Mamadou KANOUTÉ

M2 Datasciences

# Devoir de maison

## Exercice :

1) Justifions que $\phi(S_T) \in L^1(\mathbb{P})$

On sait $\phi$ est à valeurs positives, que :

$$\phi(x) \leq (1+|x|^p)C$$

Montrons que $\mathbb{E}(\phi(S_T)) < +\infty$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\phi(S_T)] \leq \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[C(1+|S_T|^p)] = C(1+\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(|S_T|^p))$$

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

En appliquant la formule d'Itô sur $f(x) = \ln(x)$, ensuite en prenant l'exponentielle,

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}$$

$$|S_T|^p = |S_0|^p e^{\sigma p W_T + \mu p T - \frac{\sigma^2}{2} p T}$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[|S_T|^p] = |S_0|^p e^{\mu p T} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(e^{\sigma p W_T - \frac{\sigma^2}{2} p T}\right)$$

$$= |S_0|^p e^{\mu p T} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(e^{\sigma p W_T - \frac{\sigma^2}{2} p T + \frac{\sigma^2 p^2}{2} T - \frac{\sigma^2 p^2}{2} T}\right)$$

$$= |S_0|^p e^{\mu p T} e^{-\frac{\sigma^2}{2} p T + \frac{\sigma^2 p^2}{2} T} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{\sigma p W_T - \frac{\sigma^2 p^2}{2} T}\right]$$

or $e^{\sigma p W_T - \frac{\sigma^2 p^2}{2} T}$ est une martingale exponentielle

$$\mathbb{E}^P\left[e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2 p^2}{2} T}\right] = \mathbb{E}^P\left[e^{\sigma W_0 - \frac{\sigma^2 p^2}{2}}\right] = \mathbb{E}(1) = 1$$

donc $|S_T|^p = |S_0|^p e^{\mu p T - \frac{\sigma^2}{2} p T + \frac{\sigma^2 p^2 T}{2}}$

$$= |S_0|^p e^{pT(\mu + \frac{\sigma^2}{2}(p-1))}$$

$$< +\infty$$

$$\mathbb{E}[\Phi(S_T)] \leq C(1 + |S_0|^p e^{pT(\mu + \frac{\sigma^2}{2}(p-1))}) < +\infty$$

Pour $T > 0$, fixé

2) ~~E~~tablissons que

$$V_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q(\Phi(S_T) | \mathcal{F}_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q(\Phi(S_T) | S_t)$$

Supposons qu'il existe une stratégie admissible $(\delta^0, \delta)$ simulant l'option. La valeur à l'instant $t$ du portefeuille est donné par $V_t = \delta_t^0 S_t^0 + \delta_t S_t$ et tel que $V_T = \Phi(S_T)$

Soit $\tilde{V}_t = V_t e^{-rt}$ la valeur actualisée du portefeuille

$$\tilde{V}_t = \delta_t^0 e^{-rt} S_t^0 + e^{-rt} \delta_t S_t = \delta_t^0 e^{-rt} e^{rt} + \delta_t e^{-rt} S_t$$

car $dS_t^0 = r S_t^0 dt \Rightarrow S_t^0 = S_0^0 e^{rt}$

Je pose $S_0^0 = 1$ telle que $S_t^0 = e^{rt}$

donc $\tilde{V}_t = \delta_t^0 + e^{-rt} \delta_t S_t = \delta_t^0 + \delta_t \tilde{S}_t$ avec $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$

$\tilde{V}_t = V_t e^{-rt}$

$$d\tilde{V}_t = -r e^{-rt} V_t dt + e^{-rt} dV_t = -r \tilde{V}_t dt + e^{-rt} dV_t$$

$$d\langle e^{-r\cdot}, V_\cdot \rangle_t = 0$$

$$d\tilde{V}_t = -r e^{-rt} V_t + e^{-rt} dV_t = -r e^{-rt}(\delta_t^0 e^{rt} + \delta_t S_t) dt + e^{-rt}[\delta_t^0 d(e^{rt})] + e^{-rt} \delta_t dS_t$$

$d\tilde{V}_t = -re^{-rt}\cancel{\delta_t' dt} - re^{-rt}\delta_t S_t dt + \cancel{e^{-rt}\delta_t' dt} + e^{-rt}\delta_t dS_t$

