

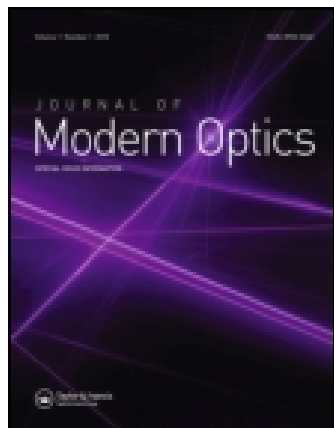
This article was downloaded by: [Tufts University]

On: 05 October 2014, At: 17:23

Publisher: Taylor & Francis

Informa Ltd Registered in England and Wales Registered Number: 1072954

Registered office: Mortimer House, 37-41 Mortimer Street, London W1T 3JH, UK



## Optica Acta: International Journal of Optics

Publication details, including instructions for authors and subscription information:

<http://www.tandfonline.com/loi/tmop19>

### Représentation des états et des Opérateurs de Polarisation de la Lumière Par des Quaternions

Pierre Pellat-Finet <sup>a</sup>

<sup>a</sup> Groupe d'Etudes Signaux et Systèmes (GESSY), Université de Toulon et du Var, 83130 La Garde, France

Published online: 03 Dec 2010.

To cite this article: Pierre Pellat-Finet (1984) Représentation des états et des Opérateurs de Polarisation de la Lumière Par des Quaternions, Optica Acta: International Journal of Optics, 31:4, 415-434

To link to this article: <http://dx.doi.org/10.1080/713821517>

PLEASE SCROLL DOWN FOR ARTICLE

Taylor & Francis makes every effort to ensure the accuracy of all the information (the "Content") contained in the publications on our platform. However, Taylor & Francis, our agents, and our licensors make no representations or warranties whatsoever as to the accuracy, completeness, or suitability for any purpose of the Content. Any opinions and views expressed in this publication are the opinions and views of the authors, and are not the views of or endorsed by Taylor & Francis. The accuracy of the Content should not be relied upon and should be independently verified with primary sources of information. Taylor and Francis shall not be liable for any losses, actions, claims, proceedings, demands, costs, expenses, damages, and other liabilities whatsoever or howsoever caused arising directly or indirectly in connection with, in relation to or arising out of the use of the Content.

This article may be used for research, teaching, and private study purposes. Any substantial or systematic reproduction, redistribution, reselling, loan, sub-licensing, systematic supply, or distribution in any form to anyone is expressly forbidden. Terms & Conditions of access and use can be found at <http://www.tandfonline.com/page/terms-and-conditions>

## Représentation des états et des opérateurs de polarisation de la lumière par des quaternions

PIERRE PELLAT-FINET

Groupe d'Etudes Signaux et Systèmes (GESSY),  
Université de Toulon et du Var, 83130 La Garde, France

(Reçu le 15 novembre 1983)

**Résumé.** On présente un formalisme de la polarisation de la lumière dans lequel les états et les opérateurs de polarisation sont représentés par des quaternions construits sur le corps des nombres complexes. On exprime ainsi simplement les polariseurs, les biréfringents et les dichroïques à partir d'un même opérateur, mettant en évidence l'aspect unitaire de ces opérateurs. On applique cette méthode de calcul à la biréfringence elliptique.

### 1. Introduction

L'idée d'utiliser les quaternions pour décrire la lumière polarisée n'est pas nouvelle puisque Richartz et Hsü [1] représentaient les biréfringents purs par des quaternions et ce, en 1949. D'autre part, Cernosek [2] et Theocaris et Gdoutos [3] ont proposé plus récemment (1971 et 1979) une méthode géométrique permettant la représentation des biréfringents, toujours à l'aide des quaternions. Enfin les matrices de Pauli, couramment employées en polarisation [4, 5], jouissent des propriétés des quaternions quand elles sont multipliées par le nombre imaginaire  $i$  [1].

La représentation que nous proposons ici va plus loin puisqu'elle permet une description complète à la fois des états et des opérateurs de polarisation (i.e. des biréfringents, des dichroïques et des polariseurs). Elle s'apparente au formalisme des vecteurs de Stokes et des matrices de Mueller et met en évidence l'aspect unitaire des opérateurs de polarisation, entrevu par Takenaka [6], en les décrivant comme cas particuliers ou cas limites d'un même opérateur plus général.

### 2. Les quaternions [7-10]

#### 2.1. Les quaternions 'complexes'

Dans  $\mathbb{C}^4$  considéré comme espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  (corps des nombres complexes), on choisit la base  $\{\hat{e}, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$  où

$$\left. \begin{aligned} \hat{e} &= (1, 0, 0, 0), \\ \hat{i} &= (0, 1, 0, 0), \\ \hat{j} &= (0, 0, 1, 0), \\ \hat{k} &= (0, 0, 0, 1). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Un élément  $\hat{q}$  de  $\mathbb{C}^4$  s'écrit alors

$$\hat{q} = s\hat{e} + x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \quad (2)$$

où  $s, x, y$  et  $z$  sont des nombres complexes.

On munit  $\mathbb{C}^4$  d'une addition:

$$\hat{q} + \hat{q}' = (s + s')\hat{e} + (x + x')\hat{i} + (y + y')\hat{j} + (z + z')\hat{k} \quad (3)$$

et d'une multiplication définie par la table qui suit. Cette multiplication n'est pas commutative (par exemple,  $\hat{i}\hat{j} = -\hat{j}\hat{i} = \hat{k}$ ).

Table de multiplication des quaternions.

	$\hat{e}$	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{e}$	$\hat{e}$	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{i}$	$\hat{i}$	$-\hat{e}$	$\hat{k}$	$-\hat{j}$
$\hat{j}$	$\hat{j}$	$-\hat{k}$	$-\hat{e}$	$\hat{i}$
$\hat{k}$	$\hat{k}$	$\hat{j}$	$-\hat{i}$	$-\hat{e}$

$\mathbb{C}^4$ , muni de ces deux opérations, est un anneau non commutatif  $H_{\mathbb{C}}$  dont un élément  $\hat{q}$  est appelé *quaternion*. De plus,  $\mathbb{C}$  est isomorphe à la partie de  $H_{\mathbb{C}}$  dont les éléments sont de la forme  $s\hat{e}$  (où  $s$  est complexe). Ce qui permet d'identifier  $\mathbb{C}$  à cette partie de  $H_{\mathbb{C}}$  et d'écrire:

$$s\hat{e} = s \quad (4)$$

et

$$\hat{e} = 1 \quad (5)$$

d'où

$$\hat{q} = s + x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}. \quad (6)$$

### 2.2. Quaternions remarquables

$q$  est dit *quaternion réel* si ses composantes  $s$ ,  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont des nombres réels. Un quaternion complexe peut s'écrire

$$\hat{q} = \hat{q}_1 + i\hat{q}_2, \quad (7)$$

où  $\hat{q}_1$  et  $\hat{q}_2$  sont des quaternions réels.

On définit le *quaternion complexe conjugué* de  $\hat{q}$  par

$$\hat{q}^* = \hat{q}_1 - i\hat{q}_2 \quad (8)$$

et le *quaternion transposé* par

$$\bar{\hat{q}} = s - x\hat{i} - y\hat{j} - z\hat{k}. \quad (9)$$

La *norme* d'un quaternion réel est

$$N(\hat{q}) = \|\hat{q}\| = \sqrt{(\hat{q}\bar{\hat{q}})}. \quad (10)$$

$\hat{\alpha}$  est un *quaternion scalaire*, ou simplement un *scalaire*, si

$$\bar{\hat{\alpha}} = \hat{\alpha}. \quad (11)$$

On le note alors  $\alpha$  puisque c'est un nombre complexe.

