

METODOLOGÍA DE CARACTERIZACIÓN DE MEDIOS BIRREFRINGENTES CON MODOS PROPIOS ELÍPTICOS

Autor: Camilo Andrés Cadena

Resumen

Tradicionalmente, al caracterizar los medios birrefringentes con modos propios elípticos (BE), se emplean dos enfoques: los parámetros intrínsecos y los parámetros equivalentes. Los primeros describen el medio en términos de modos elípticos y retraso de fase, mientras que los segundos separan el BE en modos lineales y circulares, lo que permite la recolección de datos en experimentos. Sin embargo, surge un problema en la forma en que estos parámetros se relacionan a través de ecuaciones, ya que no son inyectivas, lo que significa que hay múltiples soluciones, tanto físicas como matemáticas, que cumplen con las ecuaciones.

La idea principal de este estudio consiste en proponer un nuevo enfoque para caracterizar los BE, por medio de un montaje experimental sencillo que permite, por primera vez, mediciones simultáneas de ambas representaciones. Esta metodología supera el desafío de la no inyectividad y ofrece una descripción más precisa del medio birrefringente.

Pregunta de investigación

¿Cómo medir simultáneamente los seis parámetros de un BE, evitando el problema de la no-inyectividad en sus relaciones algebraicas?

Introducción

Tradicionalmente, para describir el comportamiento de un (BE), se emplean dos enfoques formales. El primero, conocido como parámetros intrínsecos, ofrece una visión general del medio, considerando sus modos propios elípticos y su retardo de fase. El segundo enfoque, llamado parámetros equivalentes, fue introducido utilizando el Teorema I de Jones [3]. Este último permite descomponer un BE en términos de una birrefringencia con modos propios lineales (BL) y otra con modos propios circulares (BC); lo que posibilita la recopilación de datos ya que, hasta el momento, se creía que estos parámetros son los únicos que pueden medirse experimentalmente.

El uso de los parámetros equivalentes suele ser común para calcular los parámetros intrínsecos mediante ecuaciones, lo que aparentemente resulta conveniente para comprender las propiedades de los BE. Sin embargo, este enfoque en la caracterización de un BE ha llevado a la noción arraigada de la existencia de parámetros físicos (parámetros intrínsecos) y matemáticos (parámetros equivalentes)[4] [3], la cual no da cuenta de la complejidad de las relaciones que hay entre ambas representaciones.

Ahora bien, el presente trabajo destaca el siguiente problema: los dos conjuntos de parámetros no están relacionados de manera inyectiva en las ecuaciones usadas:

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\Gamma_{eq}}{2} \cos \Phi_{eq}, \quad (1)$$

$$\tan 2\epsilon = \cot \frac{\Gamma_{eq}}{2} \sin \frac{\Psi_{eq}}{2}, \quad (2)$$

donde γ y ϵ son, respectivamente, el retardo elíptico y la elipticidad de los parámetros intrínsecos; y Γ_{eq} y Ψ_{eq} son, respectivamente, la BL y BC de los parámetros equivalentes.

Por lo tanto, esto conduce a la existencia de múltiples soluciones, tanto físicas como matemáticas, que satisfacen las ecuaciones pertinentes; sin embargo, en términos físicos, solo una de ellas es válida. Como resultado, los medios birrefringentes no se caracterizan de manera efectiva, ya que existen varios conjuntos de valores que cumplen con las relaciones establecidas.

Estado del arte

Un cristal anisotrópico ópticamente activo presenta las propiedades de la birrefringencia elíptica (BE), según la cual los estados propios que se propagan en una placa de cristal con diferentes velocidades son dos ondas polarizadas elípticamente [5]. Comúnmente se usan los parámetros intrínsecos para caracterizar este tipo de medios: γ , la retardación de fase elíptica entre los estados propios elípticamente polarizados rápido y lento, θ , el ángulo de azimut, y ϵ , el ángulo de elipticidad, del estado propio rápido de propagación en la placa de cristal.

