Модель хищник-жертва

Морозов М. Е.

9 марта 2024

Российский Университет Дружбы Народов, Moscow, Russian Federation

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)

2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

Теоретическое введение

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (-ax(t) + by(t)x(t)) \\ \frac{dy}{dt} = (cy(t) - dy(t)x(t)) \end{cases}$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв.

Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Цель работы

Цель работы

1. Построить график зависимости x от y и графики функций $x(t)$, $y(t)$
2. Найти стационарное состояние системы

Постановка задачи

Постановка задачи

В лесу проживают x число волков, питающихся зайцами, число которых в этом же лесу y. Пока число зайцев достаточно велико, для прокормки всех волков, численность волков растет до тех пор, пока не наступит момент, что корма перестанет хватать на всех. Тогда волки начнут умирать, и их численность будет уменьшаться. В этом случае в какой-то момент времени численность зайцев снова начнет увеличиваться, что повлечет за собой новый рост популяции волков. Такой цикл будет повторяться, пока обе популяции будут существовать. Помимо этого, на численность стаи влияют болезни и старение. Данная модель описывается следующим уравнением:

Постановка задачи

a, d - коэффициенты смертности b, c - коэффициенты прироста популяции 1. Построить график зависимости x от y и графики функций $x(t)$, $y(t)$ 2. Найти стационарное состояние системы

Задание

Для модели «хищник-жертва»:

$$\frac{dx}{dt} = -0.54x(t) - 0.031x(t)y(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -0.62x(t) + 0.07x(t)y(t)$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x0 = 10$, $y0 = 30$. Найдите стационарное состояние системы.

Выполнение лабораторной работы

Код на Julia

Написали код на Julia:

```
using DifferentialEquations
using Plots
using OrdinaryDiffEq

#Начальные условия
p=[0.54,0.031,0.62,0.07]
x0=10
y0=30

tspan=(0,50)
```

```julia
#функция
function lotka_volt(u,p,t)
    x,y = u
    a, b, c, d = p
    dx = -a*x + b*x*y
    dy = c*y - d*x*y
    return[dx,dy]
end
```

```julia
#стационарное сост
x1 = p[3]/p[4]
y1 = p[1]/p[2]

#опред проблемы
prob1 = ODEProblem(lotka_volt,[x0,y0],tspan,p)
prob2 = ODEProblem(lotka_volt,[x1,y1],tspan,p)
```

```julia
#опред решения
sol1 = solve(prob1, Tsit5(), dtmax=0.05)
sol2 = solve(prob2, Tsit5(), dtmax=0.05)

#графики для 1 и 2 случая а также фазовые портреты.
plot(sol1, title = "Точки x0, y0")
plot(sol1, vars = (2,1), title = "Точки x0, y0")
plot(sol2, title = "Стац. точка")
scatter(sol2, vars = (2,1), title = "Точки x0, y0")
```

Записали 2 случая на языке OpenModelica

```
model lab5

parameter Real a = 0.54;
parameter Real b = 0.031;
parameter Real c = 0.62;
parameter Real d = 0.07;

Real x(start = 10);
Real y(start = 30);

equation
  der(x) = -a*x + b*x*y;
  der(y) = c*y - d*x*y;
```

Записали 2 случая на языке OpenModelica

```
model lab5

parameter Real a = 0.54;
parameter Real b = 0.031;
parameter Real c = 0.62;
parameter Real d = 0.07;

Real x(start = c/d);
Real y(start = a/b);

equation
  der(x) = -a*x + b*x*y;
  der(y) = c*y - d*x*y;
```

Получили следующие результаты для случая 1.

