

# Περιεχόμενα

<b>A</b>	<b>ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ, ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ</b>	<b>1</b>
A.1	Κίνητρο . . . . .	1
A.1.1	Μη υπολογιστικές μέθοδοι . . . . .	1
A.1.2	Αριθμητικές μέθοδοι και πρακτική στις επιστήμες του μηχανικού . . . . .	2
A.2	Μαθηματικό υπόβαθρο . . . . .	3
A.3	Προσαρμογή . . . . .	6
A.3.1	Αντικείμενο και προκαταρκτική επισκόπηση . . . . .	6
A.3.2	Αντικειμενικοί στόχοι . . . . .	7
<b>1</b>	<b>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ</b>	<b>9</b>
1.1	Ένα απλό μαθηματικό μοντέλο . . . . .	9
1.2	Οι αρχές διατήρησης και η μηχανική . . . . .	15
1.3	Προβλήματα . . . . .	16
<b>2</b>	<b>ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ</b>	<b>27</b>
2.1	Πακέτα λογισμικού και προγραμματισμός . . . . .	27
2.2	Δομημένος Προγραμματισμός . . . . .	28
2.3	Αρθρωτός προγραμματισμός . . . . .	35
2.4	EXCEL . . . . .	36
2.5	MATLAB . . . . .	40
2.6	MATHECAD . . . . .	44
2.7	Άλλες γλώσσες και βιβλιοθήκες . . . . .	45
2.8	Προβλήματα . . . . .	46
<b>3</b>	<b>ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΣΤΡΟΓΓΥΛΕΥΣΗΣ</b>	<b>55</b>
3.1	Σημαντικά ψηφία . . . . .	56
3.2	Πιστότητα και ακρίβεια . . . . .	57
3.3	Ορισμοί σφάλματος . . . . .	57
3.3.1	Οι υπολογιστικοί αλγόριθμοι για επαναληπτικούς υπολογισμούς . . . . .	61
3.4	Σφάλματα Στρογγύλευσης . . . . .	62
3.4.1	Υπολογιστική Αναπαράσταση Αριθμών . . . . .	63
3.4.2	Αριθμητικοί υπολογισμοί σε υπολογιστές . . . . .	70
3.5	Προβλήματα . . . . .	75
<b>4</b>	<b>ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΑΠΟΚΟΠΗΣ ΚΑΙ ΣΕΙΡΑ TAYLOR</b>	<b>77</b>
4.1	Η σειρά Taylor . . . . .	77
4.1.1	Το υπόλοιπο του αναπτύγματος της σειράς Taylor . . . . .	82
4.1.2	Χρήση της σειράς Taylor για την εκτίμηση των σφαλμάτων αποκοπής . . . . .	83
4.1.3	Αριθμητική παραγωγή . . . . .	87
4.2	Διάδοση σφάλματος . . . . .	91
4.2.1	Συναρτήσεις μιας μεταβλητής . . . . .	91
4.2.2	Συναρτήσεις περισσότερων από μίας μεταβλητών . . . . .	92
4.2.3	Ευστάθεια και κατάσταση . . . . .	93
4.3	Ολικό αριθμητικό σφάλμα . . . . .	94
4.3.1	Ανάλυση σφάλματος της αριθμητικής παραγωγής . . . . .	95
4.3.2	Έλεγχος των αριθμητικών σφαλμάτων . . . . .	98
4.4	Λάθη, σφάλματα διατύπωσης και αβεβαιότητα δεδομένων . . . . .	98

4.5	Προβλήματα . . . . .	100
<b>A</b>	<b>ΕΠΙΛΟΓΟΣ ΜΕΡΟΥΣ A</b>	<b>103</b>
A.4	Συμβιβασμοί . . . . .	103
A.5	Σημαντικές εκφράσεις και εξισώσεις . . . . .	106
A.6	Προηγμένες τεχνικές και πρόσθετες αναφορές . . . . .	106
<b>B</b>	<b>ΡΙΖΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ</b>	<b>109</b>
B.1	Κίνητρο . . . . .	109
B.1.1	Μέθοδοι υπολογισμού ριζών που δεν χρησιμοποιούν υπολογιστές . . . . .	109
B.1.2	Ρίζες εξισώσεων και η χρήση τους στην επιστήμη του μηχανικού . . . . .	110
B.2	Μαθηματικό υπόβαθρο . . . . .	111
B.3	Προσαρμογή . . . . .	112
B.3.1	Αντικείμενο και προκαταρκτική επισκόπηση . . . . .	112
B.3.2	Αντικειμενικοί στόχοι . . . . .	113
<b>5</b>	<b>ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΙΒΩΤΙΣΜΟΥ</b>	<b>115</b>
5.1	Γραφικές μέθοδοι . . . . .	115
5.2	Η μέθοδος της διχοτόμησης . . . . .	118
5.2.1	Κριτήρια Τερματισμού των Επαναλήψεων και Εκτιμήσεις Σφάλματος . . . . .	120
5.2.2	Αλγόριθμος Διχοτόμησης . . . . .	123
5.2.3	Ελαχιστοποιώντας τους Υπολογισμούς Τιμών των Συναρτήσεων . . . . .	124
5.3	Η μέθοδος της εσφαλμένης τοποθέτησης . . . . .	124
