Introduzione alla geometria differenziale per fisici

Canteri Marco

1 I tensori

Ricordiamo che se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione n, abbiamo una sua base $\{e_k, k = 1, \ldots, n\}$. Allora un elemento $v \in V$ può essere rappresentato come

$$v = \sum_{k=1}^{n} v^k e_k \qquad v = v^k e_k \tag{1}$$

dove si ricorda la convenzione di della somma implicita su indici ripetuti uno in alto e uno in basso. Da notare che le componenti hanno l'indice in alto e la base l'indice in basso.
Definiamo un funzionale lineare su V come una funzione $f : V \to \mathbb{R}$ con la seguente proprietà:

$$f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \forall v, w \in V \tag{2}$$

Allora a questo punto possiamo definire lo spazio duale di V: V^* come lo spazio di tutti i funzionali lineari di V. V^* è ancora uno spazio vettoriale se definiamo la somma e il prodotto per scalare come segue:

$$(\alpha f + \beta g)(v) = \alpha f(v) + \beta g(v) \quad \forall f, g \in V^*; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \forall v \in V \tag{3}$$

Gli elementi di V^* sono detti *covettori*. Consideriamo i seguenti elementi di V^*: e^{*k} definiti come:

$$e^{*k}(e_j) = \delta^k_j \tag{4}$$

allora $\{e^{*k}, k = 1, \dots, n\}$ è una base di V^* e quindi ogni $f \in V^*$ si può scrivere come:

$$f(v) = f_k e^{*k}(v) \quad f_k \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Notare che l'indice delle componenti è in basso e quello della base in alto, il contrario di quello che accade nei vettori. f_k si può definire come $f_k = f(e_k)$, infatti se prendiamo un vettore $v \in V$ abbiamo che

$$f(v) = f(v^j e_j) = f_k e^{*k}(v^j e_j) = f_k v^j e^{*k}(e_j) = f_j v^j = f(e_j) v^j = f(v)$$

Parlando di notazione possiamo scrivere

$$< v, f > := f(v)$$

chiamandolo *pairing*, non si sa a che utilità, per me era più comprensibile tenere $f(v)$ ma vabbe, i matematici sono gente strana che ama confondere la gente normale.
Complichiamo le cose e prendiamo due spazi vettoriali V^1, V^2 di dimensioni n_1, n_2 e chiamiamo funzionale bilineare una cosa del genere:

$$h(v, w) : V^1 \times V^2 \to \mathbb{R}$$

dove h è lineare rispetto ad entrambi gli argomenti. Questa funzione bilineare è detta *tensore*. Chiamiamo lo spazio dei tensori prodotto tensoriale tra V^{1*} e V^{2*} e lo indichiamo come $V^{1*} \otimes V^{2*}$ perchè mai questa orribile notazione? si spiega subito definendo il seguente: prendiamo due funzionali lineari $f \in V^{1*}, g \in V^{2*}$ definiamo il prodotto tensoriale $(f \otimes g)(v, w)$ come:

$$(f \otimes g)(v, w) := f(v)g(w)$$

in pratica il prodotto tensoriale è una moltiplicazione tra funzionali lineari. Naturalmente lo spazio $V^{1*} \otimes V^{2*}$ è uno spazio vettoriale, basta dargli una somma e un prodotto per scalare. Se è uno spazio vettoriale ha anche una base. infatti sia $\{e^{*k}\}_{k=1,\dots,n_1}$ la base di V^{1*} e $\{b^{*j}\}_{j=1,\dots,n_2}$ base si V^{2*}

$$e^{*k} \otimes b^{*j}(e_\alpha, b_\beta) = e^{*k}(e_\alpha) b^{*j}(b_\beta) = \delta^k_\alpha \delta^j_\beta$$

Allora $e^{*k} \otimes b^{*j}$ è una base di $V^{1*} \otimes V^{2*}$ e possiamo scrivere ogni tensore come

$$h(v, w) = h_{kj} e^{*k} \otimes b^{*j}(v, w) \quad h_{kj} \in \mathbb{R}$$

dove $h_{kj} = h(e_k, b_j)$ in completa anologia con quanto fatto per un semplice funzionale lineare. In effetti la connessione è più stretta, anche un funzionale lineare è un particolare tensore di ordine 1, un funzionale bilineare è un tensore di ordine 2 e cosi via. Più in generale un tensore è un applicazione multilineare.