Результат работы программы в Julia

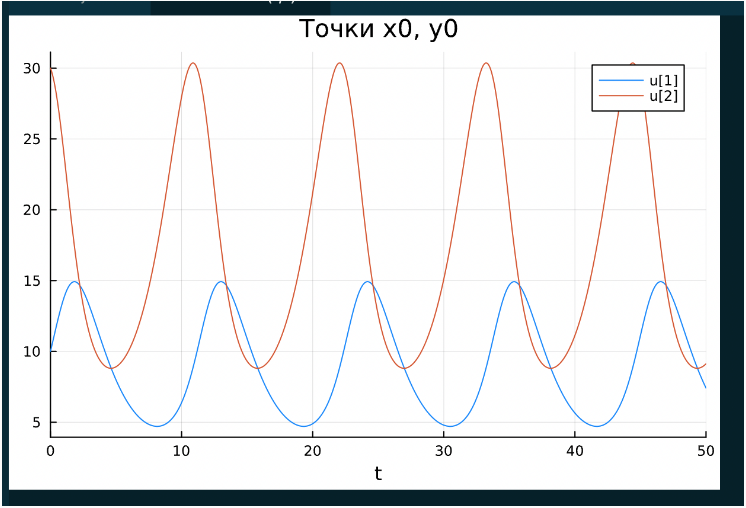

Рис. 1: График сл 1 джулия

Результат работы программы в Julia

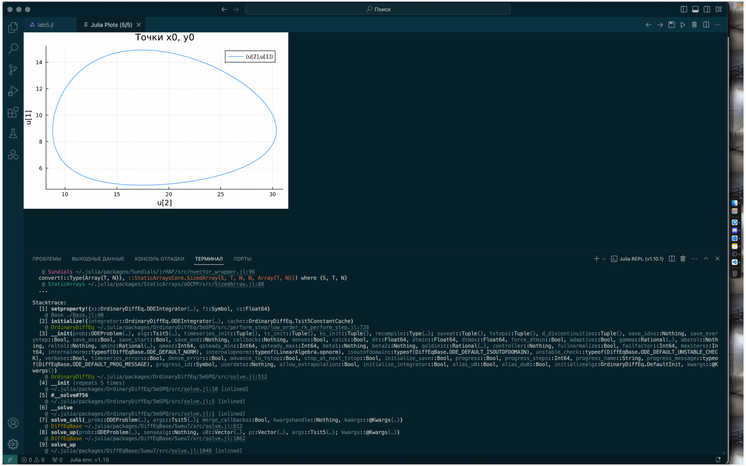

Рис. 2: Фазовый портрет сл 1 джулия

Результат работы программы в Open Modelica

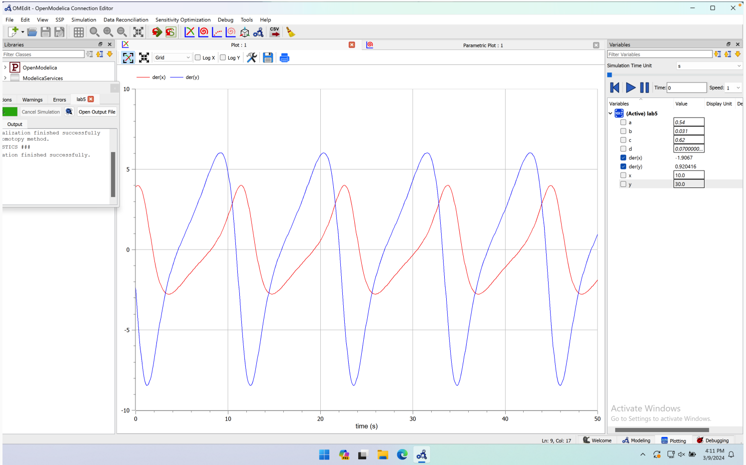

Рис. 3: График сл 1 моделика

Результат работы программы в Open Modelica

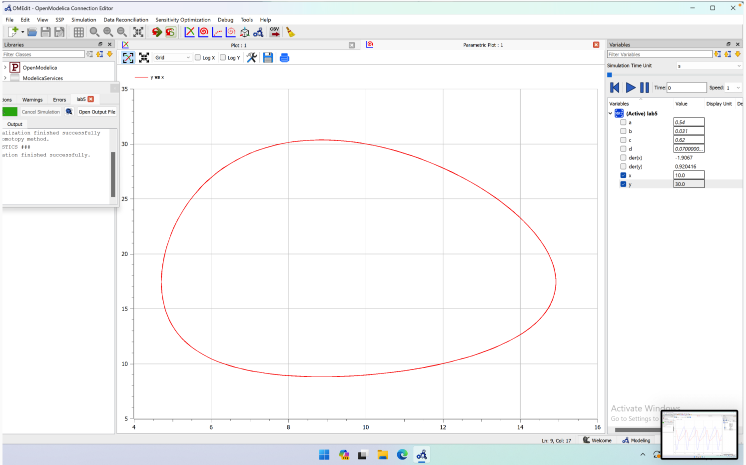

Рис. 4: Фазовый портрет сл 1 моделика

Получили следующие результаты для случая 2.