5.3.1	Μειονεκτήματα της Μεθόδου Εσφαλμένης Τοποθέτησης . . . . .	128
5.3.2	Τροποποιημένη Μέθοδος Εσφαλμένης Τοποθέτησης . . . . .	130
5.4	Διαδοχικές αναζητήσεις και καθορισμός αρχικών εκτιμήσεων . . . . .	131
5.5	Προβλήματα . . . . .	131
<b>6</b>	<b>ΑΝΟΙΚΤΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ</b>	<b>137</b>
6.1	Απλή μέθοδος επανάληψης σταθερού σημείου . . . . .	137
6.1.1	Σύγκλιση . . . . .	139
6.1.2	Αλγόριθμος της Επανάληψης Σταθερού Σημείου . . . . .	142
6.2	Η μέθοδος Newton-Raphson . . . . .	143
6.2.1	Κριτήρια Τερματισμού και Εκτιμήσεις Σφάλματος . . . . .	144
6.2.2	Παγίδες που κρύβει η μέθοδος Newton-Raphson . . . . .	146
6.2.3	Ο Αλγόριθμος της Μεθόδου Newton-Raphson . . . . .	147
6.3	Η μέθοδος της τέμνουσας . . . . .	147
6.3.1	Η Διαφορά Μεταξύ της Μεθόδου της Τέμνουσας και της Μεθόδου Εσφαλμένης Τοποθέτησης . . . . .	149
6.3.2	Ο αλγόριθμος για τη μέθοδο της τέμνουσας . . . . .	150
6.3.3	Τροποποιημένη μέθοδος της Τέμνουσας . . . . .	151
6.4	Μέθοδος Brent . . . . .	152
6.4.1	Αντίστροφη τετραγωνική παρεμβολή . . . . .	152
6.4.2	Ο Αλγόριθμος της μεθόδου Brent . . . . .	155
6.5	Πολλαπλές ρίζες . . . . .	155
6.6	Συστήματα μη γραμμικών εξισώσεων . . . . .	159
6.6.1	Επανάληψη Σταθερού Σημείου . . . . .	159
6.6.2	Newton-Raphson . . . . .	160
6.7	Προβλήματα . . . . .	162
<b>7</b>	<b>ΡΙΖΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ</b>	<b>167</b>
7.1	Τα πολυώνυμα στη μηχανική και στην επιστήμη . . . . .	167
7.2	Υπολογισμοί με πολυώνυμα . . . . .	169
7.2.1	Υπολογισμός πολυωνύμων και παραγωγίσεις . . . . .	169
7.2.2	Αγλοποίηση Πολυωνύμων . . . . .	170
7.3	Συμβατικές μέθοδοι . . . . .	172
7.4	Η μέθοδος του Müller . . . . .	173
7.5	Η μέθοδος Bairstow . . . . .	175

7.6	Άλλες Μέθοδοι . . . . .	179
7.7	Υπολογισμός ριζών με εφαρμογές λογισμικού . . . . .	179
7.8	Mathcad . . . . .	187
7.9	Προβλήματα . . . . .	189
<b>8</b>	<b>ΜΕΛΕΤΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ : ΡΙΖΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ</b>	<b>193</b>
8.1	Νόμοι ιδανικών και μη ιδανικών αερίων . . . . .	193
8.2	Αέρια του θερμοκηπίου και όμβρια ύδατα . . . . .	195
8.3	Σχεδιασμός ηλεκτρικού κυκλώματος . . . . .	197
8.4	Τριβή σε αγωγούς . . . . .	199
8.5	Προβλήματα . . . . .	203
<b>B</b>	<b>ΕΠΙΛΟΓΟΣ ΜΕΡΟΥΣ B</b>	<b>217</b>
B.4	Συμβιβασμοί . . . . .	217
B.5	Σημαντικές εκφράσεις και εξισώσεις . . . . .	218
B.6	Προηγμένες τεχνικές και πρόσθετες αναφορές . . . . .	218
<b>Γ</b>	<b>ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ</b>	<b>221</b>
Γ.1	Κίνητρο . . . . .	221
Γ.1.1	Μέθοδοι επίλυσης συστημάτων εξισώσεων χωρίς υπολογιστές . . . . .	221
Γ.1.2	Γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις και η χρήση τους στην επιστήμη του μηχανικού . . . . .	222
Γ.2	Μαθηματικό υπόβαθρο . . . . .	223
Γ.2.1	Συμβολισμός πινάκων . . . . .	223
Γ.2.2	Κανόνες χρήσης των πινάκων . . . . .	225
Γ.2.3	Αναπαριστώντας γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις σε μορφή πίνακα . . . . .	229
Γ.3	Προσαρμογή . . . . .	230
Γ.3.1	Αντικείμενο και προκαταρκτική επισκόπηση . . . . .	230
Γ.3.2	Αντικειμενικοί στόχοι . . . . .	232
<b>9</b>	<b>ΑΠΑΛΟΙΦΗ GAUSS</b>	<b>233</b>
9.1	Επίλυση συστημάτων με μικρό αριθμό εξισώσεων . . . . .	233
9.1.1	Γραφική Επίλυση . . . . .	233
9.1.2	Ορίζουσες και η Μέθοδος Cramer . . . . .	235
9.1.3	Απαλοιφή των αγνώστων . . . . .	238
9.2	Απλή μέθοδος Gauss . . . . .	239
