

# Випускники дитсадкової квантової механіки

...або як я навчився зупинятися об'єднувати *LEGO* до купи і полюбив  
*ZX*-числення

Bob Coecke<sup>†</sup>, Dominic Horsman<sup>\*</sup>, Aleks Kissinger<sup>‡</sup>, Quanlong Wang<sup>†</sup>

<sup>†</sup> Cambridge Quantum Computing Ltd.

[bob.coecke/harny.wang@cambridgequantum.com](mailto:bob.coecke/harny.wang@cambridgequantum.com)

<sup>\*</sup> Université Grenoble Alpes. [dom.horsman@gmail.com](mailto:dom.horsman@gmail.com)

<sup>‡</sup> Oxford University. [aleks.kissinger@cs.ox.ac.uk](mailto:aleks.kissinger@cs.ox.ac.uk)

23 лютого 2021 р.

## Анотація

Ця стаття є «духовною дитиною» конспектів лекцій 2005 року *Дитсадкова квантова механіка* [23], які показали, як просте графічне розширення нотації Дірака дозволило легко виразити та вивести декілька квантових характеристик, використовуючи мову, зрозумілу навіть у дитсадку. Центральним у цьому підході було використання зображень і графічних правил перетворення зображень для розуміння та знаходження особливостей квантової теорії та квантових обчислень. Однак такий підхід змусив багатьох задуматися, «де м'ясо?» Іншими словами, чи міг цей новий підхід дати нові результати, чи це був просто естетично приємний спосіб переформулювати те, що ми вже знаємо?

Мета цієї статті-продовження — сказати «ось м'ясо!» і висвітлити деякі з основних результатів підходу, який пропагується в Дитсадковій квантовій механіці, і як вони застосовуються для вирішення практичних проблем на реальних квантових комп'ютерах. З цією метою ми зосередимося головним чином на тому, що стало швейцарським армійським ножом образотворчого формалізму: *ZX-calculus*, графічний інструмент для представлення та обробки складних лінійних карт у  $2^N$  вимірному просторі. Спочатку подивимося на деякі ідеї, що лежать в основі *ZX*-числення, порівнюючи та протиставляючи його звичайному формалізму квантових схем. Потім ми зробимо огляд результатів за останні 2 роки, розділені на три категорії: (1) повнота правил *ZX*-числення, (2) передові результати оптимізації квантових схем у комерційних і квантових комп'ютерів із відкритим ісходним кодом, що покладаються на *ZX*, і (3) використання *ZX* для перекладу реальних речей, такі як природна мова, у квантові схеми, які можна запускати на сучасному (дуже обмеженому) квантовому обладнанні.

Ми також сприймаємо назву буквально та описуємо поточний експеримент, який має на меті показати, що *ZX*-числення дозволяє дітям робити передові квантові обчислення. У будь-якому випадку це справді підтвердить, що «дитсадкова квантова механіка» була не просто жартом.

## 1 Вступ

Трохи більше 15 років тому деякі люди (зокрема деякі з нас) почали використовувати непоганий трюк. Візьміть просту стару нотацію «бра-кет» Дірака, типову мову для обчислень у

квантових обчисленнях, і запишіть її у  $2D$ , де матричне множення виглядає як «поєднання коробок», а тензорний продукт виглядає як «поставити коробки поруч», наприклад:

$$(g(f \otimes 1)(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle)) \otimes 1 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ | \\ \boxed{g} \\ | \\ \boxed{f} \quad | \\ \nabla \psi \quad \nabla \phi \end{array} \quad \Bigg|$$

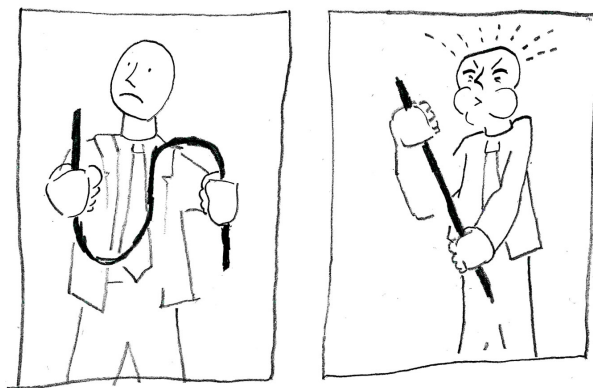
Поки що все не так сильно відрізняється від квантових схем. Однак ключовим трюком було запис максимально заплутаного стан і його приєднаний (adjoint), як зігнутих шматків дроту:

$$\cup := |00\rangle + |11\rangle \quad \cap := \langle 00| + \langle 11| \quad (1)$$

Тоді, головна ідея квантової телепортації, яка в основному є цим рівнянням:

$$((\langle 00| + \langle 11|) \otimes 1)(1 \otimes (|00\rangle + |11\rangle)) = 1$$

стає чимось візуально дуже інтуїтивним:



Таким чином, дітсадкова квантова механіка стала реальністю. Такі трюки не були чимось новим, оскільки певному лауреату Нобелівської премії на ім'я Роджер Пенроуз у 1970-х роках так набридло дивитися на індекси в тензорній нотації теорії відносності, що з цією метою він винайшов такого типу зображення. Тож ми були у гарній компанії.

Гарний початок, але скільки корисного можна отримати завдяки таким трюкам? Ну, як виявилось, багато: можна викладати цілий курс квантових обчислень і квантових основ у цих умовах.<sup>1</sup> Наскільки це дійсно нове? Тобто, чи може малювання квантових процесів дозволити нам робити те, що ми не могли робити раніше? Або це просто арт-проект?

Саме тут з'являється *ZX-числення*. ZX-числення — це графічна мова для вираження квантових обчислень, головним чином над кубітами. Незважаючи на те, що вона існує із 2008 року, справжнє зростання почалося лише в 2018 році, коли з'явилося кілька основних результатів:

- (1) ZX-числення було «завершено», що означає, що всі рівняння, що стосуються квантових процесів із залученням кубітів, які можна вивести за допомогою лінійної алгебри,

<sup>1</sup>Цей курс проводиться з 2012 року в Оксфордському університеті, і цей курс став основою для «книги додо». [39]. <https://www.cs.ox.ac.uk/teaching/courses/2019-2020/quantum/>

також можна отримати за допомогою кількох графічних правил [68,109]. Це об'єднує обіцянки, дані на початку розвитку дитсадкової квантової механіки, що графічне міркування слід розглядати не просто як корисний механізм, а як справжню альтернативу формалізму Гільбертового простору.

- (2) Для певних задач оптимізації квантових схем, методи на основі ZX тепер перевершують найсучасніші, наприклад, [44] показав T-кількості, які були на 50% кращі, ніж відомі методи на момент публікації. Ці спрощення важливі для адаптації задач до існуючих квантових комп'ютерів і зіграли важливу роль у розробці комерційних квантових компіляторів, таких як t|ket> [103] Cambridge Quantum Computing.
- (3) ZX-числення нещодавно дозволив команді перетворити обробку природної мови з урахуванням граматики [42] у варіаційні квантові схеми [27], придатні для роботи на існуючому маломасштабному квантовому обладнанні, що призвело до першої реалізації квантової обробки природної мови на квантовому комп'ютері [86].

Ця стаття не має на меті бути підручником, а є легким вступом і оглядом деяких нещодавніх успіхів. Якщо вам потрібен більш детальний посібник щодо використання ZX-числення, кілька інших ресурсів уже доступні. Наприклад, книга [39] дає розгорнутий вступ до широкої теми пікторальних квантових міркувань, що веде до детального представлення ZX-числення. Незважаючи на те, що це досить великий фоліант (850 сторінок), він повний картинок і його викладали кілька разів (в Оксфорді, Неймегені та Пекіні) приблизно у 20 годинах лекцій. Набагато коротший вступний ZX-посібник це [31], а розширений, актуальний вступ із багатьма прикладами практичної роботи – це [107]. Крім того, є підручник для середньої школи [37], який ми обговорюємо в розділі 8.

## 2 ZX: LEGO для квантових обчислень

Ми познайомимося з ZX-численням, порівнюючи його зі стандартною мовою квантових схем, і, зокрема, пояснюючи спосіб, у який ZX-числення (доволі дослівно) виходить за межі того, як ми можемо маніпулювати та міркувати за допомогою квантових схем.

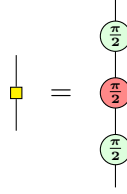
**ZX-мова.** Типові примітиви мови квантових схем включають CNOT-вентилі та певні однокубітні вентилі, такі як Z-фазові вентилі та вентиль Адамара. Ми позначаємо їх тут наступним чином:

$$\begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \end{array} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \end{array} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{---} \square \text{---} \end{array} := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

У той час як Z-фазові вентилем зазвичай вважаються діагональними в стандартному (або "Z") базисі, ми можемо сполучити за допомогою Адамара вентилем, щоб отримати X-фазові вентилі, які є діагональними в Адамаровому (або "X") базисі:

$$\begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \end{array} := \begin{array}{c} \text{---} \square \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \square \text{---} \end{array}$$

Ці два типи фазових вентилів тепер можна використовувати для побудови інших речей, наприклад, сам вентиль Адамара тепер з'являється, як скалярний множник (який ми ігноруємо), до *розкладу Ейлера* у термінах фазових вентилів:



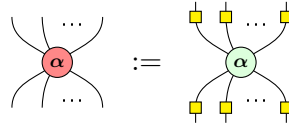
Замість простого використання стандартних фазових вентилів як будівельних блоків для інших вентилів, ZX-числення використовує їх узагальнення, що дозволяє змінювати кількість вхідних і вихідних проводів цих фазових вентилів. Більш конкретно, ми можемо узагальнити фазові ворота до ‘павуків’:

$$\begin{aligned}
 \text{Green Spider} &:= |0 \dots 0\rangle \langle 0 \dots 0| + e^{i\alpha} |1 \dots 1\rangle \langle 1 \dots 1| \\
 \text{Red Spider} &:= |+\dots+\rangle \langle +\dots+| + e^{i\alpha} |-\dots-\rangle \langle -\dots-|
 \end{aligned} \tag{2}$$

Не вдаючись до бра-кет нотації, Z-павук із  $m$  ногами всередині та  $n$  ногами назовні є матрицею  $2^n \times 2^m$  із рівно 2 ненульовими елементами:

$$\text{Green Spider} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix}$$

і X-павук може бути зроблений з Z-павука так само, як ми робили з фазовими вентилями:



Відсутність  $\alpha$  означає  $\alpha = 0$ , напр.

$$\text{Green Spider} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Звідси випливає, що чашки та шапки (1), а також багато основних квантових станів і ефектів є окремими випадками павуків:

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{green circle} = \text{red circle} = \text{arc} & \text{red dot} = |0\rangle & \text{red circle with } \pi = |1\rangle & \text{green dot} = |+\rangle & \text{green circle with } \pi = |-\rangle \\
\text{green circle} = \text{red circle} = \text{arc} & \text{red dot} = \langle 0| & \text{red circle with } \pi = \langle 1| & \text{green dot} = \langle +| & \text{green circle with } \pi = \langle -|
\end{array}$$

де  $|+\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle + |1\rangle)$ ,  $|-\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle - |1\rangle)$ , ми проігнорували деякі фактори нормалізації.