$= \delta_t(\underbrace{-re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t}_{d\tilde{S}_t}) = \delta_t d\tilde{S}_t$

En effet $d\tilde{S}_t = d(e^{-rt}S_t) = -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t$

$= -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$

$= e^{-rt}S_t((\mu - r)dt + \sigma dW_t)$

$= \tilde{S}_t((\mu-r)dt + \sigma dW_t)$

$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t\left(\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) + dW_t\right).$

Posons $\theta_t = \frac{(\mu-r)}{\sigma}t \Rightarrow d\theta_t = \frac{(\mu-r)}{\sigma}dt$

$\int_0^t \theta_s^2 ds < +\infty$, en effet $\int_0^t \frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}s^2 ds = \frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2} \times \frac{1}{3}t^3 < +\infty$

D'après le théorème de Girsanov,

$W_t^Q = W_t + \int_0^t \theta_s ds = W_t + \theta_t$ est un mouvement brownien standard sous $Q$ la probabilité risque-neutre équivalente à $P$

$dW_t^Q = dW_t + d\theta_t = dW_t + \frac{(\mu - r)}{\sigma}dt$

Ainsi $d\tilde{S}_t = \sigma\tilde{S}_t dW_t^Q$

$d\tilde{V}_t = \delta_t d\tilde{S}_t = \delta_t \sigma \tilde{S}_t dW_t$

$\tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + \int_0^t \delta_s \sigma \tilde{S}_s dW_s^Q$ (*)

Sous $Q$, $\tilde{V}_t$ est de carré intégrable d'après la définition des stratégies admissibles et l'égalité (*) fait apparaître $\tilde{V}_t$ comme une intégrale stochastique

par rapport à $W_t^Q$ d'après le théorème de représentation des martingales.
Il en résulte que sous $Q$, $\tilde{V}_t$ est une martingale
Ainsi pour $t \leq T$

$$\tilde{V}_t = E^Q[\tilde{V}_T | F_t]$$

Aussi $\forall s \leq t$, $E^Q[\tilde{V}_t | F_s] = E^Q[E^Q(\tilde{V}_T | F_t) | F_s]$

$$\underset{\text{propriété espérance conditionnelle}}{=} E^Q(\tilde{V}_T | F_s) = \tilde{V}_s$$

C'est de carré intégrable, d'après l'hypothèse d'admissibilité et c'est $F_t$ mesurable.

$$\tilde{V}_t = E^Q(\tilde{V}_T | F_t) = E^Q[e^{-rT} V_T | F_t]$$

$$\tilde{V}_t = E^Q[e^{-rT} \phi(S_T) | F_t] \quad \text{car } V_T = \phi(S_T)$$

$$e^{-rt} V_t = E^Q[e^{-rT} \phi(S_T) | F_t]$$

$$V_t = E^Q[e^{-rT+rt} \phi(S_T) | F_t] = E^Q[e^{-r(T-t)} \phi(S_T) | F_t]$$

~~Ainsi~~ $V_t = E^Q[e^{-r(T-t)} \phi(S_T) | F_t]$

Donc sous $Q$, $V_t = E^Q[e^{-r(T-t)} \phi(S_T) | F_t)$

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t dW_t^Q$$

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) = S_t(\underbrace{\sigma dW_t + \frac{\mu - r}{\sigma} \sigma dt}_{dW_t^Q \text{ défini précédemment}} + r dt)$$

$$dS_t = S_t(r dt + \sigma dW_t^Q)$$

* Montrons que $E^Q[e^{-r(T-t)} \phi(S_T) | F_t) = E^Q[e^{-r(T-t)} \phi(S_T) | F_t]$

$F_t = \sigma\{(S_s), s \leq t\}$

$\sigma$ : ce n'est pas la volatilité, symbole pour parler de tribu engendrée

En utilisant la propriété de Markov.