9.2.1	Καταμέτρηση των υπολογισμών . . . . .	242
9.3	Αδυναμίες των μεθόδων απαλοιφής . . . . .	244
9.3.1	Διαίρεση με το μηδέν . . . . .	244
9.3.2	Σφάλματα Στρογγύλευσης . . . . .	245
9.3.3	Μη Καλώς Τοποθετημένα Συστήματα . . . . .	245
9.3.4	Ανώμαλα Συστήματα . . . . .	248
9.4	Τεχνικές που βελτιώνουν τις λύσεις . . . . .	249
9.4.1	Χρήση περισσότερων σημαντικών ψηφίων . . . . .	249
9.4.2	Οδήγηση . . . . .	249
9.4.3	Κλιμάκωση . . . . .	251
9.4.4	Υπολογιστικός αλγόριθμος για την απαλοιφή Gauss . . . . .	254
9.5	Μιγαδικά συστήματα . . . . .	256
9.6	Συστήματα μη γραμμικών εξισώσεων . . . . .	256
9.7	Μέθοδος Gauss-Jordan . . . . .	258
9.8	Περίληψη . . . . .	259
9.9	Προβλήματα . . . . .	259
<b>10</b>	<b>ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ LU ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΠΙΝΑΚΑ</b>	<b>263</b>
10.1	Παραγοντοποίηση LU . . . . .	263
10.2	Επισκόπηση της Παραγοντοποίησης LU . . . . .	264
10.2.1	Η εκδοχή της παραγοντοποίησης LU για την απαλοιφή Gauss . . . . .	264
10.3	Αλγόριθμος για την Παραγοντοποίηση LU . . . . .	269
10.3.1	Παραγοντοποίηση Crout . . . . .	269

10.4	Αντίστροφος πίνακας . . . . .	271
10.4.1	Υπολογίζοντας τον αντίστροφο πίνακα . . . . .	271
10.4.2	Υπολογισμοί για την αντίδραση σε εξωτερικές διαταραχές . . . . .	273
10.5	Ανάλυση λαθών και κατάσταση συστήματος . . . . .	274
10.5.1	Μετρικές Διανυσμάτων και Πινάκων . . . . .	275
10.5.2	Αριθμός Κατάστασης Πίνακα . . . . .	277
10.5.3	Επαναληπτική βελτίωση της λύσης . . . . .	279
10.6	Προβλήματα . . . . .	280
<b>11</b>	<b>ΕΙΔΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΑΙ GAUSS-SEIDEL</b>	<b>285</b>
11.1	Ειδικοί Πίνακες και Gauss-Seidel . . . . .	285
11.2	Ειδικοί πίνακες . . . . .	285
11.2.1	Τριδιαγώνια Συστήματα . . . . .	286
11.2.2	Παραγοντοποίηση Cholesky . . . . .	288
11.3	Gauss-Seidel . . . . .	289
11.3.1	Κριτήριο σύγκλισης της μεθόδου των Gauss-Seidel . . . . .	291
11.3.2	Βελτίωση της σύγκλισης χρησιμοποιώντας χαλάρωση . . . . .	292
11.3.3	Αλγόριθμος για την Gauss-Seidel . . . . .	293
11.3.4	Γενικά προβλήματα για τη μέθοδο Gauss-Seidel . . . . .	294
11.4	Γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις και εφαρμογές λογισμικού . . . . .	294
11.5	Προβλήματα . . . . .	298
<b>12</b>	<b>ΜΕΛΕΤΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ - ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ</b>	<b>303</b>
12.1	Ανάλυση συστήματος αντιδραστήρων σε μόνιμη κατάσταση . . . . .	303
12.2	Ανάλυση ενός ισοστατικού στηρίγματος . . . . .	305
12.3	Ρεύματα και τάσεις σε κυκλώματα αντιστάσεων . . . . .	309
12.4	Συστήματα ελατηρίου - μάζας . . . . .	310
12.5	Προβλήματα . . . . .	313
<b>Γ</b>	<b>ΕΠΙΛΟΓΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Γ</b>	<b>325</b>
Γ.4	Συμβιβασμοί . . . . .	325
Γ.5	Σημαντικές εκφράσεις και εξισώσεις . . . . .	326
Γ.6	Προηγμένες τεχνικές και πρόσθετες αναφορές . . . . .	326
<b>Δ</b>	<b>ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ</b>	<b>329</b>
Δ.1	Κίνητρο . . . . .	329
Δ.1.1	Μέθοδοι βελτιστοποίησης χωρίς υπολογιστές - Ιστορική αναδρομή . . . . .	330
Δ.1.2	Βελτιστοποίηση και η χρήση της στην επιστήμη του μηχανικού . . . . .	330
Δ.2	Μαθηματικό υπόβαθρο . . . . .	334
Δ.3	Προσαρμογή . . . . .	335
Δ.3.1	Αντικείμενο και προκαταρκτική επισκόπηση . . . . .	335
Δ.3.2	Αντικειμενικοί στόχοι . . . . .	336