$\hat{V}$  est un *quaternion pur*, ou *quaternion vectoriel*, si

$$\bar{\hat{V}} = -\hat{V}. \quad (12)$$

$\hat{V}$  est donc de la forme

$$\hat{V} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}. \quad (13)$$

$\hat{r}$  est un *quaternion unitaire* si

$$\hat{r}\bar{\hat{r}} = 1. \quad (14)$$

Si  $\hat{a}$  est pur et unitaire, il vérifie

$$\hat{a}^2 = -1. \quad (15)$$

Dans ces conditions, un quaternion unitaire s'écrit

$$\hat{r} = \cos \theta + \hat{a} \sin \theta, \quad (16)$$

où  $\hat{a}$  est pur et unitaire et  $\theta$  un nombre complexe.

$\hat{r}$  s'écrit encore par *définition*

$$\hat{r} = \exp(\hat{a}\theta). \quad (17)$$

### Remarque

On prendra soin de distinguer le quaternion  $\hat{i}$  du nombre complexe (imaginaire pur) habituel  $i$  qui, du point de vue des quaternions, est un scalaire et donc commute avec les quaternions. Par exemple,

$$i\hat{i} = \hat{i}i, \quad i\hat{j} = \hat{j}i, \quad i\hat{k} = \hat{k}i. \quad (18)$$

On a aussi

$$i^2 = \hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = -1. \quad (19)$$

### 2.3. Représentation d'une rotation par un quaternion unitaire

On considère  $\mathbb{R}^3$  muni de sa structure affine et euclidienne. Au point  $M$  de coordonnées  $x, y, z$ , correspond le vecteur  $\mathbf{V}$  de composantes  $x, y, z$ . A ce vecteur nous associons le quaternion pur:

$$\hat{V} = Q(\mathbf{V}) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}. \quad (20)$$

Si  $\hat{V}'$  est associé à  $\mathbf{V}'$ , on montre alors que

$$\hat{V}\hat{V}' = -\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}' + Q(\mathbf{V} \wedge \mathbf{V}'). \quad (21)$$

Soit maintenant une rotation  $R(\Delta, \psi)$ , d'angle de rotation  $\psi$  et d'axe  $\Delta$  de vecteur directeur  $\mathbf{n}$ . Si  $M'(x', y', z')$  est l'image de  $M(x, y, z)$  dans cette rotation,  $\mathbf{V}$  devenant  $\mathbf{V}'$ , alors on démontre la relation [7, 8]

$$\hat{V}' = \exp(\hat{n}\psi/2)\hat{V}\exp(-\hat{n}\psi/2). \quad (22)$$

Le quaternion  $\exp(\hat{n}\psi/2)$  représente la rotation  $R(\Delta, \psi)$ .

Le produit  $R$  de deux rotations  $R_1$  et  $R_2$  se traduit par le produit des quaternions les représentant: si

$$\mathbf{V}' = R_2 \circ R_1(\mathbf{V}) = R(\mathbf{V}), \quad (23)$$

alors, avec des notations évidentes

$$\begin{aligned} \hat{V}' &= \exp(\hat{n}_2\psi_2/2)\exp(\hat{n}_1\psi_1/2)\hat{V}\exp(-\hat{n}_1\psi_1/2)\exp(-\hat{n}_2\psi_2/2) \\ &= \exp(\hat{n}\psi/2)\hat{V}\exp(-\hat{n}\psi/2). \end{aligned} \quad (24)$$

Ceci se généralise à un nombre fini de rotations. L'avantage de l'emploi des quaternions est que la notation d'une rotation par une exponentielle, c'est-à-dire en fait par  $\cos(\psi/2) + \hat{n} \sin(\psi/2)$ , se conserve dans le produit des quaternions. On obtient ainsi immédiatement l'axe et l'angle de la rotation produit.

### 3. Représentation des états de polarisation

#### 3.1. Rappels et conventions

De façon générale nous caractérisons un état de polarisation par une ellipse dont le grand axe est repéré par l'angle  $\alpha$  (l'origine est arbitraire—voir la figure 1) et dont l'aplatissement est donné par la tangente de l'angle  $\chi$  ( $\tan \chi = b/a$ ). Nous tenons compte du sens de parcours de l'ellipse (lumière polarisée droite ou gauche) dans le signe de  $\chi$ , celui-ci étant positif, par convention, pour une lumière gauche. Toutes les ellipses sont décrites avec

$$0 \leq \alpha < \pi, \quad -\pi/4 \leq \chi \leq \pi/4. \quad (25)$$

Nous appelons *forme de lumière* la donnée d'un état de polarisation  $(\alpha, \chi)$  et d'une intensité lumineuse  $I$ . On a [11]

$$I = a^2 + b^2. \quad (26)$$

La sphère de Poincaré (figure 2) est un moyen commode pour représenter une forme de lumière [12–16]. Son rayon est choisi égal à  $I$ . Et l'état de polarisation de paramètres  $\alpha$  et  $\chi$  est représenté par le point  $M$  de la sphère, de longitude  $2\alpha$  et de latitude  $2\chi$ . Ainsi le pôle nord (resp. sud) représente la lumière circulaire gauche (resp. droite). L'équateur est le lieu des formes de lumière polarisées rectilignement. Deux états de polarisation orthogonaux, définis par deux ellipses égales, de grands axes orthogonaux et parcourues en sens inverses l'une de l'autre, sont représentés sur la sphère par deux points diamétralement opposés.

Si la sphère est rapportée à un repère orthonormé et si  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont les coordonnées de  $M$  dans ce repère, alors à la forme de lumière d'intensité  $I$  et

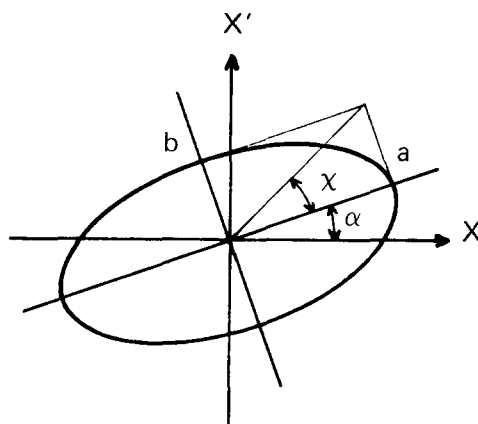


Figure 1. Représentation d'une lumière polarisée elliptiquement.

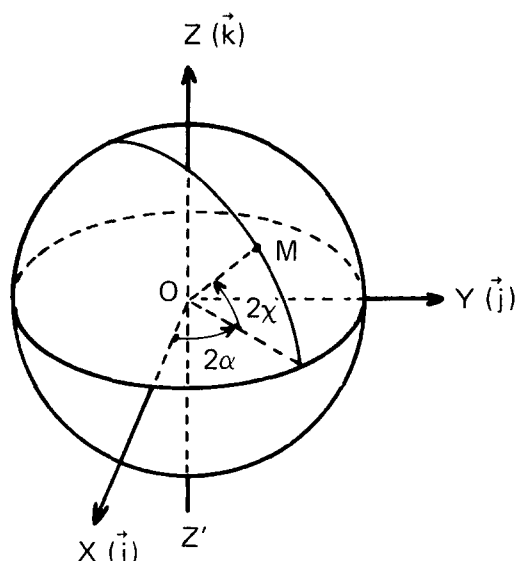


Figure 2. Représentation d'une forme de lumière  $M$  sur la sphère de Poincaré.

représentée par  $M$ , on associe un vecteur de dimension quatre, appelé *vecteur de Stokes* de la forme de lumière, et qui est

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} I \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ I \cos 2\alpha \cos 2\chi \\ I \sin 2\alpha \cos 2\chi \\ I \sin 2\alpha \sin 2\chi \end{bmatrix} \quad (27)$$

### 3.2. Représentation par des quaternions

Au vecteur de Stokes précédent nous associons le quaternion

$$\hat{P} = iI + x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}. \quad (28)$$

Sa partie scalaire ( $iI$ ) représente l'intensité lumineuse de la forme de lumière et sa partie quaternion pur le vecteur  $\overrightarrow{OM}$ , où  $M$  est le point de la sphère de Poincaré correspondant à la forme de lumière.