Las investigaciones actuales sobre el efecto de la BE en cuanto a la medición de los parámetros intrínsecos de un retardador de fase elíptica incluyen diversos métodos, como la polarimetría de Fourier, el método del compensador de Senarmont y la interferometría heterodina [1][2]. Todos estos métodos se centran en la medición directa de los parámetros γ , θ y ϵ de una muestra [5].

Por otro lado, teniendo en cuenta el Teorema I de Jones – que establece que cualquier tipo de sistema óptico unitario es ópticamente equivalente a un sistema óptico que consiste en un BL y un BC [3] –, se han propuesto otro tipo de metodologías en las que los tres parámetros fundamentales de un BE se obtienen en términos de los valores medidos de BL y BC equivalentes simultáneamente [5].

Este proceso se lleva a cabo de la siguiente manera: en primer lugar, se determina la matriz equivalente, que es la matriz compuesta por los parámetros equivalentes que descomponen el elemento birrefringente en sus componentes de (BL) y (BC):

$$\mathbf{J}_{eq} = \mathbf{J}_{BC}(\Phi_{eq}) \mathbf{J}_{BL}(\Gamma_{eq}, \psi_{eq}) = \begin{pmatrix} a_{eq} + ib_{eq} & c_{eq} + id_{eq} \\ -c_{eq} + id_{eq} & a_{eq} - ib_{eq} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

donde

$$\begin{aligned} a_{eq} &= \cos \frac{\Gamma_{eq}}{2} \cos \Phi_{eq}, & b_{eq} &= \sin \frac{\Gamma_{eq}}{2} \cos (2\psi_{eq} - \Phi_{eq}), \\ c_{eq} &= \cos \frac{\Gamma_{eq}}{2} \sin \Phi_{eq}, & d_{eq} &= \sin \frac{\Gamma_{eq}}{2} \sin (2\psi_{eq} - \Phi_{eq}). \end{aligned} \quad (4)$$

Por otro lado, desde el formalismo de los parámetro intrínsecos, la matriz de Jones J_{BE} que describe el BE se expresa como [2]:

$$\mathbf{J}_{BE} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} + i \sin \frac{\gamma}{2} \cos 2\epsilon \cos 2\theta & \sin \frac{\gamma}{2} \sin 2\epsilon + i \sin \frac{\gamma}{2} \cos 2\epsilon \sin 2\theta \\ -\sin \frac{\gamma}{2} \sin 2\epsilon + i \sin \frac{\gamma}{2} \cos 2\epsilon \sin 2\theta & \cos \frac{\gamma}{2} - i \sin \frac{\gamma}{2} \cos 2\epsilon \cos 2\theta \end{pmatrix}. \quad (5)$$

De este modo, igualando J_{eq} y J_{EB} , se obtienen las siguientes expresiones:

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\Gamma_{eq}}{2} \cos \Phi_{eq}, \quad (6)$$

$$\theta = \Psi_{eq} - \frac{\Phi_{eq}}{2}, \quad (7)$$

$$\tan 2\epsilon = \cot \frac{\Gamma_{eq}}{2} \sin \frac{\Psi_{eq}}{2}. \quad (8)$$

Estas tres últimas ecuaciones se utilizan para calcular los parámetros intrínsecos en términos de los parámetros equivalentes. Además, es importante destacar que estos parámetros no solo se obtienen mediante el procedimiento mencionado aquí, sino que también pueden derivarse utilizando otros formalismos matemáticos, como los cuaterniones [4].

Ahora bien, el inconveniente con las ecuaciones 6 y 8 radica en que no son funciones inyectivas, lo que significa que existen múltiples soluciones que las satisfacen. Esta situación plantea un problema evidente, ya que las ecuaciones mismas no proporcionan un criterio claro para determinar cuál es la solución físicamente relevante para describir el BE.