<b>13</b>	<b>ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΧΩΡΙΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ</b>	<b>339</b>
13.1	Αναζήτηση χρυσής τομής . . . . .	340
13.2	Παραβολική παρεμβολή . . . . .	345
13.3	Η μέθοδος του Newton . . . . .	347
13.4	Η μέθοδος του Brent . . . . .	349
13.5	Προβλήματα . . . . .	349
<b>14</b>	<b>ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΧΩΡΙΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ</b>	<b>355</b>
14.1	Άμεσες μέθοδοι . . . . .	356
14.1.1	Τυχαία αναζήτηση . . . . .	356
14.1.2	Αναζήτηση δια της μεταβολής μιας μεταβλητής και αναζήτηση προτύπων . . . . .	358
14.2	Μέθοδοι κλίσης . . . . .	359
14.2.1	Κλίσεις και εσσιανοί πίνακες . . . . .	359
14.2.2	Η μέθοδος της πιο απότομης ανάβασης . . . . .	363

14.2.3	Προχωρημένες μέθοδοι κλίσης . . . . .	367
14.3	Προβλήματα . . . . .	369
<b>15</b>	<b>ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ</b>	<b>371</b>
15.1	Γραμμικός προγραμματισμός . . . . .	371
15.1.1	Η τυπική μορφή . . . . .	371
15.1.2	Γραφική Επίλυση . . . . .	373
15.2	Η μέθοδος Simplex . . . . .	376
15.3	Μη γραμμική βελτιστοποίηση υπό περιορισμούς . . . . .	381
15.4	Βελτιστοποίηση με τη χρήση εφαρμογών λογισμικού . . . . .	382
15.5	Προβλήματα . . . . .	392
<b>16</b>	<b>ΜΕΛΕΤΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ - ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ</b>	<b>397</b>
16.1	Σχεδίαση μιας δεξαμενής ελάχιστου κόστους . . . . .	397
16.2	Επεξεργασία αποβλήτων με ελάχιστο κόστος . . . . .	401
16.3	Μέγιστη μεταφορά ισχύος για ένα κύκλωμα . . . . .	405
16.4	Ισορροπία και ελάχιστη δυναμική ενέργεια . . . . .	407
16.5	Προβλήματα . . . . .	409
<b>Δ</b>	<b>ΕΠΙΛΟΓΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Δ</b>	<b>421</b>
Δ.4	Συμβιβασμοί . . . . .	421
Δ.5	Πρόσθετες αναφορές . . . . .	422
<b>Ε</b>	<b>ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ</b>	<b>423</b>
E.1	Κίνητρο . . . . .	423
E.1.1	Μέθοδοι προσαρμογής καμπύλης που δεν χρησιμοποιούν υπολογιστές . . . . .	423
E.1.2	Προσαρμογή καμπύλης και η χρήση της στην επιστήμη του μηχανικού . . . . .	424
E.2	Μαθηματικό υπόβαθρο . . . . .	425
E.2.1	Αγλή στατιστική . . . . .	425
E.2.2	Η κανονική κατανομή . . . . .	427
E.2.3	Υπολογισμός διαστημάτων εμπιστοσύνης . . . . .	428
E.3	Προσαρμογή . . . . .	432
E.3.1	Αντικείμενο και προκαταρκτική επισκόπηση . . . . .	432
E.3.2	Αντικειμενικοί στόχοι . . . . .	435
<b>17</b>	<b>ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ΓΙΑ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ</b>	<b>437</b>
17.1	Γραμμική παλινδρόμηση . . . . .	437
17.1.1	Κριτήριο για μία βέλτιστη προσαρμογή . . . . .	438
17.1.2	Προσαρμογή ελαχίστων τετραγώνων για ευθεία γραμμή . . . . .	439
17.1.3	Ποσοτικοποίηση του σφάλματος της γραμμικής παλινδρόμησης . . . . .	440
17.1.4	Προγράμματα υπολογιστών για τη γραμμική παλινδρόμηση . . . . .	442
17.1.5	Γραμμικοποίηση μη γραμμικών σχέσεων . . . . .	445
17.1.6	Γενικά σχόλια για τη γραμμική παλινδρόμηση . . . . .	448
17.2	Πολυωνυμική παλινδρόμηση . . . . .	448
17.2.1	Αλγόριθμος για πολυωνυμική παλινδρόμηση . . . . .	450
17.3	Πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση . . . . .	451
17.4	Γενικά γραμμικά ελάχιστα τετράγωνα . . . . .	453
17.4.1	Γενική έκφραση των γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων σε μορφή πινάκων . . . . .	454
17.4.2	Στατιστικές πτυχές της θεωρίας ελαχίστων τετραγώνων . . . . .	455
