# Лабораторная работа №2

## Задача о погоне

Морозов Михаил Евгеньевич

## Содержание



## Цель работы

Построить математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задачи поиска.

## Задание

Вариант 61

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 20,5 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 5,5 раза больше скорости браконьерской лодки. Пункты: 1. Запишите уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени). 2. Постройте траекторию движения катера и лодки для двух случаев. 3. Найдите точку пересечения траектории катера и лодки

## Теоретическое введение

Кривая погони — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», которая ставится следующим образом. Пусть точка $A$ равномерно движется по некоторой заданной кривой. Требуется найти траекторию равномерного движения точки $P$ такую, что касательная, проведённая к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки $A$.

Рассмотрим задачу о погоне катера охраны за лодкой браконьеров. Лодка плывет по прямой линии со скоростью $v$. Катер начинает преследовать лодку со скоростью $U > v$, известно во сколько раз $U$ больше $v$. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии $k$ км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Необходимо определить по какой траектории необходимо двигаться катеру, чтобы нагнать лодку.

# Выполнение лабораторной работы

## Вывод уравнения

Запишем уравнение описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

Принимем за $t_0 = 0, x_0 = 0$ - место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения,($x_{k0} = k$) - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров ($x_{k0}$) ($\theta = x_{k0} = 0$), а полярная ось $r$ проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса $\theta$ , только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки.

Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

Чтобы найти расстояние $x$ (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение.

Пусть через время $t$ катер и лодка окажутся на одном расстояниих от полюса. За это время лодка пройдет $x$ , а катер $k - x$ (или $k + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{k-x}{5.5v}$ (во втором случае $\frac{k+x}{5.5v}$).

Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда расстояние можно найти из следующего уравнения:

$$\frac{x}{v} = \frac{k-x}{5.5v} \text{ – в 1 случае}$$

$$\frac{x}{v} = \frac{k + x}{5.5v} \text{ – во 2 случае}$$

Мы нашли два значения $x_1 = \frac{2k}{13}$ и $x_2 = \frac{2k}{9}$, для двух случаев.

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки $v$.

Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: $v_r$ - радиальная скорость и - $v_\tau$ тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\frac{dr}{dt} = v$.

Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус $r$, $r\frac{d\theta}{dt}$.

$$v_\tau = \sqrt{30.25v^2 - v^2} = \sqrt{29.25}v$$

Так:

$$r\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{29.25}v$$

Решение задачи сводится к решению системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = v \\ r\dfrac{d\theta}{dt} = \sqrt{29.25}v \end{cases}$$

С начальными условиями для первого случая:

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = x_1 \end{cases}$$

Или для второго:

$$\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = x_2 \end{cases}$$

Исключая из полученной системы производную по $t$, можно перейти к следующему уравнению:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{29.25}}$$

Начальные условия остаются. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.

## Поиск точки пересечения

Найдем точку пересечения траектории катера и лодки. Для этого нам нужно аналитическое решение дифф. ур., задающего траекторию движения катера.

Мы будем предпологать, что угол, под которым двигается лодка, будет $\frac{3\pi}{4}$. Так как уравнение прямой задано через тангенс, а тангенс этого угла отрицательный, то для 1 случая подставим угол $\frac{7\pi}{4}$, а для 2 - $-\frac{\pi}{4}$

$$r = \frac{41}{13} e^{\frac{1}{\sqrt{29.25}}\theta} \text{ – для сл (1)}$$

$$r = \frac{41}{9} e^{\left(5\pi\frac{\sqrt{299}}{299} + \frac{1}{\sqrt{29.25}}\right)\theta} \text{ – для сл (2)}$$

В результате получим, что точки пересечения равны $\left(\frac{7\pi}{4}, 8.71603045939847\right)$ - при условии (1) и $\left(-\frac{\pi}{4}, 9.772206533910413\right)$ при условии (2).