Pour une forme de lumière totalement polarisée,

$$I^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (29)$$

Pour une forme de lumière partiellement polarisée,

$$I^2 > x^2 + y^2 + z^2. \quad (30)$$

La lumière non polarisée d'intensité  $I$  se représente par

$$\hat{P} = iI. \quad (31)$$

On montre qu'il y a isomorphisme (pour l'addition) entre l'ensemble des vecteurs de Stokes et l'ensemble des quaternions de la forme  $iI + x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  (où  $I$ ,  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont réels). On en déduit que le résultat de la somme incohérente de deux lumières

polarisées (totalement ou partiellement) s'obtient en faisant la somme des quaternions qui leur correspondent. Cette propriété est en effet bien connue pour les vecteurs de Stokes [13, 16].

#### 4. Représentation des opérateurs de polarisation

Par opérateurs de polarisation nous entendons des milieux physiques qui modifient la polarisation de la lumière: polariseurs, biréfringents, dichroïques et leurs combinaisons. Nous allons montrer qu'en fait, tous s'expriment par un même opérateur mathématique général. Ici nous interprétons le pouvoir rotatoire (ou activité optique) comme de la biréfringence circulaire. En effet, un pouvoir rotatoire de valeur  $\rho$  fait tourner de  $\rho$  le plan de polarisation d'une onde polarisée rectilignement, mais les états propres d'un milieu optiquement actif sont les lumières polarisées circulaires droites et gauches, et on montre que le déphasage introduit entre eux est  $\theta$ , égal à  $2\rho$  [11]. Plutôt que  $\rho$ , nous prendrons  $\theta$  comme paramètre et l'appellerons pouvoir rotatoire, par abus de langage.

##### 4.1. Biréfringent pur

Un biréfringent introduit une différence de phase  $\psi$  entre deux états orthogonaux représentés par deux points  $E$  et  $E'$  de la sphère de Poincaré diamétralement opposés (figure 3). Ces deux états de polarisation sont les états propres du milieu et correspondent en général à des formes de lumière polarisées elliptiquement (le biréfringent étant alors elliptique).  $E$  et  $E'$  définissent un axe  $\Delta$  et l'effet du biréfringent se traduit sur la sphère par une rotation d'axe  $\Delta$  et d'angle  $\psi$  [13]. Si  $\mathbf{n}$  est le vecteur directeur de  $\Delta$ , cette rotation est représentée par  $\exp(\hat{\mathbf{n}}\psi/2)$ . Si  $M'$  est l'image de  $M$ , les formes de lumière correspondantes sont représentées par

$$\hat{P}' = iI + \hat{p}' \quad \text{et} \quad \hat{P} = iI + \hat{p} \quad (32)$$

avec

$$\overrightarrow{OM'} = \mathbf{p}' \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM} = \mathbf{p}. \quad (33)$$

$\hat{P}$  et  $\hat{P}'$  ont la même partie scalaire, car l'intensité lumineuse n'est pas modifiée par un biréfringent pur (i.e. non absorbant). D'autre part,  $M'$  étant l'image de  $M$  dans une rotation,  $\hat{p}$  et  $\hat{p}'$  sont reliés par une équation de la forme de (22) et  $iI$  étant un scalaire, on peut écrire

$$\hat{p}' = \exp(\hat{\mathbf{n}}\psi/2)\hat{p}\exp(-\hat{\mathbf{n}}\psi/2) \quad \text{et} \quad iI = \exp(\hat{\mathbf{n}}\psi/2)iI\exp(-\hat{\mathbf{n}}\psi/2), \quad (34)$$

et finalement

$$\hat{P}' = iI + \hat{p}' = \exp(\hat{\mathbf{n}}\psi/2)(iI + \hat{p})\exp(-\hat{\mathbf{n}}\psi/2) = \exp(\hat{\mathbf{n}}\psi/2)\hat{P}\exp(-\hat{\mathbf{n}}\psi/2), \quad (35)$$

d'où la proposition suivante.

**Proposition 1** Le biréfringent d'axe  $\Delta$  de vecteur directeur  $\mathbf{n}$  et de biréfringence  $\psi$ , se représente par le quaternion  $\exp(\hat{\mathbf{n}}\psi/2)$  et opère sur une forme de lumière quelconque  $\hat{P}$  suivant:

$$\hat{P}' = \exp(\hat{\mathbf{n}}\psi/2)\hat{P}\exp(-\hat{\mathbf{n}}\psi/2). \quad (36)$$

#### 4.2. Suite de biréfringents

Une forme de lumière  $\hat{P}$  incidente sur un ensemble de deux biréfringents que nous désignons de façon évidente par  $(\hat{n}_1, \psi_1)$  et  $(\hat{n}_2, \psi_2)$ , et *pris dans cet ordre*, émerge en  $\hat{P}'$  telle que

$$\hat{P}' = \exp(\hat{n}_2 \psi_2 / 2) \exp(\hat{n}_1 \psi_1 / 2) \hat{P} \exp(-\hat{n}_1 \psi_1 / 2) \exp(-\hat{n}_2 \psi_2 / 2). \quad (37)$$

Ce résultat, conséquence de la relation (24), se généralise à un nombre quelconque de biréfringents. Rappelons que nous considérons le mot biréfringent dans un sens large qui inclus le pouvoir rotatoire (biréfringence circulaire). Ce qui précède vaut donc pour une suite de milieux biréfringents (elliptiques) ou optiquement actifs.

Nous avons vu au § 2.3 que l'emploi des quaternions permettait de conserver, dans le produit de rotations, la notation d'une rotation sous une forme qui faisait apparaître son axe et son angle. Cette propriété demeure pour les biréfringents et offre l'avantage, à notre avis, de représenter le produit d'un nombre quelconque de biréfringents elliptiques par une notation qui fait clairement apparaître les états propres du biréfringent résultant (son axe sur la sphère de Poincaré) et la valeur de la biréfringence résultante (c'est-à-dire le déphasage introduit entre les deux états propres par le biréfringent; il correspond à l'angle de la rotation).

Inversement, cette notation permet d'écrire immédiatement l'opérateur correspondant à un biréfringent elliptique dès lors qu'on en connaît les états propres et la biréfringence, et ceci sans ne nécessiter aucun changement de repère.

#### 4.3. Milieu absorbant

Un tel milieu ne modifie pas la polarisation de la lumière et ne rentre pas dans le cadre des opérateurs de polarisation comme nous les avons définis. Cependant nous aurons besoin de représenter un tel milieu pour traduire le dichroïsme dans notre formalisme. De plus il s'agit d'un cas trivial.

En effet, si  $K$  est la transmittance en intensité ( $K$  est réel), et si  $\hat{P}$  est une forme de lumière quelconque incidente sur le milieu absorbant,  $\hat{P}$  émerge en  $\hat{P}'$  telle que

$$\hat{P}' = K\hat{P}. \quad (38)$$

#### 4.4. Dichroïsme

Le dichroïsme consiste en des transmittances différentes suivant la polarisation de la lumière. Le cas le plus général est celui du dichroïsme elliptique, défini par deux états propres  $D_1$  et  $D_2$ , diamétralement opposés sur la sphère (figure 3) et pour lesquels les transmittances sont respectivement  $K_1$  et  $K_2$ .  $D_1$  et  $D_2$  définissent l'axe du dichroïsme.