17.5	Μη γραμμική παλινδρόμηση . . . . .	457
17.6	Προβλήματα . . . . .	460
<b>18</b>	<b>ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ</b>	<b>465</b>
18.1	Πολυώνυμα παρεμβολής διαιρεμένων διαφορών Newton . . . . .	465
18.1.1	Γραμμική Παρεμβολή . . . . .	466
18.1.2	Τετραγωνική Παρεμβολή . . . . .	467
18.1.3	Γενική μορφή των πολυωνύμων παρεμβολής Newton . . . . .	469
18.1.4	Σφάλματα των Πολυωνύμων Παρεμβολής Newton . . . . .	471

18.1.5	Υπολογιστικός Αλγόριθμος για τα Πολυώνυμα Παρεμβολής Newton . . . . .	472
18.2	Πολυώνυμα παρεμβολής Lagrange . . . . .	475
18.3	Συντελεστές πολυωνύμων παρεμβολής . . . . .	478
18.4	Αντίστροφη παρεμβολή . . . . .	479
18.5	Επιπρόσθετα σχόλια . . . . .	480
18.6	Παρεμβολή με splines . . . . .	482
18.6.1	Γραμμικές splines . . . . .	483
18.6.2	Τετραγωνικές splines . . . . .	484
18.6.3	Κυβικές splines . . . . .	486
18.6.4	Υπολογιστικός αλγόριθμος για τις κυβικές splines . . . . .	489
18.7	Πολυδιάστατη παρεμβολή . . . . .	489
18.7.1	Διγραμμική παρεμβολή . . . . .	490
18.8	Προβλήματα . . . . .	491
<b>19</b>	<b>ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ FOURIER</b>	<b>495</b>
19.1	Προσαρμογή καμπύλης με ημιτονοειδείς συναρτήσεις . . . . .	496
19.1.1	Προσαρμογή ελαχίστων τετραγώνων για ένα ημίτονο . . . . .	498
19.2	Συνεχής σειρά Fourier . . . . .	500
19.3	Τα πεδία του χρόνου και της συχνότητας . . . . .	504
19.4	Ολοκλήρωμα και μετασχηματισμός Fourier . . . . .	506
19.5	Διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT) . . . . .	508
19.6	Γρήγορος μετασχηματισμός Fourier (FFT) . . . . .	509
19.6.1	Αλγόριθμος Sande-Tukey . . . . .	510
19.6.2	Ο αλγόριθμος Cooley-Tukey . . . . .	512
19.7	Το φάσμα ισχύος . . . . .	513
19.8	Προσαρμογή καμπύλης με εφαρμογές λογισμικού . . . . .	514
19.9	Προβλήματα . . . . .	522
<b>20</b>	<b>ΜΕΛΕΤΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ - ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ</b>	<b>527</b>
20.1	Γραμμική παλινδρόμηση και πληθυσμιακά μοντέλα . . . . .	527
20.2	Χρήση splines για εκτίμηση μετάδοσης θερμότητας . . . . .	530
20.3	Ανάλυση Fourier (Ηλεκτρολόγοι μηχανικοί) . . . . .	530
20.4	Ανάλυση πειραματικών δεδομένων . . . . .	532
20.5	Προβλήματα . . . . .	534
<b>Ε</b>	<b>ΕΠΙΛΟΓΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Ε</b>	<b>549</b>
E.4	Συμβιβασμοί . . . . .	549
E.5	Σημαντικές εκφράσεις και εξισώσεις . . . . .	551
E.6	Προηγμένες τεχνικές και πρόσθετες αναφορές . . . . .	551
<b>ΣΤ</b>	<b>ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ</b>	<b>553</b>
ΣΤ.1	Κίνητρο . . . . .	553
ΣΤ.1.1	Μέθοδοι παραγωγίσης και ολοκλήρωσης χωρίς υπολογιστές . . . . .	556
ΣΤ.1.2	Αριθμητική παραγωγή και ολοκλήρωση στην επιστήμη του μηχανικού . . . . .	558
ΣΤ.2	Μαθηματικό υπόβαθρο . . . . .	561
ΣΤ.3	Προσαρμογή . . . . .	562
ΣΤ.3.1	Αντικείμενο και προκαταρκτική επισκόπηση . . . . .	562
ΣΤ.3.2	Αντικειμενικοί στόχοι . . . . .	564
<b>21</b>	<b>ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ NEWTON-COTES</b>	<b>567</b>
21.1	Ο κανόνας του τραpezίου . . . . .	568
21.1.1	Σφάλμα του κανόνα του τραpezίου . . . . .	570
21.1.2	Πολλαπλή εφαρμογή του κανόνα του τραpezίου . . . . .	572
21.1.3	Υπολογιστικοί αλγόριθμοι για τον κανόνα του τραpezίου . . . . .	575
21.2	Οι κανόνες του Simpson . . . . .	577
21.2.1	Ο Κανόνας 1/3 του Simpson . . . . .	577
21.2.2	Πολλαπλή εφαρμογή του κανόνα 1/3 του Simpson . . . . .	579