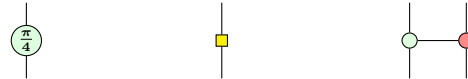
Павуки - це все, з чого складається мова ZX-числення. Чому ZX-числення може обійтися тільки цим? Оскільки тепер ми можемо побудувати CNOT-вентилі з цих павуків наступним чином:


(3)

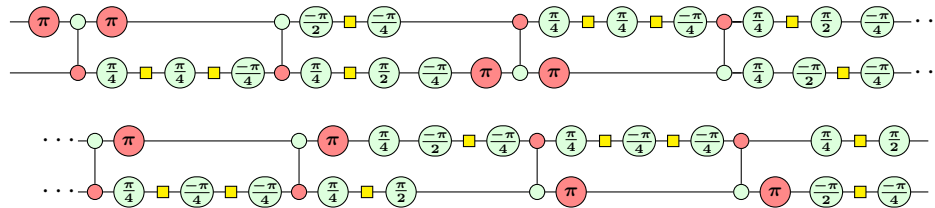
Те, що це справді так, можна легко перевірити за допомогою матриць. Так, зокрема, CNOT-вентиль більше не потрібно розглядати як примітив, він розпадається на дві менші частини. Коли у нас є фазові вентилі та CNOT-вентилі, ми знаємо, що можемо відтворити будь-яку квантову схему, що складається з будь-яких вентилів.

Який результат цього? Точніше, чому це краще, ніж використання стандартних схем? Справжня сила ZX-числення полягає в тому, що з цими меншими частинами в (3) дуже легко працювати, у тому сенсі, що правила, які ними керують, легко зрозуміти, запам'ятати та виконати обчислення за ними. Крім того, їх не так багато. Навпаки, придумати всі правила, які керують фіксованим набором квантових вентилів, справді важко, і мало що відомо, окрім випадків дуже обмежених наборів воріт [2] або невеликої фіксованої кількості кубітів.

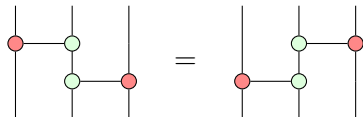
Наприклад, було показано в [100], що дійсно існує набір правил рівнянь квантових схем, яких достатньо, щоб підтвердити всі істинні рівняння для 2-кубітових схем, побудованих із цих вентилів:



Це вентилі, які ми представили на початку цього розділу, але з Z-фазами, обмеженими  $\alpha = \pi/4$ . Однак деякі правила величезні, і з ними важко працювати. Цілком їх можна знайти в [43], але щоб відчувати їхній масштаб, ось ліва частина одного з правил, яка завелика, щоб поміститися на сторінці :


(4)

Ми очікуємо, що ця ситуація погіршуватиметься, коли ми переходимо до більшої кількості кубітів. Наприклад, важко уявити, що таке подальше 3-кубітне правило, як:


(5)


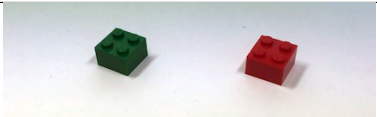

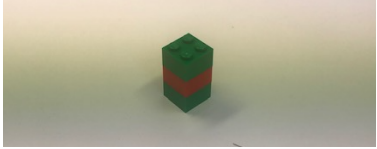

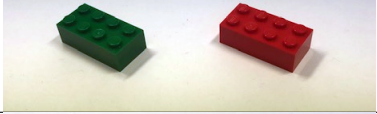

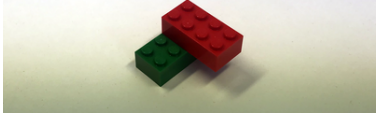
можна коли-небудь підтвердити, використовуючи лише 2-кубітні правила із [43, 100] або будь-яких 2-кубітні правила власне кажучи. Здається, що для цього потрібно розкласти принаймні один із вентилів CNOT на однокубітні вентилях, що неможливо. Звичайно, диявол криється в деталях, тому поки що залишимо наступне як припущення:

**Припущення 2.1.** Жоден набір правил, що включає лише дві схеми кубітів, не може бути повним для схем із більш ніж 2 кубітами.

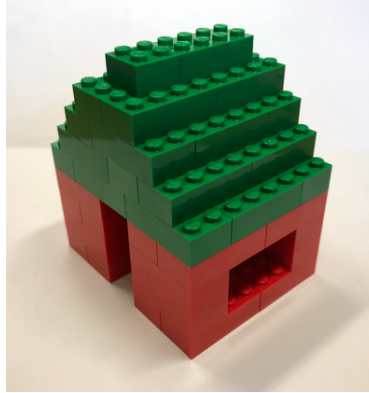
З іншого боку, ми побачимо в розділі про повноту 4, що можна розмістити на одній стороні А4 усі ZX-правила, необхідні для доведення всіх рівнянь, які є вірними для для всіх ZX-картинки, включаючи схеми, створені з будь-яких вентилів з будь-якою кількістю кубітів.

Ці набагато простіші ZX-правила відображають той факт, що ZX-мова тим чи іншим чином більш фундаментальна, ніж схеми.

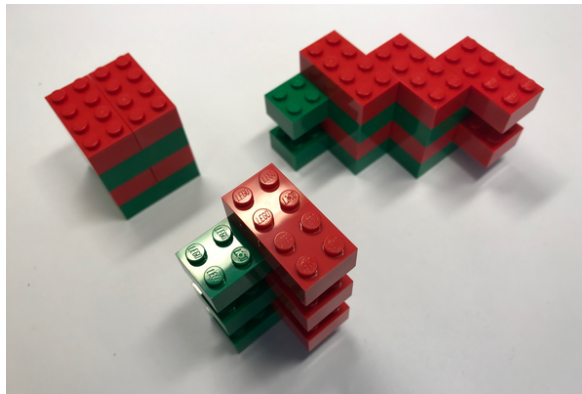
Розглянемо аналогію з LEGO. Базову цеглинку LEGO було розроблено для її універсальності, але якщо ви були настільки божевільні, щоб склеїти всі свої LEGO разом у кілька фіксованих «композитних» блоків, ця знаменита універсальність зникає. Просто заради розваги, давайте розглянемо це трохи далі і припустимо, що справді існують аналогії LEGO для зображень ZX:

ZX-мова	LEGO аналогія
	
	
	
	

Стандартний LEGO дозволяє створювати безліч творів:



тоді як композитний блок допускає лише обмежений спектр «мистецтва»:



Зокрема, схемні вентиля мають унітарність, а ZX-компоненти звільнені від унітарного обмеження.

Якщо ми хочемо фактично запустити обчислення на квантовому комп'ютері, може статися так, що зрештою нас дійсно цікавлять лише унітарні квантові схеми. У такому випадку природно запитати: чи справді ця додаткова свобода *гарна* річ? Ми б стверджували, що це так, і що ми маємо ситуацію, яка дещо схожа на комплексний аналіз. У випадку складного аналізу, залишення дійсних чисел позаду (іноді тимчасово) дає нам набагато більше потужності та елегантності, навіть коли ми доводимо речі про дійсні числа. Ми побачимо, що це саме явище відбувається для ZX-зображень у Розділі 5, де ми обговорюємо, як оптимізувати квантові схеми шляхом тимчасового виходу зі світу схем, а потім повернення.

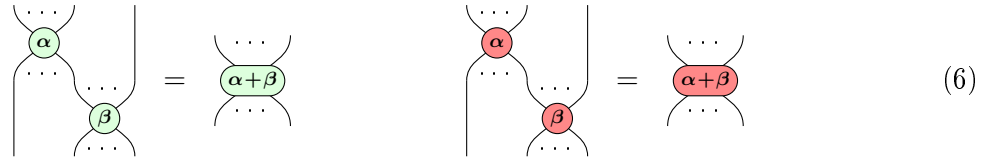
Було пояснено в [104], що алгебраїчні структури, які лежать в основі ZX-числення, — це не просто звичайний LEGO, а «чарівний LEGO», який є дуже гнучким і дозволяє створювати всі види нестямний творінь. Це завдяки гнучкості графічної мови, яку ми обговоримо в наступному розділі. Розглядаючи лише «склеєні» LEGO, тобто квантові вентиля, ми пропускаємо всю цю історію. Отже, мораль така:

*Припиніть склеювати своє LEGO!*

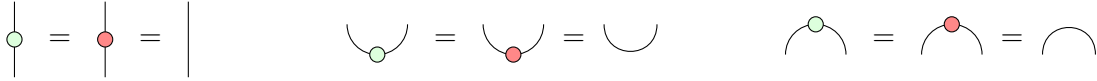
### 3 Базові ZX-правила

**Правила злиття павуків.** Конкретно, існує три типи правил, які керують павуками ZX (2). Перший тип стосується того, як взаємодіють павуки одного кольору, і вони дуже

прості: павуки одного кольору «зливаються» разом, і їхні фази складаються:

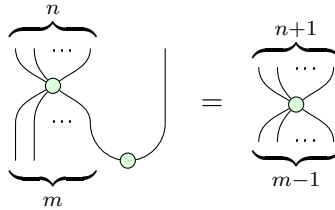


Один із способів уявити павуків як «багато-дротових», оскільки звичайні дроти мають два кінці, багато-дроти можуть мати декілька кінців. Тоді наступні багато-дроти є звичайними дротами:



Що характеризує дріт, так це те, що він з'єднує два кінці, і якщо ви з'єднаєте два дроти разом, ви знову отримаєте (тепер довший) дріт. Те саме стосується багатодровових мереж, і (6) просто говорить, що якщо ви з'єднаєте два багатодровові мережі, ви отримаєте ще одну багатодровову мережу.

Також немає реальної різниці між вхідною-лапкою-павука і вихідною-лапкою-павука, оскільки злиття-павуків дозволяє легко міняти ці ролі:

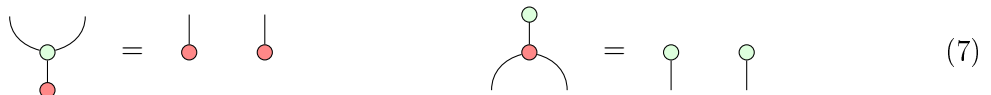


Загалом це означає, що в ZX-численні:

*має значення тільки зв'язок*

і що ми можемо думати про ZX-картинки як про графи, тобто щось, що визначається вузлами та ребрами, що їх з'єднують. Тоді незв'язані ноги роблять його «відкритим» графом [47]. Ця гнучкість не має сенсу для звичайних схем, де кожен вентиль повинен мати чітко визначені входи та виходи.

