ i polinomi di Bernstein:

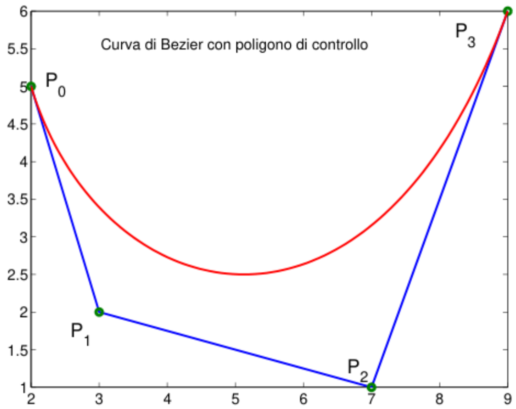
$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, 1, n \tag{6.2}$$

Dove la binomiale si calcola come:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \tag{6.3}$$

Quindi la curva di Bézier è data da:

$$Q_n(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_i^n(t), \quad t \in [0, 1] \tag{6.4}$$



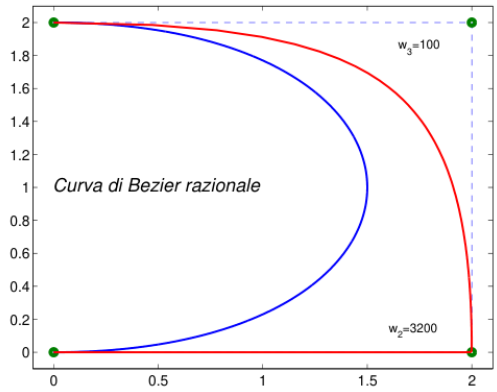
Spesso è necessario utilizzare più curve e per fare ciò si utilizzano i gradi di continuithà.

- C^0, le due curve hanno un punto in comune (primo nodo della seconda curva coincide con l'ultimo della prima)
- C^1, le due curve hanno un punto in comune e la derivata prima è uguale in direzione e modulo

6.1.1 Curve di Bézier razionali

In questo caso si introduce un valore di peso per ogni punto di controllo, quindi la curva è data da:

$$Q_n(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} P_i w_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)}, \quad t \in [0, 1] \tag{6.5}$$



6.2 Interpolazione di funzioni in più variabili

Sapendo che il polinomio Lagrangiano è:

$$L_{ij}(x, y) = L_i(x)L_j(y) \tag{6.6}$$

Il polinomio interpolante è:

$$p_{n,m}(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f(x_i, y_j) L_{ij}(x, y) \tag{6.7}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f(x_i, y_j) L_i(x) L_j(y) \tag{6.8}$$