Considérons d'abord un dichroïsme d'axe  $X$ , dont la matrice de Mueller est [14, 16]

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & K_1 - K_2 & 0 & 0 \\ K_1 - K_2 & K_1 + K_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{(K_1 K_2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{(K_1 K_2)} \end{bmatrix}. \quad (39)$$



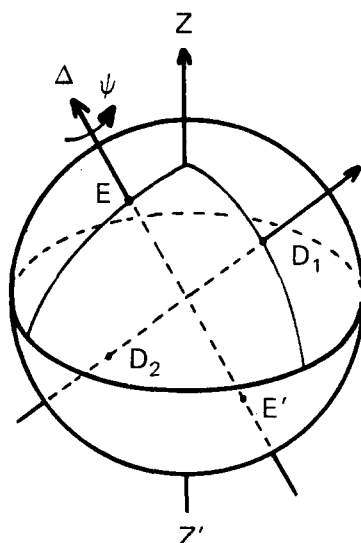


Figure 3. Axes d'un biréfringent elliptique ( $E'E$ ) et d'un dichroïque ( $D_1D_2$ ).

Supposons  $K_1K_2$  non nul (le cas où ce produit est nul est l'objet du prochain paragraphe) et soient  $K$  et  $\delta$  tels que

$$K = \sqrt{(K_1K_2)}, \quad (40)$$

$$\exp(\delta) = \sqrt{(K_1/K_2)}. \quad (41)$$

$K$  est la *transmittance homogène* et  $\exp(\delta)$  est le *rapport de dichroïsme* [16].  $\mathcal{M}$  s'écrit alors

$$\mathcal{M} = K \begin{bmatrix} \text{ch } \delta & \text{sh } \delta & 0 & 0 \\ \text{sh } \delta & \text{ch } \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Cette matrice est celle d'une rotation 'hyperbolique' [17] qu'il est possible d'exprimer comme une rotation d'angle complexe en procédant comme suit [6]; on sait que

$$\text{ch } \delta = \cos i\delta \quad \text{et} \quad i \text{sh } \delta = \sin i\delta, \quad (43)$$

d'où

$$\mathcal{M} = K \begin{bmatrix} \cos i\delta & -i \sin i\delta & 0 & 0 \\ -i \sin i\delta & \cos i\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

$\mathcal{M}$  opère sur un vecteur de Stokes  $\mathcal{I}$  quelconque suivant:

$$\mathcal{I}' = \mathcal{M} \mathcal{I}, \quad (45)$$

c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} I' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathcal{M} \begin{bmatrix} I \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Le même résultat s'exprime à partir de la matrice  $\mathcal{M}'$  telle que

$$\mathcal{M}' = K \begin{bmatrix} \cos i\delta & \sin i\delta & 0 & 0 \\ -\sin i\delta & \cos i\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (47)$$

à condition de remplacer  $I$  et  $I'$  par  $iI$  et  $iI'$  respectivement:

$$\begin{bmatrix} iI' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathcal{M}' \begin{bmatrix} iI \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Les vecteurs qui apparaissent maintenant s'apparentent davantage aux quaternions:

$$\left. \begin{aligned} \hat{P} &= iI + x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \\ \hat{P}' &= iI' + x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Enfin il suffit de remarquer que la relation (48) se traduit avec les quaternions par

$$\hat{P}' = K[\cos(i\delta/2) - \hat{i}\sin(i\delta/2)]\hat{P}[\cos(i\delta/2) - \hat{i}\sin(i\delta/2)]. \quad (50)$$

Le quaternion  $\cos(i\delta/2) - \hat{i}\sin(i\delta/2)$  se note aussi

$$\exp(-\hat{i}i\delta/2) = \text{ch}(\delta/2) - \hat{i}\text{sh}(\delta/2). \quad (51)$$

On en déduit la proposition suivante.

**Proposition 2** Le dichroïque d'axe  $X$  (de vecteur directeur  $\hat{i}$ ), de rapport de dichroïsme  $\exp(\delta)$  et de transmittance homogène  $K$  se représente par le quaternion  $\sqrt{K}\exp(-\hat{i}i\delta/2)$  et opère suivant (50).

Nous allons maintenant établir la proposition suivante, plus générale.

**Proposition 3** Le dichroïque d'axe  $\Delta$  de vecteur directeur  $\mathbf{n}$ , de rapport de dichroïsme  $\exp(\delta)$  et de transmittance homogène (en intensité)  $K$ , est représenté par le quaternion  $\sqrt{K}\exp(-\hat{n}i\delta/2)$ , égal à  $\sqrt{K}[\text{ch}(\delta/2) - \hat{n}i\text{sh}(\delta/2)]$ . Si  $\hat{P}$  représente une forme de lumière incidente sur le dichroïque, alors la forme de lumière émergente est représentée par

$$\hat{P}' = \sqrt{K}\exp(-\hat{n}i\delta/2)\hat{P}\sqrt{K}\exp(-\hat{n}i\delta/2). \quad (52)$$

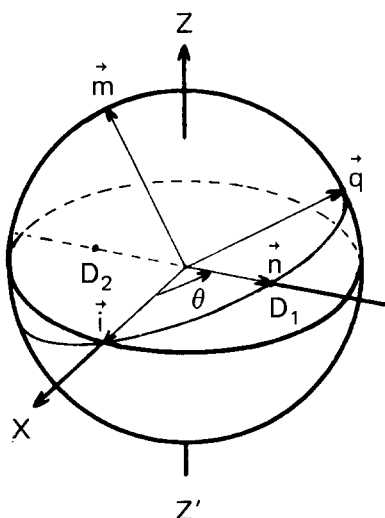


Figure 4. La rotation  $R(\mathbf{m}, -\theta)$  amène l'axe  $D_1D_2$  sur  $X$ .

### Démonstration

Nous nous ramenons au cas précédent en effectuant une rotation  $R(\mathbf{m}, -\theta)$  d'angle  $-\theta$  autour de  $\mathbf{m}$  (figure 4),  $\theta$  étant l'angle  $(\mathbf{i}, \mathbf{n})$  et

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{i} \wedge \mathbf{n}}{\|\mathbf{i} \wedge \mathbf{n}\|}. \quad (53)$$

Pour connaître l'effet du dichroïque sur une forme de lumière quelconque  $\hat{P}$ , on effectue d'abord la rotation  $R(\mathbf{m}, -\theta)$  qui amène  $\mathbf{n}$  sur  $\mathbf{i}$ , puis on applique la relation (50) qui exprime l'effet d'un dichroïque d'axe  $X$  et enfin, on effectue la rotation inverse de la précédente, c'est-à-dire  $R(\mathbf{m}, \theta)$ . Ce qui donne pour la forme de lumière émergente

$$\hat{P}' = K \exp(\hat{m}\theta/2) \exp(-\hat{i}\delta/2) \exp(-\hat{m}\theta/2) \hat{P} \exp(\hat{m}\theta/2) \exp(-\hat{i}\delta/2) \exp(-\hat{m}\theta/2). \quad (54)$$

Calculons:

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \exp(\hat{m}\theta/2) \exp(-\hat{i}\delta/2) \exp(-\hat{m}\theta/2), \\ &= [\cos(\theta/2) + \hat{m} \sin(\theta/2)] [\text{ch}(\delta/2) - \hat{i} \text{sh}(\delta/2)] [\cos(\theta/2) - \hat{m} \sin(\theta/2)] \\ &= G - 2\hat{m}\hat{i}SCZ + (\hat{m}\hat{m} - \hat{i}S^2 - \hat{i}C^2)\hat{i}Z, \end{aligned} \quad (55)$$

avec

$$C = \cos(\theta/2), \quad S = \sin(\theta/2), \quad G = \text{ch}(\delta/2), \quad Z = \text{sh}(\delta/2).$$

Tenons compte maintenant de la relation (53) (figure 4) avec

$$\mathbf{q} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{i}, \quad (56)$$

il vient

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{q} \sin \theta. \quad (57)$$

$\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{m}$  sont orthogonaux entre eux; leurs produits scalaires sont nuls; d'où les relations suivantes entre les quaternions purs qui leur sont associés (d'après la relation (21))

$$\hat{q} = \hat{m}\hat{i} \quad \text{et} \quad \hat{i} = \hat{m}\hat{i}\hat{m}, \quad (58)$$

d'où

$$\hat{n} = \hat{i} \cos \theta + \hat{q} \sin \theta. \quad (59)$$

L'expression de  $\hat{Q}$ , (55), devient

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= G - 2\hat{q}\hat{i}SCZ - \hat{i}Z(C^2 - S^2) \\ &= G - (\hat{i} \cos \theta + \hat{q} \sin \theta)\hat{i}Z \\ &= \text{ch}(\delta/2) - \hat{n}\hat{i} \text{sh}(\delta/2) \\ &= \exp(-\hat{n}\hat{i}\delta/2). \end{aligned} \quad (60)$$

La relation (54) donne enfin

$$\hat{P}' = K \exp(-\hat{n}\hat{i}\delta/2) \hat{P} \exp(-\hat{n}\hat{i}\delta/2), \quad (61)$$

qui n'est autre que la relation (52) de la proposition à démontrer.