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}\phi(S_T)|\mathcal{F}_t]$$

En effet, on sait qu'à l'instant $t$, on a besoin d'information sur $S_t$ pour calculer $V_t$ ce qui nous permet d'écrire, $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}\phi(S_T)|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[e^{-r(T-t)}\phi(S_T)|S_t]$

3) Trouvons une fonction $v(t,S_t) = V_t$ [illegible]

- $V_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\phi(S_T)|\mathcal{F}_t]$

$$= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\phi(S_t e^{\sigma(W_T^{\mathbb{Q}}-W_t^{\mathbb{Q}})+(T-t)(r-\frac{\sigma^2}{2})})|\mathcal{F}_t]$$

$W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_t$, $\phi$ positive et $L^1$ et $S_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable

on a :

$$V_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\phi(S_t e^{\sigma(W_T^{\mathbb{Q}}-W_t^{\mathbb{Q}})+(T-t)(r-\frac{\sigma^2}{2})})]$$

Donc $v(t,S_t) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\phi(S_t e^{\sigma(W_T^{\mathbb{Q}}-W_t^{\mathbb{Q}})+(T-t)(r-\frac{\sigma^2}{2})})]$

- Montrons l'EDP. Supposons que $v \in C^{1,2}$

Posons $U_t = u(t,S_t) = e^{-rt}v(t,S_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}\phi(S_T)|\mathcal{F}_t]$

$U_t$ est une martingale sous $\mathbb{Q}$ comme démontrer précédemment

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[U_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{-rT}\phi(S_T)|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] = \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}\phi(S_T)|\mathcal{F}_s]}_{U_s}$$

$U_t$ est intégrable et $\mathcal{F}_t$ mesurable.

Comme montré précédemment $d\tilde{S}_t = \sigma\tilde{S}_t dW_t^{\mathbb{Q}}$

$$\Rightarrow \tilde{S}_t = S_0 e^{\sigma W_t^{\mathbb{Q}} - \frac{\sigma^2}{2}t}$$

$S_t = S_0 e^{\sigma W_t^Q - \frac{\sigma^2}{2}t + rt} = \tilde{S}_t e^{rt}$

Soit $a : (t,x) \mapsto e^{-rt} v(t, x e^{rt})$ telle que

$a(t,\tilde{S}_t) = e^{-rt} v(t, \tilde{S}_t e^{rt}) = e^{-rt} v(t, S_t) = u(t, S_t)$

Ainsi $a(t,\tilde{S}_t) = u(t, S_t)$

En appliquant la formule d'Itô sur $a(t,x)$, on a:

$$da(t,\tilde{S}_t) = \frac{\partial a}{\partial t}(t,\tilde{S}_t)dt + \frac{\partial a}{\partial x}(t,\tilde{S}_t)d\tilde{S}_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}a(t,\tilde{S}_t)d\langle \tilde{S},\tilde{S}\rangle_t$$

Comme $(\tilde{U}_t = u(t,\tilde{S}_t))$ est une martingale. Par égalité $a(t,\tilde{S}_t) = u(t,S_t)$, $a(t,\tilde{S}_t)$ est une martingale.

Ce qui veut dire que $\frac{\partial a}{\partial t}(t,\tilde{S}_t)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}a(t,\tilde{S}_t)d\langle \tilde{S},\tilde{S}\rangle_t = 0$

$$d\langle \tilde{S},\tilde{S}\rangle_t = \sigma^2 \tilde{S}_t^2 dt$$

$$\frac{\partial a}{\partial t}(t,\tilde{S}_t) = \frac{\partial}{\partial t} e^{-rt} v(t,\tilde{S}_t e^{rt})$$

$$= -re^{-rt} v(t,\tilde{S}_t e^{rt})dt + e^{-rt}\partial_t v(t,\tilde{S}_t e^{rt}) + r\tilde{S}_t e^{rt} e^{-rt}\partial_x v(t,\tilde{S}_t e^{rt})$$

$$= -re^{-rt} v(t,\tilde{S}_t e^{rt})dt + e^{-rt}\partial_t v(t,\tilde{S}_t e^{rt}) + r\tilde{S}_t \partial_x (v(t,\tilde{S}_t e^{rt}))$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}(t,\tilde{S}_t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-rt} v(t,\tilde{S}_t e^{rt}) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x} e^{-rt} v(t,\tilde{S}_t e^{rt})\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{-rt} v(t,\tilde{S}_t e^{rt}) = e^{-rt} e^{rt}\partial_x v(t,\tilde{S}_t e^{rt})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-rt} v(t,\tilde{S}_t e^{rt}) = e^{rt}\partial_x^2 v(t,\tilde{S}_t e^{rt})$$