Con el fin de solucionar esta problemática, se presentan a continuación los objetivos de este estudio.

Objetivos

Objetivo general

Elaborar un método de caracterización de medios birrefringentes con modos propios elípticos para medir al mismo tiempo los parámetros intrínsecos y los parámetros equivalentes.

Objetivos específicos

1. Proponer nuevas relaciones entre los parámetros intrínsecos y los parámetros equivalentes a partir del estudio de la geometría de las trayectorias sobre la esfera de Poincaré.
2. Diseñar un montaje experimental que permita medir al mismo tiempo ambos conjuntos de parámetros.
3. Desarrollar un algoritmo de medición que permita introducir los valores experimentales y caracterizar por completo al BE.

Metodología

Primero, se presentan a continuación las nuevas ecuaciones que incorporan ambos conjuntos de parámetros. La demostración de estas ecuaciones se puede encontrar en el apéndice al final del texto.

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\frac{\Delta S_L x}{\Delta S_L z} - \frac{\Delta S_C x}{\Delta S_C z}}{\frac{\Delta S_C y}{\Delta S_C z} - \frac{\Delta S_L y}{\Delta S_L z}}, \quad (9)$$

$$\tan(2\chi) = \frac{\Delta S_C x}{\Delta S_C z} \left(\frac{\Delta S_C y}{\Delta S_C z} - \frac{\Delta S_L y}{\Delta S_L z} \right) - \frac{\Delta S_C y}{\Delta S_C z} \left(\frac{\Delta S_L x}{\Delta S_L z} - \frac{\Delta S_C x}{\Delta S_C z} \right) \quad (10)$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{R}_S \cdot \vec{R}'_S}{|\vec{R}_S| |\vec{R}'_S|} \quad (11)$$

donde α y χ son, respectivamente, son el ángulo azimut y la elipticidad. Además, ΔS denota la diferencia entre los estados incidente y emergente medidos experimentalmente.

En segundo lugar, teniendo en cuenta lo anterior, se propone el siguiente esquema de polarimetría que puede ser replicado fácilmente

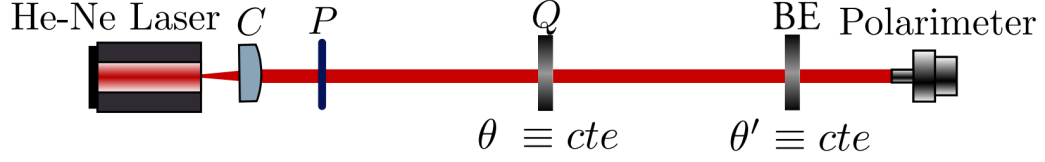


Figura 1: Esquema experimental. C es un colimador, P un polarizador lineal y Q un cuarto de onda.

Con este enfoque se logra una metodología de medición simple de los seis parámetros en las dos representaciones, a partir de un esquema experimental que requiere sólo dos estados incidentes y sus estados emergentes.

Finalmente, con el propósito de facilitar la recolección de datos para cualquier investigador, se propone un código en Python que permita analizar los datos medidos experimentalmente a partir del anterior esquema y caracterizar por completo el medio birrefringente.

Referencias

- [1] Berezhna S., Berezhnyy I., Takashi M., 2001a, Applied Optics, 40, 644
- [2] Berezhna S., Berezhnyy I., Takashi M., 2001b, Proc. SPIE, 4317, 129
- [3] Hurwitz H., Jones R. C., 1941, JOSA, 31, 493
- [4] Pellat-Finet P., 1984, Optica Acta: International Journal of Optics, 31, 415
- [5] Yu C.-J., Lin C.-E., Li Y.-C., Chou L.-D., Wu J.-S., Lee C.-C., Chou C., 2009, Optics Express, 17, 19213