#### Remarque

Effectuer la rotation  $R(\mathbf{m}, -\theta)$  ne correspond pas à un véritable changement de base; pour cela il faudrait ajouter une rotation autour de  $\mathbf{i}$ . Celle-ci ne changerait pas le résultat, car un dichroïsme d'axe  $X$  (de vecteur directeur  $\mathbf{i}$ ) transforme tous les points du plan  $YZ$  de la même façon et n'est pas affecté par cette rotation.

#### 4.5. Polariseur

On peut considérer un polariseur comme un cas limite de dichroïque, laissant passer sans modification une certaine forme de lumière et absorbant complètement la forme orthogonale. Ainsi la matrice de Mueller du polariseur d'axe  $X$  est

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (62)$$

C'est la matrice  $\mathcal{M}$  de l'expression (39) dans le cas où  $K_1$  vaut 1 et  $K_2$  est nul. Il n'est pas possible de conduire les calculs comme dans le § 4.4, car ceux-ci supposaient  $K_1 K_2$  non nul. Cependant, prendre  $K_1$  égal à 1 et  $K_2$  nul revient à faire tendre  $\delta$  vers l'infini dans l'expression de  $\mathcal{M}$  utilisant des fonctions hyperboliques (42).  $K$  tend alors vers 0, mais  $K \exp(\delta)$  tend vers 1 puisque d'après (40) et (41):

$$K \exp(\delta) = K_1. \quad (63)$$

Dans ces conditions

$$\mathcal{P} = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \mathcal{M} \quad (64)$$

Faisons tendre  $\delta$  vers l'infini dans  $\sqrt{K} \exp(-\hat{u}\delta/2)$ :

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \sqrt{K} \exp(-\hat{u}\delta/2) = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \sqrt{K} [\operatorname{ch}(\delta/2) - \hat{u} \operatorname{sh}(\delta/2)] = \frac{1}{2}(1 - \hat{u}). \quad (65)$$

Le polariseur d'axe  $X$  est représenté par le quaternion  $\frac{1}{2}(1 - \hat{u})$ . On en déduit la proposition suivante.

**Proposition 4** Le polariseur d'axe  $\mathbf{n}$  (sur la sphère de Poincaré) est représenté par le quaternion  $\frac{1}{2}(1 - \hat{n}i)$  et opère ainsi sur la forme de lumière  $\hat{P}$ :

$$\hat{P}' = \frac{1}{4}(1 - \hat{n}i)\hat{P}(1 - \hat{n}i). \quad (66)$$

*Remarque*

$\mathbf{n}$  étant quelconque, on a en général un polariseur elliptique.

*Exemples*

Lumière non polarisée:  $\hat{P} = iI$

$$\hat{P}' = \frac{1}{4}iI(1 - \hat{n}i)^2 = \frac{1}{2}I(i + \hat{n}). \quad (67)$$

la lumière transmise par le polariseur est d'intensité  $\frac{1}{2}I$  et totalement polarisée suivant  $\hat{n}$ .

Lumière d'intensité  $I$ , polarisée suivant  $\hat{n}$ :  $\hat{P} = I(i + \hat{n})$

$$\hat{P}' = \frac{1}{4}I(1 - \hat{n}i)(i + \hat{n})(1 - \hat{n}i) = I(i + \hat{n}) = \hat{P}. \quad (68)$$

Lumière orthogonale à la précédente:  $\hat{P} = I(i - \hat{n})$

$$\hat{P}' = \frac{1}{4}I(1 - \hat{n}i)(i - \hat{n})(1 - \hat{n}i) = 0, \quad (69)$$

car:

$$(1 - \hat{n}i)(i - \hat{n}) = 0 \quad (70)$$

La relation (70) donne un exemple de diviseurs de zéro dans  $H_{\mathbb{C}}$ . Le fait d'utiliser les quaternions construits sur le corps des nombres complexes introduit des diviseurs de zéro qui expriment bien les propriétés des polariseurs. D'ailleurs deux polariseurs croisés sont un exemple physique de diviseurs de zéro.

## 5. Expression unitaire des opérateurs de polarisation

### 5.1. Opérateur général

De ce qui précède résulte une analogie entre la biréfringence et le dichroïsme, analogie exprimée par les relations (36) et (52). Celles-ci sont un cas particulier de la relation

$$\hat{P}' = \sqrt{K} \exp(\hat{n}\gamma/2) \hat{P} \sqrt{K} \exp(-\hat{n}\gamma^*/2), \quad (71)$$

où  $\gamma^*$  est le complexe conjugué de  $\gamma$ .

Dans le cas d'un biréfringent pur,  $K$  vaut 1 et  $\gamma$  est réel. Dans celui d'un dichroïque,  $\gamma$  est imaginaire pur. Le cas général ( $\gamma$  complexe) est celui d'un milieu à la fois biréfringent et dichroïque pour lequel dichroïsme et biréfringence ont même axe (au sens où l'avons défini à l'aide de la sphère de Poincaré); alors les deux

quaternions représentant l'un la biréfringence et l'autre le dichroïsme commutent, ce qui permet d'écrire

$$\exp(\hat{n}\psi/2) \exp(-\hat{n}i\delta/2) = \exp[\hat{n}(\psi - i\delta)/2] = \exp(\hat{n}\gamma/2), \quad (72)$$

d'où le théorème suivant.

**Théorème** L'opérateur de polarisation d'axe  $\hat{n}$  le plus général est représenté par  $\sqrt{K} \exp[\hat{n}(\psi - i\delta)/2]$ , où  $K$  est la transmittance homogène,  $\exp(\delta)$  le rapport de dichroïsme et  $\psi$  la biréfringence. Il opère sur une forme de lumière quelconque  $\hat{P}$  suivant la relation

$$\hat{P}' = \sqrt{K} \exp[\hat{n}(\psi - i\delta)/2] \hat{P} \sqrt{K} \exp[-\hat{n}(\psi + i\delta)/2]. \quad (73)$$

Il contient comme cas limite le polariseur d'axe  $\hat{n}$  (correspondant à  $\delta$  infini et à  $\psi$  nul).

### Remarque

On écarte ici le cas le plus général d'un milieu à la fois biréfringent et dichroïque mais pour lequel la biréfringence et le dichroïsme n'ont pas le même axe; les états propres d'un tel milieu ne correspondent plus à des polarisations orthogonales, et il n'est plus possible, *a priori*, de parler d'axe pour un tel milieu. Cette restriction concerne surtout le cas où biréfringence et dichroïsme se manifestent en même temps dans le milieu, c'est-à-dire quand ils se mélangent à une échelle infinitésimale. Par contre ce qui précède permet de traiter une suite de biréfringents (elliptiques en général) et de dichroïques (elliptiques); il suffit de faire le produit des quaternions correspondants.

