Лабораторная работа 4

Модель гармонических колебаний

Морозов М. Е.

24 февраля 2024

Российский Университет Дружбы Народов, Moscow, Russian Federation

Вводная часть

Вводная часть

Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором. Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

где x – переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.),gamma – параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре),omega – собственная частота колебаний, t – время.

Цель работы

Цель работы

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора.

Задание

Задание

Вариант 61 Фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для след случаев:

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

$$\ddot{x} + 1.1x = 0$$

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

$$\ddot{x} + 11\dot{x} + 7x = 0$$

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

$$\ddot{x} + 12\dot{x} + 8x = 4cos(2t)$$

На интервале $t = (0; 39)$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x0 = -1.0$, $y0 = -0.1$

Выполнение лабораторной работы

Построим графики изменения численности войск. Далее приведён код на языке Julia, решающий задачу:

```
using DifferentialEquations, Plots, OrdinaryDiffEq
#Начальные условия и параметры
tspan = (0,39)
p1 = [0,1.1]
p2 = [11.0,7.0]
p3 = [12.0,8.0]
x0 = [-1, -0.1]
#внешняя сила
f(t) = 4*cos(2*t)
```

```
#Функия колебаний без внешних сил
function osci_wo(dx, x, p, t)
    gamma, w = p
    dx[1] = x[2]
    dx[2] = -w .* x[1] - gamma .* x[2]
end

#Функия колебаний с внешними силами
function osci_w(dx, x, p, t)
    gamma, w = p
    dx[1] = x[2]
    dx[2] = -w .* x[1] - gamma .* x[2] .+ f(t)
end
```

Будем расписывать решение задачи для трех случаев.

Первый случай Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

```
#Случай 1
prob1 = ODEProblem(osci_wo, x0, tspan, p1)
sol1 = solve(prob1, dtmax = 0.05)

plot(sol1) # График колебаний
plot(sol1, vars = (2, 1)) #Фазовый портрет
```

Второй случай Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

```
#Случай 2
prob2 = ODEProblem(osci_wo, x0, tspan, p2)
sol2 = solve(prob2, dtmax = 0.05)

plot(sol2) # График колебаний
plot(sol2, vars = (2, 1)) #Фазовый портрет
```

Третий случай Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

```
#Случай 3
prob3 = ODEProblem(osci_w, x0, tspan, p3)
sol3 = solve(prob3, dtmax = 0.05)
plot(sol3) # График колебаний
plot(sol3, vars = (2, 1)) #Фазовый портрет
```

Результат работы программы в Julia

В результате получим следующие графики.