**Сильні правила комплементарності.** Другий тип правил стосується взаємодії між павуками різного кольору. Їх можна сформулювати як ці два правила:



разом із цим третім:





або, як це єдине правило:

$$(9)$$

Правила (7) говорять нам, що одноногі павуки (а.к.а. стани/ефекти) копіюються павуками протилежного кольору. Правило (8) трохи важче інтерпретувати, і навіть не будемо починати про (9). Але всі вони слідуєть чіткому шаблону, а саме, різні кольори можуть рухатися один через одного. Взявши ці правила разом із злиттям-павуків, можна вивести таке [30]:

$$(10)$$

Давайте ще раз підкреслимо, що для виведення цього правила важливо мати злиття-павуків. Без нього (9) і (10) незалежні. Насправді в математиці правило (9) визначає біалгебру, а наявність (10) робить її алгеброю Хопфа (з тривіальним антиподом) [22]. Ми скажемо більше про математичну звичність цих конкретних правил у Розд. 9.

Правило (10) має дуже інтуїтивне читання, а саме те, що два дроти між павуками протилежного кольору завжди зникають. Іншими словами, 2-цикл завжди зникає:

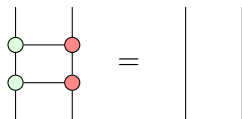
Ми також можемо дати аналогічну інтерпретацію (8), а саме, що ми також можемо виключити всі 4-цикли:

Правило (10) також має дуже чітке концептуальне тлумачення, а саме комплементарність або, за сучасною термінологією, неупередженість. Можна показати, що павуки, визначені як лінійні карти, які підкоряються злиттю-павуків, завжди однозначно фіксуються вибором ортонормованого базису [41]. Тоді (10) говорить нам, що ці два ортонормальні бази мають бути взаємно неупередженими [30, 39]. Взаємно неупереджені основи постійно виникають у квантових обчисленнях і квантовій теорії інформації. Наприклад, багато квантової криптографії, включаючи знаменитий протокол квантового розподілу ключів BB84 [11], залежить від взаємно неупереджених баз.

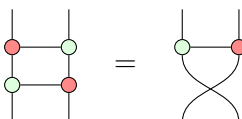
Отже, правило (10) визначає пари взаємно неупереджених ортонормальних баз. Оскільки, припускаючи злиття павуків, правило (9) сильніше ніж (10), ми називаємо це «сильною комплементарністю». Цікава річ у цьому новому понятті сильної комплементарності полягає в тому, що ми насправді знаємо про неї більше, ніж про звичайну комплементарність.

Ми знаємо, що взаємна сильна комплементарність є моногамною, тому вона може бути лише парами [39, Thm. 9.66], і всі ці пари були повністю класифіковані для скінченновимірних гільбертових просторів у термінах скінченних абелевих груп [32].

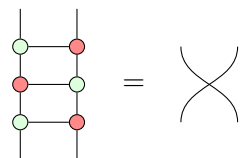
З точки зору схем, правило (10) говорить нам, що CNOT-вентилі є унітарними:



Якщо замість CNOT-вентилей, що діють на той самий дріт однакового кольору, ми зробимо навпаки, ми отримаємо інтерпретацію схеми для (8):



Разом ці два рівняння схем дають:



Більш широке обговорення сильної комплементарності міститься в [39]. Наразі ми припиняємо обговорювати правила, а виконаємо деякі речі з тими правилами, що є. Ми обговоримо правила далі в наступному розділі.

## 4 Повне числення

Ні правила (6), ні (9) не є специфічними для кубітів, але мають сенс у всіх вимірах і навіть за межами квантової теорії Гільбертового простору. Дійсно, вони створюють канву для вивчення теорій, більш загальних, ніж квантова теорія, і вони, наприклад, уможливили чітке графічне представлення теорії іграшок Спеккенса [7, 35, 36]. Примітно, що такий вид презентації дозволяє точно визначити, де квантова теорія та цікаві «квантовоподібні» теорії відділяються. У цьому випадку це пов'язано з різницею у двох скінченних групах  $\mathbb{Z}_4$  і  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . Широке обговорення всього цього міститься в [39], Розділ 11.

Інші статті про узагальнені теорії, засновані на сильній комплементарності, включають [32, 33, 59, 60, 63, 64]. Усе це є частиною підходу «процесних теорій» до квантових основ, де квантовоподібні теорії визначаються за допомогою симетричної моноїдальної категорії, так само як теорія процесів, а їхні особливості вивчаються абстрактно (див., наприклад, [25, 26, 61, 62, 74, 82, 92, 93, 98, 99]).

Однак, якщо ми повернемося на землю, ми зможемо подивитися, які правила насправді є специфічними для квантових обчислень з кубітами. Як ми побачимо, нам не потрібно заходити надто далеко, перш ніж матимемо достатньо правил, щоб довести кожне справжнє рівняння між малюнками.

**Правило(-а), пов'язані з кубітом.** Знову звертаючи нашу увагу на гільбертовий простір і кубіти конкретно, ще одне правило, яке було частиною ZX-числення на ранньому етапі, хоча й у зовсім іншій формі, це таке:

(11)

Форма, у якій воно з'явилося спочатку, була першим із цих правил [29]:

(12)

який є гарним, а друге додано трохи пізніше [50], який є трохи менш гарним. Разом ці два правила, що стосуються жовтої рамки, еквівалентні (11). Отже, що нам говорить (11)?

Ми вже розповідали вам про X-павуків і Z-павуків, але ви можете запитати, «що трапилося з Y?» Ми поклали свої мізки в піч і спекли наші Y?

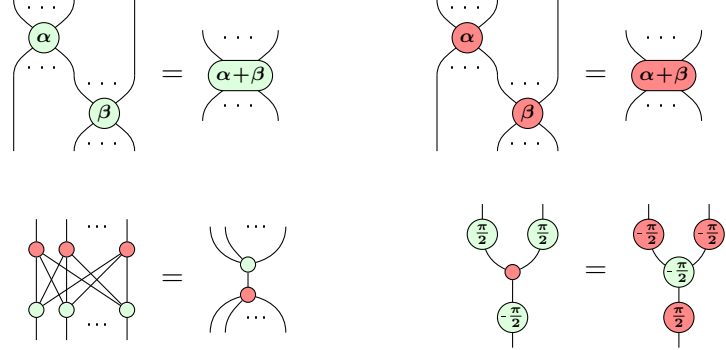
Ні! Насправді ми не визначали Y-павуків, тому що їх уже можна визначити двома різними способами: у термінах X-павука або в термінах Z-павука. Рівняння (11) пов'язує ці два різні способи.

Це правило походить від геометрії *сфери Блоха*, загального способу візуалізації операцій кубіта як обертання сфери, щоб обертати X/Z на Y. Крім того, ви можете трохи змінити це правило наступним чином:

що насправді:

А, отже-сенько, еквівалентність із правилами (12). Перегляньте [39] для належного доказу, без ‘сенько’. :)

**Повний набір правил** Отже, що ми можемо довести за правилами, які ми маємо зараз? Це:


(13)

Ми вже зазначали в Розділі 2, що за допомогою ZX-числення ми можемо пройти весь шлях і довести кожне рівняння, яке можна довести за допомогою лінійної алгебри. У [96] було показано, що цих правил поки недостатньо.

Проте Бекенс [3] показав, що вони дають нам змогу довести кожне рівняння, яке виконується для *квантової теорії стабілізатора*, тобто ZX-зображень із фазами, кратними  $\pi/2$ .

Це, звичайно, не маловажливий фрагмент квантової теорії, оскільки, наприклад, достатньо довести, що квантова теорія є нелокальною [32]. З іншого боку, квантові схеми стабілізатора можна ефективно моделювати класично [65].

На практиці, навіть незважаючи на те, що наведені вище ZX-правила не можуть підтвердити *всі* рівняння, включаючи схеми за межами квантової теорії стабілізатора, вони здаються досить придатними для багатьох практичних завдань, таких як оптимізація схем, як ми побачимо в наступному розділі.

Звичайно, ми дійсно хочемо зрозуміти, які додаткові правила потрібні, щоб мати можливість довести всі рівняння. Вони були вперше встановлені Нг та Вонг у [87], спираючись на результат Хадзіхасановича щодо графічного числення, пов'язаного із ZX-численням [67, 68]. По дорозі результат Жанделя, Пердрікса та Вілмарта встановив можливість виводу всіх рівнянь для ‘Кліффорд+Т’ ZX-зображень, які узагальнюють стабілізатори, допускаючи кратні  $\pi/4$ , а не лише  $\pi/2$  [71].

Подібні теореми називають теоремами *про повноту* в тому сенсі, що правила утворюють повний набір щодо можливості виведення. Зараз існує кілька різних повних наборів правил для повного сімейства ZX-зображень [87, 109], а також для різних спеціальних випадків [71–73, 108]. Найбільш стислий набір на даний момент додає єдине правило до 4 правил вище, яке дозволяє обмінювати кольори фаз у трійках [109]:


(14)

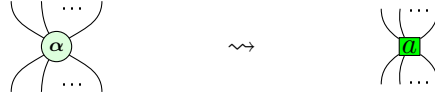
де кожна з фаз  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$  є тригонометричними функціями фаз у лівій частині.

Це правило вперше було введено для випадку двокубітових схем [43], причому двоє авторів цієї статті не зрозуміли, що це також дасть повномасштабну повноту. Здається, це показує нам, що чотири основні правила (13) вже охоплюють усі складні взаємодії кількох кубітів, аж до деяких «локальних» одиничних рівнянь кубітів, які всі поглинаються (14).

Отже, якщо ми маємо повний набір правил для всіх ZX-зображень, ми повинні бути щасливі, чи не так? Неправильно! Повнота повинна розглядатися як початок, а не кінець для обчислення ZX, і можна багато чого отримати, знайшовши кращі правила.

Наприклад, стислість, отримана завдяки введенню правила зміни кольору (14), коштує введення складних тригонометричних функцій фаз кожного разу, коли воно застосовується. Насправді вони досить потворні, тому ми навіть не потрудилися написати їх тут. Якщо ми працюємо з фазами чисельно на комп'ютері, це не є великою проблемою, але для символічних маніпуляцій це швидко стає непрактичним.

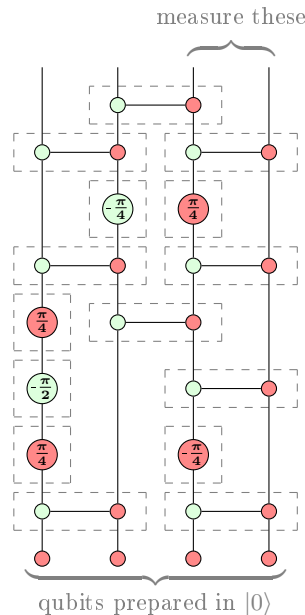
Один із способів вирішення цієї проблеми — перейти до *алгебраїчного ZX-числення*, яке замінює фази  $\alpha \in [0, 2\pi)$  — які стають  $e^{i\alpha}$  у визначення павука (2) — на прості комплексні числа  $a \in \mathbb{C}$ :



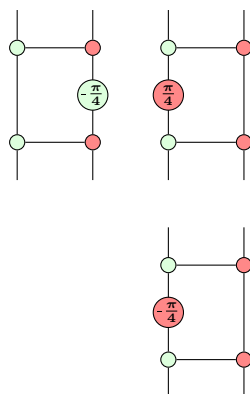
Наше попереднє уявлення про павуків все ще існує, просто встановивши  $a := e^{i\alpha}$ , але додаткова загальність дає нам кілька приємних особливостей, таких як більш просте кодування комплексних матриць, також як і прямолінійне узагальнення від 2D до всіх скінченних вимірів [111] і від комплексних чисел до будь-якого комутативного півкільця [110].