### 5.2. Justification intuitive

On peut relier ce qui précède à certain procédé couramment utilisé en optique et qui consiste à ajouter une partie imaginaire à l'indice de réfraction d'un milieu dans le but d'en traduire l'absorption. Dans ce qui suit,  $n$  désignera un indice de réfraction et non un quaternion; pour simplifier nous ne considérerons que des opérateurs d'axe  $X$ , c'est-à-dire d'axe  $i$ , ce qui sera suffisant pour illustrer notre propos.

Soit donc un biréfringent d'axe  $X$  (c'est-à-dire un biréfringent linéaire) et de biréfringence  $\phi$ . Cette biréfringence s'exprime par une différence d'indice de réfraction  $\Delta n$  pour les deux états propres du milieu biréfringent. Si  $l$  est l'épaisseur optique de ce dernier,

$$\phi = (2\pi/\lambda)\Delta n l, \quad (74)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde de la lumière. Comme nous l'avons vu, le biréfringent se représente par  $\exp(i\phi/2)$ .

On tient compte de l'absorption du milieu en écrivant l'indice de réfraction sous la forme d'un nombre complexe,

$$n = n_p - in_a, \quad (75)$$

où  $n_p$  affecte la phase de l'onde et  $n_a$  son amplitude. La biréfringence est le résultat d'une variation  $\Delta n_p$  de  $n_p$  suivant deux axes (dans l'espace physique; c'est-à-dire ici, correspondant à deux vibrations orthogonales) et le dichroïsme peut s'interpréter

comme le résultat d'une variation  $\Delta n_a$  de  $n_a$  suivant deux axes que nous supposons être ceux de la biréfringence, d'où

$$\Delta n = \Delta n_p - i\Delta n_a \quad (76)$$

et en 'phase':

$$\begin{aligned} \gamma &= (2\pi/\lambda)\Delta n l = (2\pi/\lambda)\Delta n_p l - (2\pi/\lambda)i\Delta n_a l \\ &= \psi - i\delta. \end{aligned} \quad (77)$$

Il suffit de remplacer  $\phi$  par  $\gamma$  dans  $\exp(i\phi/2)$  pour trouver  $\exp[i(\psi - i\delta)/2]$  qui représente le milieu ( $\psi$  est la biréfringence et  $\exp(\delta)$  le rapport de dichroïsme). Pour être complet il resterait à tenir compte de la transmittance homogène.

Le passage de la biréfringence au dichroïsme qui dans notre formalisme se traduit par le passage d'un angle de rotation réel à un angle complexe, est le même que celui qui existe entre indice de réfraction réel et indice de réfraction complexe.

### 5.3. Synthèse des résultats

Tout opérateur de polarisation dont les états propres sont orthogonaux est caractérisé par quatre paramètres: deux d'entre eux définissent les états propres ( $\alpha$  donnant l'orientation du grand axe de l'ellipse correspondant à la vibration rapide et  $\chi$  traduisant l'aplatissement de cette même ellipse), le troisième étant la transmittance homogène (en intensité)  $K$  et le quatrième le déphasage complexe  $\gamma$  introduit entre les états propres par l'opérateur. La partie réelle de  $\gamma$  est la biréfringence ( $\psi$ ) et sa partie imaginaire pure ( $-\delta$ ) le rapport de dichroïsme.

A cet opérateur correspond un 'axe' (en gardant le langage de la sphère de Poincaré) défini par le quaternion (réel) unitaire pur:

$$\hat{n} = \hat{i} \cos 2\alpha \cos 2\chi + \hat{j} \sin 2\alpha \cos 2\chi + \hat{k} \sin 2\chi. \quad (78)$$

Enfin, l'opérateur est représenté par le quaternion  $\sqrt{K} \exp(\hat{n}\gamma/2)$  et agit sur une forme de lumière  $\hat{P}$  suivant la relation (71).

Dans le cas général, les états propres correspondent à des lumières polarisées elliptiquement. On représente ainsi les biréfringents elliptiques (dont le pouvoir rotatoire est un cas particulier), les milieux dichroïques, les absorbants homogènes et les polariseurs elliptiques par un même quaternion. Une succession de tels opérateurs se représente par le produit des quaternions correspondants; mais alors les états propres de l'opérateur résultant ne sont plus nécessairement orthogonaux.

## 6. Application à la biréfringence elliptique

### 6.1. Paramètres intrinsèques

Au §4.1, nous avons caractérisé un milieu biréfringent elliptique par le quaternion  $\exp(\hat{n}\Psi/2)$ . Pour un tel milieu, nous définissons:

- (1) Le *pouvoir rotatoire intrinsèque*  $\Theta$ : c'est le pouvoir rotatoire qu'aurait le milieu en absence de biréfringence linéaire. Sa valeur par unité de longueur est  $\theta$ , *pouvoir rotatoire intrinsèque unitaire*. Si  $l$  est l'épaisseur optique du milieu,

$$\Theta = \theta l. \quad (79)$$

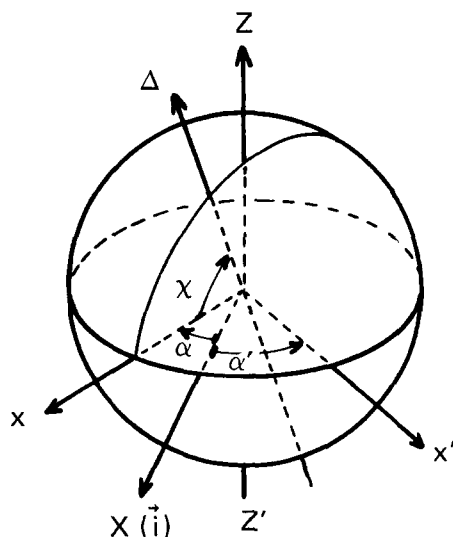


Figure 5. L'axe  $\Delta$  est défini par  $\alpha$  et  $\chi$ ,  $x$  est l'axe de la biréfringence linéaire intrinsèque et  $x'$  celui de la biréfringence linéaire équivalente.  $X$  est l'origine.

- (2) La *biréfringence linéaire intrinsèque*  $\Phi$ : c'est la biréfringence linéaire qu'aurait le milieu en absence de pouvoir rotatoire.  $\phi$  est la *biréfringence linéaire intrinsèque unitaire*, et

$$\Phi = \phi l. \quad (80)$$

Cette distinction est artificielle pour un milieu biréfringent elliptique quelconque, mais correspond à une réalité par exemple pour un cristal sans biréfringence linéaire naturelle, mais avec de la biréfringence électrique et du pouvoir rotatoire naturel. C'est le cas de l'oxyde de bismuth silicium ( $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ , en abrégé: BSO) [18]. Sans champ électrique appliqué, le cristal ne présente que du pouvoir rotatoire: c'est le pouvoir rotatoire intrinsèque. Sous champ appliqué apparaît de la biréfringence électrique linéaire: c'est la biréfringence linéaire intrinsèque. Elle se calcule quand on connaît le tenseur électro-optique du cristal.

La biréfringence linéaire intrinsèque est aussi caractérisée par son axe  $\mathbf{x}$  repéré par l'angle  $\alpha$  qu'il fait avec  $\mathbf{i}$  (figure 5). On a donc

$$\hat{x} = \hat{i} \cos \alpha + \hat{j} \sin \alpha. \quad (81)$$

$\theta$ ,  $\phi$  et  $\alpha$  sont les *paramètres intrinsèques* du milieu biréfringent elliptique.

