

Лабораторная работа №2

Задача о погоне

Морозов М. Е. -

16 февраля 2024

Вводная часть

Кривая погони — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», которая ставится следующим образом. Пусть точка A равномерно движется по некоторой заданной кривой. Требуется найти траекторию равномерного движения точки P такую, что касательная, проведённая к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки A .

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 20,5 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 5,5 раза больше скорости браконьерской лодки.

Цели

Построение математических моделей для выбора правильной стратегии при решении задач поиска.

Задачи

1. Запишите уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Постройте траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найдите точку пересечения траектории катера и лодки

Материалы и методы

Язык программирования:

Julia

Библиотеки:

OrdinaryDiffEq, Plots

Выполнение лабораторной работы

Запишем уравнение описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев.

Принимем за $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ - место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения. ($x_{k0} = k$) - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Введем полярные координаты.

Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса θ , только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки.

Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение.

Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии от полюса.

Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{k-x}{5.5v}$ (во втором случае $\frac{k+x}{5.5v}$).

Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда два значения $x_1 = \frac{2k}{13}$ и $x_2 = \frac{2k}{9}$, для двух случаев.

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v .

Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и v_t тангенциальная скорость.

Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r , $r \frac{d\theta}{dt}$.

$$v_t = \sqrt{30.25v^2 - v^2} = \sqrt{29.25}v$$

Так:

$$r \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{29.25}v$$

Решение задачи сводится к решению системы:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \\ r \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{29.25}v \end{cases}$$

С начальными условиями для первого случая:

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = x_1 \end{cases}$$

Или для второго:

$$\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = x_2 \end{cases}$$

Исключая из полученной системы производную по t , можно перейти к следующему уравнению:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{29.25}}$$

Начальные условия остаются. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.

Поиск точки пересечения

Найдем точку пересечения траектории катера и лодки. Для этого нам нужно аналитическое решение дифф. ур., задающего траекторию движения катера.

Мы будем предполагать, что угол, под которым двигается лодка, будет $\frac{3\pi}{4}$. Так как уравнение прямой задано через тангенс, а тангенс этого угла отрицательный, то для 1 случая подставим угол $\frac{7\pi}{4}$, а для 2 - $-\frac{\pi}{4}$

$$r = \frac{41}{13} e^{\frac{1}{\sqrt{29.25}}\theta} - \text{для сл (1)}$$

$$r = \frac{41}{9} e^{\left(5\pi \frac{\sqrt{299}}{299} + \frac{1}{\sqrt{29.25}}\right)\theta} - \text{для сл (2)}$$

В результате получим, что точки пересечения равны $\left(\frac{7\pi}{4}, 8.71603045939847\right)$ - при условии (1) и $\left(-\frac{\pi}{4}, 9.772206533910413\right)$ при условии (2).

Построение траектории

Построим траекторию движения катера и лодки для двух случаев. Далее приведён код на языке Julia, решающий задачу:

```
using Plots #подключаем необходимые библиотеки
using OrdinaryDiffEq #подключаем необходимые библиотеки
s = 20.5 #раст от лодки охраны до катера
fi = 3*pi/4
```

```

tetha1 = (0.0, 2*pi)
tetha2 = (-pi, pi)

sl_1 = 2s/13 #нач услов в 1 случае
sl_2 = 2s/9 #нач услов во 2 случае
f(u,p,t) = u/sqrt(29.25) #функция движения катера береговой охраны
f2(t) = tan(fi)*t #функция движения лодки

#решение задачи в случ 1
sl1=ODEProblem(f, sl_1, tetha1)
sol1 = solve(sl1, Tsit5(), saveat=0.01)

#решение задачи в случ 2
sl2=ODEProblem(f, sl_2, tetha2)
sol2 = solve(sl2, Tsit5(), saveat=0.01)

#точка пересечения для первого случая
t = 0:0.01:15
solution1(t) = (sl_1)*exp(1/sqrt(29.25)*t)
intersection_r1 = solution1(7*pi/4)

#построение графика для первого случая
#график движения катера
plot(sol1.t, sol1.u,
proj=:polar,
lims=(0,13)
)
#график движения лодки
plot!(fill(fi,length(t)), f2.(t))

#точка пересечения для второго случая
solution2(t) = (sl_2)*exp(5*pi*sqrt(299)/299)*exp(1/sqrt(29.25)*t)
intersection_r2 = solution2(-pi/4)

#построение графика для второго случая
#график движения катера
plot(sol2.t, sol2.u,
proj=:polar,
lims=(0,13)
)
#график движения лодки
plot!(fill(fi,length(t)), f2.(t))