## 5 Автоматизована оптимізація схем

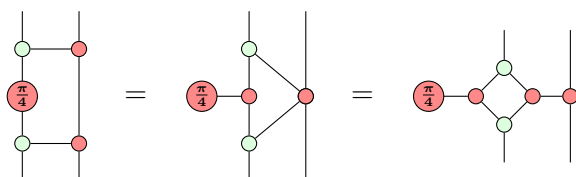
Якщо задано схему, чи може ZX-числення допомогти її спростити? Звичайно, може, і, здається, вдається йому краще за будь-що інше. Ось приклад того, як це працює. Припустімо, ми хочемо спростити наступну схему, що складається з кількох вентилів, і нам потрібно виміряти останні два кубіти:



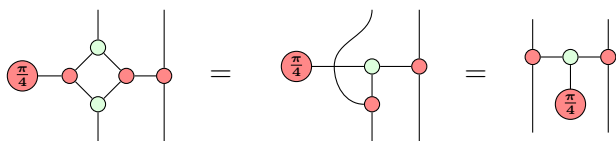
Тут є багато 4-циклів, і ми щойно дізналися, що ZX-числення добре позбавляється від 4-циклів. 4-цикли тут:



Однак вони не є 4-циклами, тому що вони виглядають як прямокутники, оскільки 4-цикли, які ми шукаємо, мають чергування кольорів як кути. Ми можемо зробити деякі (роз-)злиття:



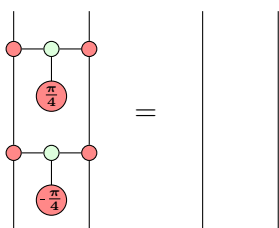
і тепер ми можемо видалити цей квадрат, а потім трохи переставити:



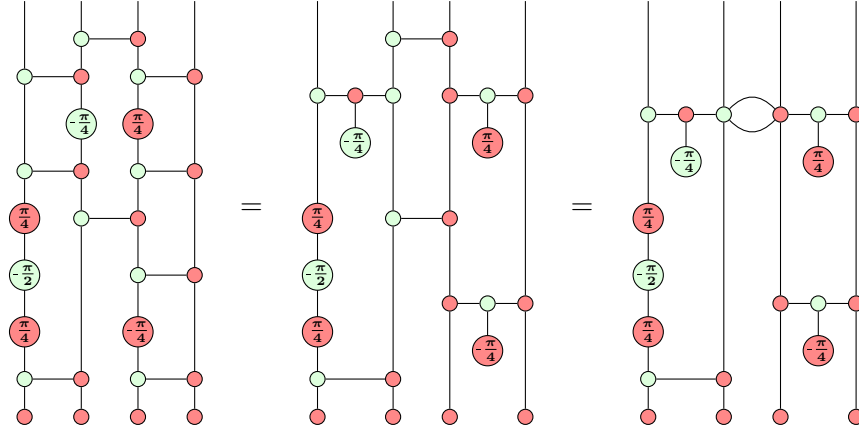
Ми можемо зробити те саме для інших 4-циклів:



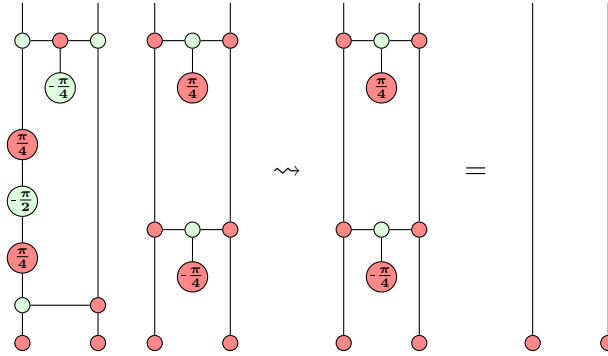
Те, що ми отримуємо, було названо «фазовим гаджетом» [77]. Знову використовуючи трюк для усунення 4-циклів, можна також виявити, що фазові гаджети з протилежними кутами компенсуються:



Гей-гоп поїхали. Спочатку вводимо фазові гаджети, а потім зливаємо:



Ми отримуємо 2-цикл, який, як ми знаємо, зникає, а потім два кубіти ліворуч повністю відокремлюються від кубітів праворуч, тому ми можемо про них забути:



в результаті ми отримуємо те, з чого почали, незважаючи на те, що коли ми починали схема виглядала досить складною.

Незважаючи на те, що легко працювати з невеликими схемами вручну, ми також хотіли б застосувати ці методи до схем із тисячами або мільйонами квантових вентилів, тому природно подумати про те, як такі види спрощень можна автоматизувати. Стандартним методом для цього є заміна рівнянь, які можна застосовувати в будь-якому напрямку, на спрямовані правила перезапису. Наприклад:

$$\begin{array}{c} \dots \\ \vdots \\ \alpha \\ \vdots \\ \beta \\ \vdots \end{array} = \begin{array}{c} \dots \\ \vdots \\ \alpha + \beta \\ \vdots \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \dots \\ \vdots \\ \alpha \\ \vdots \\ \beta \\ \vdots \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \dots \\ \vdots \\ \alpha + \beta \\ \vdots \end{array} \quad (15)$$

Поки правила зменшують деякі показники ZX-зображення (наприклад, кількість павуків), застосування їх наосліп, доки вони не перестануть застосовуватися, завжди завершується. На жаргоні теорії перезапису це означає, що ми можемо автоматизувати спрощення ZX-зображень за допомогою *системи завершення перезапису*, заснованої на підмножині правил ZX-числення.

Це переписування можна формалізувати таким чином, щоб ZX-зображення могли бути представлені та трансформовані програмними інструментами за допомогою методу під

```
In [11]: zx.simplify.clifford_simp(g)
g.normalise()
zx.d3.draw(g)
```

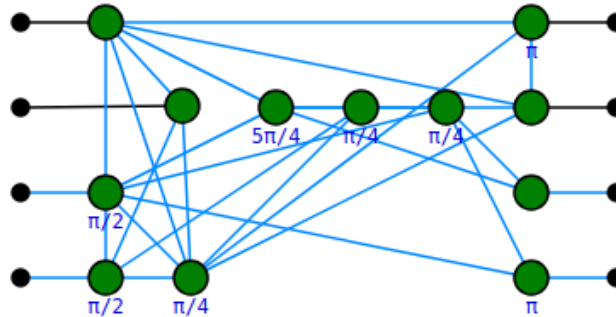


Рис. 1: PyZX — це бібліотека Python і інструмент оптимізації схем за допомогою ZX-числення. Дивись [github.com/Quantomatic/pyzx](https://github.com/Quantomatic/pyzx).

назвою *переписування графа з подвійним висуванням* [54]. Базова теорія для представлення ZX-зображень у вигляді графів і їх переписування була представлена в [47] і нещодавно розширена в [14]. Це формує основу діаграмного ‘помічника з доказів’ під назвою Quantomatic [78].

«Розриваючи» вентиля в квантовій схемі, ми можемо знайти спрощення в ZX-численні, які були б приховані на рівні вентиля. Однак ми можемо отримати щось, що більше не буде схоже на схему. Отже, важливою проблемою для методів оптимізації на основі ZX є *вилучення схеми*, яке ефективно відновлює вентиляну декомпозицію зі спрощеного ZX-зображення. Ця техніка спрощення та виділення для ZX була введена в [49], узагальнена до ширшого сімейства діаграм у [6] та є основою інструменту квантової оптимізації схеми PyZX [76] (Рис. 1).

Перезапис ZX-зображень також є основою спеціального інструменту спрощення схеми STOMP [44], який зменшує важливу метрику вартості, звану T-кількістю квантової схеми, використовуючи так звані ідентичності «павукових гнізд».

## 6 Квантова обробка природної мови

ZX-обчислення виникло з більш загального образного підходу до квантових основ і квантового числення, що називається категоріальною квантовою механікою (CQM) [1, 23]. Насправді CQM пропонує альтернативний гільбертовому простору формалізм, який робить наголос на тому, як складаються системи, а не на тому, в якому просторі системи описуються. Завдяки успіхам ZX-числення можна справедливо сказати, що ця альтернатива має справжні практичні переваги.

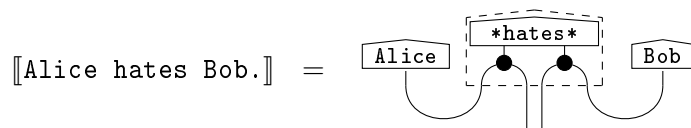
З іншого боку, графічні структури, які використовує CQM (і в багатьох випадках походять звідти), виходять далеко за межі квантової теорії. Наприклад, вони були застосовані в теорії обчислюваності [89], моделі паралелізму [105], теорії керування [9, 19], дослідження електричних [10] та цифрових [57] схеми, теорії ігор [56], ширші когнітивні функції [13], обробка природної мови [42, 95] і навіть дослідження свідомості [102, 106]!



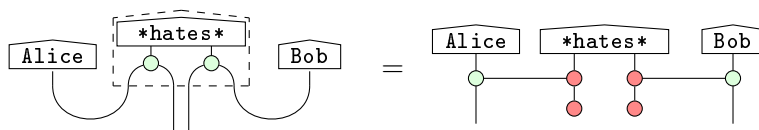
Оскільки аспекти ZX-обчислення є важливими для деяких із цих областей, можна стверджувати, що певною мірою вони є «кванто-подібними». Хоча в деяких випадках це можна сприймати лише як приблизну аналогію, у конкретній області обробки природної мови (ОПМ) здається корисним сприймати цей квантовий зв'язок серйозно. У підході до ОПМ, запропонованому в [42], моделі векторного простору для значення слова були об'єднані з граматичною структурою для створення композиційних моделей значення речення. Оскільки ця модель дуже важливо використовує цей тензорний добуток векторних просторів, що дає експоненціальні вимоги до простору на класичному комп'ютері. З іншого боку, формування тензорних добутків на квантовому комп'ютері є дешевим, оскільки це саме те, що відбувається, коли ви розміщуєте два фрагменти квантових даних поруч. Це усвідомлення призвело до пропозиції квантового алгоритму обробки природної мови [113]. З різних причин ця перша пропозиція була не дуже практичною для роботи на квантових комп'ютерах сьогодні чи найближчого майбутнього.

Нещодавно цю пропозицію було скориговано та вдосконалено, щоб відповідати існуючому квантовому апаратному забезпеченню [27,85], і реалізовано на квантових пристроях IBM [86]. Це стало прикладом «нативно-квантового» рішення класичної проблеми. Тобто, хоча проблема не має нічого спільного з квантовими системами, її структура все ще природно живе на квантовому комп'ютері.