## 6.2. Superposition du pouvoir rotatoire et de la biréfringence intrinsèques [13, 19, 20]

Nous considérons un milieu biréfringent elliptique d'épaisseur unité et cherchons à exprimer  $\hat{n}$  et  $\psi$  (biréfringence elliptique par unité de longueur:  $\psi = \Psi/l$ ) en fonction des paramètres intrinsèques. Pour cela nous découpons le milieu en tranches égales infiniment minces, d'épaisseur  $dl$ . Le pouvoir rotatoire d'une telle tranche est  $\theta dl$  (représenté par  $\exp(\hat{k}\theta dl/2)$  puisque les états propres sont les lumières circulaires droites et gauches qui définissent l'axe  $Z'Z$  de vecteur directeur  $\mathbf{k}$  sur la sphère de Poincaré) et sa biréfringence linéaire  $\phi dl$ , d'axe  $\hat{x}$  (représentée par



$\exp(\hat{x}\phi dl/2)$ ). Les quaternions  $\exp(\hat{k}\theta dl/2)$  et  $\exp(\hat{x}\phi dl/2)$ , qui représentent des rotations d'angles infinitésimaux, commutent. D'où, pour une tranche élémentaire,

$$\exp(\hat{n}\psi dl/2) = \exp[(\hat{x}\phi dl/2) \exp(\hat{k}\theta dl/2)] = \exp[(\hat{x}\phi + \hat{k}\theta) dl/2] \quad (82)$$

et

$$\hat{n}\psi = \hat{x}\phi + \hat{k}\theta, \quad (83)$$

$\hat{n}$  étant unitaire et à coefficients réels:

$$|\psi| = \|\hat{n}\psi\| = \sqrt{(\phi^2 + \theta^2)}, \quad (84)$$

d'où

$$\hat{n} = (\hat{x}\phi + \hat{k}\theta) / \sqrt{(\phi^2 + \theta^2)} = \hat{x} \cos \chi + \hat{k} \sin \chi \quad (85)$$

avec  $\chi$  tel que

$$\tan \chi = \theta / \phi. \quad (86)$$

L'effet d'une tranche élémentaire est donc une rotation d'angle  $\psi dl$  autour d'un axe  $\Delta$  situé dans le plan  $xZ$  et de latitude  $\chi$  donnée par la relation (86).

Remarquons maintenant que l'axe  $\Delta$  est l'axe du cristal entier: les formes propres de la première tranche, qui définissent  $\Delta$ , sont aussi celles de la deuxième tranche et donc de l'ensemble des deux; en raisonnant de proche en proche, on voit que ce sont les formes propres de tout le cristal.

On a ainsi le produit de rotations élémentaires de même axe, dont le résultat est une rotation autour de cet axe et dont l'angle est la somme des angles des rotations élémentaires, c'est-à-dire:

$$\int_0^1 \psi dl = \psi = \sqrt{(\phi^2 + \theta^2)} \quad (87)$$

et le biréfringent elliptique se représente par le quaternion

$$\exp(\hat{n}\psi/2) = \exp[(\hat{x}\phi + \hat{k}\theta)/2], \quad (88)$$

d'où:

*Proposition 5* Un milieu d'épaisseur unité, de pouvoir rotatoire intrinsèque unitaire  $\theta$ , de biréfringence linéaire intrinsèque  $\phi$  d'axe  $\hat{x}$ , est un biréfringent elliptique représenté par  $\exp[(\hat{x}\phi + \hat{k}\theta)/2]$ .

Ce résultat est remarquable, car  $\exp(\hat{k}\theta/2)$  et  $\exp(\hat{x}\phi/2)$  ne commutent pas et donc

$$\exp(\hat{x}\phi/2) \exp(\hat{k}\theta/2) \neq \exp[(\hat{x}\phi + \hat{k}\theta)/2]. \quad (89)$$

Dans le cas d'un milieu d'épaisseur  $l$ , seule change la valeur de la biréfringence, mais pas son axe:

$$\exp(\hat{n}\Psi/2) = \exp[\hat{n}(\psi/2)l] = \exp[(\hat{x}\phi + \hat{k}\theta)l/2]. \quad (90)$$

*Remarque*

La relation (83) montre que l'axe  $\Delta$  est dans le  $xZ$  (figure 5). Une analyse plus fine [18] montre que ce n'est vrai qu'au premier ordre. Car les tranches précédentes ne sauraient être infiniment minces: dans le cas d'un cristal, elles ont au moins

l'épaisseur d'une maille. D'ailleurs on ne peut écrire la relation (82) qu'en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à deux.

### 6.3. Paramètres équivalents

En général les paramètres intrinsèques d'un biréfringent elliptique ne sont pas directement accessibles à l'expérience. Nous allons introduire des paramètres 'équivalents' qui le seront. On sait qu'un biréfringent elliptique est équivalent à un pouvoir rotatoire suivi d'un biréfringent linéaire: ce sont le *pouvoir rotatoire équivalent* ( $\theta'$ ) et la *biréfringence linéaire équivalente* ( $\phi'$  d'axe  $\hat{x}'$ ). D'où, par définition,

$$\exp(\hat{n}\Psi/2) = \exp(\hat{x}'\phi'/2) \exp(\hat{k}\theta'/2), \quad (91)$$

avec (figure 5)

$$\hat{x}' = \hat{i} \cos \alpha' + \hat{j} \sin \alpha', \quad (92)$$

$\theta'$ ,  $\phi'$  et  $\alpha'$  sont les *paramètres équivalents* du biréfringent elliptique.

Une façon de mesurer la biréfringence équivalente et de connaître son axe consiste à regarder l'effet du milieu sur une forme de lumière polarisée circulairement. Le pouvoir rotatoire équivalent n'a pas d'effet sur une telle forme de lumière qui ne subit donc que la biréfringence équivalente. Une fois déterminé l'axe  $\hat{x}'$ , on cherche la forme de lumière qui émerge du milieu suivant  $\hat{x}'$ : elle ne subit que le pouvoir rotatoire équivalent.

### 6.4. Relations entre paramètres intrinsèques et équivalents

Pour les établir, nous utilisons la relation (91) avec

$$\exp(\hat{n}\Psi/2) = \cos(\Psi/2) + (\hat{i} \cos \chi \cos \alpha + \hat{j} \cos \chi \sin \alpha + \hat{k} \sin \chi) \sin(\Psi/2), \quad (93)$$

$$\exp(\hat{x}'\phi'/2) = \cos(\phi'/2) + (\hat{i} \cos \alpha' + \hat{j} \sin \alpha') \sin(\phi'/2), \quad (94)$$

$$\exp(\hat{k}\theta'/2) = \cos(\theta'/2) + \hat{k} \sin(\theta'/2). \quad (95)$$

Les règles de calcul des quaternions permettent d'écrire

$$\left. \begin{aligned} \cos(\Psi/2) &= \cos(\theta'/2) \cos(\phi'/2), \\ \cos \chi \sin(\Psi/2) \cos \alpha &= \sin(\phi'/2) \cos[\alpha' - (\theta'/2)], \\ \cos \chi \sin(\Psi/2) \sin \alpha &= \sin(\phi'/2) \sin[\alpha' - (\theta'/2)], \\ \sin \chi \sin(\Psi/2) &= \sin(\theta'/2) \cos(\phi'/2). \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Ce système est équivalent à

$$\left. \begin{aligned} \cos(\Psi/2) &= \cos(\theta'/2) \cos(\phi'/2), \\ |\cos \chi \sin(\Psi/2)| &= |\sin(\phi'/2)|, \\ \sin \chi \sin(\Psi/2) &= \sin(\theta'/2) \cos(\phi'/2), \\ \alpha' - (\theta'/2) &= \alpha[\pi], \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

lui-même équivalent à deux systèmes suivant qu'on choisit:

$$\alpha' - (\theta'/2) = \alpha \quad \text{et} \quad \cos \chi \sin(\Psi/2) = \sin(\phi'/2),$$

ou bien

$$\alpha' - (\theta'/2) = \alpha + \pi \quad \text{et} \quad \cos \chi \sin(\Psi/2) = -\sin(\phi'/2).$$