21.2.3	Ο Κανόνας 3/8 του Simpson . . . . .	581



21.2.4	Υπολογιστικοί Αλγόριθμοι για τους κανόνες του Simpson . . . . .	583
21.2.5	Κλειστοί τύποι Newton-Cotes ανώτερης τάξης . . . . .	584
21.3	Ολοκλήρωση με άνισα διαστήματα . . . . .	584
21.4	Ανοικτοί τύποι ολοκλήρωσης . . . . .	586
21.5	Πολλαπλά ολοκληρώματα . . . . .	588
21.6	Προβλήματα . . . . .	589
<b>22</b>	<b>ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ</b>	<b>595</b>
22.1	Αλγόριθμοι Newton-Cotes για εξισώσεις . . . . .	595
22.2	Ολοκλήρωση Romberg . . . . .	596
22.2.1	Παρέκταση Richardson . . . . .	596
22.2.2	Ο Αλγόριθμος ολοκλήρωσης του Romberg . . . . .	599
22.3	Προσαρμοσμένη ολοκλήρωση . . . . .	601
22.4	Ολοκλήρωση Gauss . . . . .	603
22.4.1	Μέθοδος των απροσδιόριστων συντελεστών . . . . .	603
22.4.2	Παραγωγή της έκφρασης Gauss-Legendre για δυο σημεία . . . . .	604
22.4.3	Εκφράσεις Περισσότερων Σημείων . . . . .	607
22.4.4	Ανάλυση σφάλματος για την ολοκλήρωση Gauss . . . . .	608
22.5	Γενικευμένα Ολοκληρώματα . . . . .	609
22.6	Προβλήματα . . . . .	611
<b>23</b>	<b>ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ</b>	<b>615</b>
23.1	Εκφράσεις παραγωγίσης υψηλής ακρίβειας . . . . .	615
23.2	Παρέκταση Richardson . . . . .	618
23.3	Παράγωγοι μη ισοκατανεμημένων δεδομένων . . . . .	619
23.4	Παράγωγοι και ολοκληρώματα από δεδομένα με σφάλματα . . . . .	620
23.4.1	Σύγκριση αριθμητικής παραγωγίσης και ολοκλήρωσης μη ακριβών δεδομένων . . . . .	621
23.5	Μερικές παράγωγοι . . . . .	621
23.6	Αριθμητική ολοκλήρωση και παραγωγή με λογισμικό . . . . .	622
23.6.1	Mathcad . . . . .	627
23.7	Προβλήματα . . . . .	628
<b>24</b>	<b>ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ</b>	<b>633</b>
24.1	Ολοκλήρωση για τον προσδιορισμό της συνολικής θερμότητας . . . . .	633
24.2	Δύναμη σε κατάρτι αγωνιστικού ιστιοφόρου . . . . .	635
24.3	Υπολογισμός ρεύματος με αριθμητική ολοκλήρωση . . . . .	637
24.4	Αριθμητική ολοκλήρωση για τον υπολογισμό έργου . . . . .	639
24.5	Προβλήματα . . . . .	641
<b>ΣΤ</b>	<b>ΕΠΙΛΟΓΟΣ ΜΕΡΟΥΣ ΣΤ</b>	<b>657</b>
ΣΤ.4	Συμβιβασμοί . . . . .	657
ΣΤ.5	Σημαντικές εκφράσεις και εξισώσεις . . . . .	659
ΣΤ.6	Προηγμένες τεχνικές και πρόσθετες αναφορές . . . . .	659
<b>Ζ</b>	<b>ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ</b>	<b>661</b>
Z.1	Κίνητρο . . . . .	661
Z.1.1	Μέθοδοι επίλυσης συνήθων διαφορικών εξισώσεων χωρίς υπολογιστές . . . . .	662
Z.1.2	Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και η χρήση τους στην επιστήμη του μηχανικού . . . . .	663
Z.2	Μαθηματικό υπόβαθρο . . . . .	663
Z.3	Προσαρμογή . . . . .	666
Z.3.1	Αντικείμενο και προκαταρκτική επισκόπηση . . . . .	666
Z.3.2	Αντικειμενικοί στόχοι . . . . .	667
<b>25</b>	<b>ΜΕΘΟΔΟΙ RUNGE-KUTTA</b>	<b>669</b>
25.1	Μέθοδος Euler . . . . .	670
25.1.1	Ανάλυση σφάλματος για τη μέθοδο Euler . . . . .	672
25.1.2	Αλγόριθμος για τη μέθοδο Euler . . . . .	675
25.1.3	Μέθοδοι σειράς Taylor ανώτερης τάξης . . . . .	678

25.2	Βελτιώσεις της μεθόδου Euler . . . . .	679
25.2.1	Μέθοδος Heun . . . . .	679
25.2.2	Η μέθοδος ενδιάμεσου σημείου . . . . .	682
25.2.3	Υπολογιστικοί αλγόριθμοι για τις μεθόδους Heun και μέσου σημείου . . . . .	684
25.3	Μέθοδοι Runge-Kutta . . . . .	684
25.3.1	Μέθοδοι Runge-Kutta δεύτερης τάξης . . . . .	685
25.3.2	Μέθοδοι Runge Kutta τρίτης τάξης . . . . .	689
25.3.3	Μέθοδοι Runge Kutta τέταρτης τάξης . . . . .	689