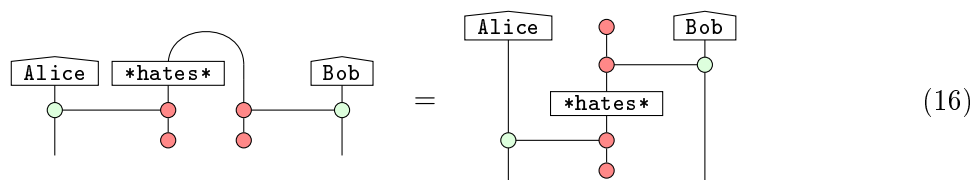
Важливим удосконаленням від оригінального алгоритму до того, який нещодавно реалізовано на реальному квантовому комп'ютері, було використання ZX-числення для перетворення зображення, що представляє речення природної мови, у квантову схему, що виконується, яка обчислює щось про значення речення в рамках моделі NLP. Ось приклад речення та його інтерпретація як зображення:



Щоб «запустити» це речення на квантовому комп'ютері, ми спочатку інтерпретуємо чорну крапку як зеленого ZX-павука. Тепер ми можемо використовувати ZX-числення, щоб перетворити його на схему:

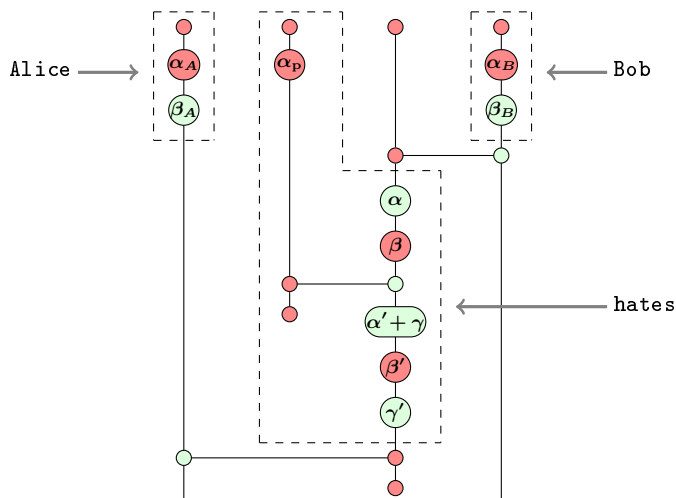


Потім ми можемо використовувати правила ZX-числення, щоб масувати цю діаграму в іншу форму (із еквівалентним значенням):



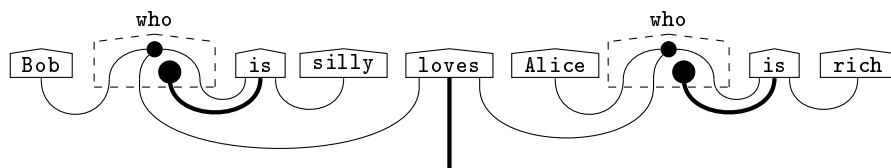
і замініть значення слів деякими фрагментами ZX-картинки з вільними параметрами,

$\alpha, \beta, \dots$ :



Ці параметри «навчаються» протягом багатьох прогонів таких схем за допомогою методів машинного навчання. Кінцевий продукт — це квантова схема, здатна в принципі порівнювати значення речень, відповідати на запитання та виконувати багато інших лінгвістичних завдань.

Це дуже просте речення використовує лише дрібку ZX-числення, але вже стає зрозуміло, що «еластичність» ZX корисна для таких завдань. Існує багато еквівалентних способів обчислення значення речення, і деякі краще підходять для квантового комп'ютера, ніж інші, тому «масаж» у рівнянні (16). Це дійсно починає окупатися, коли ви починаєте розглядати більш складні речення, як це: This very simple sentence only uses a dash of ZX-calculus, but it already becomes clear that the ‘elasticity’ of ZX is helpful for such tasks. There are many equivalent ways to compute the sentence meaning, and some fit better on a quantum computer than others, hence the ‘massaging’ in equation (16). This really starts to pay off when one starts to consider more complex sentences like this one:



Це можна розглядати як процес компіляції, але такий, який приймає не мову програмування як вхідні дані, а природну мову, і перетворює його на квантовий машинний код за допомогою ZX-числення для обробки всього проміжного. Кінцевим результатом є фізика: використання квантових систем для обробки природної мови за допомогою ZX-числення.

Квантове машинне навчання відіграє центральну роль у квантовій обробці природної мови. Останнім часом ZX-числення почало відігравати важливу роль у покращенні нашого розуміння самого квантового машинного навчання: спочатку у зображенні квантового ansätze [112], а потім в аналізі важливих проблем у підході, таких як феномен безплідного плато [114].

## 7 MBQC і відмовостійкість

Квантові обчислення на основі вимірювань (MBQC від Measurement-based quantum computing) — це модель обчислень, альтернативна схемній моделі, де вимірювання, а не квантові

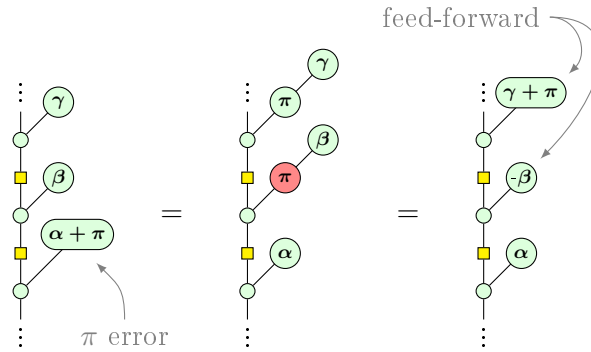
ворота, є основними елементами, що керують обчисленнями. Найбільш добре вивчена конфігурація MBQC називається квантовою *односторонньою моделлю* [94]. У цій конфігурації багато кубітів готуються в певному фіксованому стані, що називається *станом графа*, а потім одно-кубітовими вимірюваннями готуються у певному порядку.

Примітно, що вибір типу виконаного вимірювання може залежати від попередніх результатів вимірювання, принцип, який називають *передаючим*. Незважаючи на те, що кожен окремий результат вимірювання є недетермінованим, розумне застосування прямого зв'язку може створити детерміновані квантові обчислення.

Наприклад, в односторонній моделі вимірювання визначаються кутами  $\alpha \in [0, 2\pi)$ . Коли вони виконуються, відбувається одна з двох недетермінованих речей:

$$\alpha \quad \text{або} \quad \alpha + \pi.$$

Припустімо, що ми справді хотіли отримати перший результат для нашого обчислення, тоді обчислення ZX підказує нам, як «просунути» небажаний  $\pi$  вперед у часі, змінюючи майбутні кути вимірювання:



Насправді полегшення таких обчислень в односторонній моделі було однією з початкових мотивацій для ZX-числення. ZX використовувався, наприклад, для навчання односторонній моделі повністю графічним способом [39], дати першу техніку для перетворення обчислень MBQC у схеми, які не потребують додаткових кубітів або (нефізичних) циклів зворотного зв'язку [51] і створити альтернативну модель для MBQC на основі взаємодії Паулі-ZZ [75], які є рідними 2-кубітовими вентилями для більшості типів квантового обладнання.

Ще одна популярна сім'я моделей квантового обчислення, заснованих на вимірюваннях, — це різні форми стійких до помилок обчислень на основі *поверхневого коду*, типу квантового коду з виправленням помилок. Квантова корекція помилок і відмовостійкість — це величезна тема, і надто велика, щоб охопити її тут. Однак основна ідея полягає в тому, що багато «фізичних» кубітів низького рівня відповідають кільком «логічним» кубітам. Виконуючи обчислення таким чином, корисно абстрагуватися від окремих операцій над фізичним кубітом і певних логічних перетворень високого рівня. Особливо гарним прикладом цього є *решіткова хірургія* [70], яку спільно розробив один із авторів цього опитування. У решітковій хірургії основними логічними операціями є «Z-розділення», «X-розділення», «Z-злиття» та «X-злиття». Можливо, ви помітили, що я щойно двічі сказав «ZX», тому, можливо, це робота для ZX-числення!

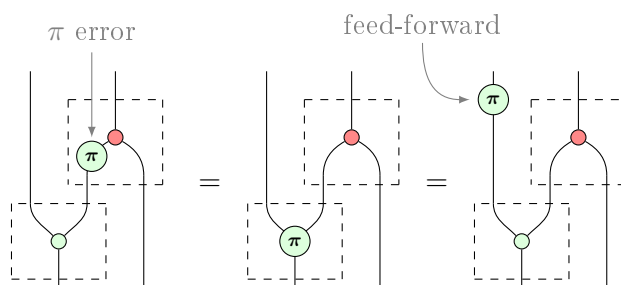
Дійсно, у [46] автори показали, що ZX є природною мовою для обчислень решіткової хірургії. З одного боку, основні операції є саме такими, як вони звучать:



Оскільки це просто павуки, ми вже знаємо, як використовувати операції решітки, щоб побудувати, наприклад, вентиля CNOT:

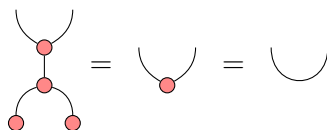
(17)

Хоча розділення можна виконувати детерміновано, злиття може викликати помилку  $\pi$ . Однак, як і в односторонній моделі, ці помилки часто можуть бути передані вперед за допомогою ZX-правил і враховані пізнішими операціями:



Цю мову ZX для решітки було закладено в [45], а її варіанти використовувалися групами Google [58] і NII Тоюко [69] для оптимізації різних аспектів відмовостійкості обчислення.

Хоча спочатку передбачалося як модель, заснована на нових примітивах розділення та злиття, подальша робота була зосереджена головним чином на використанні решіткової хірургії як інструменту для створення вентилів CNOT, як у рівнянні (17) (з кількома помітними винятками, наприклад [83]). Цікаво, що у 2020 році ми побачили першу експериментальну демонстрацію логічної заплутаності кубітів за допомогою решітчастої хірургії [55, *Nature*], де автори відзначили, що було набагато ефективніше використовувати примітивні операції поділу та злиття для підготувати заплутаного стану. Вони зробили це так:

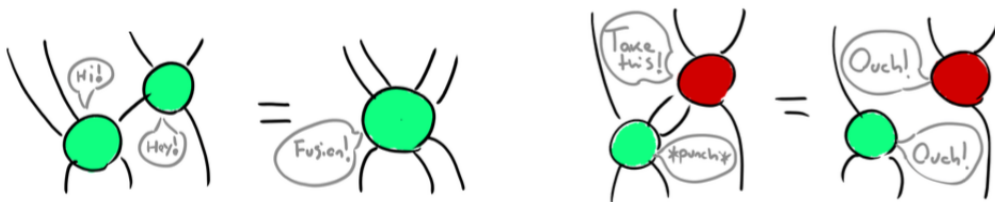


## 8 Дитсадкова садок квантова механіка: дослід

В анотації ми стверджували, що ця стаття є духовним дитям конспектів лекцій 2005 року *Дітсадкова квантова механіка* [23], але насправді це скоріше духовний онук. Середнім поколінням була стаття під назвою *Квантовий піктуралізм* [24], яка містила, серед іншого, розпливчасту пропозицію перевірити ефективність пікторального формалізму. Стверджувалося, що за належних навчальних матеріалів учні середньої школи могли б перевершити

своїх учителів у квантовій теорії, якщо учні використовували пікторальний формалізм, а вчителі використовували формалізм простору Гільберта.