## Построение траектории

Построим траекторию движения катера и лодки для двух случаев. Далее приведён код на языке Julia, решающий задачу:

```
using Plots #подключаем необходимые библеотеки
using OrdinaryDiffEq #подключаем необходимые библеотеки
s = 20.5 #раст от лодки охраны до катера
fi = 3*pi/4
tetha1 = (0.0,2*pi)
tetha2 = (-pi,pi)


sl_1 = 2s/13 #нач услов в 1 случае
sl_2 = 2s/9 #нач услов во 2 случае
f(u,p,t) = u/sqrt(29.25) #функция движения катера береговой охраны
f2(t) = tan(fi)*t #функция движения лодки

#решение задачи в случ 1
sl1=ODEProblem(f, sl_1, tetha1)
sol1 = solve(sl1, Tsit5(), saveat=0.01)

#решение задачи в случ 2
sl2=ODEProblem(f, sl_2, tetha2)
sol2 = solve(sl2, Tsit5(), saveat=0.01)


#точка пересечения для первого случая
t = 0:0.01:15
solution1(t) = (sl_1)*exp(1/sqrt(29.25)*t)
intersection_r1 = solution1(7*pi/4)
```

```
#построение графика для первого случая
#график движения катера
plot(sol1.t, sol1.u,
proj=:polar,
lims=(0,13)
)
#график движения лодки
plot!(fill(fi,length(t)), f2.(t))
```

```
#точка пересечения для второго случая
solution2(t) = (sl_2)*exp(5*pi*sqrt(299)/299)*exp(1/sqrt(29.25)*t)
intersection_r2 = solution2(-pi/4)

#построение графика для второго случая
#график движения катера
plot(sol2.t, sol2.u,
proj=:polar,
lims=(0,13)
)
#график движения лодки
plot!(fill(fi,length(t)), f2.(t))
```

В результате получим следующие графики (рис. @fig:001, @fig:002, @fig:003). И следующие точки пересения.