```

В результате получим следующие графики (рис. @fig:001, @fig:002, @fig:003). И следующие точки пересечения.

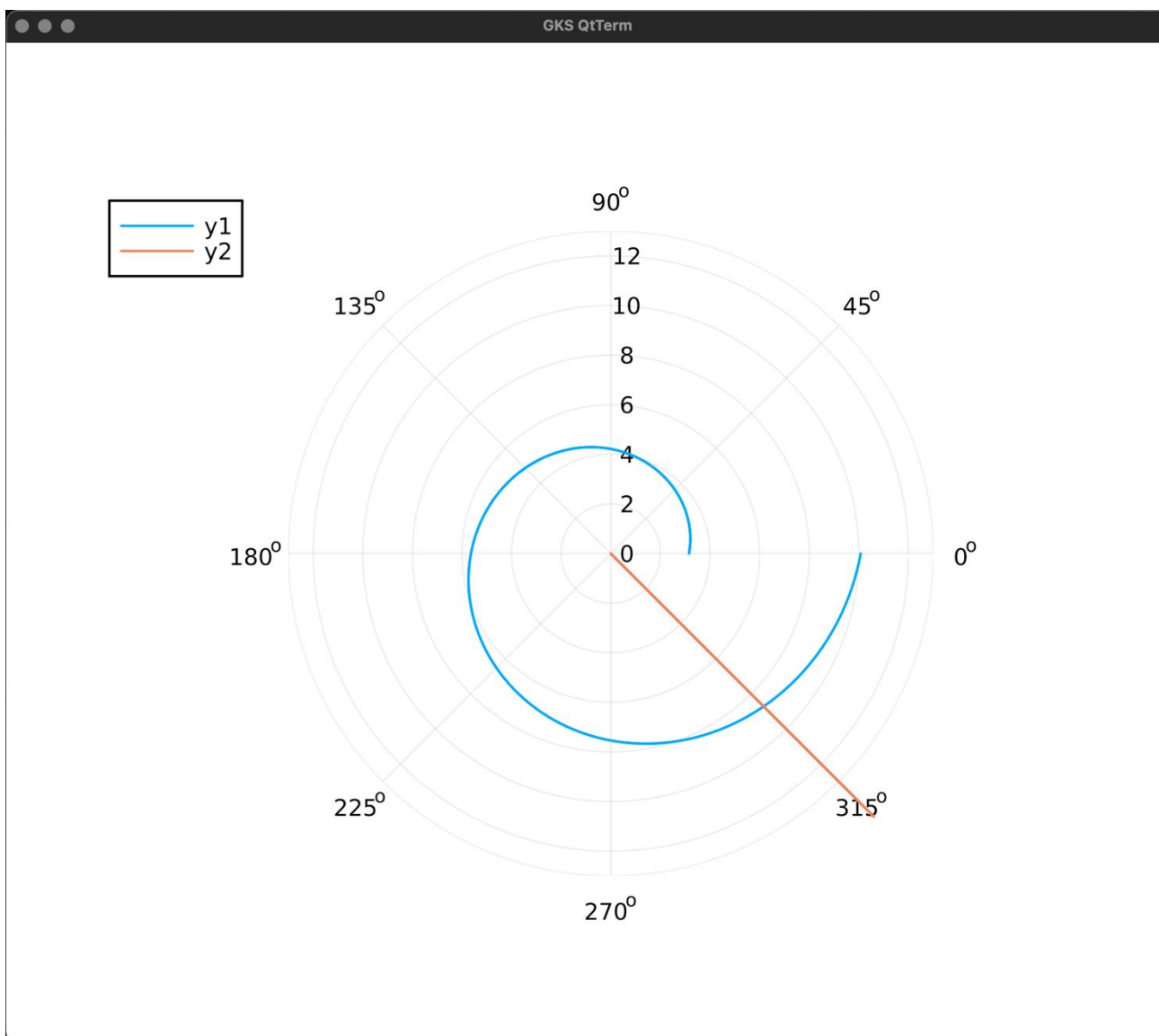


График движения для сл. 1

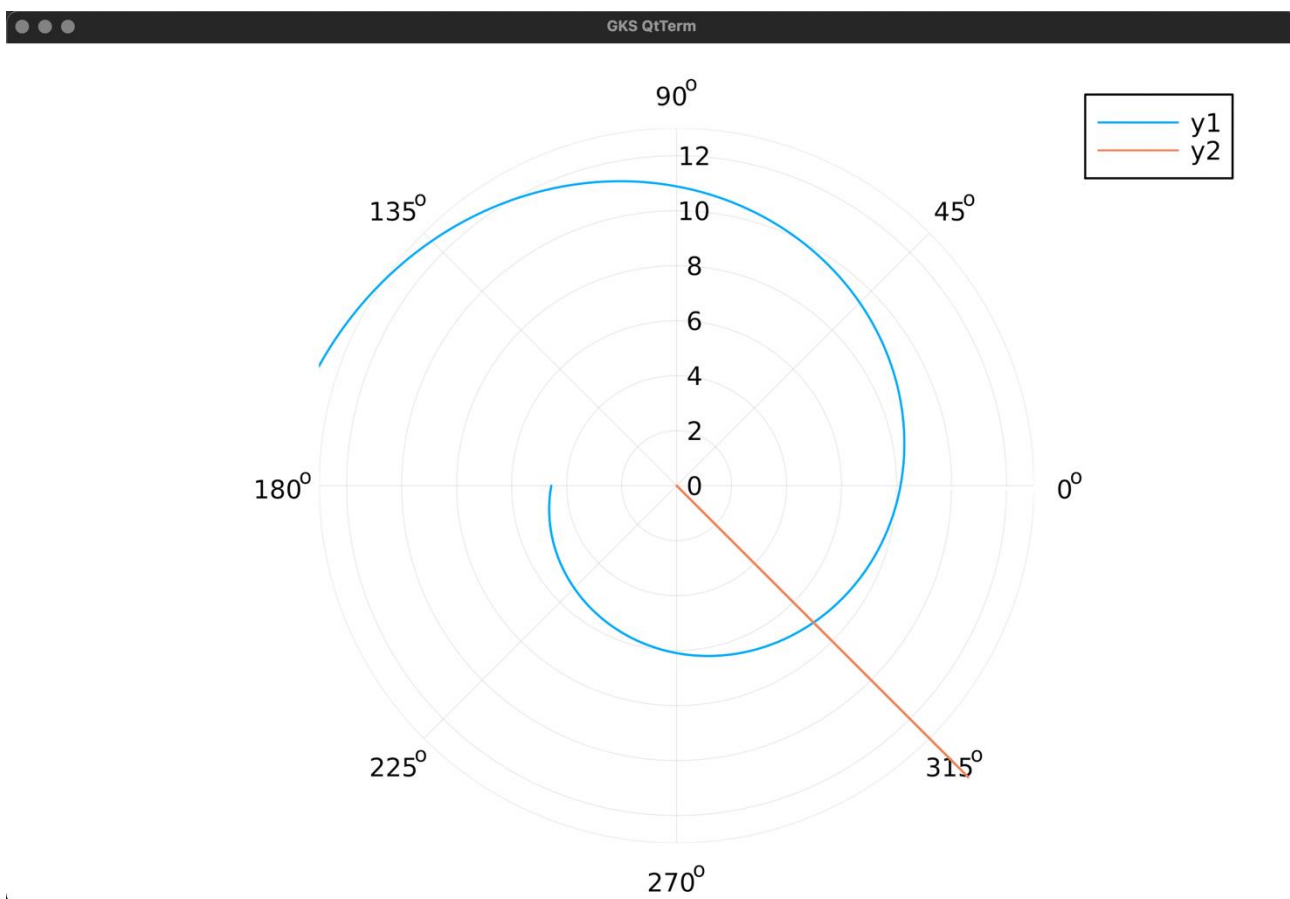


График движения для сл. 2

Точки пересечения равны $\left(\frac{7\pi}{4}, 8.71603045939847\right)$ - при условии (1) и $\left(-\frac{\pi}{4}, 9.772206533910413\right)$ при условии (2). # Код выполнения этой лаб работы в VSCode

```
lab2.jl x
1 using Plots #подключаем необходимые библиотеки
2 using OrdinaryDiffEq #подключаем необходимые библиотеки
3 s = 20.5 #расстояние от лодки до берега
4 f1 = 3*pi/4 #2.356194490192345
5 tetha1 = (0.0, 2*pi) # [0.0, 6.283185307179586]
6 tetha2 = (-pi, pi) # [-3.141592653589793, pi]
7
8
9 s1_1 = 25/13 #нач условия в 1 случае #3.1538461538461537
10 s1_2 = 25/9 #нач условия во 2 случае #4.5555555555555555