Тепер, десять років по тому, у нас є матеріали для набагато амбітнішої мети: змусити старшокласників використовувати найсучасніші квантові обчислення на рівні з оксфордськими аспірантами. По-перше, для цього була потрібна книжка, спеціально розрахована на старшокласників, і набір завдань, які ставили б і старшокласники, і аспіранти, і деякі інші цікаві групи (наприклад, студенти мистецтв!). Книга [37] і завдання написані, але все ще закриті, поки експеримент не буде завершено. Не розкриваючи дуже багато, це повинно дати деяке уявлення про тон книги:



Експерименти вже почалися. Слідкуйте за цим напрямком!

## 9 Як ми тут опинилися: коротка історія ZX-числення

**Зачаття.** ZX-числення «народилося» у відхиленій анотації до конференції [28] (QIP 2007), написаній у горах на північ від Тегерана. Доповіді суддів говорили про такі речі:

‘Виглядає мило, і що?’

Основна ідея того часу полягала в тому, щоб розширити категориальну квантову механіку до комплементарних квантових спостережуваних (observables), із заявленою нині метою зробити її безпосередньо застосовною до практичних квантових обчислень, але глибша мета полягала в тому, щоб зробити щось, що програма квантової логіки Біркгофа-фон Неймана. [12] не змогла виконати: створити з перших принципів повноцінну альтернативу квантовій теорії простору Гільберта. Сильну взаємодоповнюваність було спроектовано шляхом зворотного проектування, розглядаючи «узагальнений потік» для MBQC [51], а фази просто впливають із загальної абстрактної нісенітничі, під назвою теорія категорій.

ZX-числення було «офіційно» представлено в прийнятій статті на конференції [29, ICALP, 2008]. Трохи невдале твердження в [29] стосується відносного статусу комплементарності (10) і сильної комплементарності (9): було показано (у теоремі 3), що під ‘м’яким припущення’, вони еквівалентні. Пізніше, у 85-сторінковій виправленій та суттєво розширеній журнальній версії [30, NJP, 2011], це «м’яке припущення» було в Теор. 9.24 показано, що воно по суті еквівалентне сильній комплементарності. Належне трактування (величезної!) різниці між комплементарністю та сильною комплементарністю з’явилося в [32] шляхом встановлення зв’язку з нелокальністю та повної класифікації сильно комплементарних основ. (Повна класифікація основ комплементарності все ще повністю відкрита і цілком поглинула декілька кар’єр.)

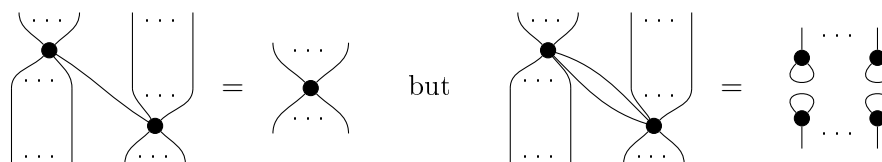
**Ранішній двіж із правилами.** Однією з перших цілей ZX-числення було повне розуміння MBQC за допомогою зображень. При цьому швидко стало зрозуміло, що правило

розкладання Ейлера в правій частині рівняння (12) потрібне на додаток до правил, які вже були встановлені [50]. Це стало основою ZX-числення, якою воно залишається і зараз.

Після цього ми спробували вивести ZX-числення за межі стандартних квантових вентилів та MBQC для опису W-станів. У квантовій теорії запутаності існує «по суті» лише один двокубітовий заплутаний стан, аж до еквівалентності за так званими *стохастичними локальними операціями*, але для 3 кубітів є два [53]. Один називається GHZ-станом і є просто 3-лапим павуком, а інший називається W-станом.

Спочатку було витрачено багато часу та енергії, намагаючись втиснути W-стани у ZX-числення. На цьому шляху ми отримали нове корисне ZX-правило (*доповненість* [34]), але ми не наблизилися до можливості працювати з W-станами. Ця рання поразка змусила деяких із нас розглянути альтернативу ZX-численню, яке зараз називається...

**ZW-числення.** Повнота ZX-числення спочатку була доведена за допомогою повноти іншого числення: ZW-числення, також відомого як GHZ/W числення [38]. Ключова ідея полягала в тому, щоб дещо змінити правила, що керують павуками наступним чином:



Ці павуки були названі W-павуками, оскільки W-стан був їх прикладом. Хоча це здавалося відносно незначною зміною поняття павуків, виявилось, що, на відміну від обчислення ZX, було відносно просто знайти повний набір правил [66], частково завдяки тому факту, що ZW-числення це більш безпосередньо кодує правила арифметики [40].

Перші теореми повноти для ZX-числення були доведені за допомогою дещо обхідної техніки, яка кодувала ZX-картинки як ZW-картинки та показала (хворобливо-ретельно), що кожне з ZW-правил можна вивести в ZX. Це виявилось важливим кроком у прогресі теорії ZX, але оригінальний *raison d'être* для ZW залишається відкритим:

**Відкрита проблема. 9.1.** Надайте класифікацію багатокубітної запутаності (яка все ще погано вивчена за межами трьох кубітів) за допомогою ZW-числення.

**Тупик: 'XYZ-числення'.** Ранньою варіацією ZX-числення було трихроматичне числення [81], де було додано третій колір (тобто Y-спостережуваний). Оскільки чашки для всіх трьох спостережуваних не можуть збігатися, заради симетрії жодна з них не збігалася. Це призвело до значно складнішого набору правил, і обчислення насправді ніколи не використовувалося. Можливо, причиною, по якій його не слід використовувати, є моногамія сильної комплементарності [39]. Тобто щонайбільше два кольори павуків можуть задовольнити суворі правила взаємодоповнюваності, описані в розділі 4 один з одним, тому, щоб пристосувати більше кольорів, ви повинні застосувати якийсь 'незручний поворот'.

**(Не)повнота та презентації.** Правила ZX-числення, вперше представлені в [30] без особливого врахування скалярних факторів. Їх, як правило, ігнорували, коли це було зручно, що спричиняло проблеми, напр. для обчислення ймовірностей результатів квантових вимірювань. Скаляри були серйозно розглянуті в правилах для фрагмента стабілізатора ZX-числення [5]. Мінімальність (чи правило не виводиться з інших правил) правил ZX

спочатку розглядалося в [8] для стабілізаційного ZX-числення, потім це було додатково досліджено для Clifford+T ZX-числення в [101].

Як згадувалося в розділі 4, перший прорив у повноті ZX-числення був зроблений Бекенсом [3] для фрагмента стабілізатора. У [52] наведено повноту ZX-числення реального стабілізатора. Крім того, Бекенс довів, що скалярна версія ZX-числення стабілізатора та однокубітний Clifford+T фрагмент ZX є повним [4, 5]. У той же час Шредер де Вітт і Замджієв показали на протилежному прикладі, що ZX-числення не може бути універсально повним, якщо воно просто оснащене правилами типу стабілізатора [97]. Вони також припустили, що повноти можна досягти, додавши правило форми (14). Пізніше Пердрікс і Ван довели, що стабілізований-ZX навіть не може бути повним для мультикубітового фрагмента Clifford+T, і необхідне правило додатковості [91].

У якийсь момент деякі люди (включаючи принаймні одного з авторів цієї статті) почали вірити, що *немає* кінцевого набору правил, який був би повним для будь-якого істотного розширення квантової теорії стабілізатора.

На щастя, вищезгаданий автор не поставив на це, оскільки в 2017-18 роках спостерігався справжній ажіотаж щодо результатів повноти для ZX. Спочатку Jeandel, Perdrix і Vilmart (він же «команда Ненсі») довели повноту багатокубітного Clifford+T ZX-числення за допомогою перекладу ZW-обчислення [71]. Дуже скоро після цього Нг і Ван закінчили першу повну аксіоматизацію ZX-числення для універсального кубіта, використовуючи підхід подібний до команди Ненсі та ввівши кілька нових генераторів до теорії [87]. Вони також змогли дати (іншу) повну аксіоматизацію для багатокубітного Clifford+T фрагмента [68, 88]. Надихнувшись результатами Нга та Ванга, команда Ненсі надала ще одну повну аксіоматизацію універсального кубіта ZX-числення в термінах оригінальних ZX-павуків [72]. Крім того, вони запропонували нормальну форму для діаграм ZX, на основі якої універсальна повнота все ще була отримана без будь-якого перекладу із ZW-числення [73]. Нарешті, як ми згадували в розділі 4, Вільмарт успішно довів гіпотезу Шредера де Вітта та Замджієва за допомогою явного виразу (14) [109].

**Попередники та наступники.** Різновид пікторального міркування, використаного в цій статті, було започатковано Пенроузом як більш інтуїтивна альтернатива звичайному тензорному запису [90]. Насправді, незважаючи на те, що Пенроуз, як повідомляється, використовував нотацію ще з студентства, він не надто високо оцінював її перспективи, головним чином через проблеми з набором. У своєму тексті *Спінори та простір-час (Spinors and Spacetime)* 1984 року він зазначає:

Нотацію було визнано дуже корисною на практиці, оскільки вона дуже сильно спрощує вигляд складних тензорних або спінових рівнянь, різні виражені взаємозв'язки, які помітні з першого погляду. На жаль, нотація, здається, має значення переважно для персональних розрахунків, оскільки його неможливо надрукувати звичайним способом.

Звичайно, за 20 років багато чого може змінитися. У 2004 році ця нотація була прийнята для конкретних потреб (скінченно-вимірної) квантової теорії в CQM [1], що поклало початок композиційній аксіоматизації квантової теорії.

Павуки у своєму алгебраїчному втіленні як певні алгебри Фробеніуса вперше з'явилися в літературі з теорії категорій [21, 79]. Алгебри Хопфа, які в термінах ZX-числення відповідають сильним правилам комплементарності за відсутності правил павука, і існують у своїй поточній конкретній формі з 1956 року [22], коли Картьє узагальнив попередні

визначення на основі структурних теорем про когомології компактних груп Лі Хопфа, Самельсона, Бореля та інших у 1940-х роках. Алгебри Хопфа та їхні репрезентації зараз широко вивчаються під назвою *квантова теорія груп* (див., наприклад, [84]).

Ідея зображених (класичних булевих) схем як зображень більш базових компонентів, а також графічне зображення законів алгебри Хопфа (він же сильної додатковості) сходять до Лафонта [80]. Однак, щоб охопити повне багатство квантових схем, потрібна не лише одна алгебра Хопфа, а пара із них, які взаємодіють особливим чином (а саме через закони Фробеніуса, або ж закони злиття павуків). Наскільки нам відомо, цю структуру вперше було явно розкрито як частина ZX-числення.

Примітно, що ця структура містить нетривіальні алгебраїчні частини (тобто ті, де операції приймають багато входних даних) і нетривіальні *коалгебраїчні* частини (тобто ті, де операції створюють кілька виходів), які взаємодіють одна з одною. Ця нова математична структура цікава сама по собі, і з тих пір її вивчали за допомогою теорії категорій [16, 18, 20, 48] і знайшли безліч застосувань, наприклад, у вивченні графів потоку сигналу [17] і паралельних систем [15].