$S_t = \tilde{S}_t e^{rt} \Rightarrow \tilde{S}_t = S_t e^{-rt}$ donc $\tilde{S}_t^2 = S_t^2 e^{-2rt}$

En remplaçant les dérivées par leurs expressions, on obtient

$\frac{1}{2}S_t^2 e^{-2rt} e^{rt} \sigma^2 \partial_x^2 v(t,\tilde{S}_t e^{rt}) + e^{-rt}\partial_t v(t,\tilde{S}_t e^{rt}) + r\tilde{S}_t \partial_x v(t,\tilde{S}_t e^{rt}) - re^{-rt} v(t,\tilde{S}_t e^{rt}) = 0$

$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 e^{-rt} \partial_x^2 v(t,S_t) + e^{-rt}\partial_t v(t,S_t) + rS_t \partial_x v(t,S_t) - re^{-rt} v(t,S_t) = 0$

$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \partial_x^2 v(t,S_t) + \partial_t v(t,S_t) + rS_t \partial_x v(t,x) - r v(t,S_t) = 0$

En remplaçant $S_t$ par $x$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_x^2 v(t,x) + \partial_t v(t,x) + rx\partial_x v(t,x) - rv(t,x) = 0$

$v(T,x) = e^{-r(T-T)} \mathbb{E}^{Q}\left[\phi\left(xe^{\sigma(W_T^Q - W_T^Q) + (T-T)(r - \frac{\sigma^2}{2})}\right)\right]$

$= e^0 \mathbb{E}^Q[\phi(xe^0)] = \mathbb{E}^Q[\phi(x)] = \phi(x)$

$V(T,x) = \phi(x), x \in \mathbb{R}_+^*$ car $\phi(x)$ est une fonction déterministe

Ainsi on a montré que $v(t,x)$ vérifie

$$\begin{cases} \partial_t v(t,x) + r x\partial_x v(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_x^2 v(t,x) - rv(t,x) = 0, (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}_+^* \\ v(T,x) = \phi(x), x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

avec $v \in C^{1,2}([0,T[\times\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

• <u>Bonus</u> : Prouvons que si $\phi$ est aussi continue alors $v$ satisfait les conditions énoncées.

$v(t,x)$ est différentiable par rapport à $t$

$v(t,x) = \mathbb{E}^Q\left[e^{-r(T-t)}\phi\left(xe^{\sigma(W_T - W_t) + (T-t)(r - \frac{\sigma^2}{2})}\right)\right]$

$\partial_t v(t,x) = \partial_t \mathbb{E}^Q\left[e^{-r(T-t)}\phi\left(xe^{\sigma(W_T - W_t) + (T-t)(r - \frac{\sigma^2}{2})}\right)\right]$

$$\partial_t \mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}\phi\left(x e^{\sigma(W_T-W_t)+(T-t)(r-\frac{\sigma^2}{2})}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\partial_t\left(e^{-r(T-t)}\phi\left(x e^{\sigma(W_T-W_t)+(T-t)(r-\frac{\sigma^2}{2})}\right)\right)\right]$$

Posons $M_{T-t} = e^{\sigma(W_T-W_t)+(T-t)(r-\frac{\sigma^2}{2})}$
$= e^{\sigma\sqrt{T-t}Z+(T-t)(r-\frac{\sigma^2}{2})}$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\partial_t v(t,x) = +r e^{-r(T-t)}\mathbb{E}[\phi(xM_{T-t})] + \mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}\partial_t\phi(xM_{T-t})\right]$$

$$\partial_t\phi(M_{T-t}) = \partial_t\left(x e^{\sigma\sqrt{T-t}Z+(T-t)(r-\frac{\sigma^2}{2})}\right)\partial_t\phi(xM_{T-t})]$$

$$= \left[\left[-\sigma\times\frac{1}{2\sqrt{T-t}}Z-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right]xM_{T-t}\right]\times\partial_t\phi(xM_{T-t})]$$

$$|\partial_t v(t,x)| \le \mathbb{E}\left(\|\phi'\|_\infty K e^{\sqrt{T-t}}Z\right)$$

$$\le \|\psi\|_\infty \, \|N\|_\infty \text{ avec } N = \int \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}dx}{\sqrt{2\pi}}$$

On a donc montré que $v$ est $C^1$ par rapport à $t$.