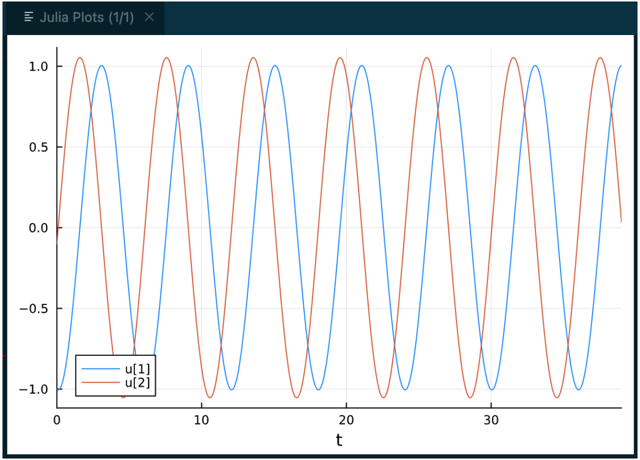

Рис. 1: Колебания гарм осц сл. 1

Результат работы программы в Julia

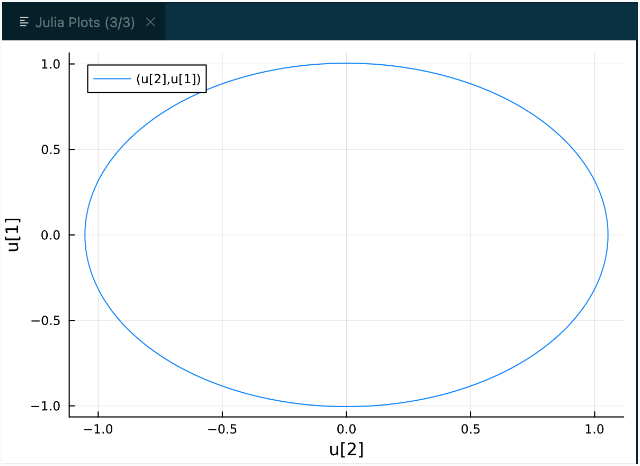

Рис. 2: Фаз портрет сл. 1

Результат работы программы в Julia

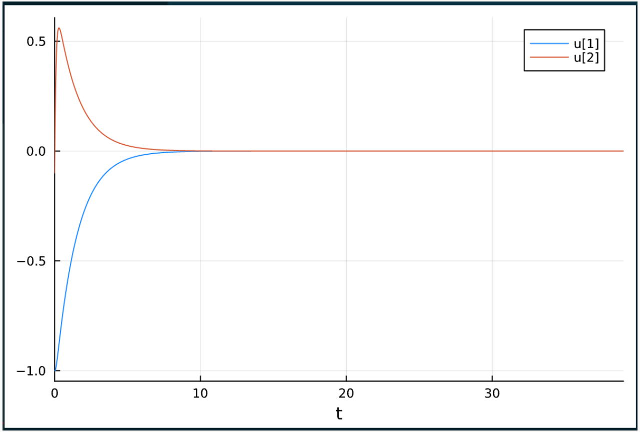

Рис. 3: Колебания гарм осц сл. 2

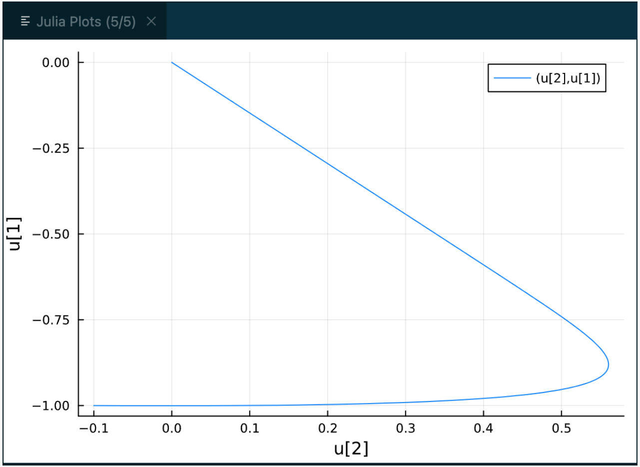

Рис. 4: Фаз портрет сл. 2

Результат работы программы в Julia

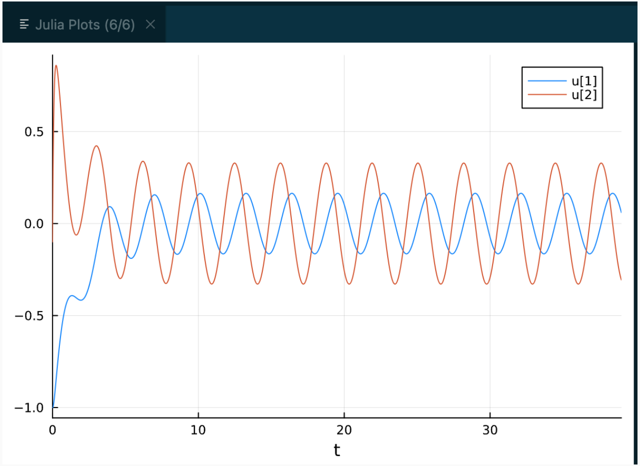

Рис. 5: Колебания гарм осц сл. 3

Результат работы программы в Julia

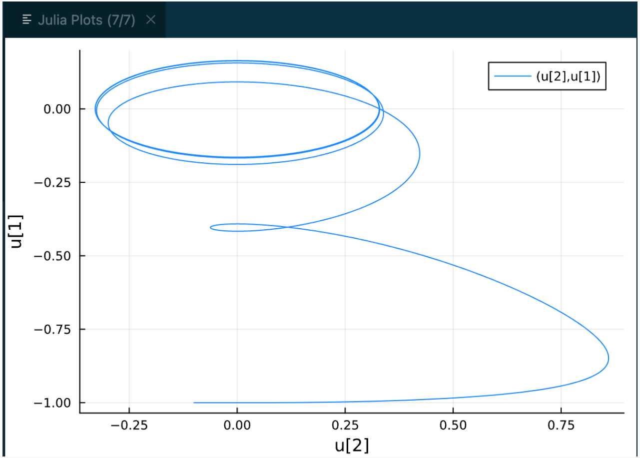

Рис. 6: Фаз портрет сл. 3

Построение графиков колебания гармонического осциллятора и фазовых портретов в OpenModelica

Также построим эти графики в OpenModelica. Для первого случая:

```
model lab4

Real x(start = -1.0);
Real y(start = -0.1);

parameter Real omega = 1.1;
parameter Real gamma = 0;
equation
  der(x) = y;
  der(y) = -omega*x - gamma*y;
end lab4;
```

Построение графиков колебания гармонического осциллятора и фазовых портретов в OpenModelica

Для второго случая

```
model lab4
Real x(start = -1.0);
Real y(start = -0.1);
parameter Real omega = 11.0;
parameter Real gamma = 7.0;

equation
  der(x) = y;
  der(y) = -omega*x - gamma*y;
end lab4;
```

Построение графиков колебания гармонического осциллятора и фазовых портретов в OpenModelica

И для третьего случая

```
model lab4
Real x(start = -1.0);
Real y(start = -0.1);
parameter Real omega = 12.0;
parameter Real gamma = 8.0;
Real p;
equation
  der(x) = y;
  der(y) = -omega*x - gamma*y + p;
  p = 4*cos(2*time);

end lab4;
```

Результат работы программы в OpenModelica

В результате получим следующие графики.