25.3.4	Μέθοδοι Runge-Kutta ανώτερης τάξης . . . . .	691
25.3.5	Υπολογιστικοί αλγόριθμοι για τις μεθόδους Runge-Kutta . . . . .	693
25.4	Συστήματα εξισώσεων . . . . .	693
25.4.1	Μέθοδος Euler . . . . .	693
25.4.2	Μέθοδοι Runge-Kutta . . . . .	694
25.4.3	Υπολογιστικός αλγόριθμος για την επίλυση συστημάτων συνήθων διαφορικών εξισώσεων . . . . .	695
25.5	Προσαρμοσμένες μέθοδοι Runge-Kutta . . . . .	697
25.5.1	Προσαρμοσμένη μέθοδος RK (υποδιπλασιασμός βήματος) . . . . .	698
25.5.2	Μέθοδος Runge-Kutta Fehlberg . . . . .	699
25.5.3	Έλεγχος βήματος . . . . .	700
25.5.4	Υπολογιστικός αλγόριθμος . . . . .	701
25.6	Προβλήματα . . . . .	703
<b>26</b>	<b>ΔΥΣΚΑΜΨΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΥΒΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ</b>	<b>709</b>
26.1	Δυσκαμψία . . . . .	709
26.2	Πολυβηματικές μέθοδοι . . . . .	712
26.2.1	Η μέθοδος Heun μη αυτόματης εκκίνησης . . . . .	712
26.2.2	Έλεγχος βήματος και υπολογιστικά προγράμματα . . . . .	719
26.2.3	Εκφράσεις ολοκλήρωσης . . . . .	720
26.2.4	Πολυβηματικές μέθοδοι ανώτερης τάξης . . . . .	725
26.3	Προβλήματα . . . . .	728
<b>27</b>	<b>ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ</b>	<b>731</b>
27.1	Γενικές μέθοδοι για προβλήματα συνοριακών τιμών . . . . .	731
27.1.1	Η μέθοδος σκόπευσης . . . . .	732
27.1.2	Μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών . . . . .	735
27.2	Προβλήματα ιδιοτιμών . . . . .	737
27.2.1	Μαθηματικό Υπόβαθρο . . . . .	737
27.2.2	Φυσικό Υπόβαθρο . . . . .	738
27.2.3	Ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών . . . . .	740
27.2.4	Η μέθοδος πολυνύμου . . . . .	742
27.2.5	Μέθοδος δυνάμεων . . . . .	743
27.2.6	Άλλες Μέθοδοι . . . . .	746
27.3	ΣΔΕ και ιδιοτιμές με εφαρμογές λογισμικού . . . . .	747
27.4	Προβλήματα . . . . .	753
<b>28</b>	<b>ΜΕΛΕΤΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ - ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ</b>	<b>757</b>
28.1	Ανάλυση της μεταβατικής συμπεριφοράς αντιδραστήρα . . . . .	757
28.2	Μοντέλα θηρευτή - θηράματος και χάος . . . . .	762
28.3	Προσομοίωση μεταβατικού ρεύματος σε ηλεκτρικό κύκλωμα . . . . .	765
28.4	Το ταλαντούμενο εκκρεμές . . . . .	769
28.5	Προβλήματα . . . . .	772
<b>Z</b>	<b>ΕΠΙΛΟΓΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Z</b>	<b>789</b>
Z.4	Συμβιβασμοί . . . . .	789
Z.5	Σημαντικές εκφράσεις και εξισώσεις . . . . .	790
Z.6	Προηγμένες τεχνικές και πρόσθετες αναφορές . . . . .	792



<b>Η ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ</b>	<b>793</b>
H.1 Κίνητρο . . . . .	793
H.1.1 Επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων πριν την έλευση των υπολογιστών . . . .	795
H.2 Προσαρμογή . . . . .	796
H.2.1 Αντικείμενο και προκαταρκτική επισκόπηση . . . . .	796
H.2.2 Αντικειμενικοί στόχοι . . . . .	798
<b>29 ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ - ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ</b>	<b>799</b>
29.1 Η εξίσωση Laplace . . . . .	799
29.2 Τεχνικές επίλυσης . . . . .	800
29.2.1 Η εξίσωση διαφορών του Laplace . . . . .	801
29.2.2 Η μέθοδος Liebmann . . . . .	803
29.2.3 Δευτερεύουσες μεταβλητές . . . . .	805
29.3 Συνοριακές συνθήκες . . . . .	806
29.3.1 Συνοριακές συνθήκες παραγώγων . . . . .	806
29.3.2 Μη κανονικά σύνορα . . . . .	808
29.4 Η προσέγγιση του όγκου ελέγχου . . . . .	811
29.5 Λογισμικό για την επίλυση ελλειπτικών εξισώσεων . . . . .	813