Montrons maintenant que $v$ est $C^2$ par rapport à $x$.

D'abord on sait est differentiable par rapport à $x$.

Montrons que $|\partial_x v(t,x)| < +\infty$ et $|\partial_x^2 v(t,x)| <$

Montrons que $|\partial_x v(t,x)|$ est fini.

$\partial x\, \varphi(x e^{\sigma(W_T-W_t)+(T-t)(r-\frac{\sigma^2}{2})}) = e^{\sigma(W_T-W_t)+(T-t)(r-\frac{\sigma^2}{2})}\, \varphi'(x e^{\sigma(W_T-W_t)+(T-t)(r-\frac{\sigma^2}{2})})$

$\partial x\, v(t,x) = \mathbb{E}^Q\left[e^{\sigma(W_T-W_t)}\, \varphi'(x e^{\sigma(W_T-W_t)+(T-t)(r-\frac{\sigma^2}{2})})\right]$

$|\partial x\, v(t,x)| = |\mathbb{E}^Q\left[e^{\sigma(W_T-W_t)}\, \varphi'(x e^{\sigma(W_T-W_t)+(T-t)(r-\frac{\sigma^2}{2})})\right]|$

$\leq \mathbb{E}^Q\left[|e^{\sigma(W_T-W_t)}\, \varphi'(x e^{\sigma(W_T-W_t)+(T-t)(r-\frac{\sigma^2}{2})})|\right]$

Car $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$

$|\partial x\, v(t,x)| \leq \mathbb{E}^Q\left[\|\varphi'\|_\infty\right]$

$\|\varphi'(y)\| \leq C(1+|y|^p)$ Locallement lipchitzien $\forall p \in \mathbb{N}$

En effet pour $p=1$, $||x|-|y|| \leq |x-y|$

Donc $\mathbb{E}[(1+|y|^p)] < +\infty$

$\partial x$. Ainsi $|\partial x\, v(t,x)| < +\infty$

$v(t,x)$ est differentiable par rapport à $x$ et cette derivée est finie.

Donc $v(t,x)$ est $C^1$ par rapport à $x$

D'autre part $v$ est 2 fois differentiable

Par $(P)$, on a $\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_x^2 v(t,x) = r v(t,x) - \partial_t v(t,x) - r\partial x\, v(t,x)$

$\Leftrightarrow \partial_x^2 v(t,x) = 2\,\frac{r v(t,x) - \partial_t v(t,x) - r\partial x\, v(t,x)}{\sigma^2 x^2} < +\infty$

$|\partial_x^2 v(t,x)| < +\infty$ ; donc $v$ est $C^{1,2}$

5) $V_0^h = v(0,S_0) = e^{-rT}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\phi(S_T)|S_0]$

$\phi(x) = (x-K)^+ = \begin{cases} x-K & \text{si } x \geq K \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$v(t,S_t) = e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\phi(S_T)|S_t]$

$= e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\phi\left(S_t e^{\sigma(W_T^{\mathbb{Q}}-W_t^{\mathbb{Q}})+(T-t)(r-\frac{\sigma^2}{2})}\right)\right]$

Ainsi $v(0,S_0) = e^{-rT}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\phi\left(S_0 e^{\sigma(W_T^{\mathbb{Q}}-W_0^{\mathbb{Q}})+T(r-\frac{\sigma^2}{2})}\right)\right]$

$= e^{-rT}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\phi\left(S_0 e^{\sigma W_T^{\mathbb{Q}}+T(r-\frac{\sigma^2}{2})}\right)\right]$

$\phi\left(S_0 e^{\sigma W_T^{\mathbb{Q}}+T(r-\frac{\sigma^2}{2})}\right) = \left(S_0 e^{\sigma W_T^{\mathbb{Q}}+T(r-\frac{\sigma^2}{2})} - K\right)^+$

$= \begin{cases} S_0 e^{\sigma W_T^{\mathbb{Q}}+T(r-\frac{\sigma^2}{2})} - K, & \text{si } S_0 e^{\sigma W_T^{\mathbb{Q}}+T(r-\frac{\sigma^2}{2})} \geq K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On pourrait donc le réécrire comme