11 f(u,p,t) = u/sqrt(29.25) #функция движения катера береговой охраны #f [generic function with 1 method]
12 f2(t) = tan(f1)*t #функция движения лодки #f2 [generic function with 1 method]
13
14 #решение задачи в случ 1
15 s11=ODEProblem(f, s1_1, tetha1) #ODEProblem with uType Float64 and tType Float64. In-place: false
16 sol1 = solve(s11, Tsitsis(), saveat=0.01) #retcode: Success
17
18 #решение задачи в случ 2
19 s12=ODEProblem(f, s1_2, tetha2) #ODEProblem with uType Float64 and tType Float64. In-place: false
20 sol2 = solve(s12, Tsitsis(), saveat=0.01) #retcode: Success
21
22
23 #точка пересечения для первого случая
24 t = 0:0.01:15 # [0.0, 0.01, 15.0]
25 solution1(t) = (s1_1)+exp(f1/sqrt(29.25)*t) #solution1 [generic function with 1 method]
26 intersection_r1 = solution1(f1*pi/4) #8.71683845939847
27
28 #встраивание графика для первого случая
29 #график движения лодки
30 plot!(fill(f1,length(t)), f2.(t)) #Plot{Plots.GRBackend()} n=3
31 #график движения катера
32 plot!(sol1.t, sol1.u,
33 proj=:polar,
34 lims=(0,13)
35 ) #Plot{Plots.GRBackend()} n=1
36
37
38 #точка пересечения для второго случая
39 solution2(t) = (s1_2)+exp(f2/sqrt(29.25)*t) #solution2 [generic function with 1 method]
40 intersection_r2 = solution2(-pi/4) #9.772286533918413
41
42 #встраивание графика для второго случая
43 #график движения лодки
44 plot!(fill(f1,length(t)), f2.(t)) #Plot{Plots.GRBackend()} n=2
45 #график движения катера
46 plot!(sol2.t, sol2.u,
47 proj=:polar,
48 lims=(0,13)
49 ) #Plot{Plots.GRBackend()} n=1
50
51
52
```

Выводы

Построили математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задачи поиска. Нарисовали графики движения для двух случаев и нашли точки пересечения, согласно методическому материалу.

Список литературы

1. Кривая погони [Электронный ресурс]. Wikimedia Foundation, Inc., 2024. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Git>.