Infine penso sia interessante dare un'altra interpretazione di tensore, come si trova spesso in giro: una tabella di numeri n-dimensionale che generalizza i casi n=1 (una sequenza) e n=2 (una matrice). Riprendendo quanto scritto sopra un funzionale lineare è descritto da n numeri definiti come f_k infatti un funzionale lineare è univocamente determinato dalle sue componenti e si può scrivere come $f(v) = f_k e^{*k}(v)$ questa è la sequenza di numeri caso particolare n=1 di un tensore. Un tensore di orine 2 come lo abbiamo introdotto qui è rappresentabile da una matrice h_{kj}, infatti $h(v, w) = h_{kj} e^{*k} \otimes b^{*j}(v, w)$ nel caso multilineare si passa a dover considerare h_{kjl} quindi una matrice tridimensionale e cosi via. C'è una sostanziale differenza però tra tensore e tabella n-dimesionale, un tensore è un oggetto intrinseco, un funzionale multilineare, nel caso il cui noi scegliamo una base dello spazio dei tensori allora si può passare da tensore oggetto intrinseco a tabella di numeri n-dimensionale. Ma il tensore rimane un oggetto intrinseco, infatti lo stesso tensore se cambiata la base ha rappresentazioni diverse, quindi tabelle di numeri diverse ovviamente che si trasformano seguendo regole ben precise.

2 Geometria differenziale

Introduciamo il concetto di varietà differenziabile. M è detta varietà differenziabile se M è un insieme di punti dotato di struttura differenziabile, ovvero di un insieme di carte locali $\{\phi : U_\alpha \to \mathbb{R}^n\}_{\alpha \in I}$ dove n è la dimensione della varietà differenziabile, e U_α insiemi aperti di M. Possiamo anche scrivere $\phi = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ dove $x^k : U_\alpha \to \mathbb{R}$ sono le funzioni coordinate. In termini pratici la varietà differenziabile altro non è che un insieme di punti che localmente si può mettere in relazione con $\mathbb{R}^n$ tramite le carte locali. Il nome induce già un esempio: considerata la terra come superficie S^2 in 3 dimensioni, essa è la varietà differenziabile che localmente si può mettere in relazione con R^2 ovvero, si rappresenta una parte della superficie sul piano, tramite una carta geografica.
Prendiamo ora un punto di M, $p \in M$, e consideriamo le curve passanti per

p: $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \to M$ tali che $\gamma(0) = p$. Notiamo innanzitutto che γ non è una funzione secondo l'analisi, infatti il codominio è una varietà differenziabile, ma si possono sfruttare le carte locali della varietà costruendo una funzione differenziabile: $x^k(\gamma(\xi)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremo che γ è differenziabile se lo sono $x^k(\gamma(\xi))$. Inoltre diremo che γ e $\tilde{\gamma}$ sono equivalenti se:

$$\gamma \simeq \tilde{\gamma} \implies \left.\frac{dx^k(\gamma(\xi))}{d\xi}\right|_{\xi=0} = \left.\frac{dx^k(\tilde{\gamma}(\xi))}{d\xi}\right|_{\xi=0}$$

Chiamiamo allora un *vettore tangente* la classe di equivalenza di curve appena definite, quindi definiamo lo spazio tangente a M in p indicato come T_pM come l'insieme dei vettori tangenti. Presa una funzione qualsiasi definita sulla varietà differenziabile abbiamo che $v_p(f) = \frac{df(\gamma(\xi))}{d\xi}\big|_{\xi=0}$ dove γ appartiene alla classe di equivalenza di v_p, questo ci fa vedere come un elemento dello spazio tangente sia: $v_p : C^k(M) \to \mathbb{R}$ una funzione, possiamo pensarla infatti come la derivata direzionale lungo una particolare direzione individuata dalla classe di equivalenze delle curve. T_pM è uno spazio vettoriale possiamo individuare allora le componenti di un suo vettore e contraddistinguere una base dello spazio. Sviluppiamo infatti $v_p(f)$ utilizzando le carte locali:

$$v_p(f) = \left.\frac{df(\gamma(\xi))}{d\xi}\right|_{\xi=0} = \left.\frac{df(x^1(\gamma(\xi)), \dots, x^n(\gamma(\xi)))}{d\xi}\right|_{\xi=0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x^k}\right|_{\xi=0} \left.\frac{dx^k(\gamma(\xi))}{d\xi}\right|_{\xi=0}$$

che possiamo scrivere come

$$v_p(f) = \left.\frac{dx^k(\gamma(\xi))}{d\xi}\right|_{\xi=0} \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{\xi=0} (f)$$

chiamando $\left.\frac{dx^k(\gamma(\xi))}{d\xi}\right|_{\xi=0} := v_p^k$ si può notare come un vettore v_p si può scrivere come

$$v_p = v_p^k \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{\xi=0}$$

che ci suggerisce che $\frac{\partial}{\partial x^k}\big|_{\xi=0}$ sia una base dello spazio vettoriale e v_p^k le sue componenti. Questa base è evidentemente indotta dalla coordinate della varietà differenziabile. Infine la definizione di spazio tangente ad M è definito come