Результат работы программы в Julia

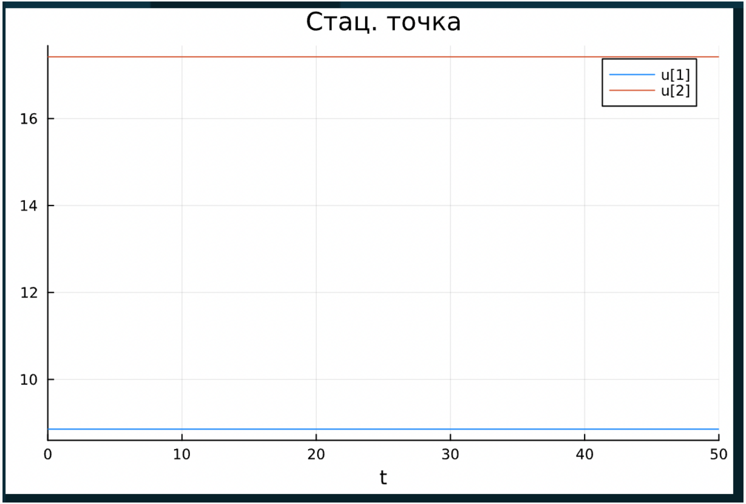

Рис. 5: График сл 2 джулия

Результат работы программы в Julia

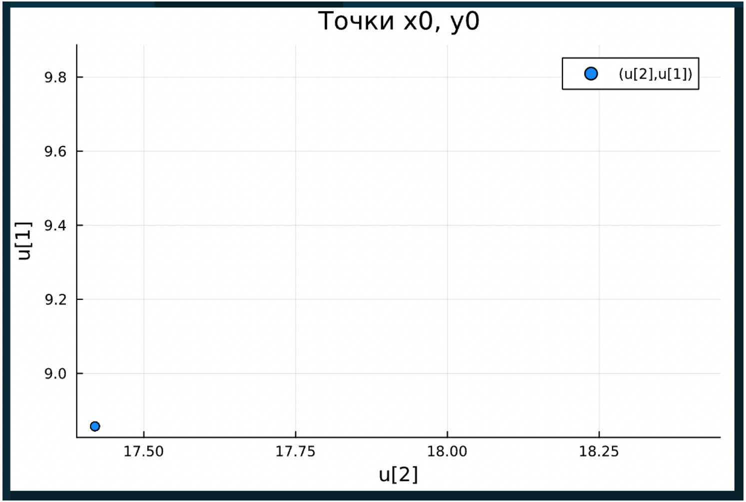

Рис. 6: Фазовый портрет сл 2 джулия

Результат работы программы в Open Modelica

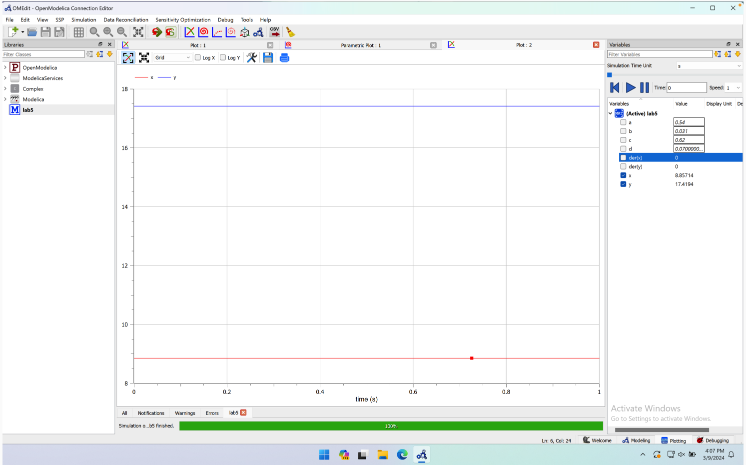

Рис. 7: График сл 2 моделика

Результат работы программы в Open Modelica

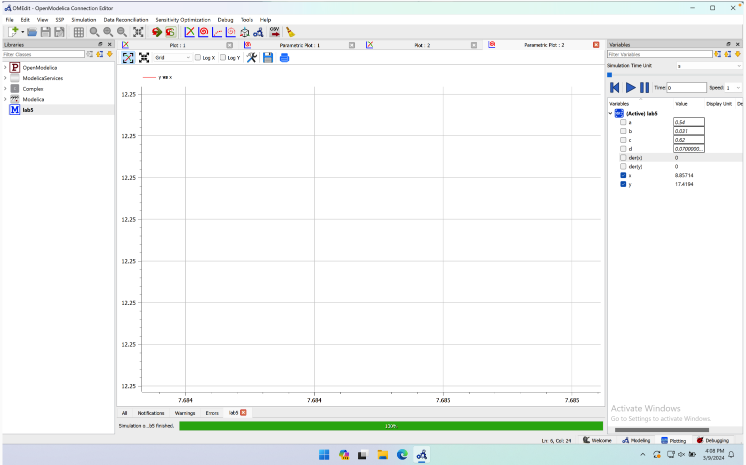

Рис. 8: Фазовый портрет сл 2 моделика

Выводы

Выводы

- Построили график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 10$, $y_0 = 30$.
- Нашли стационарное состояние системы.
- Сравнили результаты на Julia и OpenModelica.