$\phi\left(S_0 e^{\sigma W_T^{\mathbb{Q}}+T(r-\frac{\sigma^2}{2})}\right) = \left(S_0 e^{\sigma W_T^{\mathbb{Q}}+T(r-\frac{\sigma^2}{2})} - K\right)\mathbb{1}_{\{S_0 e^{\sigma W_T^{\mathbb{Q}}+T(r-\frac{\sigma^2}{2})} \geq K\}}$

$W_T^{\mathbb{Q}} \sim \mathcal{N}(0,T) = \sqrt{T}\,\mathcal{N}(0,1)$

donc $W_T^{\mathbb{Q}} = \sqrt{T}\,Z$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

on a donc

$S_0 e^{\sigma\sqrt{T}Z + T(r-\frac{\sigma^2}{2})} \geq K \Leftrightarrow e^{\sigma\sqrt{T}Z} \geq \frac{K}{S_0} e^{-T(r-\frac{\sigma^2}{2})}$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{\sigma\sqrt{T}Z}\right) \geq \ln\left(\frac{K}{S_0} e^{-T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sigma\sqrt{T}Z \geq \ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow Z \geq \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)$$

Posons $d = \left[T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right) - \ln\left(\frac{K}{S_0}\right)\right]\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}$

Ainsi $Z \geq -d$

$$v(0,S_0) = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}Z+T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)} - K\right)\mathbb{1}_{\{Z\geq -d\}}\right]$$

$$= S_0 \cancel{e^{-rT}}\cancel{e^{rT}} e^{-T\frac{\sigma^2}{2}}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(e^{\sigma\sqrt{T}Z}\right)\mathbb{1}_{\{Z\geq -d\}}\right] - Ke^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{1}_{\{Z\geq -d\}}\right)$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{Z\geq -d\}}\right] = \mathbb{Q}(Z\geq -d) = \mathbb{Q}(-Z\leq d) \overset{\text{symétrie gaussienne}}{=} \mathbb{Q}(Z<d)$$

$$= \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{z^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dz$$

Posons $N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$

$$S_0 e^{-\frac{T\sigma^2}{2}}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(e^{\sigma\sqrt{T}Z}\right)\mathbb{1}_{\{Z\geq -d\}}\right] = S_0 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d}^{+\infty} e^{\sigma\sqrt{T}z} \times e^{-\frac{z^2}{2}} \times e^{-\frac{\sigma^2 T}{2}}\,dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_0 \int_{-d}^{+\infty} e^{-\frac{(z-\sigma\sqrt{T})^2}{2}}\,dz$$

Changement de variable $t = z - \sigma\sqrt{T} \Rightarrow z = t + \sigma\sqrt{T}$

$dz = dt$. Si $z = -d \Rightarrow t = -d - \sigma\sqrt{T}$

Si $z = +\infty \Rightarrow t = +\infty$

$$E\left[S_0 e^{\sigma\sqrt{T}Z - \frac{\sigma^2 T}{2}} \mathbb{1}_{\{Z \geq -d\}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d-\sigma\sqrt{T}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Symétrie loi gaussienne

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d+\sigma\sqrt{T}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Posons $d_- = d + \sigma\sqrt{T} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \ln\left(\frac{K}{S_0}\right)\right) + \sigma\sqrt{T}$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(Tr - \frac{T\sigma^2}{2} - \ln\left(\frac{K}{S_0}\right) + \sigma^2 T\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[Tr + \frac{\sigma^2 T}{2} + \ln\left(\frac{S_0}{K}\right)\right]$$

$$d_- = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) + \ln\left(\frac{S_0}{K}\right)\right]$$

$$d_- = d + \sigma\sqrt{T} \Rightarrow d = d_- - \sigma\sqrt{T}$$

Donc $V(0, S_0) = S_0 N(d_-) - Ke^{-rT} N(d)$

2) En appliquant le m raisonnement, on obtient $\forall t$,

$$v(t, S_t) = S_t N(d_-) - Ke^{-r(T-t)} N(d)$$

avec $d_- = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[(T-t)\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) + \ln\left(\frac{S_t}{K}\right)\right]$

$$d = d_- - \sigma\sqrt{T-t}$$

ii) Calculons $\partial_x v(t, S_t)$

$v(t,x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\phi\left(x e^{\sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}}) + (T-t)(r - \frac{\sigma^2}{2})}\right)\right]$