**Майбутнє.** Нові статті про ZX-обчислення з'являються зі стабільною швидкістю, і ми можемо лише очікувати, що це зростання триватиме. Тут доступний регулярно оновлюваний список документів із обчислення ZX, з якими ви можете ознайомитись у майбутньому:

<https://zxcalculus.com/publications.html>

## Література

- [1] S. Abramsky and B. Coecke. A categorical semantics of quantum protocols. In *Proceedings of the 19th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, pages 415–425, 2004. arXiv:quant-ph/0402130.
- [2] M. Amy, J. Chen, and N. J. Ross. A finite presentation of cnot-dihedral operators. In Bob Coecke and Aleks Kissinger, editors, *Proceedings 14th International Conference on Quantum Physics and Logic*, Nijmegen, The Netherlands, 3-7 July 2017, volume 266 of *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, pages 84–97. Open Publishing Association, 2018.
- [3] M. Backens. The ZX-calculus is complete for stabilizer quantum mechanics. *New Journal of Physics*, 16:093021, 2014. arXiv:1307.7025.
- [4] M. Backens. The ZX-calculus is complete for the single-qubit Clifford+T group. In B. Coecke, I. Hasuo, and P. Panangaden, editors, *Proceedings of the 11th workshop on Quantum Physics and Logic*, volume 172 of *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, pages 293–303. Open Publishing Association, 2014.
- [5] M. Backens. Making the stabilizer ZX-calculus complete for scalars. *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, 195:17–32, November 2015.
- [6] M. Backens, H. Miller-Bakewell, G. de Felice, and J. van de Wetering. There and back again: A circuit extraction tale. *arXiv preprint arXiv:2003.01664*, 2020.
- [7] M. Backens and A. Nabi Duman. A complete graphical calculus for Spekkens' toy bit theory. *Foundations of Physics*, 2015. arXiv:1411.1618.



- [8] M. Backens, S. Perdrix, and Q. Wang. Towards a Minimal Stabilizer ZX-calculus. *Logical Methods in Computer Science*, Volume 16, Issue 4, December 2020. arXiv:1709.08903.
- [9] J. C. Baez and J. Erbele. Categories in control, 2014. arXiv:1405.6881.
- [10] J. C. Baez and B. Fong. A compositional framework for passive linear networks. *arXiv:1504.05625*, 2015.
- [11] C. H. Bennett and G. Brassard. Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing. In *Proceedings of IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing*, pages 175–179. IEEE, 1984.
- [12] G. Birkhoff and J. von Neumann. The logic of quantum mechanics. *Annals of Mathematics*, 37:823–843, 1936.
- [13] J. Bolt, B. Coecke, F. Genovese, M. Lewis, D. Marsden, and R. Piedeleu. Interacting conceptual spaces I. In M. Kaipainen, A. Hautamäki, P. Gärdenfors, and F. Zenker, editors, *Concepts and their Applications*, Synthese Library, Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science. Springer, 2018. to appear.
- [14] F. Bonchi, F. Gadducci, A. Kissinger, P. Sobocinski, and F. Zanasi. String diagram rewrite theory i: Rewriting with frobenius structure. *arXiv preprint arXiv:2012.01847*, 2020.
- [15] F. Bonchi, J. Holland, R. Piedeleu, P. Sobociński, and F. Zanasi. Diagrammatic algebra: from linear to concurrent systems. *Proceedings of the ACM on Programming Languages*, 3(POPL):1–28, 2019.
- [16] F. Bonchi, R. Piedeleu, P. Sobociński, and F. Zanasi. Graphical affine algebra. In *2019 34th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, pages 1–12. IEEE, 2019.
- [17] F. Bonchi, R. Piedeleu, P. Sobociński, and F. Zanasi. Contextual equivalence for signal flow graphs. In Jean Goubault-Larrecq and Barbara König, editors, *Foundations of Software Science and Computation Structures*, pages 77–96, Cham, 2020. Springer International Publishing.
- [18] F. Bonchi, P. Sobocinski, and F. Zanasi. Interacting bialgebras are Frobenius. In *17th International Conference on Foundations of Software Science and Computation Structures (FOSSACS)*, pages 351–365, 2014.
- [19] F. Bonchi, P. Sobociński, and F. Zanasi. Full abstraction for signal flow graphs. In *Principles of Programming Languages, POPL’15.*, 2015.
- [20] F. Bonchi, P. Sobociński, and F. Zanasi. Interacting hopf algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 221(1):144–184, 2017.
- [21] A. Carboni and R. F. C. Walters. Cartesian bicategories I. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 49:11–32, 1987.
- [22] P. Cartier. A primer of Hopf algebras. In *Frontiers in number theory, physics, and geometry II*, pages 537–615. Springer, 2007.

- [23] B. Coecke. Kindergarten quantum mechanics. In A. Khrennikov, editor, *Quantum Theory: Reconsiderations of the Foundations III*, pages 81–98. AIP Press, 2005. arXiv:quant-ph/0510032.
- [24] B. Coecke. Quantum pictorialism. *Contemporary Physics*, 51:59–83, 2009. arXiv:0908.1787.
- [25] B. Coecke. A universe of processes and some of its guises. In H. Halvorson, editor, *Deep Beauty: Understanding the Quantum World through Mathematical Innovation*, pages 129–186. Cambridge University Press, 2011. arXiv:1009.3786.
- [26] B. Coecke. Terminality implies no-signalling... and much more than that. *New Generation Computing*, 34:69–85, 2016.
- [27] B. Coecke, G. de Felice, K. Meichanetzidis, and A. Toumi. Foundations for near-term quantum natural language processing. *arXiv preprint arXiv:2012.03755*, 2020.
- [28] B. Coecke and R. Duncan. A graphical calculus for quantum observables. [zxcalculus.com/publications.html](http://zxcalculus.com/publications.html), 2007.
- [29] B. Coecke and R. Duncan. Interacting quantum observables. In *Proceedings of the 37th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP)*, Lecture Notes in Computer Science, 2008.
- [30] B. Coecke and R. Duncan. Interacting quantum observables: categorical algebra and diagrammatics. *New Journal of Physics*, 13:043016, 2011. arXiv:quant-ph/09064725.
- [31] B. Coecke and R. Duncan. Tutorial: Graphical calculus for quantum circuits. In *International Workshop on Reversible Computation*, pages 1–13. Springer, 2012.
- [32] B. Coecke, R. Duncan, A. Kissinger, and Q. Wang. Strong complementarity and non-locality in categorical quantum mechanics. In *Proceedings of the 27th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, 2012. arXiv:1203.4988.
- [33] B. Coecke, R. Duncan, A. Kissinger, and Q. Wang. Generalised compositional theories and diagrammatic reasoning. In G. Chiribella and R. W. Spekkens, editors, *Quantum Theory: Informational Foundations and Foils*, Fundamental Theories of Physics. Springer, 2016. arXiv:1203.4988.
- [34] B. Coecke and B. Edwards. Three qubit entanglement within graphical Z/X-calculus. *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, 52:22–33, 2010.
- [35] B. Coecke and B. Edwards. Toy quantum categories. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 270(1):29 – 40, 2011. arXiv:0808.1037.
- [36] B. Coecke, B. Edwards, and R. W. Spekkens. Phase groups and the origin of non-locality for qubits. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 270(2):15–36, 2011. arXiv:1003.5005.
- [37] B. Coecke and S. Gogioso. Quantum theory in pictures, 2020. Tutorial.
- [38] B. Coecke and A. Kissinger. The compositional structure of multipartite quantum entanglement. In *Automata, Languages and Programming*, Lecture Notes in Computer Science, pages 297–308. Springer, 2010. arXiv:1002.2540.

- [39] B. Coecke and A. Kissinger. *Picturing Quantum Processes. A First Course in Quantum Theory and Diagrammatic Reasoning*. Cambridge University Press, 2017.
- [40] B. Coecke, A. Kissinger, A. Merry, and S. Roy. The GHZ/W-calculus contains rational arithmetic. *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, 52:34–48, 2010.
- [41] B. Coecke, D. Pavlović, and J. Vicary. A new description of orthogonal bases. *Mathematical Structures in Computer Science, to appear*, 23:555–567, 2013. arXiv:quant-ph/0810.1037.
- [42] B. Coecke, M. Sadrzadeh, and S. Clark. Mathematical foundations for a compositional distributional model of meaning. In J. van Benthem, M. Moortgat, and W. Buszkowski, editors, *A Festschrift for Jim Lambek*, volume 36 of *Linguistic Analysis*, pages 345–384. 2010. arxiv:1003.4394.
- [43] B. Coecke and Q. Wang. ZX-rules for 2-qubit Clifford+T quantum circuits. In Jarkko Kari and Irek Ulidowski, editors, *Reversible Computation - 10th International Conference, RC 2018, Leicester, UK, September 12-14, 2018, Proceedings*, volume 11106 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 144–161. Springer, 2018.
- [44] N. de Beaudrap, X. Bian, and Q. Wang. Fast and effective techniques for t-count reduction via spider nest identities. In *15th Conference on the Theory of Quantum Computation, Communication and Cryptography (TQC 2020)*. Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum für Informatik, 2020. arXiv:2004.05164.
- [45] N. de Beaudrap, R. Duncan, D. Horsman, and S. Perdrix. Pauli fusion: a computational model to realise quantum transformations from ZX terms. In Bob Coecke and Matthew Leifer, editors, *Proceedings 16th International Conference on Quantum Physics and Logic*, Chapman University, Orange, CA, USA., 10-14 June 2019, volume 318 of *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, pages 85–105. Open Publishing Association, 2020.
- [46] N. de Beaudrap and D. Horsman. The ZX calculus is a language for surface code lattice surgery. *Quantum*, 4:218, January 2020.
- [47] L. Dixon and A. Kissinger. Open-graphs and monoidal theories. *Mathematical Structures in Computer Science*, 23(02):308–359, 2013.
- [48] R. Duncan and K. Dunne. Interacting frobenius algebras are hopf. In *Proceedings of the 31st Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, 2016. arXiv:1601.04964.
- [49] R. Duncan, A. Kissinger, S. Perdrix, and J. Van De Wetering. Graph-theoretic simplification of quantum circuits with the ZX-calculus. *Quantum*, 4:279, 2020.
- [50] R. Duncan and S. Perdrix. Graph states and the necessity of euler decomposition. In *Conference on Computability in Europe*, pages 167–177. Springer, 2009.
- [51] R. Duncan and S. Perdrix. Rewriting measurement-based quantum computations with generalised flow. In *Proceedings of ICALP*, Lecture Notes in Computer Science, pages 285–296. Springer, 2010.