Ces deux systèmes sont équivalents physiquement; ils conduisent simplement à des biréfringences équivalentes d'axes et d'angles opposés qui expriment la même rotation sur la sphère de Poincaré. En choisissant la première solution, nous obtenons un système d'équations qui donne les paramètres équivalents à partir de  $\chi$  et  $\Psi$ :

$$\left. \begin{aligned} \sin(\phi'/2) &= \cos \chi \sin(\Psi/2), \\ \tan(\theta'/2) &= \sin \chi \tan(\Psi/2), \\ \alpha' - \alpha &= \theta'/2, \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

ou encore  $\chi$  et  $\Psi$  en fonction des paramètres équivalents:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\Psi/2) &= \cos(\theta'/2) \cos(\phi'/2), \\ \tan \chi &= \frac{\sin(\theta'/2)}{\tan(\phi'/2)}, \\ \alpha &= \alpha' - (\theta'/2). \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

Enfin, en tenant compte des relations (84) et (86), nous arrivons aux relations entre paramètres équivalents et intrinsèques:

$$\left. \begin{aligned} \sin(\phi'/2) &= \frac{\phi}{\sqrt{(\phi^2 + \theta^2)}} \sin \left[ \frac{\sqrt{(\phi^2 + \theta^2)}}{2} l \right], \\ \tan(\theta'/2) &= \frac{\theta}{\sqrt{(\phi^2 + \theta^2)}} \tan \left[ \frac{\sqrt{(\phi^2 + \theta^2)}}{2} l \right], \\ \alpha' - (\theta'/2) &= \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

Le système (99) conduit, pour sa part, à:

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{2 \cos^{-1} [\cos(\theta'/2) \cos(\phi'/2)]}{l \left( 1 + \frac{\sin^2(\theta'/2)}{\tan^2(\phi'/2)} \right)^{1/2}}, \\ \theta &= \frac{2 \cos^{-1} [\cos(\theta'/2) \cos(\phi'/2)]}{l \left( 1 + \frac{\tan^2(\phi'/2)}{\sin^2(\theta'/2)} \right)^{1/2}}, \\ \alpha &= \alpha' - (\theta'/2). \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

### Remarques

Nous aurions pu décomposer le biréfringent elliptique en un biréfringent linéaire suivi d'un pouvoir rotatoire. On montre alors que ni  $\phi'$ , ni  $\theta'$  ne changent et que l'axe du biréfringent linéaire obtenu est symétrique de  $\alpha'$  par rapport à  $\alpha$  (figure 5).

Les paramètres équivalents dépendent de l'épaisseur optique du milieu considéré, ce qui n'est pas le cas des paramètres intrinsèques unitaires. En effet le pouvoir rotatoire et la biréfringence intrinsèques se mélangent en même temps dans le milieu ce qui rend le phénomène de biréfringence elliptique proportionnel à l'épaisseur;

ramener ces paramètres à l'unité de longueur à un sens. Par contre le pouvoir rotatoire et la biréfringence équivalents agissent successivement pour donner le même effet qu'un milieu d'épaisseur donnée; c'est parce qu'il n'y a pas commutativité des rotations d'angles finis que les paramètres équivalents dépendent de l'épaisseur.

## 7. Conclusion

Le formalisme de représentation de la polarisation de la lumière décrit ici et basé sur les quaternions, s'apparente à celui des vecteurs de Stokes et, comme lui, résout le problème de la somme incohérente de lumières polarisées. Les polariseurs, les dichroïques et les biréfringents, caractérisés par deux états propres orthogonaux définissant un 'axe' (et correspondant à de la lumière totalement polarisée) et par un déphasage, sont représentés de la même façon. D'où la mise en évidence de l'aspect unitaire des opérateurs de polarisation qui apparaissent comme des cas particuliers d'un opérateur général.

A ceci, il convient d'ajouter la puissance du calcul des quaternions qui ne réside d'ailleurs pas dans une réduction du nombre de calculs mais dans la façon de noter les opérateurs de polarisation: cette notation, qui tient compte de l'axe et du déphasage d'un opérateur, se conserve dans le produit d'opérateurs. D'autre part, cette méthode ne nécessite aucun changement de base: il est aussi rapide d'écrire un dichroïque elliptique quelconque qu'un biréfringent linéaire d'axe  $X$ . De plus, le calcul des quaternions se prête tout aussi bien que le calcul matriciel à un traitement par ordinateur.

Appliqué à la biréfringence elliptique, le formalisme exposé permet une notation concise qui traduit la superposition du pouvoir rotatoire et de la biréfringence linéaire. Les quelques calculs qui précèdent montrent que les quaternions conduisent non seulement à une représentation synthétique de la lumière polarisée mais aussi à des méthodes pratiques de calcul.

## Remerciements

L'auteur remercie Monsieur le Professeur Max Bausset, de l'université de Toulon et du Var, pour ses conseils fructueux.

A new formalism for polarized light is developed in which polarization states and operators are expressed by 'complex' quaternions. Polarizers and birefringent and dichroic media, appear as particular cases of a more general polarization operator. The unitary aspect of polarization operators is demonstrated. The formalism is then applied to elliptical birefringence.

## Références

- [1] RICHARTZ, M., et HSÜ, H.-Y., 1949, *J. opt. Soc. Am.*, **39**, 136.
- [2] CERNOSEK, J., 1971, *J. opt. Soc. Am.*, **61**, 324.
- [3] THEOCARIS, P. S., et GDOUTOS, E. E., 1979, *Matrix Theory of Photoelasticity* (Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag), pp. 282-288.
- [4] WHITNEY, C., 1971, *J. opt. Soc. Am.*, **61**, 1207.
- [5] SIMMONS, J. W., et GUTTMANN, M. J., 1970, *States, Waves and Photons: A Modern Introduction to Light* (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley), p. 76.
- [6] TAKENAKA, H., 1973, *Nouv. Revue Optique*, **4**, 37.
- [7] LENTIN, A., et RIVAUD, J., 1963, *Eléments d'Algèbre Moderne* (Paris: Vuibert), pp. 295-297.

- [8] BASS, J., 1968, *Cours de Mathématiques*, Tome 1 (Paris: Masson), pp. 126–132.
- [9] DIEUDONNÉ, J., 1968, *Algèbre Linéaire et Géométrie Élémentaire* (Paris: Hermann), pp. 197–207.
- [10] KORN, G. A., et KORN, T. M., 1968, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers* (New York: McGraw-Hill), pp. 385, 474.
- [11] BRUHAT, G., et KASTLER, A., 1965, *Optique* (Paris: Masson), §§ 24, 333.
- [12] POINCARÉ, H., 1892, *Théorie Mathématique de la Lumière*, Tome 2 (Paris: G. Carré), pp. 282–285.
- [13] RAMACHANDRAN, G. N., et RAMASESHAN, S., 1961, *Handbuch der Physik*, Vol. XXV/1, édité par S. Flügge (Berlin: Springer-Verlag), pp. 1–13.
- [14] AZZAM, R. M. A., et BASHARA, N. M., 1977, *Ellipsometry and Polarized Light* (Amsterdam: North-Holland), pp. 47, 492.
- [15] ROBERT, A., 1972, *Polarimétrie et photoélasticimétrie* (Paris: Service Technique des Constructions et Armes Navales), pp. 3–44.
- [16] DE BAZELAIRE, E., 1974, Thèse, Université Paris VI.
- [17] BAUSSET, M., 1982, *Dynamiques* (Paris: Hermann), p. 90.
- [18] PELLAT-FINET, P., 1983, Thèse, Université d'Aix-Marseille III, Université de Toulon et du Var.
- [19] NYE, J. F., 1972, *Physical Properties of Crystals* (London: Oxford University Press), pp. 266–267.
- [20] BUHRER, C. F., HO, L., et ZUCKER, J., 1964, *Appl. Optics*, **3**, 517.