$\partial_x v(t,x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\partial_x \phi\left(x e^{\sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}}) + (T-t)(r - \frac{\sigma^2}{2})}\right)\right]$

$\partial_x \phi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x - K \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$\partial_x v(t,x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{\sigma\sqrt{T-t}\,Z + (T-t)(r - \frac{\sigma^2}{2})} \partial_x \phi\left(x e^{\sigma\sqrt{T-t}\,Z + (T-t)(r-\frac{\sigma^2}{2})}\right) \mathbb{1}_{\{Z \geq -d\}}\right)$

$= e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\sigma\sqrt{T-t}\,Z} \mathbb{1}_{\{Z \geq -d\}}\right]$

$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\sigma\sqrt{T-t}\,Z} \mathbb{1}_{\{Z \geq -d\}}\right] = \int_{-d}^{+\infty} e^{\sigma\sqrt{T-t}\,z} \times e^{-\frac{z^2}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dz$

Posons $\theta = T - t$

$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\sigma\sqrt{\theta}\,Z} \mathbb{1}_{\{Z \geq -d\}}\right] = \int_{-d}^{+\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2}\theta} \times e^{\sigma\sqrt{\theta}\,z} \times e^{-\frac{z^2}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dz$

$= \int_{-d}^{+\infty} e^{-\frac{(z - \sigma\sqrt{\theta})^2}{2}} dz$

Changement de variable $t = z - \sigma\sqrt{\theta}$

$e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\sigma\sqrt{\theta}\,Z} \mathbb{1}_{\{Z \geq -d\}}\right] = \int_{-\infty}^{d + \sigma\sqrt{\theta}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Posons $d_- = d + \sigma\sqrt{\theta} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\theta}}\left[\theta\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \ln\left(\frac{K}{x}\right)\right] + \sigma\sqrt{\theta}$

$= \frac{1}{\sigma\sqrt{\theta}}\left[\theta\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) + \ln\left(\frac{x}{K}\right)\right]$

$\partial_x v(t,x) = N(d_-)$ avec $N(d_-) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Donc $V(t, S_t) = \mathcal{N}(d_-)$ avec $d_- = \frac{1}{\sigma\sqrt{\theta}}\left[\theta\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) + \ln\left(\frac{S_t}{K}\right)\right]$

6) Bonus : Prouvons $C_H$

Posons $\varepsilon_T = V_T^h - \phi(S_T)$

$\varepsilon_T = V_T^h - \phi\left(S_t e^{\sigma(W_T - W_t) + (T-t)\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}\right)$

$e^{-rT}\varepsilon_T = e^{-rT} V_T^h - e^{-rT}\phi\left(S_t e^{\sigma(W_T - W_t) + (T-t)\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}\right)$

$\mathbb{E}(e^{-rT}\varepsilon_T) = \mathbb{E}(e^{-rT} V_T^h) - \mathbb{E}\left(e^{-rT}\phi\left(S_t e^{\sigma(W_T - W_t) + (T-t)\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}\right)\right)$

$e^{-rt} V_t = \tilde{V}_t$, on a demontré que $\tilde{V}_t$ est une martingale

Donc $\mathbb{E}(e^{-rT}\varepsilon_T) = \mathbb{E}(e^{-rT} V_T^h) - \mathbb{E}(\tilde{V}_0) = \mathbb{E}(e^{-rT} V_T^h) - \mathbb{E}(V_0)$

car $\tilde{V}_0 = e^0 V_0$

Lorsque $h \to 0$, $N \to \infty$ car $h = \frac{T}{N}$

Quand $h \to 0$,

$\mathbb{E}(V_T^h e^{-rT}) \longrightarrow \mathbb{E}(V_0)$

$\mathbb{E}(e^{-rT}\varepsilon_T) \longrightarrow \mathbb{E}(V_0) - \mathbb{E}(V_0)$

Donc $\mathbb{E}(\varepsilon_T) \longrightarrow 0$