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_pM$$

assume una struttura fibrata.
Passiamo a considerare il duale dello spazio tangente T_pM^*, per farlo prendiamo la nostra funzione $f : M \to \mathbb{R}$ e definiamo il funzionale lineare $(df)_p : T_pM \to \mathbb{R}, (df)_p(v_p) := v_p(f)$ e lo chiamiamo *differenziale*. Questo funzionale lineare è un elemento del duale in quanto per definizione è una funzione che prende un vettore di T_pM ad un elemento di $\mathbb{R}$. È lineare in quanto:

$$(df)_p(v_p + w_p) = (v_p + w_p)(f) = v_p(f) + w_p(f) = (df)_p(v_p) + (df)_p(w_p)$$

dato che T_pM è uno spazio vettoriale quindi possiamo sommare due suoi vettori, cioè è definito $(v_p + w_p)(f)$. Usando il simbolo di pairing scriviamo: $(df)_p(v_p) =< v_p, df_p >$. Possiamo trovare una base dello spazio duale indotta dallo spazio vettoriale nel seguente modo

$$< \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p , (dx^k)_p >:= \delta^k_j$$

quindi a questo punto possiamo esprimere ogni covettore come

$$(df)_p(v_p) = f_k(dx^k)_p(v_p) \qquad f_k \in \mathbb{R}$$

dove $f_k = \frac{\partial f}{\partial x^k}\big|_p =< \frac{\partial}{\partial x^k}\big|_p, df_p >$ infatti in completa analogia con quanto fatto nel paragrafo precendente

$$(df)_p(v_p) = f_k(dx^k)_p(v_p) = f_k(dx^k)_p \left(v^j_p \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p \right) = f_k v^j_p (dx^k)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p \right) = f_k v^j_p \delta^k_j = f_k v^k_p =$$

$$< \frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_p , df_p > v^k_p =< v^k_p \frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_p , df_p >=< v_p, df_p >= (df)_p(v_p)$$

possiamo definire il fibrato cotangente TM^* come

$$TM^* = \bigcup_{p \in M} T_pM^*$$

Possiamo a questo punto definire un campo vettoriale come un applicazione che associa a ogni punto $p \in M$ un vettore di TM è u campo covettoriale (o campo di forme differenziali) come un applicazione che associa a ogni a ogni punto $p \in M$ un covettore di TM^*

3 Applicazioni alla meccanica analitica

La meccanica di Lagrange funziona bene con la geometria differenziale, si può infatti sviluppare la meccanica lagrangiana in termini geometrici. Consideriamo come varietà differenziabile lo spazio delle configurazioni ammissibili in presenza di vincoli V_{n+1}, essa ha struttura differenziabile con le naturali carte $t, q^1, \ldots, q^n$, prendiamo una curva di su V_{n+1}, $\sigma : \mathbb{R} \to V_{n+1}$ parametrizzata dal tempo, quindi tale che $t(\sigma(t)) = t$. Con questa curva possiamo definire la prima Jet-extension del fibrato V_{n+1} in un punto x introducendo una relazione di equivalenza

$$\sigma(t) \simeq \tilde{\sigma} \quad \left.\frac{dq^k(\sigma(t))}{dt}\right|_{t(x)} = \left.\frac{dq^k(\tilde{\sigma}(t))}{dt}\right|_{t(x)}$$

quindi definiamo $J_{1x}(V_{n+1})$ come la classe di equivalenza delle curve passanti per x. Ricordiamo dal paragrafo precendente che un elemento di $J_{1x}(V_{n+1})$ è dato da:

$$z_x = \left.\frac{dx^k(\gamma(\xi))}{d\xi}\right|_{\xi=0} \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{\xi=0}$$

in questa caso $\xi = t; x^1, \ldots, x^n = t, q^1, \ldots, q^n$; e possiamo definire $\dot{q}^k(z_x) := \frac{dq^k(\sigma(t))}{dt}$. I vettore z_x risulta allora essere