- [52] R. Duncan and S. Perdrix. Pivoting makes the ZX-calculus complete for real stabilizers. In *Proceedings of the 10th International Workshop on Quantum Physics and Logic*, 2013. arXiv:1307.7048.
- [53] W. Dür, G. Vidal, and J. I. Cirac. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. *Physical Review A*, 62(062314), 2000.
- [54] H. Ehrig, M. Pfender, and H. J. Schneider. Graph-grammars: An algebraic approach. In *14th Annual Symposium on Switching and Automata Theory (swat 1973)*, pages 167–180. IEEE, 1973.
- [55] A. Erhard, H. Poulsen Nautrup, M. Meth, L. Postler, R. Stricker, M. Stadler, V. Negnevitsky, M. Ringbauer, P. Schindler, H. J. Briegel, R. Blatt, N. Friis, and T. Monz. Entangling logical qubits with lattice surgery. *Nature*, 589(7841):220–224, Jan 2021.
- [56] N. Ghani and J. Hedges. A compositional approach to economic game theory. *arXiv preprint arXiv:1603.04641*, 2016.
- [57] D. R. Ghica and A. Jung. Categorical semantics of digital circuits. In *2016 Formal Methods in Computer-Aided Design (FMCAD)*, pages 41–48, Oct 2016.
- [58] C. Gidney and A. G. Fowler. Efficient magic state factories with a catalyzed  $|CCZ\rangle$  to  $2|T\rangle$  transformation. *Quantum*, 3:135, April 2019.
- [59] S. Gogioso. Categorical semantics for schrödinger’s equation. *arXiv:1501.06489*, 2015.
- [60] S. Gogioso. A diagrammatic approach to quantum dynamics. In *8th Conference on Algebra and Coalgebra in Computer Science*, 2019.
- [61] S. Gogioso and C. M. Scandolo. Categorical probabilistic theories. *EPTCS*, 266, 2018.
- [62] S. Gogioso and C. M. Scandolo. Density hypercubes, higher order interference and hyper-decoherence: a categorical approach. In *International Symposium on Quantum Interaction*, pages 141–160. Springer, 2018.
- [63] S. Gogioso and W. Zeng. Fourier transforms from strongly complementary observables. *arXiv preprint arXiv:1501.04995*, 2015.
- [64] S. Gogioso and W. Zeng. Generalised mermin-type non-locality arguments. *Logical Methods in Computer Science (LMCS)*, 15(2), 2019.
- [65] D. Gottesman. The heisenberg representation of quantum computers. *arXiv:quant-ph/9807006*, 1998.
- [66] A. Hadzihanovic. A diagrammatic axiomatisation for qubit entanglement. In *Proceedings of the 30th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, 2015. arXiv:1501.07082.
- [67] A. Hadzihanovic. *The algebra of entanglement and the geometry of composition*. PhD thesis, University of Oxford, 2017.
- [68] A. Hadzihanovic, K. F. Ng, and Q. Wang. Two complete axiomatisations of pure-state qubit quantum computing. In *Proceedings of the 33rd Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pages 502–511. ACM, 2018.

- [69] M. Hanks, M. P. Estarellas, W. J. Munro, and K. Nemoto. Effective compression of quantum braided circuits aided by ZX-calculus. *Phys. Rev. X*, 10:041030, Nov 2020.
- [70] C. Horsman, A. G. Fowler, S. Devitt, and R. Van Meter. Surface code quantum computing by lattice surgery. *New Journal of Physics*, 14(12):123011, dec 2012.
- [71] E. Jeandel, S. Perdrix, and R. Vilmart. A complete axiomatisation of the ZX-calculus for Clifford+T quantum mechanics. In *Proceedings of the 33rd Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pages 559–568, 2018. arXiv preprint arXiv:1705.11151.
- [72] E. Jeandel, S. Perdrix, and R. Vilmart. Diagrammatic reasoning beyond Clifford+T quantum mechanics. *arXiv preprint arXiv:1801.10142*, 2018.
- [73] E. Jeandel, S. Perdrix, and R. Vilmart. A generic normal form for ZX-diagrams and application to the rational angle completeness. In *34th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, pages 1–10, 2019.
- [74] A. Kissinger and S. Uijlen. A categorical semantics for causal structure. In *2017 32nd Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, pages 1–12. IEEE, 2017.
- [75] A. Kissinger and J. van de Wetering. Universal MBQC with generalised parity-phase interactions and Pauli measurements. *Quantum*, 3:134, April 2019.
- [76] A. Kissinger and J. van de Wetering. Pyzx: Large scale automated diagrammatic reasoning. In Bob Coecke and Matthew Leifer, editors, *Proceedings 16th International Conference on Quantum Physics and Logic*, Chapman University, Orange, CA, USA., 10-14 June 2019, volume 318 of *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, pages 229–241. Open Publishing Association, 2020.
- [77] A. Kissinger and J. van de Wetering. Reducing the number of non-clifford gates in quantum circuits. *Phys. Rev. A*, 102:022406, Aug 2020.
- [78] A. Kissinger and V. Zamdzhiev. Quantomatic: A proof assistant for diagrammatic reasoning. In *International Conference on Automated Deduction*, pages 326–336. Springer, 2015.
- [79] S. Lack. Composing PROPs. *Theory and Applications of Categories*, 13:147–163, 2004.
- [80] Y. Lafont. Towards an algebraic theory of boolean circuits. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 184(2):257–310, 2003.
- [81] A. Lang and B. Coecke. Trichromatic open digraphs for understanding qubits. In *Proceedings of the 10th workshop on Quantum Physics and Logic*, volume 95 of *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, pages 193–209, 2012.
- [82] C. M. Lee and J. H. Selby. A no-go theorem for theories that decohere to quantum mechanics. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 474(2214):20170732, 2018.
- [83] D. Litinski. A Game of Surface Codes: Large-Scale Quantum Computing with Lattice Surgery. *Quantum*, 3:128, March 2019.
- [84] S. Majid. *Foundations of quantum group theory*. Cambridge University Press, 2000.

- [85] K. Meichanetzidis, S. Gogioso, G. de Felice, A. Toumi, N. Chiappori, and B. Coecke. Quantum natural language processing on near-term quantum computers. *Accepted for QPL 2020*, 2020. arXiv preprint arXiv:2005.04147.
- [86] K. Meichanetzidis, A. Toumi, G. de Felice, and B. Coecke. Grammar-aware question-answering on quantum computers. *arXiv preprint arXiv:2012.03756*, 2020.
- [87] K. F. Ng and Q. Wang. A universal completion of the ZX-calculus. *arXiv preprint arXiv:1706.09877*, 2017.
- [88] K. F. Ng and Q. Wang. Completeness of the ZX-calculus for pure qubit clifford+t quantum mechanics. 2018. arXiv preprint arXiv:1801.07993.
- [89] D. Pavlovic. Monoidal computer i: Basic computability by string diagrams. *Information and computation*, 226:94–116, 2013.
- [90] R. Penrose. Applications of negative dimensional tensors. In *Combinatorial Mathematics and its Applications*, pages 221–244. Academic Press, 1971.
- [91] S. Perdrix and Q. Wang. Supplemantarity is Necessary for Quantum Diagram Reasoning. In *41st International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2016)*, volume 58 of *LIPIcs*, pages 76:1–76:14, 2016.
- [92] N. Pinzani and S. Gogioso. Giving operational meaning to the superposition of causal orders. *arXiv preprint arXiv:2003.13306*, 2020.
- [93] N. Pinzani, S. Gogioso, and B. Coecke. Categorical semantics for time travel. In *2019 34th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, pages 1–20. IEEE, 2019.
- [94] R. Raussendorf, D.E. Browne, and H.J. Briegel. Measurement-based quantum computation on cluster states. *Physical Review A*, 68(2):22312, 2003.
- [95] M. Sadrzadeh, S. Clark, and B. Coecke. The Frobenius anatomy of word meanings I: subject and object relative pronouns. *Journal of Logic and Computation*, 23:1293–1317, 2013. arXiv:1404.5278.
- [96] C. Schröder de Witt and V. Zamdzhiev. The ZX calculus is incomplete for quantum mechanics. arXiv:1404.3633, 2014.
- [97] C. Schröder de Witt and V. Zamdzhiev. The ZX-calculus is incomplete for quantum mechanics. *EPTCS*, 172:285–292, December 2014.
- [98] J. H. Selby and B. Coecke. Leaks: quantum, classical, intermediate and more. *Entropy*, 19(4):174, 2017.
- [99] J. H. Selby, C. M. Scandolo, and B. Coecke. Reconstructing quantum theory from diagrammatic postulates. *arXiv preprint arXiv:1802.00367*, 2018.
- [100] P. Selinger and X. Bian. Relations for Clifford+T operators on two qubits. *talk available from <https://www.mathstat.dal.ca/~xbian/talks/>*, 2015.

- [101] B. Shi. Towards minimality of Clifford+T ZX-calculus. Master's thesis, University of Oxford, 2018.
- [102] C. M. Signorelli, Q. Wang, and I. Khan. A compositional model of consciousness based on consciousness-only. 2020. arXiv preprint arXiv:2007.16138.
- [103] S. Sivarajah, S. Dilkes, A. Cowtan, W. Simmons, A. Edgington, and R. Duncan.  $t|ket\rangle$ : A retargetable compiler for NISQ devices. *arXiv preprint arXiv:2003.10611*, 2020.
- [104] P. Sobocinski. Graphical linear algebra 4: Dumbing down and magic lego. <https://graphicallinearalgebra.net/2015/04/29/dumbing-down-magic-lego-and-the-rules-of-the-game-part-1/>.
- [105] P. Sobocinski. Representations of petri net interactions. In *CONCUR 2010 - Concurrency Theory*, volume 6269 of *LNCS*, pages pp 554–568. Springer, 2010.
- [106] S. Tull and J. Kleiner. Integrated information in process theories. 2020. arXiv preprint arXiv:2002.07654.
- [107] J. van de Wetering. ZX-calculus for the working quantum computer scientist. *arXiv:2012.13966*, 2020.
- [108] R. Vilmart. A ZX-Calculus with Triangles for Toffoli-Hadamard, Clifford+T, and Beyond. In Peter Selinger and Giulio Chiribella, editors, *Proceedings of the 15th International Conference on Quantum Physics and Logic, Halifax, Canada, 3-7th June 2018*, volume 287 of *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, pages 313–344. Open Publishing Association, 2019.
- [109] R. Vilmart. A near-minimal axiomatisation of ZX-calculus for pure qubit quantum mechanics. In *2019 34th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, pages 1–10. IEEE, 2019.
- [110] Q. Wang. Completeness of algebraic ZX-calculus over arbitrary commutative rings and semirings. 2020. arXiv preprint arXiv:1912.01003.
- [111] Q. Wang. Enter a visual era: process theory embodied in ZX-calculus. *Slides available from 10.13140/RG.2.2.17289.67682*, 2020.
- [112] R. Yeung. Diagrammatic design and study of ansätze for quantum machine learning. *arXiv preprint arXiv:2011.11073*, 2020.
- [113] W. Zeng and B. Coecke. Quantum algorithms for compositional natural language processing. arXiv:1608.01406.
- [114] C. Zhao and X.-S. Gao. Analyzing the barren plateau phenomenon in training quantum neural network with the ZX-calculus. *arXiv preprint arXiv:2102.01828*, 2021.