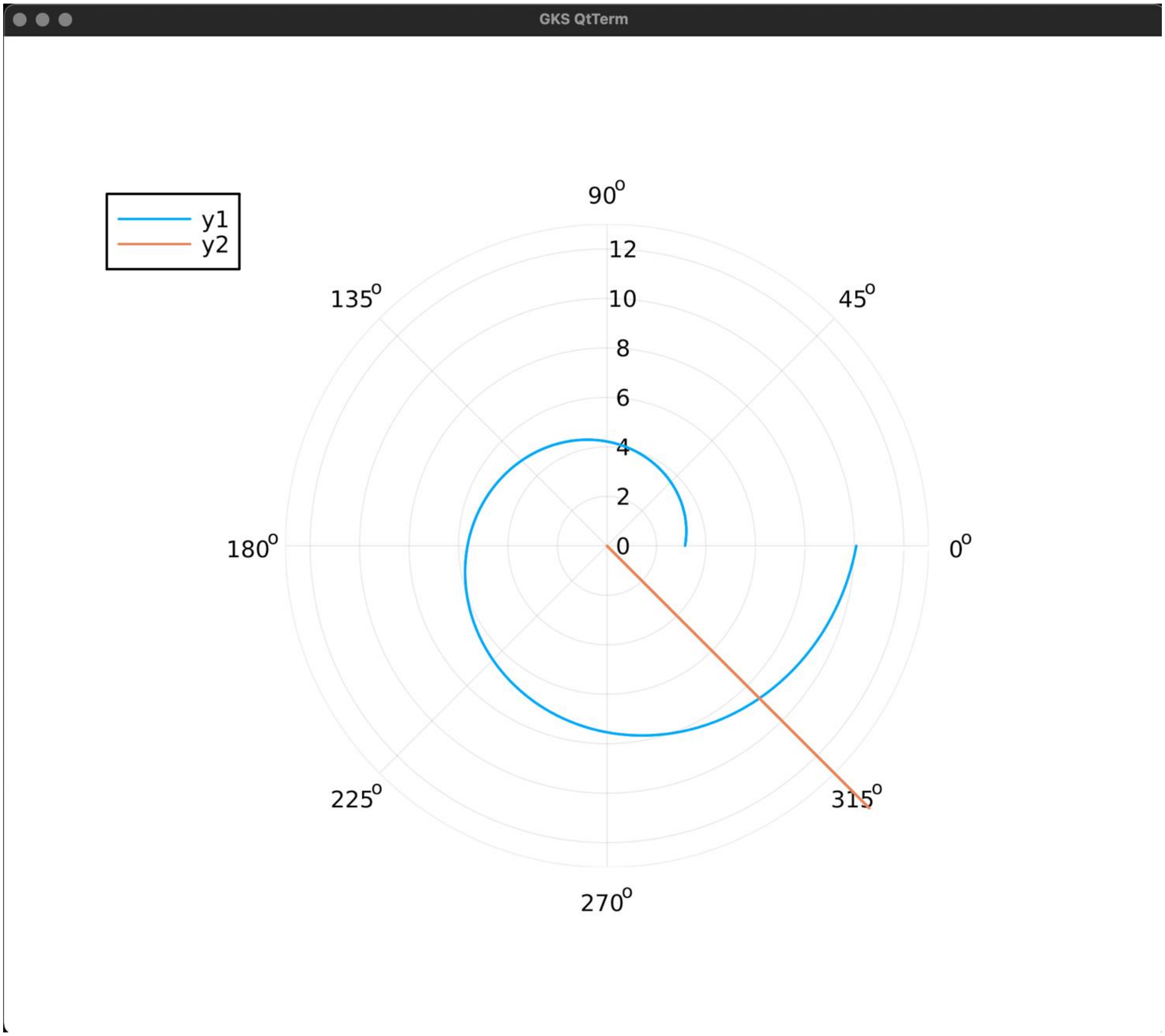



*График движения для сл. 1*

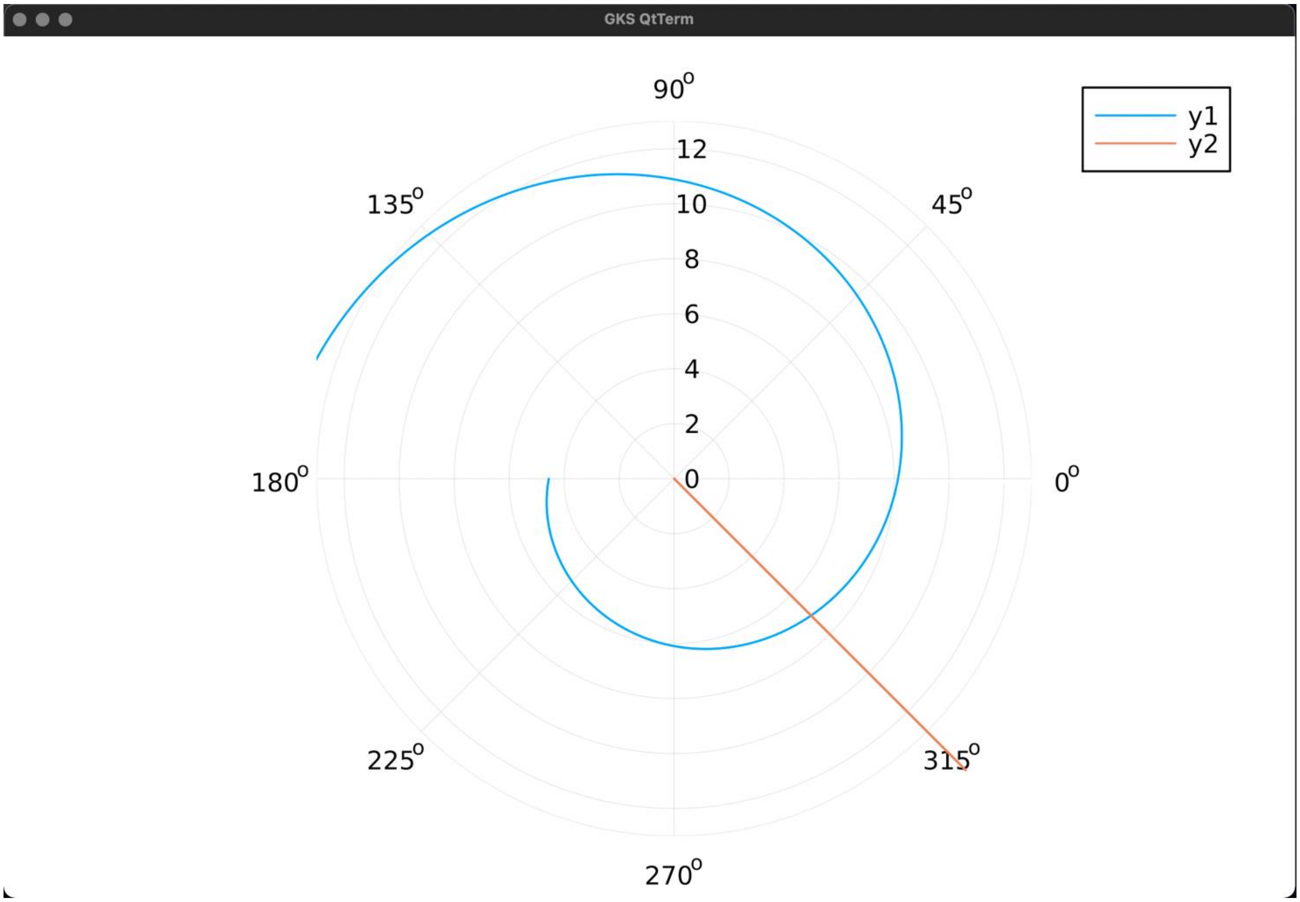
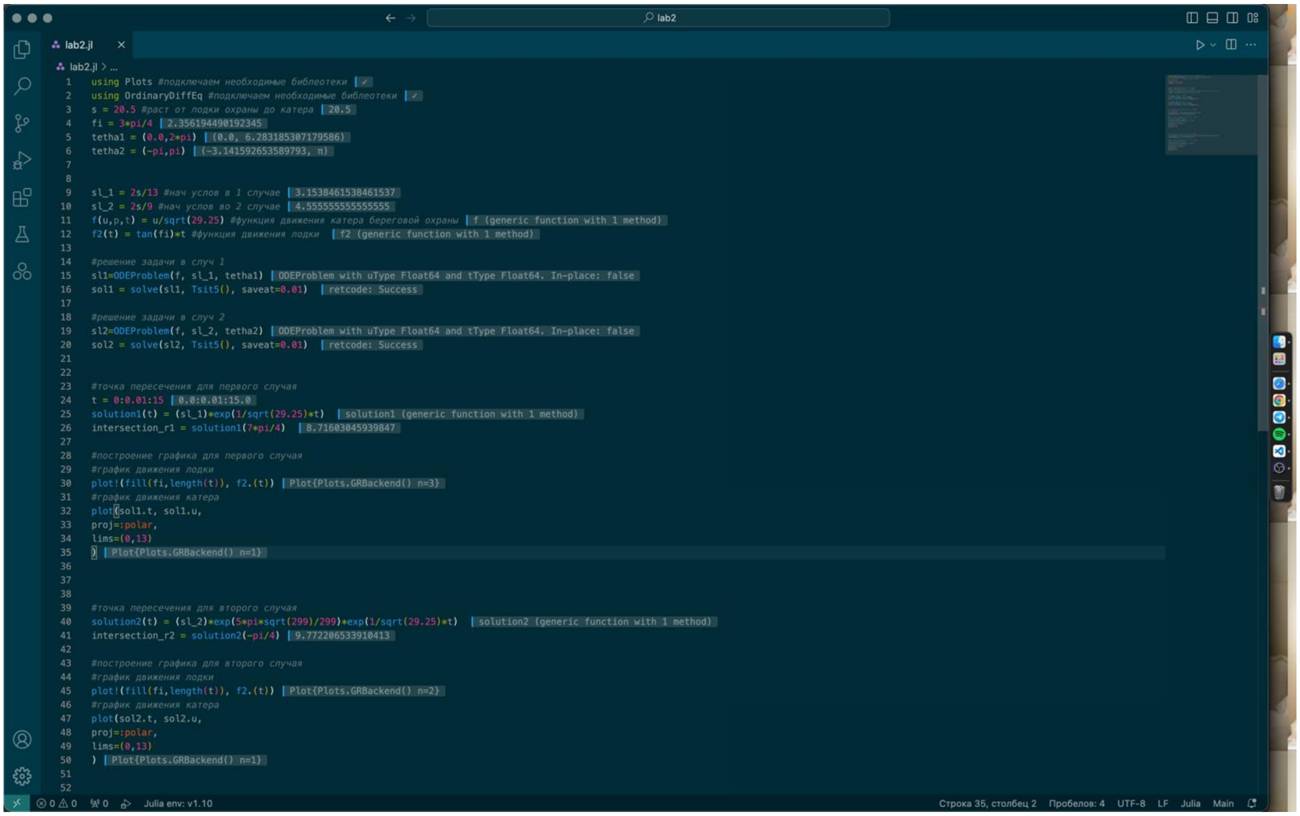



*График движения для сл. 2*

Точки пересечения равны $\left(\frac{7\pi}{4}, 8.71603045939847\right)$ - при условии (1) и $\left(-\frac{\pi}{4}, 9.772206533910413\right)$ при условии (2). # Код выполнения этой лаб работы в VSCode




# Выводы

Построили математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задачи поиска. Нарисовали графики движения для двух случаев и нашли точки пересечения , согласно методическому материалу.

## Список литературы


1. Кривая погони [Электронный ресурс]. Wikimedia Foundation, Inc., 2024. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Git. :::