$$z_x = \frac{dt}{dt}\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^k(z_x)\frac{\partial}{\partial q^k} = 1\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^k(z_x)\frac{\partial}{\partial q^k}$$

ora prendiamo due elementi di $J_{1x}(V_{n+1})$, z_{x1}, z_{x2} la loro differenza è data da:

$$z_{1x} - z_{2x} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^k(z_{x1})\frac{\partial}{\partial q^k} - \frac{\partial}{\partial t} - \dot{q}^k(z_{x2})\frac{\partial}{\partial q^k} = (\dot{q}^k(z_{x1}) - \dot{q}^k(z_{x2}))\frac{\partial}{\partial q^k}$$

l'elemento $z_{1x} - z_{2x}$ appartiene quindi a quello che si chiama lo *spazio verticale* ai vettori tangenti in x denotato con $V_x(V_{n+1})$, questo inoltre mette in luce il fatto che $J_{1x}(V_{n+1})$ può essere considerato come spazio affine con spazio vettoriale modellatore $V_x(V_{n+1})$. Sono quindi naturali le seguenti definizioni

$$J_1(V_{n+1}) := \bigcup_{x \in V_{n+1}} J_{1x}(V_{n+1}) \qquad V(V_{n+1}) := \bigcup_{x \in V_{n+1}} V_x(V_{n+1})$$

chiamati rispettivamente *prima jet-extension* del fibrato V_{n+1} e *fibrato vettoriale verticale* di V_{n+1}. Soffermiamoci sulla prima jet-extension, essa ha dimensione $2n + 1$ e un suo elemento è dato da:

$$z(t, q^k, \dot{q}^k) = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^k \frac{\partial}{\partial q^k} \quad z \in J_1(V_{n+1})$$

è evidente che questo spazio definisce lo spazio dove la meccanica Lagrangiana lavora, infatti le quantità lagrangiane sono espresse in queste coordinate. L'idea quindi adesso è quella di passare dalla nostra varietà V_{n+1} alla varietà differenziabile $J_1(V_{n+1})$ con ovviamente carte $t, q^k, \dot{q}^k$. Di questa varietà possiamo paralre quindi di fibrato tangente e cotangente. Soffermiamoci su quest'ultimo e consideriamo un elemento di TJ_1^*:

$$df = f_0 dt + f_k dq^k + \tilde{f}_k d\dot{q}^k \qquad f_0, f_k, \tilde{f}_k \in \mathbb{R}$$

definiamo le forme differenziali di contatto ω^k come le 1-forme che hanno componenti:

$$f_0 = \dot{q}^k \quad f_k = 1 \quad \tilde{f}_k = 0$$

se cambiano coordinate la ω^k si trasformano in questo modo

$$\begin{cases} t = t \\ q'^k = q'^k(t, q^k) \\ \dot{q}'^k = \frac{\partial q'^k(t,q^k)}{\partial t} + \frac{\partial q'^k(t,q^k)}{\partial q^s} \dot{q}^s \end{cases}$$

$$\omega'^k = dq'^k - \dot{q}'^k dt = \left(\frac{\partial q'^k}{\partial t} dt + \frac{\partial q'^k}{\partial q^s} dq^s \right) - \left(\frac{\partial q'^k}{\partial t} + \frac{\partial q'^k}{\partial q^s} \dot{q}^s \right) dt = \frac{\partial q'^k}{\partial q^s} (dq^s - \dot{q}^s dt) = \frac{\partial q'^k}{\partial q^s} \omega^s$$

Consideriamo a questo punto un campo di forme differenziali, quindi un applicazione $Q : J_1(V_{n+1}) \to TJ_1^*$, e rappresentiamo i suoi elementi sulla base ω^k:

$$Q = Q_k \omega^k$$

prendiamo come esempio il caso in cui le Q_k siano le componenti lagrangiane delle forze attive,

$$Q_k = F_i \frac{\partial P_i}{\partial q^k}$$

se cambiamo coordinate risulta:

$$Q'_s = Q_k \frac{\partial q'^k}{\partial q^s}$$

quindi il nostro campo quando cambiamo coordinate risulta essere:

$$Q = Q_k \omega^k = Q'_s \frac{\partial q'^s}{\partial q^k} \omega^k = Q'_s \omega^s = Q$$

quindi le componenti lagrangiane delle forze attive sono le componenti di una campo covettoriale con base ω^k