29.6 Προβλήματα . . . . .	814
<b>30 ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ - ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ</b>	<b>817</b>
30.1 Εξίσωση αγωγής θερμότητας . . . . .	817
30.2 Άμεσες μέθοδοι . . . . .	818
30.2.1 Σύγκλιση και ευστάθεια . . . . .	820
30.2.2 Συνοριακές συνθήκες που περιλαμβάνουν παραγώγους . . . . .	821
30.2.3 Χρονικές προσεγγίσεις ανωτέρας τάξεως . . . . .	821
30.3 Μία απλή έμμεση μέθοδος . . . . .	821
30.4 Η μέθοδος των Crank-Nicolson . . . . .	824
30.4.1 Σύγκριση των μονοδιάστατων μεθόδων . . . . .	825
30.5 Παραβολικές εξισώσεις σε δύο διαστάσεις . . . . .	827
30.5.1 Τυπικά άμεσα και έμμεσα σχήματα . . . . .	827
30.5.2 Το σχήμα ADI . . . . .	827
30.6 Προβλήματα . . . . .	830
<b>31 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ</b>	<b>833</b>
31.1 Η γενική προσέγγιση . . . . .	834
31.1.1 Διακριτοποίηση . . . . .	834
31.1.2 Εξισώσεις στοιχείων . . . . .	834
31.1.3 Συναρμολόγηση . . . . .	836
31.1.4 Συνοριακές συνθήκες . . . . .	836
31.1.5 Λύση . . . . .	837
31.1.6 Τελική επεξεργασία . . . . .	837
31.2 Εφαρμογή πεπερασμένων στοιχείων στη μία διάσταση . . . . .	837
31.2.1 Διακριτοποίηση . . . . .	838
31.2.2 Εξισώσεις στοιχείων . . . . .	838
31.2.3 Διασύνδεση . . . . .	843
31.2.4 Συνοριακές συνθήκες . . . . .	843
31.2.5 Λύση . . . . .	844
31.2.6 Τελική επεξεργασία . . . . .	844
31.3 Δισδιάστατα προβλήματα . . . . .	844
31.3.1 Διακριτοποίηση . . . . .	845
31.3.2 Εξισώσεις στοιχείων . . . . .	845
31.3.3 Συνοριακές συνθήκες και διασύνδεση . . . . .	846
31.3.4 Λύση και τελική επεξεργασία . . . . .	846
31.4 Επιλύοντας ΜΔΕ με εφαρμογές λογισμικού . . . . .	847
31.5 Προβλήματα . . . . .	851

<b>32 ΜΕΛΕΤΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ - ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ</b>	<b>855</b>
32.1 Μονοδιάστατο ισοζύγιο μάζας αντιδραστήρα . . . . .	855
32.2 Εκτροπή μιας πλάκας . . . . .	859
32.3 Δισδιάστατα προβλήματα ηλεκτροστατικού πεδίου . . . . .	860
32.4 Λύση πεπερασμένων στοιχείων για μία σειρά ελατηρίων . . . . .	862
32.5 Προβλήματα . . . . .	866
<b>Η ΕΠΙΛΟΓΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Η</b>	<b>871</b>
H.3 Συμβιβασμοί . . . . .	871
H.4 Σημαντικές εκφράσεις και εξισώσεις . . . . .	872
H.4.1 Προηγμένες τεχνικές και πρόσθετες αναφορές . . . . .	872
<b>I ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ FOURIER</b>	<b>873</b>
I.1 Εισαγωγή . . . . .	873
<b>II ΞΕΚΙΝΩΝΤΑΣ ΜΕ ΤΟ MATLAB</b>	<b>875</b>
II.1 Εισαγωγή . . . . .	875
II.1.1 Εκχώρηση τιμών σε ονόματα μεταβλητών . . . . .	876
II.2 Μαθηματικές πράξεις . . . . .	877
II.3 Χρήση των ενσωματωμένων συναρτήσεων . . . . .	879
II.4 Γραφικά . . . . .	879
II.5 Πολυώνυμα . . . . .	880
II.6 Στατιστική ανάλυση . . . . .	880
II.7 Αυτό και εκείνο . . . . .	881
<b>III ΞΕΚΙΝΩΝΤΑΣ ΜΕ ΤΟ MATHCAD</b>	<b>883</b>
III.1 Τα βασικά χαρακτηριστικά του Mathcad . . . . .	883
III.2 Καταχώρηση κειμένου και μαθηματικών τελεστών . . . . .	884
III.3 Μαθηματικές συναρτήσεις και μεταβλητές . . . . .	885
III.4 Συναρτήσεις αριθμητικών μεθόδων . . . . .	888
III.5 Διαδικασίες και υποπρογράμματα . . . . .	888
III.6 Δημιουργώντας γραφήματα . . . . .	888
III.7 Συμβολικά μαθηματικά . . . . .	891
III.8 Μαθαίνοντας περισσότερα για το Mathcad . . . . .	892
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>893</b>
<b>Ευρετήριο</b>	<b>897</b>