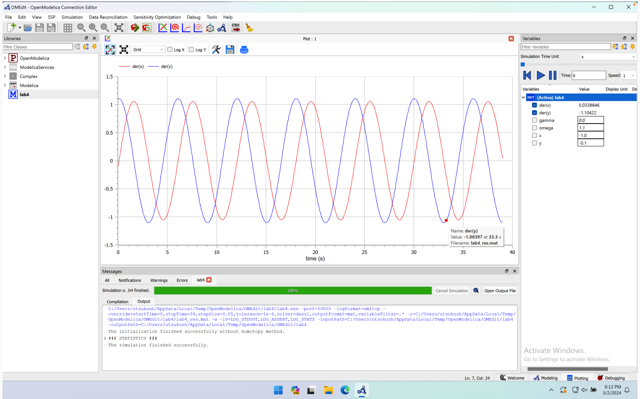

Рис. 7: Колебания гарм осц сл. 1

Результат работы программы в OpenModelica

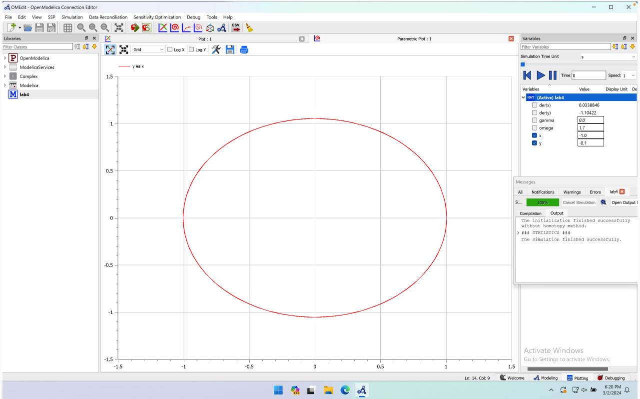

Рис. 8: Фаз портрет сл. 1

Результат работы программы в OpenModelica

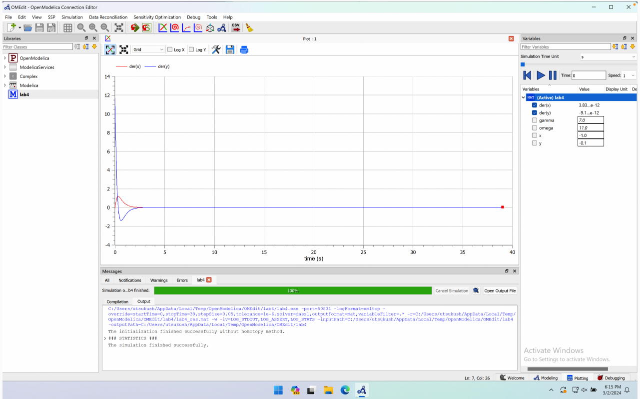

Рис. 9: Колебания гарм осц сл. 2

Результат работы программы в OpenModelica

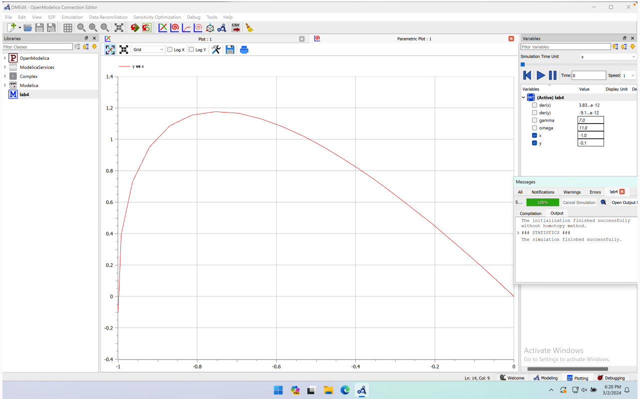

Рис. 10: Фаз портрет сл. 2

Результат работы программы в OpenModelica

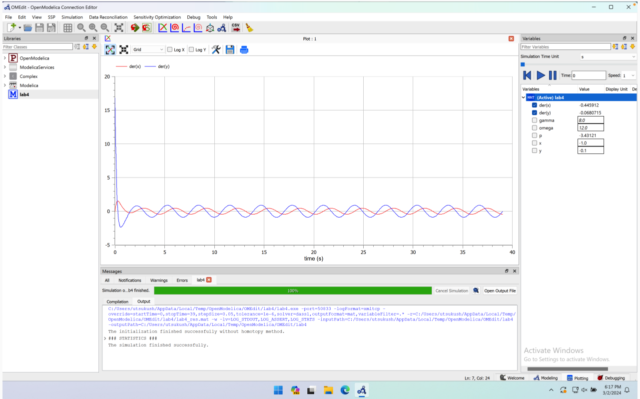

Рис. 11: Колебания гарм осц сл. 3

Результат работы программы в OpenModelica

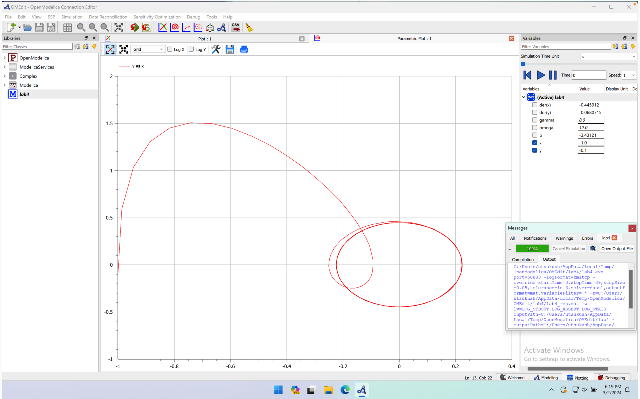

Рис. 12: Фаз портрет сл. 3

Выводы

Выводы

Мы научились строить фазовые портреты, а также изучили гармонические колебания осцилятора.