Apéndice

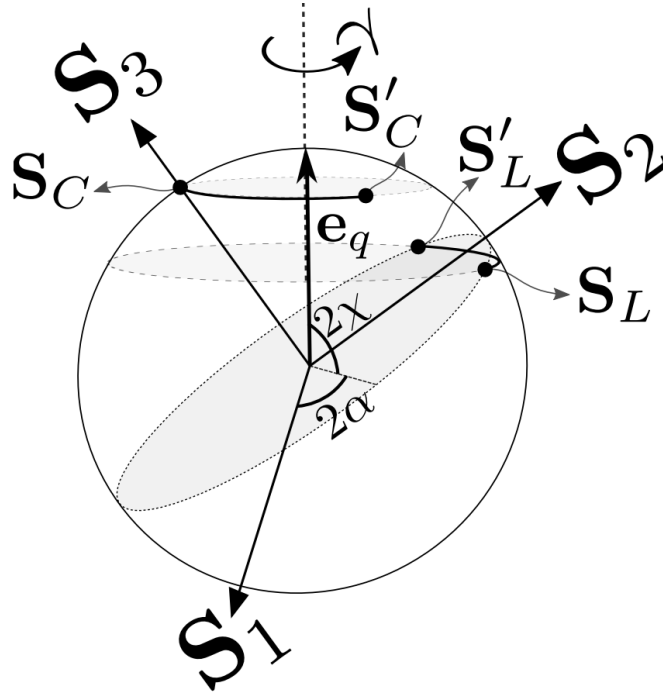


Figura 2: Simetrías de los cambios de los estados de polarización sobre la esfera de Poincaré.

A continuación, desarrollaremos la demostración que permite encontrar las ecuaciones propuestas en este trabajo. En primer lugar, teniendo la figura 2, definimos $\Delta \vec{S}_L$ como la diferencia, en la esfera de Poincaré, del estado final y el estado inicial de polarización lineal al pasar por un BE que rota:

$$\Delta \vec{S}_L = \vec{S}'_L - \vec{S}_L.$$

Del mismo modo, para un estado de polarización circular:

$$\Delta \vec{S}_C = \vec{S}'_C - \vec{S}_C.$$

Ahora bien, como puede verse, $\Delta \vec{S}_L$ y $\Delta \vec{S}_C$ son perpendiculares al eje de giro \hat{e}_q ; es decir, $\Delta \vec{S}_L \cdot \hat{e}_q = \Delta \vec{S}_C \cdot \hat{e}_q = 0$, donde \hat{e}_q puede escribirse como $\hat{e}_q = \hat{e}_1 \cos 2\chi \cos 2\alpha + \hat{e}_2 \cos 2\chi \sin 2\alpha + \hat{e}_3 \sin 2\chi$. Entonces,

$$\Delta \vec{S}_L \cdot \hat{e}_q = \Delta S_L x \cos 2\chi \cos 2\alpha + \Delta S_L y \cos 2\chi \sin 2\alpha + \Delta S_L z \sin 2\chi = 0. \quad (12)$$

Podemos dividir la ecuación 12 por $\cos 2\chi$:

$$\Delta S_L x \cos 2\alpha + \Delta S_L y \sin 2\alpha + \Delta S_L z \tan 2\chi = 0.$$

Despejando $\tan 2\chi$:

$$\tan(2\chi) = -\frac{\Delta S_L x}{\Delta S_L z} \cos 2\alpha - \frac{\Delta S_L y}{\Delta S_L z} \sin 2\alpha. \quad (13)$$

De una manera semejante, podemos hacer para el caso de $\Delta \vec{S}_C \cdot \hat{e}_q = 0$:

$$\tan(2\chi) = -\frac{\Delta S_C x}{\Delta S_C z} \cos 2\alpha - \frac{\Delta S_C y}{\Delta S_C z} \sin 2\alpha. \quad (14)$$

Si igualamos 13 y 14:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta S_C x}{\Delta S_C z} + \frac{\Delta S_C y}{\Delta S_C z} \tan 2\alpha &= \frac{\Delta S_L x}{\Delta S_L z} + \frac{\Delta S_L y}{\Delta S_L z} \tan 2\alpha, \\ -\frac{\Delta S_L x}{\Delta S_L z} \cos 2\alpha - \frac{\Delta S_L y}{\Delta S_L z} \sin 2\alpha &= -\frac{\Delta S_C x}{\Delta S_C z} \cos 2\alpha - \frac{\Delta S_C y}{\Delta S_C z} \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Dividiendo por $\cos 2\alpha$ y reorganizando,

$$\frac{\Delta S_C y}{\Delta S_C z} \tan 2\alpha - \frac{\Delta S_L y}{\Delta S_L z} \tan 2\alpha = \frac{\Delta S_L x}{\Delta S_L z} - \frac{\Delta S_C x}{\Delta S_C z}.$$

Podemos despejar $\tan 2\alpha$:

$$\tan 2\alpha \left(\frac{\Delta S_C y}{\Delta S_C z} - \frac{\Delta S_L y}{\Delta S_L z} \right) = \frac{\Delta S_L x}{\Delta S_L z} - \frac{\Delta S_C x}{\Delta S_C z}$$

Es decir,

$$\tan 2\alpha = \frac{\frac{\Delta S_L x}{\Delta S_L z} - \frac{\Delta S_C x}{\Delta S_C z}}{\frac{\Delta S_C y}{\Delta S_C z} - \frac{\Delta S_L y}{\Delta S_L z}}. \quad (15)$$

De manera semejante podemos encontrar también la expresión para $\tan 2\chi$. Teniendo en cuenta que

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\frac{\Delta S_L x}{\Delta S_L z} - \frac{\Delta S_C x}{\Delta S_C z}}{\frac{\Delta S_C y}{\Delta S_C z} - \frac{\Delta S_L y}{\Delta S_L z}},$$

Podemos escribir

$$\tan(2\chi) = -\frac{\Delta S_C x}{\Delta S_C z} \cos 2\alpha - \frac{\Delta S_C y}{\Delta S_C z} \sin 2\alpha,$$

de la siguiente forma:

$$\tan(2\chi) = \frac{\Delta S_C x}{\Delta S_C z} \left(\frac{\Delta S_C y}{\Delta S_C z} - \frac{\Delta S_L y}{\Delta S_L z} \right) - \frac{\Delta S_C y}{\Delta S_C z} \left(\frac{\Delta S_L x}{\Delta S_L z} - \frac{\Delta S_C x}{\Delta S_C z} \right) \quad (16)$$

Finalmente, para encontrar γ tomemos en consideración un estado de entrada S , un estado de salida S' y un eje de rotación arbitrario (\hat{e}_q) que permita pasar de uno a otro. Ahora bien, la proyección de S y de S' sobre el eje arbitrario es la misma para ambos estados:

$$\text{proy}_{\hat{e}_q} S = \text{proy}_{\hat{e}_q} S'.$$

Por otra parte, el vector que va desde el centro de la esfera a S , es decir \vec{R}_S se puede hallar de la siguiente manera:

$$\vec{R}_S = s - \text{proy}_{\hat{e}_q} S.$$

Del mismo modo sucede para el vector que va desde el centro de la esfera a S' :

$$\vec{R}'_S = s - \text{proy}_{\hat{e}_q} S'.$$

Así, es posible hallar el ángulo que hay entre S y S' :

$$\vec{R}_S \cdot \vec{R}'_S = |\vec{R}_S| |\vec{R}'_S| \cos \gamma.$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior,

$$\cos \gamma = \frac{\vec{R}_S \cdot \vec{R}'_S}{|\vec{R}_S| |\vec{R}'_S|}. \quad (17)$$

Con lo cual queda demostrado que las propiedades geométricas sobre la esfera de Poincaré permiten hallar explícitamente los parámetros α , χ y γ a partir de las ecuaciones 15, 16 y 17 .